



UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS  
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P3  
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Civil

22/02/2018

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a): .....

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule o limite das seqüências abaixo:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{41} + n^{40}}{4n^{42} + 2n^{41}}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{5^n}$

2. Identifique as séries abaixo, determine se são convergentes ou divergentes e calcule sua soma quando possível:

(a)  $1 + \frac{1}{2^{0,42}} + \frac{1}{3^{0,42}} + \frac{1}{4^{0,42}} + \dots$

(b)  $-4 + 3 - \frac{9}{4} + \frac{27}{16} - \dots$

3. Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$  é convergente ou divergente.

4. Determine para quais valores de  $x$  a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 x^n}{2^n}$  é convergente.

5. Calcule a série de Taylor da função  $f(x) = \ln(x)$  com  $a = 1$ .

*Boa Prova!*

$$\textcircled{1} \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{41} + n^{40}}{4n^{42} + 2n^{41}} \cdot \frac{\frac{1}{n^{42}}}{\frac{1}{n^{42}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}} = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{5^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^n} = 0,$$

$$\text{pois } \frac{5}{3} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \infty$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } 1 + \frac{1}{2^{0,42}} + \frac{1}{3^{0,42}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,42}} \text{ é uma série } p \text{ com } p=0,42.$$

Como  $p < 1$  a série é divergente.

$$\text{b) } -4 + 3 - \frac{9}{4} + \frac{27}{16} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-4) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} \text{ é geométrica com } a=-4$$

e  $r = -\frac{3}{4}$ . Como  $-1 < r < 1$  a série converge e sua soma é

$$\frac{a}{1-r} = \frac{-4}{1 + \frac{3}{4}} = -4 \cdot \frac{4}{7} = -\frac{16}{7}.$$

$$\textcircled{3} \text{ Temos que } \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}} = \left(\frac{2n+1}{n^2}\right)^n. \text{ Aplicando o teste da raiz:}$$

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+1}{n^2}\right)^n\right|} = \frac{2n+1}{n^2} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

Portanto, a série converge.

④ Aplicando o teste da razão:

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)^2 x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n n^2 x^n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \right|$$
$$= \left| (-1) \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \right| = \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \frac{1}{2} |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} |x|$$

Assim, se

•  $\frac{1}{2} |x| < 1$  a série converge:

$$\frac{1}{2} |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

•  $\frac{1}{2} |x| > 1$  a série diverge:

$$\frac{1}{2} |x| > 1 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \text{ ou } x < -2$$

Falta verificar para  $x=2$  e  $x=-2$ .

$$x=2: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^2$  não existe (pois os termos da seq. crescem em valor absoluto e alternam de sinal), pelo teste da divergência, a série diverge.

$$x=-2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

Novamente, pelo teste da divergência, a série diverge, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty.$$

Portanto, a série inicial converge para  $x \in (-2, 2)$ .

⑤ A série de Taylor de uma função  $f(x)$  é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots$$

Calculando as derivadas de  $f(x) = \ln x$ , temos:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\therefore f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{x^4}$$

Assim,

$$\ln x = \ln 1 + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} (x-1)^3 + \dots$$

$$= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n!}$$