Cálculo 2
Lista 2 — Sequências e séries

Prof. Adriano Barbosa

1. Calcule, caso exista, $\lim_{n\to\infty} x_n$, com x_n igual a:

   (a) $\dfrac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

   (b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

   (c) $\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$

   (d) $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

   (e) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

   (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

   (g) $\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

2. Considere a sequência $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ...

   (a) Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2.

   (b) Calcule seu limite.

   [Dica: lembre que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ e que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.]

3. Verifique se as sequências são monótonas e limitadas

   (a) $x_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$

   (b) $x_n = n + \dfrac{1}{n}$

4. Calcule a soma das séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
   [Dica: escreva a fração como soma de frações parciais e em seguida escreva as somas parciais.]

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$

[Dica: utilize a mesma estratégia do item acima.]

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$

(e) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \cdots$

5. Determine se as séries geométricas são convergentes ou divergentes. Calcule a soma das séries convergentes.

(a) $4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \cdots$

(b) $2 + 0,5 + 0,125 + 0,03125 + \cdots$

6. Escreva $0,\bar{8} = 0,88888\ldots$ como uma fração.

7. Calcule a soma das séries

(a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{1}{k(k+1)}\right)$

8. Determine se as séries são convergentes ou divergentes

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\pi}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

9. Encontre o raio e o intervalo de convergência das séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

10. (a) Escreva as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ como série de Maclaurin e encontre seu raio e intervalo de convergência.

    (b) Utilize o item (a) e a série de Maclaurin da função e^x para provar a Fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, onde i é a unidade imaginária.

11. Encontre a série de Taylor das funções abaixo centradas no valor dado

    (a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, $a = 1$

    (b) $f(x) = \ln x$, $a = 2$