1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Alimentos 24/10/2022

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine uma base para os subespaços de $\mathbb{R}^3$ abaixo.

   (a) o plano $z = y - x$.

   (b) a reta $x = 2t$, $y = -t$, $z = -t$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y) = (y - x, x - y, y - 2x, 2x - y)$.

   (a) Determine a matriz canônica de T.

   (b) Determine o núcleo de T. T é injetiva?

   (c) Determine a imagem de T. T é sobrejetiva?

3. Encontre a transformação linear resultante da aplicação de uma reflexão em torno do eixo x, seguida de uma projeção ortogonal no eixo y, seguida de uma escala de razão $\alpha = 2$.

4. Calcule os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + z, 2y, y + z)$.

5. Determine se a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

Boa Prova!

Solução P2

① a) Os pontos do plano têm coordenadas

$(x, y, y-x)$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\therefore (x, y, y-x) = (x, 0, -x) + (0, y, y) = x(1,0,-1) + y(0,1,1)$

Assim, o conjunto $\{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ gera o plano. Além disso, como os vetores não são múltiplos, o conjunto é LI e portanto uma base do plano.

b) Os pontos da reta são da forma $(2t, -t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$(2t, -t, -t) = t(2,-1,-1)$

Assim, o conjunto $\{(2,-1,-1)\}$ gera a reta e é LI por ter apenas um elemento. Portanto, uma base da reta.

② a) $$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $T(x,y) = (0,0,0,0) \Rightarrow (-x+y, x-y, -2x+y, 2x-y) = (0,0)$

$$\begin{cases} -x+y = 0 \\ x-y = 0 \\ -2x+y = 0 \\ 2x-y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x \\ y = 2x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 2x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Logo, $N(T) = \{(0,0)\}$. Portanto, T é injetiva.

c) $T(x,y) = (y-x,\ x-y,\ y-2x,\ 2x-y)$

$$(y-x,\ x-y,\ y-2x,\ 2x-y) = (-x, x, -2x, 2x) + (y, -y, y, -y)$$

$$= x(-1,1,-2,2) + y(1,-1,1,-1)$$

$\therefore$ Im(T) é o subespaço gerado por $\beta = \{(-1,1,-2,2), (1,-1,1,-1)\}$.

Além disso, os vetores de β não são múltiplos, pois

$$(-1,1,-2,2) = k(1,-1,1,-1) \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ -k=1 \\ k=-2 \\ -k=2 \end{cases}$$

Dessa forma, β é uma base de Im(T) $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e, portanto, T não é sobrejetiva.

③ Temos que:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [P_y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [S_2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(reflex. em x) (proj. em y) (escala $\alpha = 2$)

$$\therefore [T] = [S_2]\cdot[P_y]\cdot[R_x] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4 $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(T-\lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2.$$

Calculando os autovetores:

$$\lambda = 1: \quad T - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\therefore (x,0,0),\ x \in \mathbb{R}$

$$\lambda = 2: \quad T - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \Rightarrow z = x \\ 0 = 0 \\ y - z = 0 \Rightarrow z = y \end{cases} \Rightarrow y = x$$

$\therefore (x, x, x),\ x \in \mathbb{R}$.

5 $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Logo, A tem dois autovalores distintos. Assim, é possível obter uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores (cada um assoc. a um dos autovalores). Portanto, A é diagonalizável.