1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Fundamentos de Matemática III — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 16/11/2017

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

   (a) $(x + yi)^2 = 2i$

   (b) $(3 - i)(x + yi) = 20$

2. Calcule $z \in \mathbb{C}$ tal que $z\,\overline{z} + z - \overline{z} = 13 + 6i$.

3. Determine, se possível, o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\sqrt{3} + i)^n$ seja um número real.

4. Resolva a equação binômia $x^3 + 1 = 0$.

5. Determine o quociente e o resto da divisão de $f = x^3 + x^2 + x + 1$ por $g = 2x^2 + 3$.

Boa Prova!

① a) $(x+yi)^2 = (x+yi)(x+yi) = x^2 + xyi + xyi - y^2 = (x^2-y^2) + (2xy)i$

Logo,

$$(x+yi)^2 = 2i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & \text{I} \\ 2xy = 2 & \text{II} \end{cases}$$

Se $y=0$, em II temos $2 \cdot x \cdot 0 = 2$. Absurdo! Assim, $y \neq 0$.

Supondo $y \neq 0$:

$$\text{II} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\text{I} \Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)^2 - y^2 = 0 \Rightarrow \frac{1-y^4}{y^2} = 0 \Rightarrow y^4 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = -1.$$

Portanto, as soluções são $x=1$ e $y=1$ ou $x=-1$ e $y=-1$.

b) $(3-i)(x+yi) = 3x + 3yi - xi + y = (3x+y) + (-x+3y)i$

Logo,

$$(3-i)(x+yi) = 20 \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 20 & \text{I} \\ -x + 3y = 0 \Rightarrow x = 3y & \text{II} \end{cases}$$

Substituindo II em I:

$$3(3y) + y = 20 \Rightarrow 10y = 20 \Rightarrow y = 2$$

$\therefore x = 3 \cdot 2 = 6$.

Portanto, $x=6$ e $y=2$.

② Se $z = a+bi$, sabemos que:

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \quad \text{e} \quad z - \bar{z} = 2bi$$

$$\Rightarrow z\bar{z} + (z - \bar{z}) = (a^2+b^2) + (2b)i$$

Logo,

$$z\bar{z} + z - \bar{z} = 13 + 6i \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a^2 + 3^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -2.$$

Assim, $z = 2+3i$ ou $z = -2+3i$.

③ Se $z = \sqrt{3} + i$, calculando seu módulo e argumento:

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

e $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

Logo, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\Rightarrow (\sqrt{3}+i)^n = z^n = 2^n\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot n\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot n\right)\right].$$

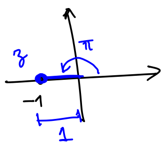
Para que z^n seja real, precisamos que

$$2^n\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6}n = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow n = 6k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $z^n \in \mathbb{R}$ é $n = 6$.

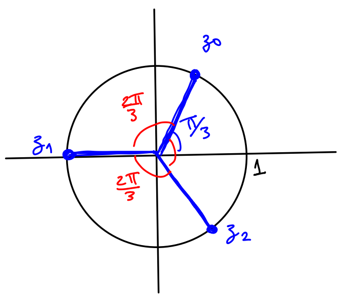
④ Temos que



$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1}.$$

Mas, $z = -1 = 1(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$

$\therefore z_k = 1\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right]$, $k = 0, 1, 2$, são as raízes cúbicas de -1.



$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$$

$$z_2 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Portanto,

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ou} \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(5) Dividindo f por g, temos

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 + x + 1 & 2x^2 + 3 \\ \cline{2-2}
-x^3 - \frac{3}{2}x & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \cline{1-1}
\quad x^2 - \frac{1}{2}x + 1 & \\
\quad -x^2 - \frac{3}{2} & \\ \cline{1-1}
\qquad -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad q = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$r = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Verificando:

$$qg + r = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 3) + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^3 + \frac{3}{2}x + x^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$= x^3 + x^2 + x + 1 = f.$$