



UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS  
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação P1  
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Alimentos

17/05/2018

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a): .....

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o domínio das funções e calcule os limites abaixo:

(a)  $f(x) = \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(b)  $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

2. Sabendo que  $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$  para  $0 < x < 3$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

3. Dados  $f(x) = x^3 - 2x - \cos x$  e  $I = (0, \frac{\pi}{2})$ :

(a) Determine se a função  $f$  é contínua no intervalo  $I$ .

(b) Mostre que a função  $f$  possui uma raiz no intervalo  $I$ .

4. Calcule a derivada das funções abaixo:

(a)  $f(x) = \frac{5x^3 - 3 \sin x}{x}$

(b)  $g(x) = \sin(x \ln x)$

5. Dada a equação implícita  $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ , calcule  $\frac{dy}{dx}$ .

*Boa Prova!*

① a)  $\sqrt{9+x}$  está definido se  $9+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -9$ . Assim, o domínio de  $f(x) = \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$  é o conjunto  $D = [-9, 0) \cup (0, \infty)$ . Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x} \cdot \frac{\sqrt{9+x} + 3}{\sqrt{9+x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9+x} + 3} = \frac{1}{6}$$

b) A função  $\sin(x)$  está def. para todo  $x \in \mathbb{R}$ , logo  $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$  tem domínio  $D = \mathbb{R} - \{0\}$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$= \lim_{x^2 \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 1 \cdot 0 = 0, \text{ pois } x \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 \rightarrow 0.$$

② Temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

logo, pelo Teo. do confronto,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

③ a)  $F(x) = x^3 - 2x$  é polinomial, logo é contínua em todo  $x \in \mathbb{R}$ .  
 $G(x) = \cos x$  também é contínua em todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Como a soma de funções contínuas é contínua, temos que  $f(x) = x^3 - 2x - \cos x$  é contínua em todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular, é contínua em  $I$ .

b) Observe que:

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{8} - \pi \approx 0,73 > 0$$

Pelo Teo. do valor médio, existe  $c \in (0, \frac{\pi}{2})$  tal que  $f(c) = 0$ .

④ a)  $f(x) = \frac{5x^3 - 3\sin x}{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(15x^2 - 3\cos x)x - (5x^3 - 3\sin x)}{x^2} = \frac{15x^3 - 3x\cos x - 5x^3 + 3\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{10x^3 - 3x\cos x + 3\sin x}{x^2}$$

b)  $g(x) = \sin(x \ln x)$

$$\Rightarrow g'(x) = \cos(x \ln x) \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \cos(x \ln x) \cdot (\ln x + 1)$$

⑥  $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} [x^4(x+y)] = \frac{d}{dx} [y^2(3x-y)]$$

$$\Rightarrow 4x^3(x+y) + x^4\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2y \frac{dy}{dx} (3x-y) + y^2\left(3 - \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow 4x^3(x+y) + x^4 + x^4 \frac{dy}{dx} = 2y(3x-y) \frac{dy}{dx} + 3y^2 - y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x^4 \frac{dy}{dx} - 2y(3x-y) \frac{dy}{dx} + y^2 \frac{dy}{dx} = 3y^2 - 4x^3(x+y) - x^4$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 4x^3(x+y) - x^4}{x^4 - 2y(3x-y) + y^2} = \frac{3y^2 - 4x^4 - 4x^3y - x^4}{x^4 - 6xy + 2y^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 - 6xy + 3y^2}$$