UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Civil 24/10/2022

Nota	

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.
Escolha cinco exercícios e anote suas escolhas no quadro de notas acima.

1. Sejam $u = (1, 2, -2)$ e $v = (0, 1, -1)$. Determine:

   (a) $u - 2v$.

   (b) $\|u - 2v\|$.

   (c) Se u e v são ortogonais.

   (d) Uma direção ortogonal a u e v.

2. Encontre a reta que passa pelo ponto médio do segmento de extremos $A = (2, 1, -1)$ e $B = (0, 1, 0)$ e que seja perpendicular a ele.

3. Determine a interseção entre os planos $\pi_1 : x + y + z = 6$ e $\pi_2 : y = 3 - x$.

4. Encontre as coordenadas de w em relação as bases abaixo:

   (a) $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$, $w = (1, 2)$.

   (b) $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 0, 2), (0, -1, 1)\}$, $w = (1, 2, 3)$.

5. Determine uma base para os subespaços de $\mathbb{R}^3$ abaixo.

   (a) o plano $x - y + z = 0$.

   (b) a reta $x = t$, $y = -t$, $z = 0$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (y - x, x + y, 3y - x)$.

   (a) Determine a matriz canônica de T.

   (b) Determine o núcleo de T. T é injetiva?

   (c) Determine a imagem de T. T é sobrejetiva?

7. Encontre a transformação linear resultante da aplicação de uma reflexão em torno do eixo y, seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, seguida de uma projeção ortogonal no eixo y.

8. Calcule os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, -y)$.

Boa Prova!

Solução P2

① $u=(1,2,-2)\ ,\ v=(0,1,-1)$.

a) $u-2v=(1,2,-2)-2(0,1,-1)=(1,2,-2)+(0,-2,2)=(1,0,0)$.

b) $\|u-2v\|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$

c) $\langle u,v\rangle = 1\cdot 0+2\cdot 1+(-2)\cdot(-1)=4\neq 0 \Rightarrow$ u e v não são ortog.

d) $w=u\times v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-2+2,-(-1-0),1-0)=(0,1,1)$

w é ortogonal a u e v.

② $A=(2,1,-1)\ ,\ B=(0,1,0) \Rightarrow M=\frac{A+B}{2}=\frac{1}{2}(2,2,-1)=(1,1,-1/2)$.

O segmento $\overline{AB}$ tem direção do vetor $\vec{AB}=(-2,0,1)$. Logo, uma direção $v=(a,b,c)$ perpendicular a ele é tal que

$\langle\vec{AB},v\rangle=0 \Rightarrow -2a+c=0 \Rightarrow c=2a\ ,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Tomando $a=b=1$, temos $v=(1,1,2)$. Portanto, uma reta que passa por M e é perpendicular a $\overline{AB}$ tem eq.

$$P=M+tv=(1,1,-\tfrac{1}{2})+t(1,1,2)$$

③ $\pi_1: x+y+z=6$, $\pi_2: y=3-x$

Queremos os pontos comuns a π_1 e π_2:

$$\begin{cases} x+y+z=6 & ① \\ y=3-x & ② \end{cases}$$

substituindo ② em ①:

$$x+3-x+z=6 \Rightarrow z=3$$

$\therefore (x, 3-x, 3)$, $x \in \mathbb{R}$, são as sol. do sistema.

Assim, a interseção entre os planos é a reta que passa pelo ponto $(0,3,3)$ e tem direção $(1,-1,0)$.

④ a) $(1,2) = a(1,0) + b(1,1) \Rightarrow (1,2) = (a+b, b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a=-1.$$

As coord. de w na base β são $(-1,2)$.

b) $(1,2,3) = a(1,0,0) + b(1,0,2) + c(0,-1,1)$

$$= (a+b, -c, 2b+c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ -c = 2 \\ 2b+c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ c = -2 \\ b = 5/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3/2 \\ c = -2 \\ b = 5/2 \end{cases}$$

As coord. de w na base β são $\left(-\frac{3}{2}, -2, \frac{5}{2}\right)$.

item anulado!

⑤ a) $x - y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x + y$.

Os pontos do plano são da forma $(x, y, -x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x, y, -x+y) = (x, 0, -x) + (0, y, y) = x(1,0,-1) + y(0,1,1)$$

$\therefore \beta = \{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ gera o plano.

Além disso, os vetores de β não são múltiplos $\Rightarrow \beta$ é LI.

Portanto, β é uma base do plano.

b) Os pontos da reta são da forma $(t, -t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$(t, -t, 0) = t(1,-1,0)$$

$\therefore \beta = \{(1,-1,0)\}$ gera a reta.

Além disso, β é LI, pois só tem um elemento.

Portanto, β é uma base da reta.

⑥ $T(x,y) = (y-x, x+y, 3y-x)$

a) $$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $T(x,y) = (0,0,0) \Rightarrow (y-x, x+y, 3y-x) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} -x + y = 0 & ① \\ x + y = 0 & ② \\ -x + 3y = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow y = x \\ ② \Rightarrow y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0.$$

$\therefore N(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow T$ é injetiva.

c) $(y-x,\ x+y,\ 3y-x) = (-x, x, -x) + (y, y, 3y)$

$$= x(-1,1,-1) + y(1,1,3)$$

$\therefore\ \beta = \{(-1,1,1), (1,1,3)\}$ gera $Im(T)$.

Pelo Teo. do Núcleo e da Imagem, $2 = 0 + \dim(Im(T))$

$\Rightarrow \dim(Im(T)) = 2$. Assim, β é base de $Im(T)$.

Portanto, T não é sobrejetiva.

⑦ Temos que:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R_{\pi/2}] = \begin{bmatrix} \cos\pi/2 & -\operatorname{sen}\pi/2 \\ \operatorname{sen}\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [P_y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(reflex. em y) (rot. $\pi/2$) (proj. em y)

$$\therefore\ [T] = [P_y][R_{\pi/2}][R_y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

⑧ $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(T-\lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Calculando os autovetores:

$\lambda = 1$: $T - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$

$\therefore (x, 0), x \in \mathbb{R}$.

$\lambda = -1$: $T - (-1)I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2x$

$\therefore (x, -2x), x \in \mathbb{R}$.