1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P3
Prof. Adriano Barbosa

Engenharia Civil 18/04/2023

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Encontre a solução da EDO de primeira ordem $x \ln x = y(1 + \sqrt{3 + y^2})y'$.

2. Resolva a EDO $xy'' - 6x^2 = -y'$ fazendo a substituição $u = y'$ para $x > 0$.

3. Encontre a solução da equação de Bernoulli $y' = -y + 2xy^2$.

4. Encontre a solução geral da equação $2y'' = y'$.

5. Resolva a equação diferencial $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$.

Boa Prova!

Solução P3

(1) $x \ln x = y\left(1+\sqrt{3+y^2}\right) y'$ é separável, logo

$$\underbrace{\int \left(1+\sqrt{3+y^2}\right) y \, dy}_{\text{I}} = \underbrace{\int x \ln x \, dx}_{\text{II}}$$

Resolvendo (I): tome $u = 3+y^2$, logo $du = 2y\,dy$

$$\text{I} = \int (1+\sqrt{u}) \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\int 1+\sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\left(u + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+y^2 + \frac{2}{3}(3+y^2)^{3/2}\right] + C_1$$

Resolvendo (II) por partes: $u = \ln x$, $dv = x\,dx$ $\Rightarrow$ $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$

$$\text{II} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_2$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\left[3+y^2+\frac{2}{3}(3+y^2)^{3/2}\right] + C_1 = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_2$$

$$\Rightarrow 3+y^2+\frac{2}{3}(3+y^2)^{3/2} = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

② Tomando $u = y'$:

$$xy'' + y' = 6x^2 \Rightarrow xu' + u = 6x^2 \overset{(\div x)}{\Rightarrow} u' + \frac{1}{x}u = 6x \quad (\text{linear})$$

Fator integrante:

$$e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\therefore \ x\left(u' + \frac{1}{x}u\right) = x \cdot 6x \Rightarrow xu' + u = 6x^2$$

$$\Rightarrow (x \cdot u)' = 6x^2 \Rightarrow \int (x \cdot u)' dx = \int 6x^2 dx$$

$$\Rightarrow xu = 2x^3 + C \Rightarrow u = 2x^2 + \frac{C}{x}$$

Portanto,

$$y' = 2x^2 + \frac{C}{x} \Rightarrow y = \int 2x^2 + \frac{C}{x} dx$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x^3 + c \ln x + k \ , \text{ com } c \text{ e } k \text{ constantes.}$$

③ Tomando $u = y^{1-2} = y^{-1}$, temos:

$$y = u^{-1} \Rightarrow y^2 = u^{-2} \quad e \quad y' = -u^{-2} \cdot u'$$

$$\therefore \ y' = -y + 2xy^2 \Rightarrow -u^{-2}u' + u^{-1} = 2xu^{-2}$$

$$\overset{(\div -u^{-2})}{\Rightarrow} u' - u = -2x \quad (\text{linear})$$

Fator integrante:

$$e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

$$\therefore\ e^{-x}(u'-u) = e^{-x}(-2x) \Rightarrow e^{-x}u' - e^{-x}u = -2xe^{-x}$$

$$\Rightarrow (e^{-x}\cdot u)' = -2xe^{-x} \Rightarrow e^{-x}u + c_1 = -2\int xe^{-x}dx$$

Integrando por partes:

$$\begin{matrix} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{matrix}$$

$$\therefore \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_2$$

Assim,

$$e^{-x}u + c_1 = -2(-xe^{-x} - e^{-x} + c_2) \Rightarrow e^{-x}u = 2xe^{-x} + 2e^{-x} + c$$

$$\Rightarrow u = 2x + 2 + ce^{x}$$

Portanto,

$$y = \frac{1}{2x+2+ce^{x}}\,.$$

④ $2y'' - y' = 0$

Eq. característica:

$$2r^2 - r = 0 \Rightarrow r(2r-1) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$y = c_1 e^{0 \cdot r} + c_2 e^{\frac{1}{2}r} = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{2}r}.$$

⑤ $2y e^{y^2} y' = 2x + 3\sqrt{x}$ (separável)

$$\Rightarrow \underbrace{\int 2y e^{y^2} dy}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int 2x + 3\sqrt{x}\, dx}_{\mathrm{II}}$$

Resolvendo I: tome $u = y^2$, logo $du = 2y\,dy$

$$\mathrm{I} = \int e^u du = e^u + c_1 = e^{y^2} + c_1$$

Resolvendo II:

$$\mathrm{II} = \int 2x + 3\sqrt{x}\, dx = x^2 + 2x^{3/2} + c_2$$

Assim,

$$e^{y^2} + c_1 = x^2 + 2x^{3/2} + c_2 \Rightarrow e^{y^2} = x^2 + 2x^{3/2} + c$$

$$\Rightarrow y^2 = \ln(x^2 + 2x^{3/2} + c) \Rightarrow y = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 2x^{3/2} + c)}$$