1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral III — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Engenharia de Alimentos 12/06/2019

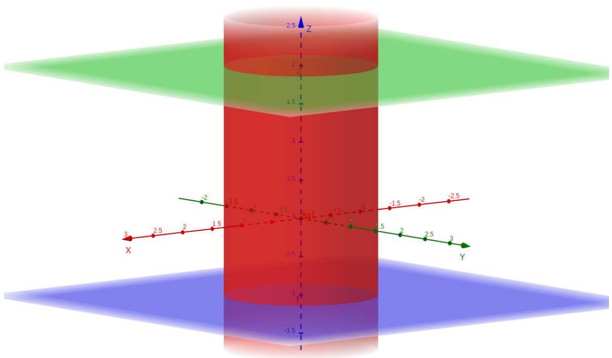
Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule a integral dupla $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2 \; dy \; dx$.

2. Calcule a integral $\iint_R \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \; dA$, onde R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3. (Dica: use coordenadas polares)

3. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} \; dV$, onde E é a região delimitada pelo cilíndro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.



4. Calcule o trabalho realizado pelo campo $F(x, y) = (xy^2, x^2y)$ ao mover uma partícula de $(0, 0)$ a $(2, 1)$.

5. Calcule a integral de linha $\int_C xy \; dx + x^2y^3 \; dy$, onde C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.

Boa Prova!

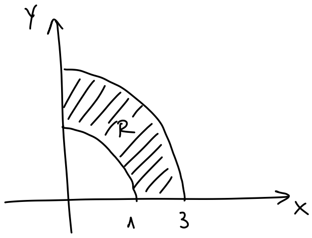
① $\int_0^2\int_{x^2}^{2x} x^2+y^2\,dy\,dx = \int_0^2 x^2y + \frac{y^3}{3}\Big|_{y=x^2}^{y=2x} dx$

$= \int_0^2 x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2(x^2) - \frac{(x^2)^3}{3}\,dx = \int_0^2 2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\,dx$

$= \int_0^2 \frac{6x^3+8x^3-3x^4-x^6}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^2 -x^6-3x^4+14x^3\,dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{x^7}{7}-\frac{3}{5}x^5+\frac{14}{4}x^4\Big|_0^2\right)$

$= \frac{1}{3}\left(-\frac{2^7}{7}-\frac{3}{5}\cdot 2^5+\frac{14}{4}\cdot 2^4\right) = \frac{216}{35}$

②



Em coordenadas polares:

$R = \{(r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$\therefore \iint_R \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^3 \operatorname{sen}(r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_1^3 r\operatorname{sen} r^2\,dr \overset{(u=r^2)}{=} \left(\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\int_1^9 \operatorname{sen} u\,du\right) = \left(\frac{\pi}{2}-0\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\cos\theta\Big|_1^9\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left(-\cos 9 + \cos 1\right)$

③ Em coordenadas cilíndricas:

$x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$

$\therefore E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -1 \leq z \leq 2\}$

Logo,

$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_{-1}^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta\,dz = \int_{-1}^2 dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r^2\,dr$

$= \left(z\Big|_{-1}^2\right)\cdot\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right) = (2+1)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3} = 2\pi.$

④ O campo F é conservativo. De fato, se f é tal que $\nabla f = F$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy^2 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 y & (2) \end{cases}$$

De (1):

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int xy^2\,dx \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

Substituindo em (2):

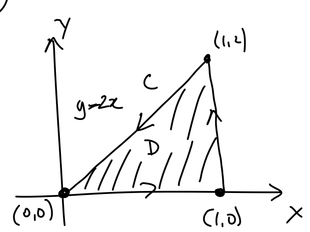
$$x^2y \overset{(2)}{=} \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = K$$

Portanto, tomando $K = 0$, $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2}$ é uma função potencial de F.

Pelo Teo. Fund. das Int. de Linha:

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(2,1) - f(0,0) = 2$$

⑤



A curva C é fechada, simples, orient. positivamente e suave por partes.

$F(x,y) = (xy, x^2y^3) \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^3$ e $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x$ são contínuas.

Pelo Teo. de Green:

$$\int_C xy\,dx + x^2y^3\,dy = \iint_D 2xy^3 - x\,dA = \int_0^1 \int_0^{2x} 2xy^3 - x\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{xy^4}{2} - xy \Big|_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 \frac{x(2x)^4}{2} - x(2x)\,dx = \int_0^1 8x^5 - 2x^2\,dx$$

$$= \frac{8}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{8}{6} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$