1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Alimentos 31/10/2022

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Para quais valores de a o sistema abaixo **não** admite solução?
$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -9 \\ 4x + y + (a^2-1)z = a+1 \end{cases}$$
2. Encontre todos os valores de a, b e c tais que A é simétrica
$$A = \begin{bmatrix} 3 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 1 & -1 & a+c \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
3. Dadas constantes reais $a \neq 0$ e $b \neq 0$, explique sem calcular o determinante por que quando $x = a$ e $x = 0$ a igualdade abaixo é válida.
$$\begin{vmatrix} x^2 & a^2 & 0 \\ x & a & 0 \\ a & a & b \end{vmatrix} = 0$$
4. Determine o valor de n para que o ângulo entre as retas seja $\frac{\pi}{6}$:
$$r_1 : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$$
5. Encontre a equação implícita do plano que contém as retas
$$r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} \frac{x-1}{3} = z - 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Avaliação P2:

1. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$:
   (a) Conjunto dos vetores da forma (b, a, b, a), $a, b \in \mathbb{R}$
   (b) Conjunto dos vetores da forma $(a, a+b, b-c, c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
2. Encontre a matriz canônica da transformação linear resultante de uma reflexão em torno do eixo x seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário.
3. Determine se o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x + 3y, x + 2y)$ é invertível e calcule sua inversa, se possível.
   Lembre que: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
4. Calcule os autovalores e os autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
5. Calcule A^{10}, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Boa Prova!

Solução P1

1. $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & a^2-1 & a+1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -17 \\ 0 & -7 & a^2+3 & a-15 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -7y + 7z = -17 \\ (a^2-4)z = a+2 \end{cases}$$

$z = \dfrac{a+2}{a^2-4}$ desde que $a^2-4 \neq 0 \Rightarrow$ o sistema tem única sol.

$a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ ou $a = 2$.

P/ $a = 2$: $(2^2-4)z = 2+2 \Rightarrow 0 = 4 \Rightarrow$ o sistema não tem sol.

P/ $a = -2$: $[(-2)^2-4]z = -2+2 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ o sistema tem inf. sol.

Portanto, o sistema não tem sol. quando $a = 2$.

2. A é simétrica se

$$\begin{cases} a - 2b + 2c = 1 & (1) \\ 2a + b + c = 0 & (2) \\ a + c = 1 & (3) \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow c = 1 - a$

Substituindo em (2): $2a + b + 1 - a = 0 \Rightarrow b = -1 - a$

substituindo em (1): $a - 2(-1-a) + 2(1-a) = 1 \Rightarrow a + 2 + 2a + 2 - 2a = 1$

$\Rightarrow a = -3$

$\Rightarrow b = -1-(-3) \Rightarrow b = 2$

$\Rightarrow c = 1-(-3) \Rightarrow c = 4$

③ Quando $x = a$:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & b \end{vmatrix} = 0,$$ pois a matriz tem duas colunas iguais.

Quando $x = 0$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & a & b \end{vmatrix} = 0,$$ pois as colunas 1 e 3 são múltiplas.

Multiplicando a coluna 1 por $\frac{b}{a}$ obtemos a coluna 3.

④ $r_1: \begin{cases} t = \frac{x-2}{4} \\ t = \frac{y}{5} \\ t = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

$r_2: (x, nx+5, 2x-2) \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 5 + ns \\ z = -2 + 2s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$

O vetor diretor de r_1 é $v_1 = (4, 5, 3)$ e o vetor diretor de r_2 é $v_2 = (1, n, 2)$.

$\|v_1\| = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ e $\|v_2\| = \sqrt{1 + n^2 + 4} = \sqrt{n^2 + 5}$

$\therefore \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 + 5n + 6}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{n^2+5}} \Rightarrow 5\sqrt{6(n^2+5)} = 2(5n+10)$

$\Rightarrow \cancel{5}\sqrt{6(n^2+5)} = 2 \cdot \cancel{5}(n+2) \Rightarrow 6(n^2+5) = 4(n+2)^2$

$\Rightarrow 3(n^2+5) = 2(n^2 + 4n + 4) \Rightarrow 3n^2 + 15 = 2n^2 + 8n + 8$

$\Rightarrow n^2 - 8n + 7 = 0 \Rightarrow n = 7$ ou $n = 1$

⑤ $r_1 : (x, 2x-3, -x+2) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

$$r_2 : \begin{cases} s = \frac{x-1}{3} \\ s = z - 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 \\ z = 1 + s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Os vetores diretores de r_1 e r_2 são $v_1 = (1, 2, -1)$ e $v_2 = (3, 0, 1)$, respectivamente. Assim, $n = v_1 \times v_2$ é normal ao plano:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -(1+3), -6) = (2, -4, -6).$$

Precisamos agora de um ponto do plano. Tomando $t = 0$ em r_1, $P = (0, -3, 2) \in r_1$, logo é também um ponto do plano.

Portanto,

$$2x - 4y - 6z = d, \quad \text{onde } d = 2 \cdot 0 - 4 \cdot (-3) - 6 \cdot 2 = 0$$

$$\therefore 2x - 4y - 6z = 0.$$

Solução P2

① a) $(b,a,b,a) = (0,a,0,a) + (b,0,b,0)$

$$= a(0,1,0,1) + b(1,0,1,0)$$

$\therefore \beta = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$ gera o subespaço.

Além disso, os vetores são LI, pois não são múltiplos, caso contrário teríamos

$$(1,0,1,0) = k(0,1,0,1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ 0 = k \\ 1 = 0 \\ 0 = k \end{cases}.$$

Portanto, β é uma base e a dim. do subespaço é 2.

b) $(a, a+b, b-c, c) = (a,a,0,0) + (0,b,b,0) + (0,0,-c,c)$

$$= a(1,1,0,0) + b(0,1,1,0) + c(0,0,-1,1)$$

$\therefore \beta = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,-1,1)\}$ gera o subespaço.

Verificando se são LI:

$$a(1,1,0,0) + b(0,1,1,0) + c(0,0,-1,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \Rightarrow a = 0 \\ a+b = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ b-c = 0 & \\ c = 0 & \Rightarrow c = 0 \end{cases} \quad \therefore \beta \text{ é LI.}$$

Portanto, β é base do subespaço e sua dim. é 3.

② Temos que:

$$[R_{\pi/3}] = \begin{bmatrix} \cos \pi/3 & -\text{sen}\, \pi/3 \\ \text{sen}\, \pi/3 & \cos \pi/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{(rotação)}$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(reflexão)}$$

$$\therefore [T] = [R_{\pi/3}][R_x] = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

③ $[T] = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det([T]) = 8 - 3 = 5 \neq 0 \quad \therefore T$ é invertível.

$$[T^{-1}] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & -3/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad \therefore T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{2x-3y}{5}, \frac{-x+4y}{5} \right).$$

④ $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda = 2$.

Logo,

p/ $\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -y = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$

$\therefore (x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}$

p/ $\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \Rightarrow z = -x \\ 0 = 0 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

$\therefore (x, 0, -x),\ x \in \mathbb{R}$.

⑤ $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-\lambda)-2=0$

$\Rightarrow -\lambda+\lambda^2-2=0 \Rightarrow \lambda=2$ ou $\lambda=-1$ $\therefore$ A é diagonalizável.

$\Rightarrow$ existe P tq $A=PDP^{-1}$.

P/ $\lambda=2$: $A-2I=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=2y \therefore (2y,y), y\in\mathbb{R}$

P/ $\lambda=-1$: $A-(-1)I=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow y=-x \therefore (x,-x), x\in\mathbb{R}$

Tomando

$$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{-2-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \text{ e } D=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$A^{10}=PD^{10}P^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2048 & 1 \\ 1024 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2049/3 & 2046/3 \\ 1023/3 & 1026/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 683 & 682 \\ 341 & 342 \end{bmatrix}$$