1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Alimentos 17/05/2018

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o domínio das funções e calcule os limites abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Sabendo que $2x-1 \leq f(x) \leq x^2$ para $0 < x < 3$, calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

3. Dados $f(x) = x^3 - 2x - \cos x$ e $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

   (a) Determine se a função f é contínua no intervalo I.

   (b) Mostre que a função f possui uma raiz no intervalo I.

4. Calcule a derivada das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{5x^3 - 3\operatorname{sen} x}{x}$

   (b) $g(x) = \operatorname{sen}(x \ln x)$

5. Dada a equação implícita $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

Boa Prova!

① a) $\sqrt{9+x}$ está definido se $9+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -9$. Assim, o domínio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$ é o conjunto $D = [-9,0) \cup (0,\infty)$. Além disso,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x} \cdot \frac{\sqrt{9+x} + 3}{\sqrt{9+x} + 3} = \lim_{x\to 0} \frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} = \frac{1}{6}$$

b) A função sen(x) está def. para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x^2)}{x}$ tem domínio $D = \mathbb{R} - \{0\}$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} \cdot x \right] = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} x$$

$$= \lim_{x^2\to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} x = 1 \cdot 0 = 0,$$ pois $x \to 0 \Rightarrow x^2 \to 0$.

② Temos que:

$$\lim_{x\to 1} (2x-1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1} x^2 = 1$$

logo, pelo Teo. do confronto, $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

③ a) $F(x) = x^3 - 2x$ é polinomial, logo é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.
$G(x) = \cos x$ também é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Como a soma de funções contínua é contínua, temos que $f(x) = x^3 - 2x - \cos x$ é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em I.

b) Observe que:

$$f(0) = 0^3 - 2\cdot 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 2\cdot\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{8} - \pi \approx 0{,}73 > 0$$

Pelo Teo. do valor ~~médio~~ intermediário, existe $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

④ a) $f(x) = \dfrac{5x^3 - 3\,\mathrm{sen}\,x}{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(15x^2 - 3\cos x)\,x - (5x^3 - 3\,\mathrm{sen}\,x)}{x^2} = \frac{15x^3 - 3x\cos x - 5x^3 + 3\,\mathrm{sen}\,x}{x^2}$$

$$= \frac{10x^3 - 3x\cos x + 3\,\mathrm{sen}\,x}{x^2}$$

b) $g(x) = \mathrm{sen}(x \ln x)$

$$\Rightarrow g'(x) = \cos x(x\ln x)\cdot\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = \cos(x\ln x)(\ln x + 1).$$

⑤ ~~⑥~~ $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^4(x+y)\right] = \frac{d}{dx}\left[y^2(3x-y)\right]$$

$$\Rightarrow 4x^3(x+y) + x^4\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2y\frac{dy}{dx}(3x-y) + y^2\left(3 - \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow 4x^3(x+y) + x^4 + x^4\frac{dy}{dx} = 2y(3x-y)\frac{dy}{dx} + 3y^2 - y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x^4\frac{dy}{dx} - 2y(3x-y)\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 3y^2 - 4x^3(x+y) - x^4$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 4x^3(x+y) - x^4}{x^4 - 2y(3x-y) + y^2} = \frac{3y^2 - 4x^4 - 4x^3y - x^4}{x^4 - 6xy + 2y^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 - 6xy + 3y^2}$$