UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Civil 16/08/2017

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a):. . . . .

1. Dado o conjunto $\{(1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, verifique:

   (a) Os vetores são LI ou LD?

   (b) Podemos escrever qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores dados?

   (c) Os vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$?

2. Dada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (-x+z, -2x+2z, -3x+\overset{3y}{\cancel{2z}})$

   (a) Calcule a matriz canônica de T.

   (b) Calcule o núcleo e a imagem de T.

   (c) T é injetiva? E sobrejetiva?

3. Calcule a matriz canônica da projeção ortogonal de vetores de $\mathbb{R}^2$ sobre a reta $y = x$.

4. Combine as matrizes de rotação de 45° e 60° para obter a matriz de rotação de 105°.

5. Dada $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

   (a) Seus autovalores.

   (b) Seus autovetores.

   (c) Uma matriz P que diagonaliza A.

   (d) $P^{-1}AP$.

Boa Prova!

P2 Eng. Civil – Álgebra Linear e Geom. Analítica

1 a) Fazendo a comb. linear nula dos vetores:

$$a(1,2,3)+b(3,2,1)+c(1,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow (a+3b+c,\ 2a+2b+c,\ 3a+b+c)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3b+c=0 & (1) \\ 2a+2b+c=0 & (2) \\ 3a+b+c=0 & (3) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow -a+b=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$

substituindo em (3): $3a+a+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-4a}$

Logo, o sistema tem infinitas soluções e portanto os vetores são LD.

b) Como o conjunto de vetores é formado por 3 vetores LD de $\mathbb{R}^3$, esse conjunto não pode gerar $\mathbb{R}^3$.

c) Pelos itens a) e b), o conjunto não é base de $\mathbb{R}^3$.

2 a) $[T]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) O núcleo de T é formado pelos vetores (x,y,z) tais que

$T(x,y,z)=(0,0,0) \Rightarrow (-x+z,\ -2x+2z,\ -3x+3z)=(0,0,0)$

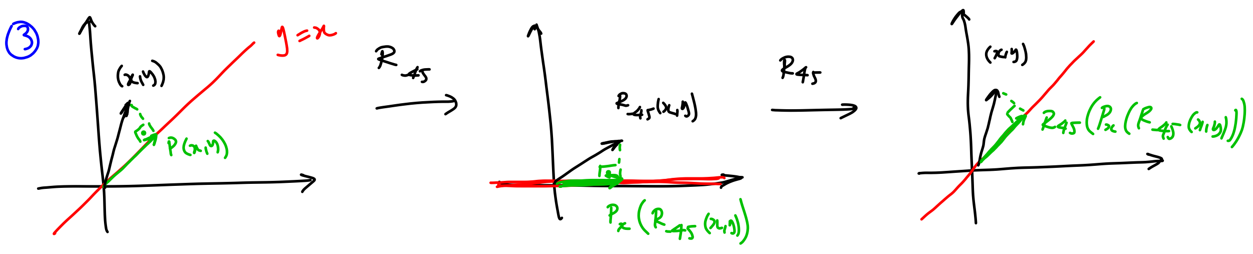
$$\Rightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ -2x+2z=0 \\ -3x+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=x} \quad \therefore N(T)=\{(x,y,x);\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

A imagem de T é formada pelos vetores

$(-x+z,-2x+2z,-3x+3z)=(z-x)(1,2,3)$

Logo, a imagem de T é gerada pelo vetor $(1,2,3)$, isto é, é a reta que passa na origem e tem a direção do vetor $(1,2,3)$.

c) Como $N(T)\neq\{(0,0,0)\}$, T não é injetiva. Além disso, T não é sobrejetiva, pois $Im(T)\neq\mathbb{R}^3$.



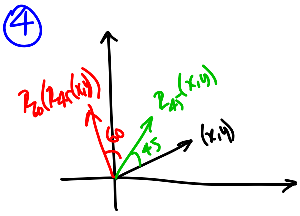
$P(x,y) = R_{45}(P_x(R_{-45}(x,y)))$, onde R_{45} e R_{-45} são as rot. de $45°$ e $-45°$, respectivamente, e P_x é a proj. ortogonal sobre o eixo x. Logo,

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\operatorname{sen} 45 \\ \operatorname{sen} 45 & \cos 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-45) & -\operatorname{sen}(-45) \\ \operatorname{sen}(-45) & \cos(-45) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\therefore P(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right).$

④



$$R_{105} = R_{60}(R_{45}(x,y)) = R_{45}(R_{60}(x,y))$$

$$\therefore [R_{105}] = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

⑤ a) Calculando os autovalores: $\det(A-\lambda I)=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)^2(3-\lambda) - (3-\lambda) = 0 \Rightarrow (3-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 1\right] = 0$$

$\Rightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) = 0$, logo os autovalores são 3 e 5.

b) Autovetores associados a $\lambda=3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = -x}$$

$\therefore (x, y, -x)$, $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, são os autovetores assoc. a $\lambda = 3$.

Autovetores associados a $\lambda = 5$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \boxed{z = x} \\ \Rightarrow 4x = 2y \Rightarrow \boxed{y = 2x} \\ \end{matrix}$$

$\therefore (x, 2x, x)$, $x \neq 0$, são os autovetores associados a $\lambda = 5$

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$