Análise Numérica

Aula 7 — Eliminação de Gauss

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

6 de fevereiro de 2017

Objetivo

Resolver sistemas lineares:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 12 \\ 3x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Operações elementares

- Multiplicar uma linha por uma constante: $\lambda L_i \to L_i$
- Somar uma linha com o produto de outra por uma constante: $L_i + \lambda L_j \to L_i$
- Trocar duas linhas de posição: $L_i \leftrightarrow L_j$

Eliminação de Gauss

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 12 \\ 3x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Fazendo $(-1)L_1 \to L_1$ e $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & = & -12 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Fazendo $L_2 - 2L_1 \to L_2$ e $L_3 - 3L_1 \to L_3$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & = & -12 \\ & & 7y & + & z & = & 23 \\ & & 10y & + & 3z & = & 36 \end{array}\right.$$

Eliminação de Gauss

Fazendo $L_3 - \frac{10}{7}L_2 \rightarrow L_3$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & - & 2z & = & -12 \\ & & 7y & + & z & = & 23 \\ & & & & \frac{11}{7}z & = & \frac{22}{7} \end{array}\right.$$

logo,

$$z = \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{11} \Rightarrow z = 2$$

$$7y + 2 = 23 \Rightarrow y = 3$$

$$x - 9 - 4 = -12 \Rightarrow x = 1$$

Eliminação de Gauss

O sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 12 \\ 3x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

pode ser escrito como $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Como precisamos apenas dos coeficientes das equações, podemos representar o sistema através da matriz aumentada:

$$[A; b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

e executar as operações sobre as linhas dessa matriz.

Eliminação de Gauss

Fazendo$(-1)L_1 \to L_1$ e $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -12 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_2 - 2L_1 \to L_2$ e $L_3 - 3L_1 \to L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 7 & 1 & 23 \\ 0 & 10 & 3 & 36 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_3 - \frac{10}{7}L_2 \to L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 7 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{22}{7} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

De modo geral:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

ou seja

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

Algoritmo

Se $a_{11} \neq 0$, fazemos $L_j - (a_{j1}/a_{11})L_1 \to L_j$[1], para cada $j = 2, \dots, n$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

Repetimos o processo acima a partir da linha 2. Ao final do processo, teremos uma matriz escalonada.

[1] Isso aferará todos os valores das linhas $2, 3, \dots, n$, mas por simplicidade da notação, continuaremos utilizando a_{ij} para denotar a entrada localizada na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Algoritmo

A etapa de substituição retrocedida (*backward substitution*) é dada da seguinte forma:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e portanto

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{a_{i,n+1} - a_{in}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} \\ &= \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \end{aligned}$$

Implementação

```
# Entrada:
#     n = dimensao da matriz
#     A = [a_ij], 1 <= i <= n, 1 <= j <= n+1, matriz aumentada
# Saida:
#     [x_1, x_2, ..., x_n] solucao do sistema
#     ou informacao de que o sistema nao possui unica solucao

# escalonamento
para i = 1, ..., n-1
    seja p, i <= p <= n, o menor inteiro tal que a_pi ~= 0
    se p nao for encontrado saia, pois nao existe solucao unica
    se p ~= i troque as linhas L_p e L_i de posicao
    para j = i+1, ..., n
        m_ij = a_ij / a_ii
        execute (L_j - m_ij * L_i) -> L_j
    fim
    se a_nn == 0 saia, pois nao existe solucao unica
fim

# backward substitution
x_n = a_n,n+1 / a_nn
para i = n-1, ..., 1
    s = 0
    para j = i+1, ..., n
        s = s + a_ij * x_j
    fim
    x_i = (a_i,n+1 - s) / a_ii
fim
saida, solucao [x_1, x_2, ..., x_n]
```

Contando operações

Temos $n-i$ divisões na linha 14 e $(n-i+1)(n-i)$ multiplicações na linha 15.

Durante toda etapa de eliminação são

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)+(n-i+1)(n-i)=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2)=\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

divisões e multiplicações.

Contando operações

Além disso, temos

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)=\frac{n^3-n}{3}$$

somas e subtrações durante a etapa de eliminação.

Contando operações

Na etapa de substituição, temos 1 divisão na linha 21 e $n-1$ na linha 27. Além disso, $n-i$ multiplicações na linha 25, totalizando

$$1+(n-1)+\sum_{i=1}^{n-1} n-i = \frac{n^2-n}{2}$$

divisões e multiplicações.

Contando operações

E

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} n-i-1 = \frac{n^2-n}{2}$$

somas e subtrações.

Contando operações

Totalizando

$$* \text{ e } /: \ \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n^3 + 6n^2 - 2n}{6}$$

$$+ \text{ e -}: \ \frac{n^3 - n}{3} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}$$

Contando operações

Quando o número n de equações cresce, o número de operações cresce em proporção $\frac{n^3}{3}$

n	* e /	+ e -
10	430	375
100	343.300	338.250
1000	334.333.000	333.832.500

Trabalho

Leia a Seção 6.2: Estratégias de Pivoteamento e descreva em duas páginas os problema e vantagens das três estratégias de pivoteamento: parcial, parcial escalada e completa. Ilustre os problemas e como eles são resolvidos pelas estratégias através de exemplos (diferentes do livro!).