Problemas Propostos

1) A Figura 1.29 apresenta o losango EFGH inscrito no retângulo ABCD, sendo O o ponto de interseção das diagonais desse losango. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

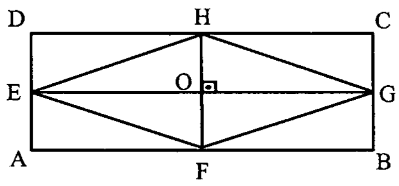


Figura 1.29

a) $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$

c) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$

d) $|C - O| = |O - B|$

e) $|H - O| = |H - D|$

f) $H - E = O - C$

g) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

h) $|\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|$

i) $\overrightarrow{AF} \,//\, \overrightarrow{CD}$

j) $\overrightarrow{GF} \,//\, \overrightarrow{HG}$

k) $\overrightarrow{AO} \,//\, \overrightarrow{OC}$

l) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$

m) $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$

n) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{HF}$

o) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{FE}$

2) Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

a) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

b) Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

c) Se $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

d) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\vec{u} \,//\, \vec{v}$.

e) Se $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, então $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

f) $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

g) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, então ABCD (vértices nesta ordem) é paralelogramo.

h) $|5\vec{v}| = |-5\vec{v}| = 5|\vec{v}|$.

i) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

j) Se $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$, então $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

k) Se $|\vec{v}| = 3$, o versor de $-10\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{3}$.

3) Com base na Figura 1.29, determinar os vetores abaixo, expressando-os com origem no ponto A:

a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$

b) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$

c) $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$

d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$

e) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG}$

f) $2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC}$

g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EH}$

h) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$

i) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{HO}$

j) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO}$

4) O paralelogramo ABCD (Figura 1.30) é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Determinar:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$ e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{BM} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

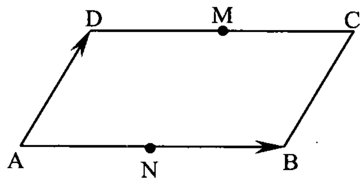
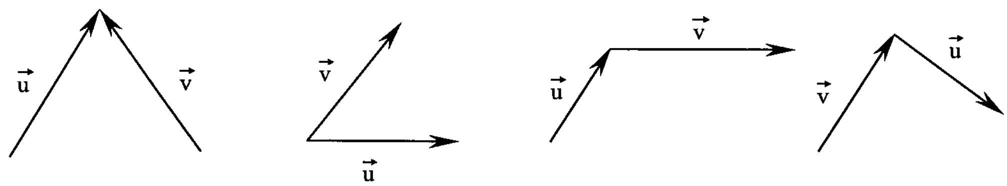


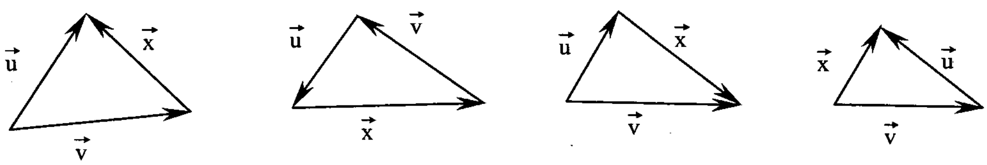
Figura 1.30

5) Apresentar, graficamente, um representante do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ nos casos:



(a) (b) (c) (d)

6) Determinar o vetor $\vec{x}$ nas figuras:



(a) (b) (c) (d)

7) Dados três pontos A, B e C não-colineares, como na Figura 1.31, representar o vetor $\vec{x}$ nos casos:

a) $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ c) $\vec{x} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

b) $\vec{x} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA}$ d) $\vec{x} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$

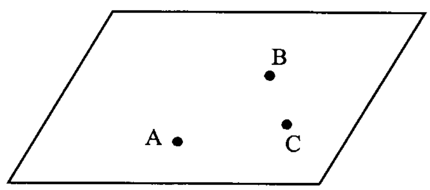


Figura 1.31

8) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da Figura 1.32, mostrar, em um gráfico, um representante do vetor

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u}$

c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

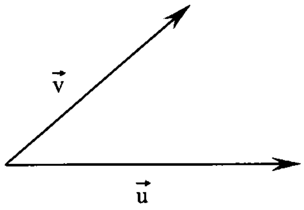


Figura 1.32

9) No triângulo ABC (Figura 1.33), seja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Construir um representante de cada um dos vetores

a) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ d) $\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

b) $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$ e) $2\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

c) $\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$ f) $\dfrac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$

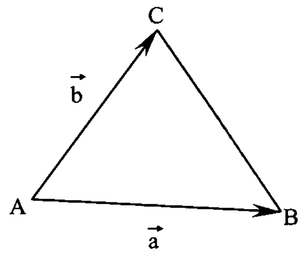


Figura 1.33

10) Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ (Figura 1.34), apresentar, graficamente, um representante do vetor $\vec{x}$ tal que

a) $\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$

b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{x} = \vec{0}$

c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{x} = 2\vec{b}$

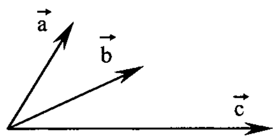


Figura 1.34

11) Na Figura 1.35 estão representados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Indicar, na própria figura, os vetores

a) $a\vec{v}$ e $b\vec{w}$ tal que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

b) $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{w}$ tal que $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$

Teria sido possível realizar este exercício no caso de os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ serem *não*-coplanares?

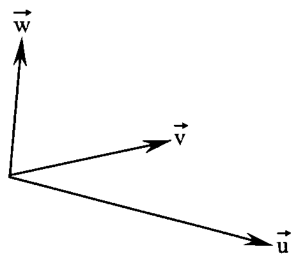


Figura 1.35

12) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°, determinar o ângulo formado pelos vetores

a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ b) $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ d) $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$

13) Dados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na Figura 1.36, determinar

a) um representante do vetor $\vec{x} + \vec{y}$, sendo
$\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{y} = \vec{v} - 2\vec{u}$;

b) o ângulo entre os vetores $-3\vec{v}$ e $\vec{w}$;

c) o ângulo entre os vetores $-2\vec{u}$ e $-\vec{w}$.

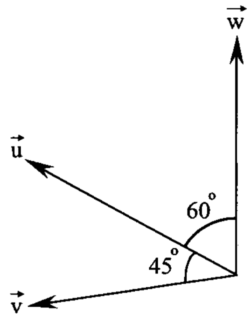


Figura 1.36

14) Demonstrar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

15) Demonstrar que o segmento de extremos nos pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semi-soma.

16) No triângulo ABC (Figura 1.37), tem-se $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Expressar os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

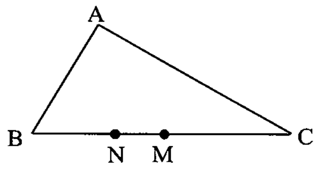


Figura 1.37

Respostas de Problemas Propostos

1)	a) V	e) F	i) V	m) V
	b) F	f) F	j) F	n) F
	c) V	g) V	k) V	o) V
	d) V	h) V	l) V	
2)	a) V	d) V	g) F	j) V
	b) F	e) F	h) V	k) V
	c) F	f) F	i) F	
3)	a) $\overrightarrow{AE}$	d) $\overrightarrow{AB}$	g) $\overrightarrow{AH}$;	j) $\overrightarrow{AC}$
	b) $\overrightarrow{AC}$	e) $\overrightarrow{AO}$	h) $\overrightarrow{AD}$	
	c) $\overrightarrow{AC}$	f) $\overrightarrow{AD}$	i) $\overrightarrow{AO}$	
4)	a) $\overrightarrow{AC}$	c) $\overrightarrow{AB}$	e) $\overrightarrow{MN}$	
	b) $\overrightarrow{CA}$	d) $\overrightarrow{AM}$	f) $\overrightarrow{BD}$	
6)	a) $\vec{u} - \vec{v}$	b) $-\vec{u} - \vec{v}$	c) $\vec{v} - \vec{u}$	d) $\vec{u} + \vec{v}$
11)	Não			
12)	a) 120°	b) 120°	c) 60°	d) 60°
13)	b) 75°	c) 60°		

16) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

4) Seja o triângulo de vértices A(4, -1, -2), B(2, 5, -6) e C(1, -1, -2). Calcular o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB.

Solução

A mediana em questão, de acordo com a Figura 1.64, é o segmento que tem como extremidades o ponto médio M de AB e o vértice oposto C. Então, o comprimento da mediana é o módulo do vetor $\overrightarrow{MC}$.

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{-2-6}{2}\right) \text{ ou } M(3, 2, -4)$$

e

$$\overrightarrow{MC} = C - M = (1, -1, -2) - (3, 2, -4) = (-2, -3, 2)$$

Portanto

$$|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

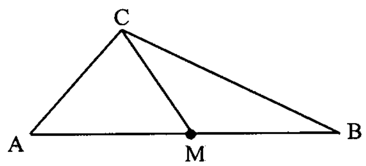


Figura 1.64

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determinar

a) $2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

d) $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

2) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que

a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{x}$

b) $3\vec{x} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{x} - 3\vec{u})$

3) Dados os pontos A(-1, 3), B(2, 5), C(3, -1) e O(0, 0), calcular

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$

c) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

4) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$

5) Dados os pontos A(3, -4) e B(-1, 1) e o vetor $\vec{v} = (-2, 3)$, calcular

a) $(B - A) + 2\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $3\vec{v} - 2(A - B)$

6) Sejam os pontos A(-5, 1) e B(1, 3). Determinar o vetor $\vec{v} = (a, b)$ tal que

a) $B = A + 2\vec{v}$

b) $A = B + 3\vec{v}$

Construir o gráfico correspondente a cada situação.

7) Representar no gráfico o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o correspondente vetor posição, nos casos:
a) A(-1, 3) e B(3, 5)
c) A(4, 0) e B(0, -2)
b) A(-1, 4) e B(4, 1)
d) A(3, 1) e B(3, 4)

8) Qual o ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está em (3, 1)? Representar graficamente este segmento.

9) No mesmo sistema cartesiano xOy, representar
a) os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$, com origem nos pontos A(1, 4) e B(1, -4), respectivamente;
b) os vetores posição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

10) Sejam os pontos P(2, 3), Q(4, 2) e R(3, 5).
a) Representar em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$.
b) Determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

11) Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para
a) A(-3, -1), B(4, 2) e C(5, 5)
b) A(5, 1), B(7, 3) e C(3, 4)

12) Sabendo que A(1, -1), B(5, 1) e C(6, 4) são vértices de um paralelogramo, determinar o quarto vértice de cada um dos três paralelogramos possíveis de serem formados.

13) Dados os pontos A(-3, 2) e B(5, -2), determinar os pontos M e N pertencentes ao segmento AB tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Construir o gráfico, marcando os pontos A, B, M, N e P, devendo P ser tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

14) Sendo A(-2, 3) e B(6, -3) extremidades de um segmento, determinar
a) os pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;
b) os pontos F e G que dividem o segmento de AB em três partes de mesmo comprimento.

15) O ponto P pertence ao segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e a distância dele ao ponto A é a terça parte da distância dele ao ponto B. Expressar as coordenadas de P em função das coordenadas de A e B.

16) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular

a) $|\vec{u}|$
c) $|\vec{w}|$
e) $|2\vec{u} - \vec{w}|$
g) $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
b) $|\vec{v}|$
d) $|\vec{u} + \vec{v}|$
f) $|\vec{w} - 3\vec{u}|$
h) $\left|\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|$

17) Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.

18) Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, \frac{1}{2})$ seja unitário.

19) Provar que os pontos A(-2, -1), B(2, 2), C(-1, 6) e D(-5, 3), nesta ordem, são vértices de um quadrado.

20) Encontrar um ponto P de eixo Ox de modo que a sua distância ao ponto A(2, -3) seja igual a 5.

21) Dados os pontos A(-4, 3) e B(2, 1), encontrar o ponto P nos casos
 a) P pertence ao eixo Oy e é eqüidistante de A e B;
 b) P é eqüidistante de A e B e sua ordenada é o dobro da abscissa;
 c) P pertence à mediatriz do segmento de extremos A e B.

22) Encontrar o vetor unitário que tenha (I) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e (II) sentido contrário a $\vec{v}$, nos casos:
 a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$
 b) $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$
 c) $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$
 d) $\vec{v} = (0, 4)$

23) Dado o vetor $\vec{v} = (1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:
 a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e duas vezes o módulo de $\vec{v}$;
 b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 2;
 c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 4.

24) Traçar no mesmo sistema de eixos os retângulos de vértices
 a) A(0, 0, 1), B(0, 0, 2), C(4, 0, 2) e D(4, 0, 1)
 b) A(2, 1, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 2) e D(0, 1, 2)

25) Traçar o retângulo formado pelos pontos (x, y, z) tal que
 a) $x = 0$, $1 \leq y \leq 4$ e $0 \leq z \leq 4$
 b) $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ e $z = 3$

26) Construir o cubo constituído dos pontos (x, y, z), de modo que
 a) $-4 \leq x \leq -2$, $1 \leq y \leq 3$ e $0 \leq z \leq 2$
 b) $-2 \leq x \leq 0$, $2 \leq y \leq 4$ e $-4 \leq z \leq -2$

27) Construir o paralelepípedo retângulo formado pelos pontos (x,y,z), de modo que $1 \leq x \leq 3$, $3 \leq y \leq 5$ e $0 \leq z \leq 4$. Quais as coordenadas dos oito vértices do paralelepípedo?

28) Calcular a distância do ponto A(3, 4, -2)
 a) ao plano xy;
 b) ao plano xz;
 c) ao plano yz;
 d) ao eixo dos x;
 e) ao eixo dos y;
 f) ao eixo dos z.

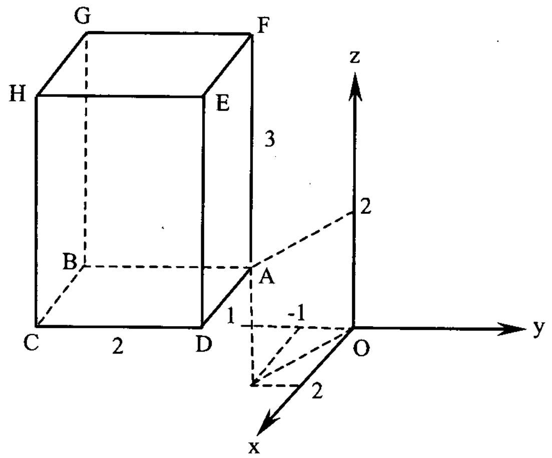


Figura 1.65

29) A Figura 1.65 apresenta um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados e de medidas 2, 1 e 3. Determinar as coordenadas dos vértices deste sólido, sabendo que A(2,-1,2).

30) O paralelepípedo retângulo de dimensões 3, 4 e 5 está referido ao sistema Oxyz conforme a Figura 1.66. Considerando um segundo sistema chamado de O'x'y'z', onde Ox//O'x', Oy//O'y' e Oz//O'z', e sendo O' um dos vértices do paralelepípedo de acordo com a figura, determinar as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D e O' em relação aos sistemas dados.

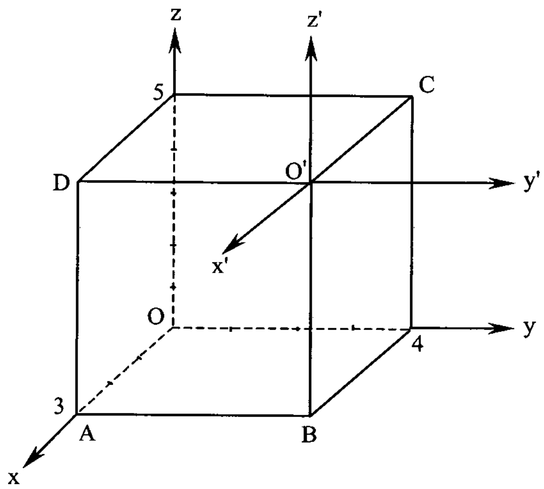


Figura 1.66

31) Dados os pontos A(2, -2, 3) e B(1, 1, 5) e o vetor $\vec{v} = (1, 3, -4)$, calcular:

a) $A + 3\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $2\vec{v} - 3(B - A)$

32) Dados os pontos A(3, -4, -2) e B(-2, 1, 0), determinar o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

33) Dados os pontos A(1, -2, 3), B(2, 1, -4) e C(-1, -3, 1), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

34) Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determinar a, b, e c, sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b - 2, 3)$ e $\vec{w} = (4, -1, 0)$.

35) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $\vec{w} = (-3, 4, 0)$,

a) determinar o vetor $\vec{x}$ de modo que $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 4\vec{x} + 2\vec{w}$;

b) encontrar os números a_1, a_2 e a_3 tais que $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = (-2, 13, -5)$.

36) Representar no mesmo sistema Oxyz o vetor $\vec{v} = (1, -1, 3)$ com origem nos pontos O(0, 0, 0), A(-3, -4, 0), B(-2, 4, 2), C(3, 0, -4) e D(3, 4, -2).

37) Sendo A(2, -5, 3) e B(7, 3, -1) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD e M(4, -3, 3) o ponto de interseção das diagonais, determinar os vértices C e D.

38) Determinar os três vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são M(5, 0, -2), N(3, 1, -3) e P(4, 2, 1).

39) Dados os pontos A(1, -1, 3) e B(3, 1, 5), até que ponto se deve prolongar o segmento AB, no sentido de A para B, para que seu comprimento quadruplique de valor?

40) Sendo A(-2, 1, 3) e B(6, -7, 1) extremidades de um segmento, determinar

a) os pontos C, D e E, nesta ordem, que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;

b) os pontos F e G, nesta ordem, que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

41) O ponto A é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são B, C e D. Sendo AA' uma diagonal do paralelepípedo, determinar o ponto A' nos seguintes casos:

a) A(3, 5, 0), B(1, 5, 0), C(3, 5, 4) e D(3, 2, 0)

b) A(-1, 2, 1), B(3, -1, 2), C(4, 1, -3) e D(0, -3, -1)

c) A(-1, 2, 3), B(2, -1, 0), C(3, 1, 4) e D(-2, 0, 5)

42) Apresentar o vetor genérico que satisfaz a condição:

a) paralelo ao eixo dos x;

b) representado no eixo dos z;

c) paralelo ao plano xy;

d) paralelo ao plano yz;

e) ortogonal ao eixo dos y;

f) ortogonal ao eixo dos z;

g) ortogonal ao plano xy;

h) ortogonal ao plano xz.

43) Quais dos seguintes vetores $\vec{u} = (4, -6, 2)$, $\vec{v} = (-6, 9, -3)$, $\vec{w} = (14, -21, 9)$ e $\vec{t} = (10, -15, 5)$ são paralelos?

44) Dado o vetor $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (a, 6, b) + 2\vec{w}$ sejam paralelos.

45) A reta que passa pelos pontos A(-2, 5, 1) e B(1, 3, 0) é paralela à reta determinada por C(3, -1, -1) e D(0, m, n). Determinar o ponto D.

46) Verificar se são colineares os pontos:

a) A(-1, -5, 0), B(2, 1, 3) e C(-2, -7, -1)

b) A(2, 1, -1), B(3, -1, 0) e C(1, 0, 4)
c) A(-1, 4, -3), B(2, 1, 3) e C(4, -1, 7)

47) Sabendo que o ponto P(m, 4, n) pertence à reta que passa pelos pontos A(-1, -2, 3) e B(2, 1, -5), calcular m e n.

48) Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para
a) A(-1, 0, 3), B(1, 1, 2) e C(3, -2, 5)
b) A(4, 0, 1), B(5, 1, 3) e C(3, 2, 5)

49) Verificar se são unitários os seguintes vetores:
$\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$

50) Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seja unitário.

51) Determinar o valor de *a* para que $\vec{u} = (a, -2a, 2a)$ seja um versor.

52) Dados os pontos A(1, 0, -1), B(4, 2, 1) e C(1, 2, 0), determinar o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

53) Determinar o valor de y para que seja eqüilátero o triângulo de vértices A(4, y, 4), B(10, y, -2) e C(2, 0, -4).

54) Obter o ponto P do eixo das abscissas eqüidistante dos pontos A(3, -1, 4) e B(1, -2, -3).

55) Obter um ponto P do eixo das cotas cuja distância ao ponto A(-1, 2, -2) seja igual a 3.

56) Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha
a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;
b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;
c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 5.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) (3, -5) b) (-5, 4) c) $(1, -\frac{1}{2})$ d) $(\frac{13}{2}, -9)$

2) a) $(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$ b) $(\frac{23}{5}, -\frac{11}{5})$

3) a) (-4, 1) b) (2, 5) c) (-5, -30)

4) $a_1 = -1$ e $a_2 = 2$

5) a) (-8, 11) b) (6, -8) c) (-9, 11) d) (-14, 19)

6) a) $\vec{v} = (3, 1)$ b) $\vec{v} = (-2, -\frac{2}{3})$

8) (4, -2)

10) b) $\vec{0}$

11) a) D(-2, 2) b) D(1, 2)

12) (2, 2), (0, -4) e (10, 6)

13) M(1, 0), $N(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$, P(9, -4)

14) a) $C(0, \frac{3}{2})$, D(2, 0), $E(4, -\frac{3}{2})$

b) $F(\frac{2}{3}, 1)$, $G(\frac{10}{3}, -1)$

15) $P(\frac{3}{4}x_1 + \frac{x_2}{4}, \frac{3}{4}y_1 + \frac{y_2}{4})$

16) a) $\sqrt{2}$ c) 10 e) $2\sqrt{13}$ g) $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

b) 5 d) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{34}$ h) 1

17) $\pm 2\sqrt{3}$

18) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

20) (6, 0) ou (-2, 0)

21) a) P(0, 5) b) P(-5, -10) c) P(x, 3x + 5), x ∈ R

22) a) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ b) $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$

c) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ d) (0, 1) e (0, -1)

23) a) (-2, 6) b) $(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}})$ c) $(-\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}})$

27) Vértices da base inferior: (1, 3, 0), (1, 5, 0), (3, 3, 0) e (3, 5, 0)
Vértices da base superior: (1, 3, 4), (1, 5, 4), (3, 3, 4) e (3, 5, 4)

28) a) 2 c) 3 e) $\sqrt{13}$

b) 4 d) $2\sqrt{5}$ f) 5

29) B(2, -3, 2), C(3, -3, 2), D(3, -1, 2), E(3, -1, 5), F(2, -1, 5), G(2, -3, 5), H(3, -3, 5)

30) em relação a Oxyz: O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 4, 0), C(0, 4, 5), D(3, 0,5) e O'(3,4,5)
em relação a O'x'y'z': O(-3, -4, -5), A(0, -4, -5), B(0, 0, -5), C(-3, 0, 0), D(0, -4, 0) e O'(0, 0, 0)

31) a) (5, 7, -9) b) (0, -6, 2) c) (-1, 7, 9) d) (5, -3, -14)

32) $N(1, -2, -\frac{6}{5})$

33) D(-2, -6, 8)

34) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{4}$, $c = 4$

35) a) $\vec{x} = (\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$

b) $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$

37) C(6, -1, 3) e D(1, -9, 7)

38) (4, -1, -6), (6, 1, 2) e (2, 3, 0)

39) (9, 7, 11)

40) a) $(0, -1, \frac{5}{2})$, (2, -3, 2), $(4, -5, \frac{3}{2})$

b) $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$, $(\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3})$

41) a) (1, 2, 4) b) (9, -7, -4) c) (5, -4, 3)

42) a) (x, 0, 0) c) (x, y, 0) e) (x, 0, z) g) (0, 0, z)

b) (0, 0, z) d) (0, y, z) f) (x, y, 0) h) (0, y, 0)

43) são paralelos: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{t}$

44) a = 9 e b = -15

45) D(0, 1, 0)

46) a) sim b) não c) sim

47) m = 5 e n = -13

48) a) D(1, -3, 6) b) D(2, 1, 3)

49) $\vec{v}$ é unitário

50) $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

51) $\pm\frac{1}{3}$

52) 3 ou $-\frac{13}{5}$

53) ± 2

54) P(3, 0, 0)

55) P(0, 0, 0) ou P(0, 0, -4)

56) a) (-6, 3, 9) b) $(\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}})$ c) $(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{15}{\sqrt{14}})$

Solução

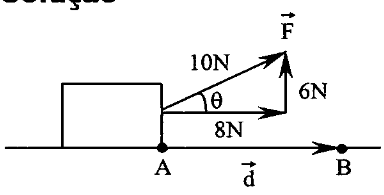


Figura 2.15

A Força $\vec{F}$ (Figura 2.15) é decomposta em $\vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, onde $8 = |\vec{F}|\cos\theta$, $6 = |\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta$ e $\vec{d} = 20\vec{i} + 0\vec{j}$.

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ pode ser calculado por

$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (produto escalar)

$W = (8\vec{i} + 6\vec{j}) \cdot (20\vec{i} + 0\vec{j})$

$W = 160$ J

ou por

$W = |\vec{F}|\,|\vec{d}|\cos\theta$

$W = (10\text{N})(20\text{m})(\cos 36{,}9^\circ)$

$W = 160$ J

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular

a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$ d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (2, a, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.

3) Dados os pontos A (4, 0, -1), B (2, -2, 1) e C (1, 3, 2) e os vetores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que

a) $3\vec{x} + 2\vec{v} = \vec{x} + (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u})\vec{v}$ b) $(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v})\vec{x} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - 3\vec{x}$.

4) Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$.

5) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

6) Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oy, $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 8$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$.

7) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot \vec{u} = -16$, $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{x} \cdot \vec{w} = 3$.

8) Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, calcular

a) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$

b) $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$ d) $(3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} - 5\vec{v})$

9) Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $|\vec{w}|=5$.

10) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

11) O quadrilátero ABCD (Figura 2.16) é um losango de lado 2. Calcular:

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

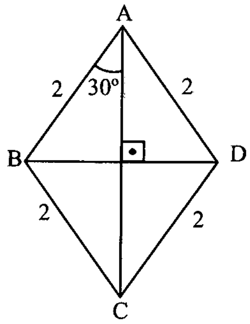


Figura 2.16

12) Calcular $|\vec{u}+\vec{v}|$, $|\vec{u}-\vec{v}|$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, sabendo que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°.

13) Sabendo que $|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad, determinar

a) $|(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})|$ b) $|\vec{u}-2\vec{v}|$

14) Verificar para os vetores $\vec{u}=(4,-1,2)$ e $\vec{v}=(-3,2,-2)$ as desigualdades

a) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\,|\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwarz*)

b) $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (*Desigualdade Triangular*)

15) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{b}=2\vec{i}+(1-2\alpha)\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais?

16) Dados os vetores $\vec{a}=(2,1,\alpha)$, $\vec{b}=(\alpha+2,-5,2)$ e $\vec{c}=(2\alpha,8,\alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$.

17) Dados os pontos A(-1, 0, 5), B(2, -1, 4) e C(1, 1, 1), determinar x tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo P (x, 0, x - 3).

18) Provar que os pontos A(-1, 2, 3), B(-3, 6, 0) e C(-4, 7, 2) são vértices de um triângulo retângulo.

19) Dados os pontos A(m, 1, 0), B(m - 1, 2m, 2) e C(1, 3, -1), determinar m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcular a área do triângulo.

20) Encontrar os vetores unitários paralelos ao plano yOz e que são ortogonais ao vetor $\vec{v}=(4, 1\ -2)$.

21) Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}|=2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$ é 45° e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}=(1,1,0)$.

22) Seja o vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Obter
   a) um vetor ortogonal a $\vec{v}$;
   b) um vetor unitário ortogonal a $\vec{v}$;
   c) um vetor de módulo 4 ortogonal a $\vec{v}$.
23) Sendo $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 6$ e $|\vec{b}| = 8$, calcular $|\vec{a} + \vec{b}|$ e $|\vec{a} - \vec{b}|$.
24) Demonstrar que sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores dois a dois ortogonais, então
   a) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.
   b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2$.
25) Determinar o ângulo entre os vetores
   a) $\vec{u} = (2, -1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 2)$.
   b) $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.
26) Seja o triângulo de vértices A(3, 4, 4), B(2, -3, 4) e C(6, 0, 4). Determinar o ângulo interno ao vértice B. Qual o ângulo externo ao vértice B?
27) Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, -1) e C(-1, 2, 1).
28) Calcular o valor de m de modo que seja 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, m + 1)$.
29) Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{v} = (-3, 1, n)$ e $\vec{k}$.
30) Se $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar o ângulo entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ e construir uma figura correspondente a estes dados.
31) Seja o cubo de aresta a representado na Figura 2.17. Determinar:
   a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
   b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$
   c) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB}$
   d) $|\overrightarrow{OB}|$ e $|\overrightarrow{OG}|$
   e) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CG}$
   f) $(\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{OG}$
   g) o ângulo agudo entre a diagonal do cubo e uma aresta;
   h) o ângulo agudo formado por duas diagonais do cubo.

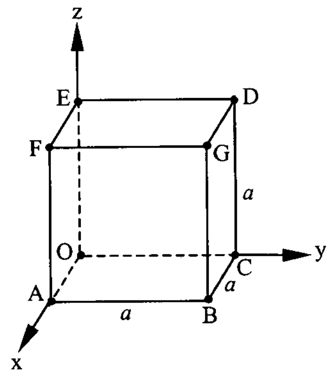


Figura 2.17

32) Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6, -2, 3)$.
33) Os ângulos diretores de um vetor $\vec{a}$ são 45°, 60° e 120° e $|\vec{a}| = 2$. Determinar $\vec{a}$.
34) Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45°, 60° e 90°? Justificar.
35) Mostrar que existe um vetor cujos ângulos diretores são 30°, 90° e 60°, respectivamente, e determinar aquele que tem módulo 10.

36) Determinar um vetor unitário ortogonal ao eixo Oz e que forme 60° com o vetor $\vec{i}$.

37) Determinar o vetor $\vec{a}$ de módulo 5, sabendo que é ortogonal ao eixo Oy e ao vetor $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$, e forma ângulo obtuso com o vetor $\vec{i}$.

38) Determinar o vetor $\vec{v}$ nos casos

a) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $|\vec{v}| = 8$, forma ângulo de 30° com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$;

b) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $|\vec{v}| = 2$, forma ângulo de 60° com o vetor $\vec{j}$ e ângulo agudo com $\vec{k}$.

39) O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{w} = (2, 0, 1)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = \sqrt{21}$.

40) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)$, determinar $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

41) Determinar os vetores projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

42) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \,//\, \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (3, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 1, -1)$

c) $\vec{u} = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (3, 5, 4)$

d) $\vec{u} = (3, 1, -3)$ e $\vec{v} = (2, -3, 1)$

43) Sejam A(2, 1, 3), B(m, 3, 5) e C(0, 4, 1) vértices de um triângulo (Figura 2.18).

a) Para que valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

b) Calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

d) Mostrar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

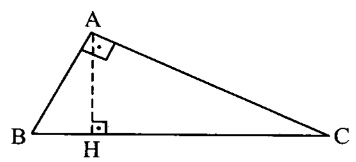


Figura 2.18

44) Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (k, -4)$ sejam

a) paralelos; b) ortogonais.

45) Obter os dois vetores unitários ortogonais a cada um dos vetores

a) $4\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $(-2, 3)$ c) $(-1, -1)$

46) Determinar um par de vetores unitários e ortogonais entre si, em que um deles seja paralelo a $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

47) Determinar, aproximadamente, o ângulo entre os pares de vetores

a) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4, -2)$

b) $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-4, -2)$

c) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$

48) Dados os vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, determinar o módulo e o ângulo que os seguintes vetores formam com o vetor $\vec{i}$:

a) $\vec{u}$ c) $\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{v} - \vec{u}$

b) $\vec{v}$ d) $\vec{u} - \vec{v}$

49) Determinar o valor de a para que seja 45 ° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, a)$.

50) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \,//\, \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (4, 3)$ c) $\vec{u} = (4, 3)$ e $\vec{v} = (1, 2)$

b) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 5)$

Respostas de Problemas Propostos

1) a) -2 b) 21 c) -4 d) 4

2) $a = \frac{5}{8}$

3) a) (3, 6, -9) b) $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$

4) (-6, 3, -9)

5) (0, 3, 4) ou (0, 3, -4)

6) (2, 0, -1)

7) $\vec{x} = (2, -3, 4)$

8) a) 7 b) 38 c) –4 d) -181

9) -19

10) 200 e -200

11) a) 0 b) 2 c) –2 d) 2 e) 4 f) -4

12) $\sqrt{37}$, $\sqrt{13}$ e 7

13) a) 37 b) $\sqrt{50}$

15) -5

16) 3 ou -6

17) $x = \frac{25}{2}$

18) $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = 0$

19) $m = 1$ e $\frac{\sqrt{30}}{2}$

20) $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ou $(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

21) $(1, -1, \sqrt{2})$ ou $(1, -1, -\sqrt{2})$

22) a) Dentre os infinitos possíveis: (1, 1, -1)

b) Um deles: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

c) Um deles: $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}})$

23) 10 e 10

25) a) 120° b) 150°

26) 45° e 135°

27) $\hat{A} \cong 50°57'$, $\hat{B} \cong 57°1'$, $\hat{C} \cong 72°2'$

28) 0 ou -18

29) $\sqrt{30}$

30) arc cos $\frac{3}{\sqrt{21}} \cong 49°6'$

31) a) 0 c) 0 e) a^2 g) arc cos $\frac{\sqrt{3}}{3} \cong 54°44'$

b) 0 d) $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$ f) (a^3, a^3, a^3) h) arc cos $(\frac{1}{3}) \cong 70°31'$

32) $\alpha =$ arc cos $(\frac{6}{7}) \cong 31°$ $\beta =$ arc cos $(-\frac{2}{7}) \cong 107°$

$\gamma =$ arc cos $(\frac{3}{7}) \cong 65°$

33) $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$

34) Não, $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 90° \neq 1$

35) $(5\sqrt{3}, 0, 5)$

36) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ou $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

37) $\vec{a} = (-2\sqrt{5},\ 0,\ -\sqrt{5})$

38) a) $(4\sqrt{3}, -4, 0)$ b) $(0, 1, \sqrt{3})$

39) $(-2, 1, 4)$

40) $(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$ e $(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5})$

41) $4\vec{i}$, $-3\vec{j}$, $2\vec{k}$

42) a) $\vec{v}_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\vec{v}_2 = (\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

b) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 0, -2)$

c) $\vec{v}_1 = (3, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 5, 4)$

d) $\vec{v}_1 = (0, 0, 0)$ ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais) e $\vec{v}_2 = \vec{v}$

43) a) $m = 3$ b) $\frac{9}{26}\sqrt{26}$ c) $H(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{94}{26})$

44) a) $\frac{8}{3}$ b) -6

45) a) $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ b) $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$

c) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

46) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ou $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

47) a) arc cos $(\frac{3}{5}) \cong 53°$ b) arc cos $(-\frac{1}{\sqrt{10}}) \cong 108°$ c) $90°$

48) a) $\sqrt{2}$, $45°$ d) $\sqrt{5}$, arc cos $(-\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 117°$

b) $\sqrt{5}$, arc cos $(\frac{2}{\sqrt{5}}) \cong 26°$ e) $\sqrt{5}$, arc cos $(\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 63°$

c) 3, $0°$

49) 3 ou $-\frac{1}{3}$

50) a) $\vec{v}_1 = (4, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 3)$ c) $\vec{v}_1 = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

b) $\vec{v}_1 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Observação

Caso a força $\vec{F}$ seja invertida (Figura 3.12), isto é, $\vec{F} = -10\vec{i}$ (em newtons), o torque é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (-10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

ou

$$\vec{\tau} = (20\vec{k})\text{mN}.$$

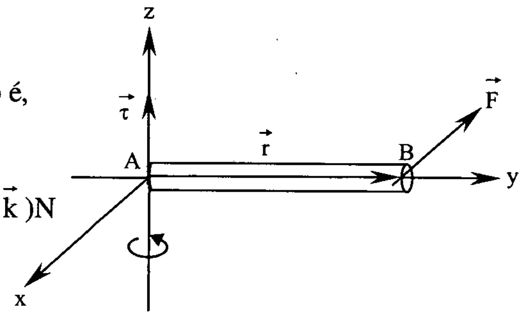


Figura 3.12

Problemas Propostos

1) Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar

a) $\lvert \vec{u} \times \vec{u} \rvert$	e) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$	i) $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
b) $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$	f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$	j) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$
c) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$	g) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$	k) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$	h) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$	l) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

2) Efetuar

a) $\vec{i} \times \vec{k}$	e) $(3\vec{i}) \cdot (2\vec{j})$	i) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$
b) $\vec{j} \times (2\vec{i})$	f) $(3\vec{i}) \times (2\vec{j})$	j) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}$
c) $(3\vec{i}) \times (2\vec{k})$	g) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{i})$	k) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$
d) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$	h) $\vec{j} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$	l) $(\vec{j} \times \vec{k}) \cdot \vec{i}$

3) Dados os pontos A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) e C(2, -1, -3), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.

4) Determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot (1, 4, -3) = -7$ e $\vec{x} \times (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$.

5) Resolver os sistemas

a) $\begin{cases} \vec{x} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{x} \cdot (4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{x} \times (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 12 \end{cases}$

6) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 1)$, $\vec{v} = (-4, 1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 2, 0)$, determinar $\vec{x}$ de modo que $\vec{x} \perp \vec{w}$ e $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.

7) Levando em conta a Figura 3.13, calcular

a) $\vec{OF} \times \vec{OD}$ d) $\vec{EC} \times \vec{EA}$

b) $\vec{AC} \times \vec{FA}$ e) $\vec{OA} \cdot (\vec{OC} \times \vec{OE})$

c) $\vec{AB} \times \vec{AC}$ f) $\vec{GB} \times \vec{AF}$

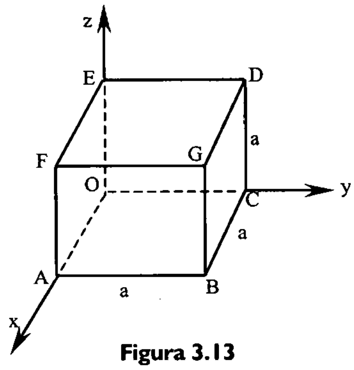


Figura 3.13

8) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, 0, -1)$.

a) Utilizar o produto escalar para mostrar que os vetores são, dois a dois, ortogonais.

b) Utilizar o produto vetorial para mostrar que o produto vetorial de quaisquer dois deles é paralelo ao terceiro vetor.

c) Mostrar que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$

9) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

10) Obter um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos A(2, 3, 1), B(1, -1, 1) e C(4, 1, -2).

11) Dado $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, determinar vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ de modo que os três sejam mutuamente ortogonais.

12) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, determinar

a) um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) um vetor de módulo 5 simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

13) Determinar um vetor de módulo 2 ortogonal a $\vec{u} = (3, 2, 2)$ e a $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

14) Com base na Figura 3.14, calcular

a) $|\vec{AB} \times \vec{AD}|$

b) $|\vec{BA} \times \vec{BC}|$

c) $|\vec{AB} \times \vec{DC}|$

d) $|\vec{AB} \times \vec{CD}|$

e) $|\vec{BD} \times \vec{AC}|$

f) $|\vec{BD} \times \vec{CD}|$

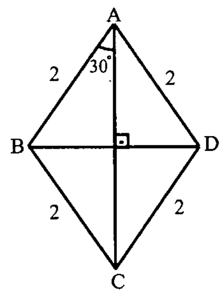


Figura 3.14

15) Sendo $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 4$ e 45° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) $|2\vec{u} \times \vec{v}|$ b) $\left|\frac{2}{5}\vec{u} \times \frac{1}{2}\vec{v}\right|$

16) Determinar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sabendo que $|\vec{u} \times \vec{v}| = 12$, $|\vec{u}| = 13$ e $\vec{v}$ é unitário.

17) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calcular
   a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
   b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.
18) Mostrar que o quadrilátero ABCD de vértices A(4, 1, 2), B(5, 0, 1), C(-1, 2, -2) e D (-2, 3, -1) é um paralelogramo e calcular sua área.
19) Dois vértices consecutivos de um paralelogramo são A(2, -4, 0) e B(1, -3, -1) e o ponto médio das diagonais é M (3, 2, -2). Calcular a área do paralelogramo.
20) Calcular o valor de m para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} = (m, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 2)$ seja igual a $\sqrt{26}$.
21) Sabendo que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 4$ e 30° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular
   a) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
   b) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$;
   c) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.
22) Calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que suas diagonais são $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3, 4)$ e $\vec{u} - \vec{v} = (1, -1, 2)$.
23) Calcular a distância do ponto P(4, 3, 3) à reta que passa por A(1, 2, -1) e B(3, 1, 1).
24) Calcular a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, sendo dados
   a) A(-4, 1, 1), B(1, 0, 1) e C(0, -1, 3)
   b) A(4, 2, 1), B(1, 0, 1) e C(1, 2, 0)
25) Encontrar um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R e calcular a área do triângulo PQR.
   a) P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0), R(0, 0, 2)
   b) P(2, 3, 0), Q(0, 2, 1), R(2, 0, 2)
26) Calcular z, sabendo-se que A (2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, z) são vértices de um triângulo de área 6.
27) Dados os pontos A(2, 1, -1) e B(0, 2, 1), determinar o ponto C do eixo Oy de modo que a área do triângulo ABC seja 1,5 u.a.
28) Sabendo que os pontos A(4, 0, 0), B(0, 0, 2), C(0, 3, 0) e D(4, 3, -2) são coplanares, calcular a área do quadrilátero ABCD.
29) Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são M(0, 1, 3), N(3, -2, 2) e P(1, 0, 2). Determinar a área do triângulo ABC.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) 0	d) $\vec{0}$	g) (-6, -20, 1)	j) 0
b) $\vec{0}$	e) (-5, 0, -5)	h) (8, -2, 13)	k) 5
c) $\vec{0}$	f) (-1, -23, -1)	i) (8, -2, 13)	l) 5

2) a) $-\vec{j}$ e) 0 i) $\vec{0}$

b) $-2\vec{k}$ f) $6\vec{k}$ j) $-\vec{i}$

c) $-6\vec{j}$ g) 0 k) $\vec{0}$

d) 1 h) 0 l) 1

3) D (-4, -1, 1)

4) $\vec{x} = (3, -1, 2)$

5) a) $\vec{x} = (1, -3, 0)$ b) $\vec{x} = (-4, 2, -6)$

6) Não existe $\vec{x}$ pois $\vec{u}$ não é ortogonal a $\vec{v}$.

7) a) $(-a^2, -a^2, a^2)$ c) $(0, 0, a^2)$ e) a^3

b) $(-a^2, -a^2, 0)$ d) $(-a^2, -a^2, -a^2)$ f) $\vec{0}$

9) Um deles: $(\vec{u} + 2\vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u}) = (-12, -18, 9)$

10) Um deles: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12, -3, 10)$

11) Uma das infinitas soluções: $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$

12) a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ou $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

b) $\left(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ ou $\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

13) $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ou $(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$

14) a) $2\sqrt{3}$ c) 0 e) $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$ d) 0 f) $2\sqrt{3}$

15) a) 16 b) $\frac{8}{5}$

16) 5 ou -5

17) a) $3\sqrt{10}$ b) $\sqrt{10}$

18) $\sqrt{122}$

19) $2\sqrt{74}$

20) 0 ou 2

21) a) 6 b) 12 c) 24

22) $\sqrt{35}$

23) $\frac{\sqrt{65}}{3}$

24) a) $\sqrt{35}$ e $\dfrac{2\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{7}{2}$ e $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$

25) a) $t\,(2, 2, 3),\ t \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ b) $t\,(1, 4, 6),\ t \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{\sqrt{53}}{2}$.

26) 4 ou -4

27) $C\,(0, 1, 0)$ ou $C\,(0, \dfrac{5}{2}, 0)$

28) $2\sqrt{61}$

29) $4\sqrt{2}$

b) Se duas retas não são coplanares, elas são ditas *reversas*. É o caso do exemplo (2) (Figura 5.13), pois as retas além de não concorrentes são não-paralelas, e, portanto, não-coplanares.

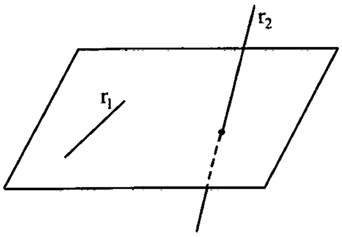


Figura 5.13

Problemas Propostos

1) Determinar uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos A(2, -3, 4) e B(1, -1, 2) e verificar se os pontos $C(\frac{5}{2}, -4, 5)$ e D(-1, 3, 4) pertencem a r.
2) Dada a reta r : (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(2, -3, 0), escrever equações paramétricas de r.
3) Escrever equações paramétricas da reta que passa por A(1, 2, 3) e é paralela à reta r : (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1).
4) Dada a reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$, determinar o ponto de r tal que

a) a ordenada seja 6;
b) a abscissa seja igual à ordenada;
c) a cota seja o quádruplo da abscissa.

5) A reta r passa pelo ponto A(4,-3,-2) e é paralela à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$ Se $P(m, n, -5) \in r$, determinar m e n.

6) Determinar equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

a) A(1, -1, 2) e B(2, 1, 0) b) A(3, 1, 4) e B(3, -2, 2)
c) A(1, 2, 3) e B(1, 3, 2) d) A(0, 0, 0) e B(0, 1, 0)

7) Com base na Figura 5.14, escrever equações paramétricas da reta por

a) A e B
b) C e D
c) A e D
d) B e C
e) D e E
f) B e D

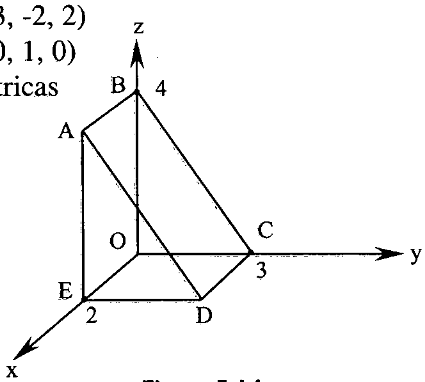


Figura 5.14

8) O ponto P(m, 1, n) pertence à reta que passa por A(3, -1, 4) e B(4, -3, -1). Determinar P.

9) Seja o triângulo de vértices A(-1, 4, -2), B(3, -3, 6) e C(2, -1, 4). Escrever equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio do lado AB e pelo vértice oposto C.

10) Os pontos $M_1(2, -1, 3)$, $M_2(1, -3, 0)$ e $M_3(2, 1, -5)$ são pontos médios dos lados de um triângulo ABC. Obter equações paramétricas da reta que contém o lado cujo ponto médio é M_1.

11) Os vértices de um triângulo são os pontos A(-1, 1, 3), B(2, 1, 4) e C(3, -1, -1). Obter equações paramétricas dos lados AB, AC e BC, e da reta r que contém a mediana relativa ao vértice B.

12) Verificar se os pontos $P_1(5, -5, 6)$ e $P_2(4, -1, 12)$ pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

13) Determinar o ponto da reta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z}{4}$ que possui

a) abscissa 5;

b) ordenada 2.

14) Obter o ponto de abscissa 1 da reta $r: \dfrac{2x+1}{3} = \dfrac{3y-2}{2} = z + 4$ e encontrar um vetor diretor de r que tenha ordenada 2.

15) Obter equações reduzidas na variável x, da reta

a) que passa por A(4, 0, -3) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 4, 5)$;

b) pelos pontos A(1, -2, 3) e B(3, -1, -1);

c) pelos pontos A(-1, 2, 3) e B(2, -1, 3);

d) dada por $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 4t - 5 \end{cases}$

16) Escrever equações reduzidas na variável z da reta que passa por A(-1, 6, 3) e B(2, 2, 1).

17) Na reta $r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$, determinar o ponto de

a) ordenada igual a 9;

b) abscissa igual ao dobro da cota;

c) ordenada igual ao triplo da cota.

18) Representar graficamente as retas de equações

a) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x \\ z = 3 + x \end{cases}$ c) $x = y = z$ d) $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 4 \\ z = 2x \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = -3 \\ z = 3 \end{cases}$

19) Determinar equações paramétricas e representar graficamente a reta que passa por
a) A(3, -2, 4) e é paralela ao eixo dos x;
b) A(2, 2, 4) e é perpendicular ao plano xOz;
c) A(-2, 3, 4) e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y;
d) A(4, -1, 3) e tem a direção de $3\vec{i} - 2\vec{j}$;
e) A(3, -1, 3) e B(3, 3, 4).

20) Escrever equações paramétricas das retas que passam pelo ponto A(4, -5, 3) e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox, Oy e Oz.

21) Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

a) $r_1: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $r_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

b) $r_1: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$ e $r_2: y = \dfrac{z+1}{-1};\ x = 4$

c) $r_1: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\,t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $r_1: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-2}{3} \end{cases}$

22) Determinar o valor de n para que seja de 30° o ângulo entre as retas

a) $r_1: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$

b) $r_1: \begin{cases} y = nx - 1 \\ z = 2x \end{cases}$ e r_2 : eixo Oy

23) Sabendo que as retas r_1 e r_2 são ortogonais, determinar o valor de m para os casos:

a) $r_1: \begin{cases} x = 2mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{cases}$

b) $r_1: \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$ e r_2 : reta por A(1, 0, m) e B(-2, 2m, 2m)

24) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A e é simultaneamente ortogonal às retas r_1 e r_2, nos casos:

a) A(3, 2, -1) $\quad r_1: \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$

b) A(0, 0, 0) $\quad r_1: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ e $r_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 1 \\ z = 2 \end{cases}$

c) A é a interseção de r_1 e r_2

$r_1: x-2 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

25) Verificar se as retas são concorrentes e, em caso afirmativo, encontrar o ponto de interseção:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$

b) $r_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{4}$ e $r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases}$

c) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10 \end{cases}$ e $r_2: x = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$

d) $r_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 - 6t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -3 + 6h \\ y = 1 + 7h \\ z = -1 + 13h \end{cases}$

e) $r_1: (x, y, z) = (2, 4, 1) + t(1, -2, 3)$ e $r_2: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(4, 3, -2)$

f) $r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \\ z = -t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = 6 - x \\ z = 2 - x \end{cases}$

26) Calcular o valor de m para que sejam concorrentes as seguintes retas:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2: x - 5 = \dfrac{y}{m} = z + 1$

b) $r_1: \begin{cases} x = m - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ e $r_2: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-2}$

27) Dadas as retas

$$r_1 : \frac{x - 1}{2} = -y; \; z = 3 \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases},$$

encontrar equações reduzidas na variável x da reta que passa por A(0, 1, 0) e pelo ponto de interseção de r_1 com r_2.

28) Determinar na reta $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

um ponto eqüidistante dos pontos A(2,-1,-2) e B(1,0,-1).

29) Determinar os pontos da reta

r: $x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 3 + 2t$ que

a) distam 6 unidades do ponto A(2, 1, 3);

b) distam 2 unidades do ponto B(1, -1, 3).

30) Escrever equações reduzidas da reta que passa por A(1, 3, 5) e intercepta o eixo dos z perpendicularmente.

31) Escrever equações reduzidas na variável z, de cada uma das retas que satisfazem às condições dadas:

a) passa por A(4, -2, 2) e é paralela à reta r: $x = 2y = -2z$;

b) passa pela origem e é ortogonal a cada uma das retas

$$r : \frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-2} = 2z - 2 \quad \text{e} \quad s : x = -y = -z.$$

32) Determinar o ângulo que a reta que passa por A(3, -1, 4) e B(1, 3, 2) forma com a sua projeção sobre o plano xy.

33) Apresentar equações paramétricas da projeção da reta

$r : \begin{cases} y = 5x - 7 \\ z = -2x + 6 \end{cases}$ sobre o plano xy.

34) Dados o ponto A(3, 4, -2) e a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t, \end{cases}$$

a) determinar equações paramétricas da reta que passa por A e é perpendicular a r;

b) calcular a distância de A a r;

c) determinar o ponto simétrico de A em relação a r.

Respostas de Problemas Propostos

1) $(x, y, z) = (2, -3, 4) + t(-1, 2, -2)$, $C \in r$ e $D \notin r$.

2) $x = -1 + 2t$ $\quad y = 2 - 3t$ $\quad z = 3$

3) $x = 1$ $\quad y = 2$ $\quad z = 3 + t$

4) a) $(-1, 6, -10)$ b) $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -3)$ c) $(-4, 9, -16)$

5) $m = 13$, $n = -15$

6) a) $x = 1 + t$ $\quad y = -1 + 2t$ $\quad z = 2 - 2t$
   b) $x = 3$ $\quad y = 1 - 3t$ $\quad z = 4 - 2t$
   c) $x = 1$ $\quad y = 2 + t$ $\quad z = 3 - t$
   d) $x = 0$ $\quad y = t$ $\quad z = 0$ (eixo Oy)

7) a) $x = 2 + 2t$ $\quad y = 0$ $\quad z = 4$
   b) $x = 2t$ $\quad y = 3$ $\quad z = 0$
   c) $x = 2$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$
   d) $x = 0$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$
   e) $x = 2$ $\quad y = 3 + 3t$ $\quad z = 0$
   f) $x = 2t$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$

8) $P(2, 1, 9)$

9) $x = 2 + t$ $\quad y = -1 - \frac{3}{2}t$ $\quad z = 4 + 2t$

10) $x = 2 + t$ $\quad y = -1 + 4t$ $\quad z = 3 - 5t$

11) AB: $x = -1 + 3t$ $\quad y = 1$ $\quad z = 3 + t$ $\quad$ com $t \in [0,1]$
    AC: $x = -1 + 4t$ $\quad y = 1 - 2t$ $\quad z = 3 - 4t$ $\quad$ com $t \in [0,1]$
    BC: $x = 2 + t$ $\quad y = 1 - 2t$ $\quad z = 4 - 5t$ $\quad$ com $t \in [0,1]$
    r: $x = 2 + t$ $\quad y = 1 + t$ $\quad z = 4 + 3t$

12) Apenas P_1

13) $(5, -5, 8)$ e $(-9, 2, -20)$

14) $(1, \frac{4}{3}, -3)$ e $\vec{v} = (\frac{9}{2}, 2, 3)$

15) a) $y = 2x - 8$ e $z = \frac{5}{2}x - 13$ c) $y = -x + 1$ e $z = 3$
    b) $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$ e $z = -2x + 5$ d) $y = -3x + 6$ e $z = -4x + 3$

16) $x = -\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}$ e $y = 2z$

17) a) $(3, 9, 2)$ b) $(2, 7, 1)$ c) $(6, 15, 5)$

19) a) $\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

20) $\begin{cases} y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$

21) a) 60° b) 30° c) 30° d) $\theta = \text{arc cos}(\frac{2}{3}) \cong 48°11'$

22) a) 7 ou 1 b) $\pm\sqrt{15}$

23) a) $m = -\frac{7}{4}$ b) 1 ou $-\frac{3}{2}$

24) a) $x = 3 + t$ $y = 2 - t$ $z = -1$
b) $x = 2t$ $y = 6t$ $z = -5t$
c) $x = 2 + t$ $y = -1 - 5t$ $z = 3t$

25) a) (2, 1, 3) b) (1, 2, -2) c) reversas d) (3, 8, 12)
e) reversas f) coincidentes

26) a) -3 b) 4

27) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 3x \end{cases}$

28) $(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$

29) a) (4, 5, 7) e (0, -3, -1) b) $(\frac{17}{9}, \frac{7}{9}, \frac{25}{9})$ e (1, -1, 1)

30) $y = 3x$, $z = 5$

31) a) $\begin{cases} x = -2z + 8 \\ y = -z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5z \\ y = 4z \end{cases}$

32) $\theta = \text{arccos}\ (\frac{\sqrt{30}}{6})$

33) $x = 1 + t$ $y = -2 + 5t$ $z = 0$

34) a) $\begin{cases} x = 3 - 2h \\ y = 4 \\ z = -2 + h \end{cases}$ b) $\sqrt{20}$ c) (-5, 4, 2)

e daí resulta $t = -1$.

Substituindo este valor nas equações de r obtém-se

$$x = -1 + 2(-1) = -3 \qquad y = 5 + 3(-1) = 2 \qquad z = 3 - (-1) = 4$$

Logo, a interseção de r e π é o ponto (-3, 2, 4).

2) Determinar a interseção da reta

$$r: \begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{com o plano } \pi: x + 3y + 2z - 5 = 0$$

Solução

Se existir um ponto $I(x, y, z) \in r$ que também pertence a π, suas coordenadas devem verificar as equações dos três planos dados. Logo, I será a solução do sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se: $x = 2$, $y = -1$ e $z = 3$. Logo, I(2, -1, 3) é a interseção de r e π, ou seja, é a interseção dos três planos.

Problemas Propostos

Os problemas de 1 a 48 estão de acordo com a ordem do texto e os demais se constituem em ótimo reforço.

1) Seja o plano

$$\pi: 3x + y - z - 4 = 0$$

Calcular:

a) O ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3;
b) O ponto de π que tem abscissa 0 e cota 2;
c) O valor de k para que o ponto P(k, 2, k - 1) pertença a π;
d) O ponto de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota;
e) O valor de k para que o plano π_1: $kx - 4y + 4z - 7 = 0$ seja paralelo a π.

Nos problemas de 2 a 4, determinar uma equação geral do plano

2) paralelo ao plano π: $2x - 3y - z + 5 = 0$ e que contenha o ponto A(4,-2,1);
3) perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{e que contenha o ponto A(-1, 2, 3);}$$

4) que passa pelo ponto médio do segmento de extremos A(5,-1,4) e B(-1,-7,1) e seja perpendicular a ele.
5) Dada a equação geral do plano π: $3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

6) Sendo

$$\begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2h - 2t \end{cases}$$

equações paramétricas de um plano π, obter uma equação geral.

Nos problemas de 7 a 11, escrever uma equação geral e um sistema de equações paramétricas do plano determinado pelos pontos:

7) A(1, 0, 2), B(-1, 2, -1) e C(1, 1, -1).
8) A(0, 0, 0), B(1, 1, 5) e C(-1, 1, 1).
9) A(2, 0, -1), B(-2, 6, 3) e C(0, 3, 4).
10) A(2, 1, 0), B(-4, -2, -1) e C(0, 0, 1).
11) A(2, 1, 3), B(-3, -1, 3) e C(4, 2, 3).
12) Determinar o valor de α para que os pontos A(α, 1, 9), B(2, 3, 4), C(-4, -1, 6) e D(0, 2, 4) sejam coplanares.

Nos problemas de 13 a 18, determinar uma equação geral do plano nos seguintes casos:

13) O plano passa por A(2, 0, -2) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
14) O plano passa pelos pontos A(-3, 1, -2) e B(-1, 2, 1) e é paralelo à reta

$$r: \frac{x}{2} = \frac{z}{-3};\ y = 4.$$

15) O plano contém os pontos A(1, -2, 2) e B(-3, 1, -2) e é perpendicular ao plano $\pi_1: 2x + y - z + 8 = 0$.
16) O plano contém os pontos A(2, 1, 2) e B(1, -1, 4) e é perpendicular ao plano xOy.
17) O plano contém a reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano π_1: $2x + 2y - 3z = 0$

18) O plano contém o ponto A(4, 1, 1) e é perpendicular aos planos π_1: $2x + y - 3z = 0$ e π_2: $x + y - 2z - 3 = 0$.

Nos problemas de 19 a 22, os pares de retas r_1 e r_2 são paralelas ou concorrentes. Encontrar uma equação geral do plano que as contém.

19) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{z-1}{-1} \\ y = -1 \end{cases}$

20) $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

21) $r_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$

22) $r_1: \begin{cases} x = z \\ y = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

Nos problemas 23 e 24, determinar uma equação geral do plano que contenha o ponto e a reta dados:

23) A(4, 3, 2) e $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

24) A(1, -1, 2) e o eixo dos z

Nos problemas de 25 a 30, obter uma equação geral do plano

25) paralelo ao eixo dos z e que contenha os pontos A(0, 3, 4) e B(2, 0, -2);
26) paralelo ao eixo dos x e que contenha os pontos A(-2, 0, 2) e B(0, -2, 1);
27) paralelo ao eixo dos y e que contenha os pontos A(2, 3, 0) e B(0, 4, 1);
28) paralelo ao plano xOy e que contenha o ponto A(5, -2, 3);
29) perpendicular ao eixo dos y e que contenha o ponto A(3, 4, -1);
30) que contenha o ponto A(1, -2, 1) e o eixo dos x.
31) Representar graficamente os planos de equações:
a) $3x + 4y + 2z - 12 = 0$
b) $6x + 4y - 3z - 12 = 0$
c) $x + y - 3 = 0$
d) $2x + 3y - 6 = 0$
e) $3y + 4z + 12 = 0$
f) $2z - 5 = 0$
g) $y + 4 = 0$
h) $2x - y = 0$
32) Determinar o ângulo entre os seguintes planos
a) $\pi_1: x - 2y + z - 6 = 0$ e $\pi_2: 2x - y - z + 3 = 0$
b) $\pi_1: x - y + 4 = 0$ e $\pi_2: 2x - y - z = 0$
c) $\pi_1: x + 2y - 6 = 0$ e $\pi_2: y = 0$
d) $\pi_1: \begin{cases} x = 1 + h - t \\ y = h + 2t \\ z = h \end{cases}$ e $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2h \\ z = h + t \end{cases}$
33) Determinar o valor de m para que seja de 30° o ângulo entre os planos
$\pi_1: x + my + 2z - 7 = 0$ e $\pi_2: 4x + 5y + 3z + 2 = 0$
34) Determinar m de modo que os planos π_1 e π_2 sejam perpendiculares:
a) $\pi_1: mx + y - 3z - 1 = 0$ e $\pi_2: 2x - 3my + 4z + 1 = 0$

b) $\pi_1: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 2h + 3 \\ z = t - 2h + 1 \end{cases}$ e $\pi_2: 2mx + 4y - z - 1 = 0$

35) Dados a reta r e o plano π, determinar o valor de m para que se tenha I) $r // \pi$ e II) $r \perp \pi$, nos casos:

a) $r : x = -3 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 4t$ e $\pi : mx - y - 2z - 3 = 0$

b) $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, m, -1)$ e $\pi : 3x + 2y + mz = 0$

36) Verificar se a reta r está contida no plano π:

a) $r: \begin{cases} y = 4x + 1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ e $\pi : 2x + y - 3z - 4 = 0$

b) $r: x - 2 = \dfrac{y + 2}{2} = z + 3$ e $\pi : \begin{cases} x = h + t \\ y = -1 + 2h - 3t \\ z = -3 + h - t \end{cases}$

Nos problemas de 37 a 39, calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π:

37) $r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ e $\pi : mx + 2y - 3z + n = 0$

38) $r : \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -x + m \end{cases}$ e $\pi : 5x - ny + z + 2 = 0$

39) $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + mt \\ z = n - 4t \end{cases}$ e $\pi : 3x - 3y + z - 7 = 0$

Nos problemas de 40 a 42, estabelecer equações reduzidas na variável x da reta interseção dos planos:

40) $\pi_1: 3x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - 3z - 4 = 0$

41) $\pi_1: 3x - 2y - z - 1 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - z - 7 = 0$

42) $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$ e $\pi_2: x + y + 2z - 1 = 0$

Nos problemas 43 e 44, encontrar equações paramétricas da reta interseção dos planos:

43) $\pi_1: 3x + y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2: x - y - z - 3 = 0$

44) $\pi_1: 2x + y - 4 = 0$ e $\pi_2: z = 5$

Nos problemas de 45 a 47, determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π:

45) $r: x = 3t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = -t$ e $\pi: 2x + 3y - 2z - 7 = 0$

46) $r: \begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$ e $\pi: 2x - y + 3z - 9 = 0$

47) $r: \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 - 3k \end{cases}$ e $\pi: \begin{cases} x = 2 + h + 2t \\ y = -3 - h - t \\ z = 1 + 3h - 3t \end{cases}$

48) Sejam a reta r e o plano π dados por

$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $\pi: 2x + 4y - z - 4 = 0$. Determinar:

a) o ponto de interseção de r com o plano xOz;
b) o ponto de interseção de r com π;
c) equações da reta interseção de π com o plano xOy.

49) Dado o ponto P(5, 2, 3) e o plano $\pi: 2x + y + z - 3 = 0$, determinar
a) equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular a π;
b) a projeção ortogonal de P sobre o plano π;
c) o ponto P' simétrico de P em relação a π;
d) a distância de P ao plano π.

50) Determinar equações reduzidas na variável x, da reta que passa pelo ponto A(3, -2, 4) e é perpendicular ao plano $\pi: x - 3y + 2z - 5 = 0$.

51) Obter equações paramétricas das retas nos casos:
a) A reta passa por A(-1, 0, 2) e é paralela a cada um dos planos $\pi_1: 2x + y + z + 1 = 0$ e $\pi_2: x - 3y - z - 5 = 0$.
b) A reta passa pela origem, é ortogonal à reta r: $2x = y = 3z$ e paralela ao plano $\pi: x - y - z + 2 = 0$.

52) Escrever uma equação geral do plano que passa por A(-1, 2, -1) e é paralelo a cada uma das retas $r_1: y = x, z = 1 - 3x$ e $r_2: 2x = y = 3z$.

53) Achar equações paramétricas da reta r que passa por A, é paralela ao plano π e concorrente com a reta s, nos casos:
a) A(2, 1, -4), $\pi: x - y + 3z - 5 = 0$, s: $x = 1 + 3t, \quad y = 3 - t, \quad z = -2 - 2t$;
b) A(3, -2, -4), $\pi: 3x - 2y - 3z + 5 = 0$, s: $x = 2 + t, \quad y = -4 - 2t, \quad z = 1 + 3t$.
Determinar ainda o ponto de interseção entre r e s.

54) Dada a reta r: $x = 3 + t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = -1 + 2t$, determinar equações reduzidas das retas projeções de r sobre os planos xOy e xOz.

55) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A(3, 6, 4), intercepta o eixo Oz e é paralela ao plano $\pi: x - 3y + 5z - 6 = 0$.

Nos problemas de 56 a 62 apresentar uma equação geral dos planos:

56) O plano que passa por A(-1, 2, -4) e é perpendicular aos planos $\pi_1 : x + z = 2$ e $\pi_2 : y - z = 0$.

57) O plano que intercepta os eixos coordenados nos pontos de abscissa, ordenada e cota iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

58) O plano que passa por A(1, -3, 4) e intercepta os três semi-eixos de mesmo sinal a igual distância à origem do sistema.

59) O plano paralelo ao eixo dos z e que intercepta o eixo dos x em -3 e o dos y em 4.

60) O plano paralelo ao plano xOz e que intercepta o eixo dos y em -7.

61) O plano que passa pela origem e é paralelo às retas
r_1: $y = -x$, $z = 2$ e r_2: $(x, y, z) = (2, -1, 4) + t(1, 3, -3)$.

62) O plano que passa por A(-1, 2, 5) e é perpendicular à interseção dos planos
π_1: $2x - y + 3z - 4 = 0$ e π_2: $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

63) Estabelecer equações gerais dos planos bissetores dos ângulos formados pelos planos xOz e yOz.

64) Calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π:
a) r: $x = 2 - 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3$ e $\pi : 2mx - ny - z + 4 = 0$
b) r: $(x, y, z) = t(2, m, n) + (n, 2, 0)$ e $\pi : x - 3y + z = 1$

65) Calcular k de modo que a reta determinada por A(1, -1, 0) e B(k, 1, 2) seja paralela ao plano π: $x = 1 + 3h$, $y = 1 + 2h + t$, $z = 3 + 3t$.

Nos problemas 66 e 67, obter uma equação geral do plano que contenha o ponto e a reta dados:

66) A(3, -2, -1) e $r: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$

67) A(1, 2, 1) e a reta interseção do plano $x - 2y + z - 3 = 0$ com o plano yOz.

68) Mostrar que as retas
$r_1: \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$
são paralelas e encontrar uma equação geral do plano determinado por estas retas.

69) Determinar o ponto P de interseção dos planos $2x - y + z - 8 = 0$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$ e $3x - z - 3 = 0$ e uma equação geral do plano determinado por P e pela reta r : $x = y$, $z = 2y$.

70) Dadas as retas r_1: $y = -2x$, $z = x$ e r_2: $x = 2 - t$, $y = -1 + t$, $z = 4 - 2t$, determinar
a) o ponto P' simétrico de P(1, 0, 5) em relação à reta r_1;
b) o ponto O' simétrico de O(0, 0, 0) em relação à reta r_2.

71) Achar o ponto N, projeção ortogonal do ponto P(3, -1, -4) no plano determinado pelos pontos A(2, -2, 3), B(4, -3, -2) e C(0, -4, 5). Qual o ponto simétrico de P em relação a este plano?

72) O plano π: $3x + 2y + 4z - 12 = 0$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C. Calcular:

a) a área do triângulo ABC;

b) a altura deste triângulo relativa à base que está no plano xOz;

c) o volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) (1, 3, 2) b) (0, 6, 2) c) $k = \frac{1}{2}$ d) (2, -4, -2) e) $k = -12$

2) $2x - 3y - z - 13 = 0$ 3) $2x - 3y + 4z - 4 = 0$

4) $4x + 4y + 2z + 3 = 0$ 5) Existem infinitos. Um deles é: $x = t$, $y = h$, $z = -6 + 3h - 2t$

6) $2x - 2y - z + 4 = 0$

7) $3x + 6y + 2z - 7 = 0$ e $\begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = 2h + t \\ z = 2 - 3h - 3t \end{cases}$

8) $2x + 3y - z = 0$ e $\begin{cases} x = h - t \\ y = h + t \\ z = 5h + t \end{cases}$

9) $3x + 2y - 6 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 4h - 2t \\ y = 6h + 3t \\ z = -1 + 4h + 5t \end{cases}$

10) $x - 2y = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 6h - 2t \\ y = 1 - 3h - t \\ z = -h + t \end{cases}$

11) $z - 3 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 5h + 2t \\ y = 1 - 2h + t \\ z = 3 \end{cases}$

12) $\alpha = 3$

13) $3x - 2y - 5z - 16 = 0$

14) $3x - 12y + 2z + 25 = 0$

15) $x - 12y - 10z - 5 = 0$

16) $2x - y - 3 = 0$

17) $x - 7y - 4z + 17 = 0$

18) $x + y + z - 6 = 0$

19) $x + y + 3z - 3 = 0$

20) $5x - 2y + 4z - 21 = 0$

21) $6x + 6y - z + 9 = 0$

22) $2x + y - 2z + 3 = 0$

23) $x - 9y - 5z + 33 = 0$

24) $x + y = 0$

25) $3x + 2y - 6 = 0$

26) $y - 2z + 4 = 0$

27) $x + 2z - 2 = 0$

28) $z = 3$

29) $y = 4$

30) $y + 2z = 0$

32) a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) arc cos $\frac{2}{\sqrt{5}}$ d) arc cos $\frac{3}{\sqrt{14}}$

33) 1 ou 7

34) a) -12 b) 2

35) a) 10 e $-\frac{1}{2}$ b) -6 e não existe valor para m

36) a) sim b) sim

37) m = 10 e n = 14

38) m = -4 e n = 2

39) $m = \frac{5}{3}$ e n = -2

40) $\begin{cases} y = -11x + 11 \\ z = -7x + 6 \end{cases}$

41) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ z = 2x - 4 \end{cases}$

42) $\begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 1 \end{cases}$

43) $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t - 2 \end{cases}$

44) $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \\ z = 5 \end{cases}$

45) (6, -3, -2)

46) (2, -8, -1)

47) (1, -3, 7)

48) a) $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ b) $(\frac{18}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11})$ c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ z = 0 \end{cases}$

49) a) x = 5 + 2t, y = 2 + t, z = 3 + t b) (1, 0, 1) c) (-3, -2, -1) d) $2\sqrt{6}$

50) y = -3x + 7, z = 2x - 2

51) a) x = 2t - 1, y = 3t, z = -7t + 2 b) x = 4t, y = -5t, z = 9t

52) 20x - 11y + 3z + 45 = 0

53) a) x = 2 + 7t, y = 1 + t, z = -4 - 2t e $\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, -5\right)$

b) x = 3 - 2t, y = -2 + 3t, z = -4 - 4t e (-5, 10, -20)

54) $y = -2x + 7, \quad z = 0$ e $z = 2x - 7, \quad y = 0$
55) $x = 3 + t, \quad y = 6 + 2t, \quad z = 4 + t$
56) $x - y - z - 1 = 0$
57) $10x - 5y + 6z + 30 = 0$
58) $x + y + z - 2 = 0$
59) $4x - 3y + 12 = 0$
60) $y = -7$
61) $3x + 3y + 4z = 0$
62) $2x - 11y - 5z + 49 = 0$
63) $x + y = 0$ e $x - y = 0$
64) a) $m = -\frac{1}{8}, \quad n = -\frac{1}{2}$ b) $m = 3, \quad n = 7$
65) 3
66) $2x + 3y + z + 1 = 0$
67) $6x - 2y + z - 3 = 0$
68) $4x + 2y - 3z + 5 = 0$
69) $P(2, -1, 3), \quad 5x + y - 3z = 0$
70) a) $P'(1, -4, -3)$ b) $O'(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$
71) $N(5, -2, -3), \quad (7, -3, -2)$
72) a) $3\sqrt{29}$ u.a. b) $\frac{6\sqrt{29}}{5}$ u.c. c) 12 u.v.