Análise Numérica

Aula 4 — Método de Horner

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

5 de dezembro de 2016

Problema

Avalie $f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$ em $x = 4.71$ usando aritmética de três dígitos.

Usando arredondamento:
$x^2 = 4.71^2 = 22.1841 \Rightarrow x^2 = 22.2$

$x^3 = x^2 \cdot x = 22.2 \cdot 4.71 = 104.562 \Rightarrow x^3 = 105$

$6.1x^2 = 6.1 \cdot 22.2 = 135.42 \Rightarrow 6.1x^2 = 135$

$3.2x = 3.2 \cdot 4.71 = 15.072 \Rightarrow 3.2x = 15.1$

Problema

	x	x^2	x^3	$6.1x^2$	$3.2x$
Exato	4.71	22.1841	104.487111	135.32301	15.072
Truncamento	4.71	22.1	104.	134.	15.0
Arredondamento	4.71	22.2	105.	135.	15.1

Exato: $f(4.71) = 104.487111 - 135.32301 + 15.072 + 1.5$
$= -14.263899$

Truncamento: $f(4.71) = ((105 - 135) + 15.1) + 1.5 = -13.4$

Arredondamento: $f(4.71) = ((104 - 134) + 15.0) + 1.5 = -13.5$

Problema

Erro:

Truncamento: $\left|\dfrac{-14.263899 - (-13.4)}{-14.263899}\right| \approx 0.06$

Arredondamento: $\left|\dfrac{-14.263899 - (-13.5)}{-14.263899}\right| \approx 0.05$

Forma alternativa

$$f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5 = ((x - 6.1)x + 3.2)x + 1.5$$

Avaliando usando truncamento:

$$\begin{aligned}
f(4.71) &= ((4.71 - 6.1)4.71 + 3.2)4.71 + 1.5 \\
&= ((-1.39)4.71 + 3.2)4.71 + 1.5 \\
&= (-6.54 + 3.2)4.71 + 1.5 \\
&= (-3.34)4.71 + 1.5 \\
&= -15.7 + 1.5 \\
&= -14.2
\end{aligned}$$

Forma alternativa

Analogamente, usando arredondamento:

$$\begin{aligned}
f(4.71) &= ((4.71 - 6.1)4.71 + 3.2)4.71 + 1.5 \\
&= ((-1.39)4.71 + 3.2)4.71 + 1.5 \\
&= (-6.55 + 3.2)4.71 + 1.5 \\
&= (-3.35)4.71 + 1.5 \\
&= -15.8 + 1.5 \\
&= -14.3
\end{aligned}$$

Forma alternativa

Erro:

Truncamento: $\left|\dfrac{-14.263899-(-14.1)}{-14.263899}\right| \approx 0.0045$

Arredondamento: $\left|\dfrac{-14.263899-(-14.3)}{-14.263899}\right| \approx 0.0025$

Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema:
Se $P(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais ou complexos, então $P(x) = 0$ possui pelo menos uma raiz (possivelmente complexa).

Corolário:
Se $P(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais ou complexos, então existem constantes (possivelmente complexas e não distintas) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tais que

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

Exemplo: $3x - 9x + 6 = 3(x-2)(x-1)$

Método de Horner

Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, aplicar o método de Newton para encontrar os zeros de $P(x)$ requer sucessivas avaliações de $P(x)$ e $P'(x)$ (ambos polinômios).

O método de Horner fornece uma forma de avaliar um polinômio de grau n com apenas n multiplicações e n somas.

Método de Horner

Dados x_0 e

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

defina

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n x_0 \\ &\vdots \\ b_1 &= a_1 + b_2 x_0 \\ b_0 &= a_0 + b_1 x_0. \end{aligned}$$

Então $P(x_0) = b_0$.

Método de Horner

De fato,

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x)))$$

logo,

$$\begin{aligned}
P(x_0) &= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \cdots + x_0(a_{n-1} + a_n x_0))) \\
&= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \cdots + x_0(a_{n-1} + b_n x_0))) \\
&= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \cdots + x_0 b_{n-1})) \\
&\vdots \\
&= a_0 + x_0 b_1 \\
&= b_0
\end{aligned}$$

■

Método de Horner

Além disso, se

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1,$$

então

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0.$$

(verifique!)

Portanto,

$$P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x)$$

$$\Rightarrow P'(x_0) = Q(x_0)$$

Exemplo

Avalie $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ em $x_0 = -2$.

$$b_n = a_n \quad \text{e} \quad b_k = a_k + b_{k+1}x_0, \ \forall k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0.$$

Exemplo

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \text{Coef. } x^4 & \text{Coef. } x^3 & \text{Coef. } x^2 & \text{Coef. } x & \text{Const.} \\
x_0 = -2 & a_4 = 2 & a_3 = 0 & a_2 = -3 & a_1 = 3 & a_0 = -4 \\
 & & b_4x_0 = -4 & b_3x_0 = 8 & b_2x_0 = -10 & b_1x_0 = 14 \\
\hline
 & b_4 = 2 & b_3 = -4 & b_2 = 5 & b_1 = -7 & b_0 = 10
\end{array}$$

Além disso,

$$P(x) = (x+2)(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) + 10$$

Exemplo

Use o método de Newton para aproximar um zero de $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$.

Newton: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})}$

Tomando $x_0 = -2$, calculamos $x_1 = -2 - \dfrac{P(-2)}{P'(-2)}$

Exemplo

Calculando $P(-2)$:

$$
\begin{array}{r|rrrrrl}
x_0 = -2 & 2 & 0 & -3 & 3 & -4 & \\
 & & -4 & 8 & -10 & 14 & \\
\hline
 & 2 & -4 & 5 & -7 & 10 & = P(-2).
\end{array}
$$

Calculando $P'(-2) = Q(-2)$:

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
x_0 = -2 & 2 & -4 & 5 & -7 & \\
 & & -4 & 16 & -42 & \\
\hline
 & 2 & -8 & 21 & -49 & = Q(-2) = P'(-2)
\end{array}
$$

Portanto,

$$x_1 = -2 - \frac{10}{-49} \approx -1.796$$

Exemplo

Calculando $x_2 = -1.796 - \dfrac{P(-1.796)}{P'(-1.796)}$

-1.796	2	0	-3	3	-4	
		-3.592	6.451	-6.197	5.742	
	2	-3.592	3.451	-3.197	1.742	$= P(x_1)$
		-3.592	12.902	-29.368		
	2	-7.184	16.353	-32.565	$= Q(x_1)$	$= P'(x_1).$

Portanto,

$$x_2 = -1.796 - \frac{1.742}{-32.565} \approx -1.7425$$

Implementação

```
% entrada
% P = [-4, 3, -3, 0, 2];  % coeficientes a_0, a_1, ..., a_n de P
P = [2, 0, -3, 3, -4];  % coeficientes a_0, a_1, ..., a_n de P
x0 = -2;                % valor para avaliar P

% saida
% y = P(x0)
% z = Q(x0)

% calculando
n = length(P);  % indice do ultimo coeficiente
y = P(1);  % calcule b_n para P
z = P(1);  % calcule b_n-1 para Q
for j = 2:n-1
    y = x0 * y + P(j);
    z = x0 * z + y;
end
y = x0 * y + P(n);
disp([y, z]);
```