1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral III — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Alimentos 10/04/2019

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o maior domínio da função $f(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$ e os pontos onde ela é contínua.

2. Calcule todas as segundas derivadas da função $z = xe^{-2y}$.

3. Dada $f(x,y) = x\ \mathrm{sen}\,(x+y)$:
   (a) Determine a equação do plano tangente a f em $P = (-1,1,0)$.
   (b) Determine k para que o ponto $Q = (-1.1, 0.9, k)$ pertença ao plano tangente a f em P.

4. Dada $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$:
   (a) Encontre os pontos críticos de f.
   (b) Classifique os pontos críticos de f em máximo local, mínimo local ou ponto de sela.
   (c) Determine se f é crescente ou decrescente no ponto $(0,1)$ na direção do vetor $(1,0)$.

5. Use o método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar as dimensões da caixa retangular com tampa e volume 125cm^3 que tem a menor área de superfície possível.

Boa Prova!

① f está bem definida para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $1-x^2-y^2 \neq 0$, ou seja, $x^2+y^2 \neq 1$. Assim, o domínio de f é $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\neq 1\}$. Além disso, f é contínua em todos os pontos de D, pois é quociente de funções contínuas (polinomiais em duas variáveis).

② $z = x e^{-2y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2e^{-2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x e^{-2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2e^{-2y} \quad e \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x e^{-2y}$$

③ a) $f(x,y) = x \operatorname{sen}(x+y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) + x\cos(x+y) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \operatorname{sen} 0 + (-1)\cos 0 = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = (-1)\cos 0 = -1$$

e $f(-1,1) = (-1)\operatorname{sen} 0 = 0$.

Logo, o plano tangente a f em $(-1,1,0)$ tem equação

$$z - 0 = (-1)(x-(-1)) + (-1)(y-1) \Rightarrow z = -x-y$$

b) Q deve satisfazer a eq. do plano, ou seja,

$$k = -(-1.1) - 0.9 \Rightarrow k = 0.2$$

4 a) $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6y \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x + 24y^2 .$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ estão definidas para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, os pontos críticos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 & (\div 3) \\ 24y^2 - 6x = 0 & (\div 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ 4y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 & (1) \\ x = 4y^2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1):

$$(4y^2)^2 - 2y = 0 \Rightarrow 16y^4 - 2y = 0 \Rightarrow 2y(8y^3 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2y = 0 \quad ou \quad 8y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad ou \quad y^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow y = 0 \quad ou \quad y = \frac{1}{2} .$$

Avaliando em (2):

$y = 0 \Rightarrow x = 0$

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$

$\therefore$ $(0,0)$ e $(1, \frac{1}{2})$ são os pontos críticos de f.

b) Aplicando o teste da segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -6 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 48y$$

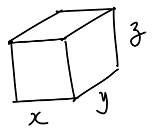
$$\therefore D(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{vmatrix} = 288xy - 36$$

$\Rightarrow D(0,0) = -36 < 0$ $\therefore$ $(0,0)$ é ponto de sela

e $D(1, \frac{1}{2}) = 144 - 36 = 108 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, \frac{1}{2}) = 6 > 0$ $\therefore$ $(1, \frac{1}{2})$ é ponto de mínimo local.

c) Calculando a derivada direcional de f em $(0,1)$ na direção de $u=(1,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot u = (-6,24)\cdot(1,0) = -6 < 0 \quad \therefore \ f \text{ é decrescente.}$$

⑤ 

$$f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz \quad \text{(área)}$$

$$g(x,y,z) = xyz = 125 \quad \text{(volume)}$$

$$x,y,z>0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (2y+2z,\ 2x+2z,\ 2x+2y)$$

e $\nabla g(x,y,z) = (yz,\ xz,\ xy)$

Aplicando o método dos Mult. de Lagrange, queremos as soluções do sistema

$$\begin{cases} 2y+2z = \lambda yz & (\times x) \\ 2x+2z = \lambda xz & (\times y) \\ 2x+2y = \lambda xy & (\times z) \\ xyz = 125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy+2xz = \lambda xyz & (1) \\ 2xy+2yz = \lambda xyz & (2) \\ 2xz+2yz = \lambda xyz & (3) \\ xyz = 125 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (2), temos: $\cancel{2xy} + 2xz = \cancel{2xy} + 2yz \Rightarrow \cancel{2}xz = \cancel{2}yz$

$$\Rightarrow xz = yz \overset{(z>0)}{\Rightarrow} x = y.$$

De (2) e (3), temos: $2xy + \cancel{2yz} = 2xz + \cancel{2yz} \Rightarrow \cancel{2}xy = \cancel{2}xz$

$$\Rightarrow xy = xz \overset{(x>0)}{\Rightarrow} y = z.$$

De (4): $x^3 = 125 \overset{(x>0)}{\Rightarrow} x = 5 \Rightarrow y = 5$ e $z = 5$.