Análise Numérica

Aula 2 — Método da bisseção

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

21 de novembro de 2016

Jogo: adinhe o número

Adivinhar um número entre 1 e 100 onde as possíveis respostas são "correto", "chute mais alto" e "chute mais baixo".

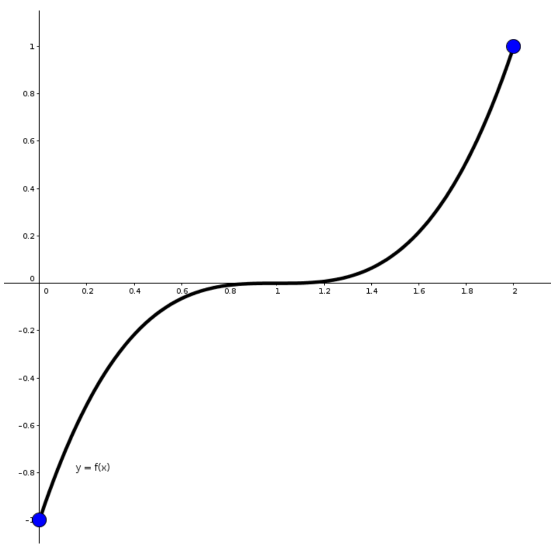
É possível resolver com no máximo 7 chutes.

Solução de equações

Como encontrar a solução da equação $e^x - 3x^2 = 0$?

Teorema do Valor Intermediário

Suponha f uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$ com $f(a)$ e $f(b)$ tendo sinais opostos. Então existe um número $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

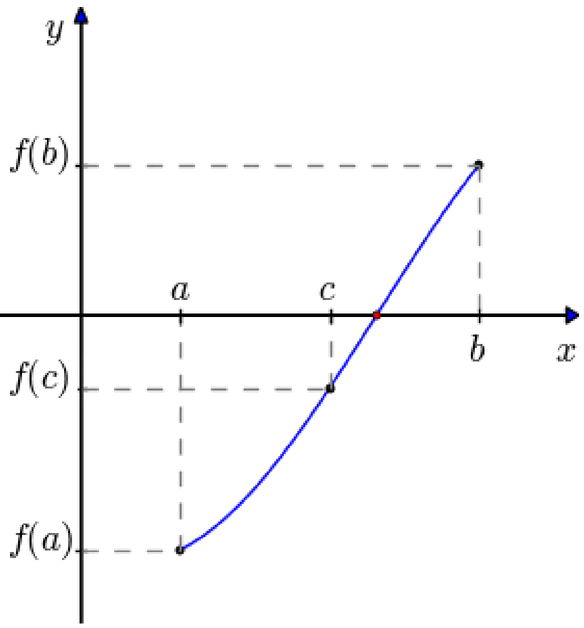


Método da biseção

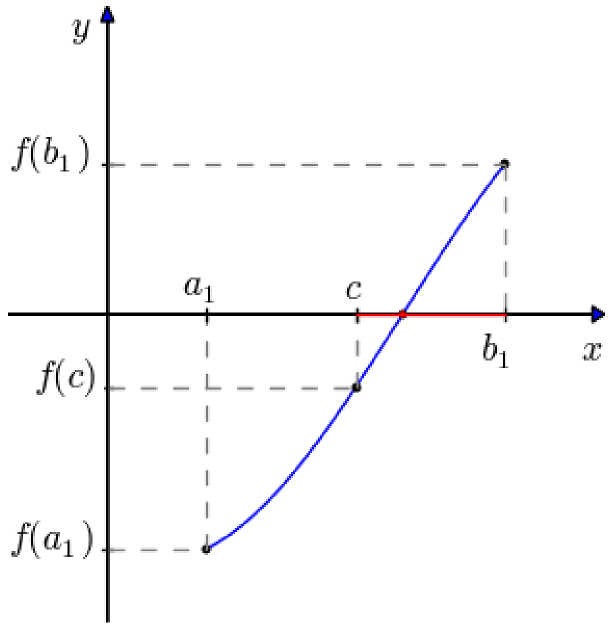
Assumindo uma única raiz no intervalo $[a, b]$:

- Calcule c, ponto médio do intervalo
- Tome o intervalo onde f tem sinal diferente nos extremos, $[a, c]$ ou $[c, b]$
- Repita o procedimento para o intervalo escolhido

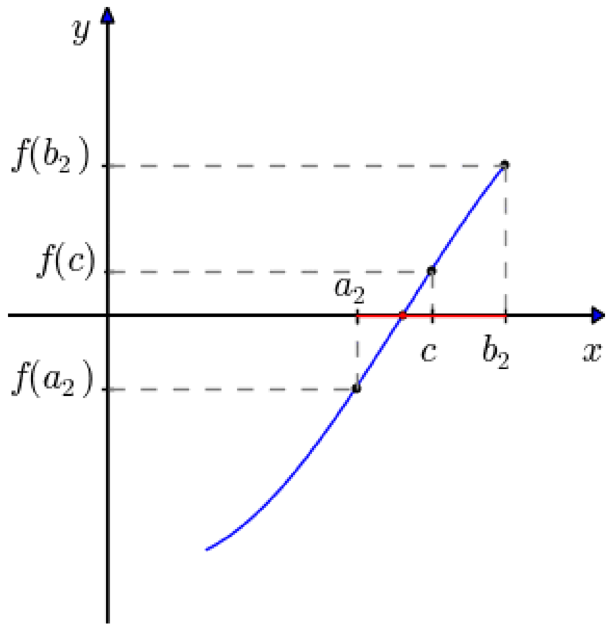
Método da biseção



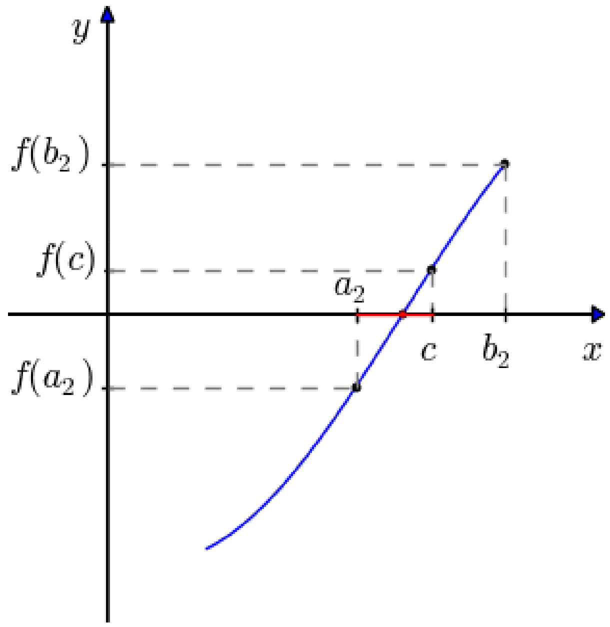
Método da biseção



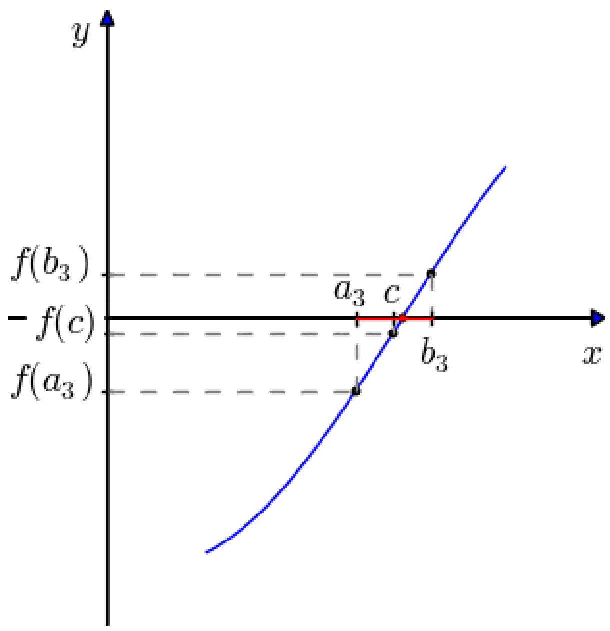
Método da biseção



Método da biseção



Método da biseção



Implementação

```
% entrada
f = @(x) exp(x) - 3 * x^2;  % funcao
a = 3;        % inicio do intervalo
b = 4;        % fim do intervalo
tol = 1e-5;   % tolerancia
N = 1e5;      % maximo de iteracoes

% inicializacao
saida = 1;

% calculo
i = 1;
fa = f(a);

while (i <= N)
    p = (a + b) / 2;
    fp = f(p);
    if ( (fp == 0) || ((b-a)/2 < tol) )
        disp(p);
        saida = 0;
        break;
    end
    if (fa * fp > 0)
        a = p;
        fa = fp;
    else
        b = p;
    end
    i = i + 1;
end

if (saida == 1)
    disp('Numero maximo de iteracoes alcancado.');
end
```

Critérios de parada

Outros critérios de parada podem ser aplicados:

- $|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$
- $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \ \ p_n \neq 0$
- $|f(p_n)| < \varepsilon$

Exemplo

Mostre que $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ possui uma raiz no intervalo $[1, 2]$. Use o método da Bisseção para encontrar uma aproximação com precisão de pelo menos 10^{-4}.

Como $f(1) = -5$ e $f(2) = 14 \overset{TVI}{\Rightarrow}$ existe $p \in (1, 2)$ tal que $f(p) = 0$

Exemplo

$f(1) = -5$ e $f(2) = 14$

$[1, 2]$	$p_1 = 1.5$	$f(1.5) = 2.375 > 0$
$[1, 1.5]$	$p_2 = 1.25$	$f(1.25) = -1.796875 < 0$
$[1.25, 1.5]$	$p_3 = 1.375$	$f(1.375) = 0.162109375 > 0$
$[1.25, 1.375]$	$p_4 = 1.3125$	$f(1.3125) = -0.848388671875 < 0$

Exemplo

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	−1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	−0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	−0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	−0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	−0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	−0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	−0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	−0.00396
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	−0.00194

Exemplo

Erro: como $|a_{14}| < |p|$

$$|p - p_{13}| < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \approx 8.9 \times 10^{-05}$$

Note que

$$|f(p_9)| < |f(p_{13})|$$

Estimando o erro

Teorema:
Se $f \in C[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$, o método da Bisseção gera uma sequência $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se aproxima de um zero p de f com

$$|p_n - p| \leqslant \frac{b-a}{2^n}, \text{ quando } n \geqslant 1$$

Exemplos

jogo:
$|p_n - p| \leqslant \dfrac{100-1}{2^n} = \dfrac{99}{2^n} < 1 \Rightarrow 99 < 2^n$

$\Rightarrow n > \log_2(99) \approx 6.629$

eq. 2° grau: *erro* $< 10^{-3}$
$|p_n - p| \leqslant \dfrac{2-1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} < 10^{-3} \Rightarrow 10^3 < 2^n$

$\Rightarrow n > \log_2(10^3) \approx 9.96$

Exemplos

O Teorema fornece um limitante para o número de iterações, mas em muitos casos esse limitante é maior do que o número de iterações realmente necessário.

A raiz da equação do 2° grau até a nona casa decimal é $p = 1.365230013$ e

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| \approx 4.36 \times 10^{-6}$$

Função sinal

A função

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

pode ser usada para determinar o intervalo que contém a raiz.

Testamos com

$$\text{sign}(f(a_n))\,\text{sign}(f(b_n)) < 0$$

ao invés de $f(a_n)f(b_n) < 0$, para evitar *overflow* ou *underflow*.