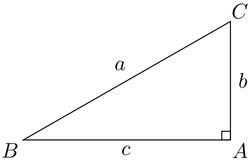
Cap. 9 – Funções trigonométricas

01/07/2022

Introdução

Num triângulo retângulo, tem-se:

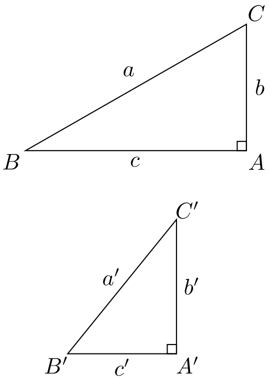


$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \qquad \cos \hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a}$$

Introdução

Dados dois triângulos retângulos com um ângulo agudo $\hat{B}$ comum:



Como $\hat{B} = \hat{B}'$ e os triângulos são retângulos, tem-se $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ semalhantes. Logo

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = \cos \hat{B}'$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \operatorname{sen} \hat{B}'$$

Assim, o valor do cosseno e do seno dependem apenas do ângulo e não do triângulo.

Introdução

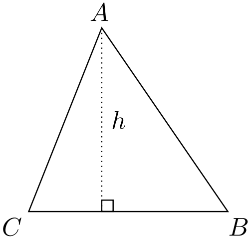
Sabendo o valor de $\cos \hat{B}$ e a medida da hipotenusa do triângulo, podemos determinar as medidas dos catetos:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos \hat{B}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Introdução

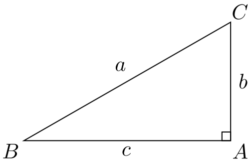
Dado um triângulo qualquer:



$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{h}{\overline{AB}} \Rightarrow h = \overline{AB} \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$$

Introdução

Voltando ao triângulo retângulo:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1$$

Assim, tendo uma tabela de senos é possível obter os valores do cosseno e vice-versa.

Introdução

A palavra cosseno significa seno do complemento:

$$\cos \alpha = \text{sen}(90^\circ - \alpha)$$

Além disso, dado um ângulo agudo $\hat{B}$:

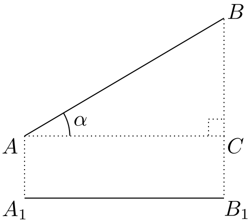
$$0 < \cos \hat{B} = \frac{b}{a} < 1$$

$$0 < \text{sen}\, \hat{B} = \frac{c}{a} < 1$$

pois $a, b, c > 0$, $b < a$ e $c < a$ (hipotenusa é o maior lado).

Introdução

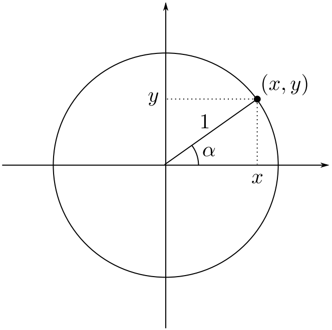
Se A_1B_1 é a projeção de AB então $\overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha$, onde α é o ângulo entre AB e A_1B_1. De fato,



$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha$$

Função de Euler e medida de ângulo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

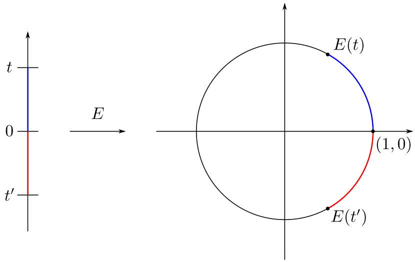


$$\begin{matrix} \operatorname{sen} \alpha = y \\ \cos \alpha = x \end{matrix} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Função de Euler e medida de ângulo

Definimos $E : \mathbb{R} \to C$ como

- $E(0) = (1, 0)$;
- Se $t > 0$, percorremos sobre C um caminho de comprimento t no sentido anti-horário. $E(t)$ é o ponto final do caminho;
- Se $t < 0$, percorremos sobre C um caminho de comprimento $|t|$ no sentido horário. $E(t)$ é o ponto final do caminho.



Função de Euler e medida de ângulo

$$E(t + 2k\pi) = E(t), \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

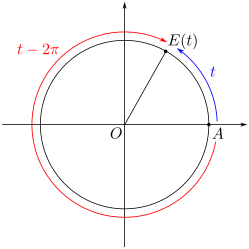
De fato, quando t descreve um intervalo de comprimento 2π (comprimento de C), sua imagem $E(t)$ dá uma volta completa sobre C.

Reciprocamente, se $t \neq t'$ e $E(t) = E(t')$, temos $t' = t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pois $E(t) = E(t')$ significa que ao caminhar de t a t' suas imagens vão de $E(t)$ a $E(t')$ dando (pelo menos) uma volta completa em C no sentido anti-horário se $t < t'$ ou horário de $t > t'$.

Função de Euler e medida de ângulo

Pondo $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e $B = E(t)$, dizemos que o ângulo $A\hat{O}B$ mede t radianos. Assim:

- Para $t > 0$ o ângulo $A\hat{O}B$ tem medida positiva e se $t < 0$ o ângulo tem medida negativa (orientação);
- O ângulo $A\hat{O}B$ é bem definido a menos de um múltiplo 2π; $E(t) = E(t + 2k\pi)$, logo um ângulo de t radianos é também um ângulo de $t + 2k\pi$ radianos.



Função de Euler e medida de ângulo

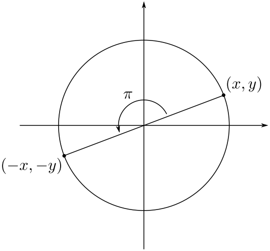
- $A\hat{O}B$ mede 1 radiano $\Leftrightarrow$ o arco $\widehat{AB}$ de C (de raio 1) tem comprimento 1. Numa circunferência de raio r, um ângulo central mede $\frac{l}{r}$ radiano quando l é o comprimento do arco submetido por esse ângulo;
- A medida de $A\hat{O}B$ em radianos pode ser dada por $\frac{2a}{r^2}$, onde a é a área do setor AOB.
  De fato, a área do setor é uma função crescente do comprimento do arco $\widehat{AB}$ e tomando $\widehat{AB'}$ n vezes maior que $\widehat{AB}$ a área do setor AOB' é n vezes maior que a área do setor AOB (são n fatias iguais a AOB, $a(nl) = na(l)$).
  Assim, pelo Teo. Fund. da Proporcionalidade, a área do setor é função linear do comprimento l do arco, $a = cl$, com c constante.
  Tomando o setor como todo o círculo de raio r, tem-se $a = \pi r^2$ e $l = 2\pi r$, logo $\pi r^2 = c2\pi r \Rightarrow c = \frac{r}{2} \therefore a = \frac{r}{2}l$.
  Assim, $\frac{l}{r} = \frac{2a}{r^2}$.

Função de Euler e medida de ângulo

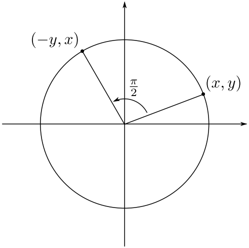
Dizemos que o ângulo $A\hat{O}B$ mede s graus quando o arco $\widehat{AB}$ mede $\frac{2\pi}{360}s$ radianos. Assim, como a circunferência unitária mede 2π, temos que sua medida em graus é $360 \Rightarrow 2\pi$ rad $= 360^\circ$.

Função de Euler e medida de ângulo

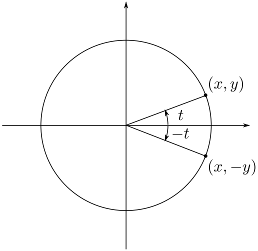
Simetrias da função $E(t)$:



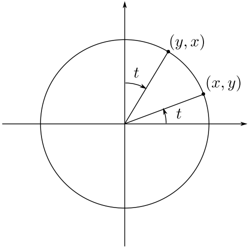
$E(t+\pi) = (-x, -y)$



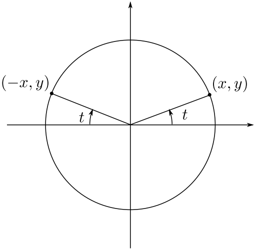
$E\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = (-y, x)$



$E(-t) = (x, -y)$



$E\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = (y, x)$



$E(\pi - t) = (-x, y)$