

Análise Numérica

Aula 6 — Spline

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

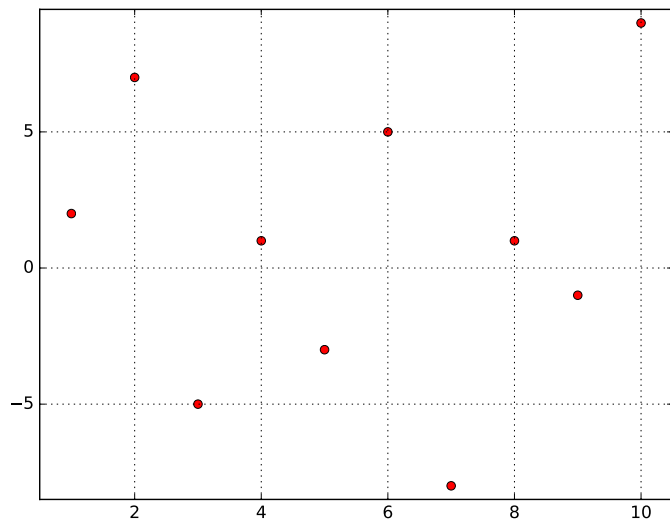
23 de janeiro de 2017

Motivação

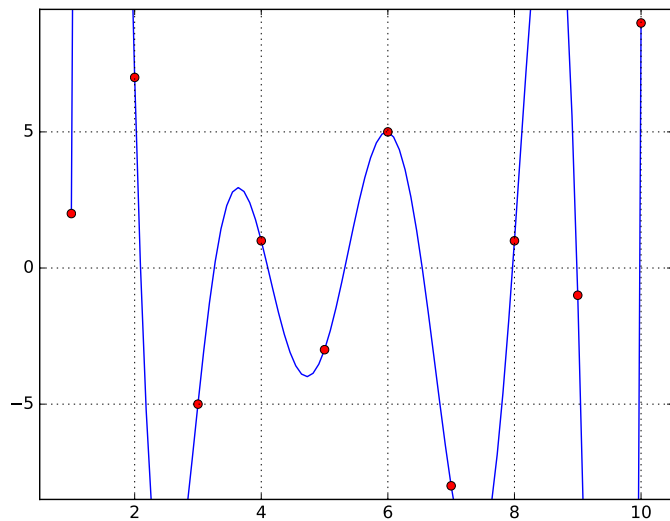
Queremos interpolar $n + 1$ pontos:

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$$

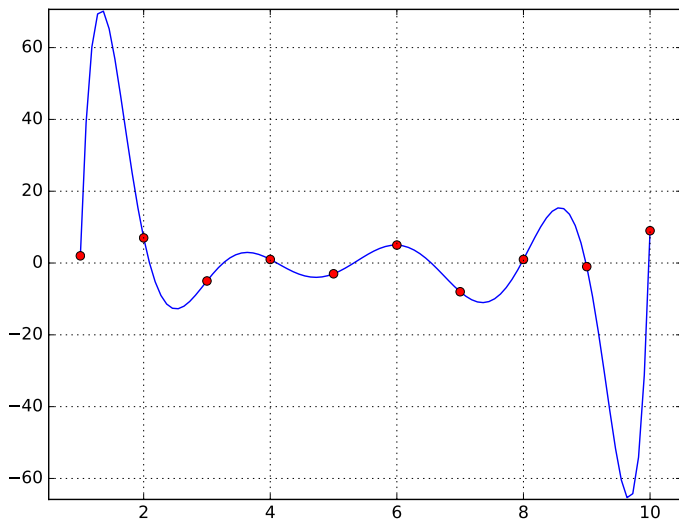
Motivação



Interpolação de Lagrange



Interpolação de Lagrange



Interpolação de Lagrange

Problema:

Grande variação dos valores do polinômio.

Spline

Vamos dividir em subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ e utilizar polinômios aproximantes para cada subintervalo.

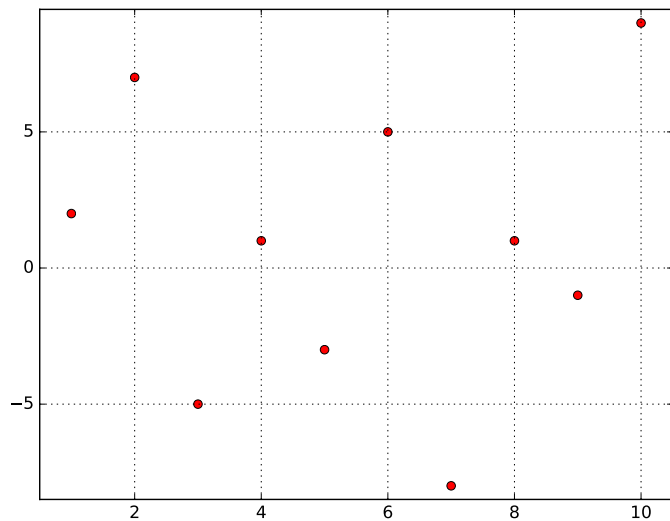
Chamamos **aproximação polinomial por partes**.

Spline linear

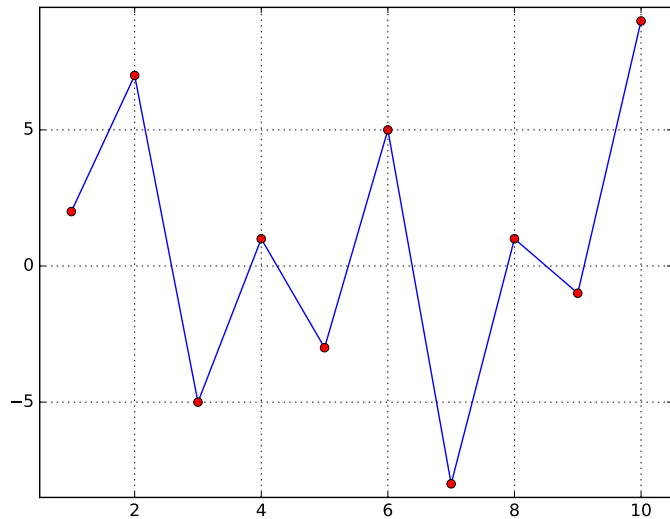
Utilizamos segmentos de reta em cada subintervalo, para cada $i = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$s_i(x) = a_i x + b_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Spline linear



Spline linear



Spline linear

Problema:

A aproximação de f no intervalo $[x_0, x_n]$ não é diferenciável em todos os pontos.

Alternativa

Podemos utilizar polinômios de grau 2 em cada subintervalo:

$$s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

com $i = 0, 1, \dots, n - 1$

Alternativa

Temos $3n$ incógnitas

$$s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ e } i = 0, 1, \dots, n-1$$

Alternativa

Temos $3n$ incógnitas

$$s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ e } i = 0, 1, \dots, n-1$$

Interpolação:

$$\begin{array}{lll} s_0(x_0) = f(x_0) & & \\ s_0(x_1) = f(x_1) & \text{e} & s_1(x_1) = f(x_1) \\ s_1(x_2) = f(x_2) & \text{e} & s_2(x_2) = f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-2}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) & \text{e} & s_{n-1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) \\ s_{n-1}(x_n) = f(x_n) & & \end{array}$$

Alternativa

Suavidade:

$$s'_0(x_1) = s'_1(x_1)$$

$$s'_1(x_2) = s'_2(x_2)$$

$$\vdots$$

$$s'_{n-2}(x_{n-1}) = s'_{n-1}(x_{n-1})$$

Temos $3n$ incógnitas e $3n - 1$ equações.

Alternativa

Suavidade:

$$s'_0(x_1) = s'_1(x_1)$$

$$s'_1(x_2) = s'_2(x_2)$$

$$\vdots$$

$$s'_{n-2}(x_{n-1}) = s'_{n-1}(x_{n-1})$$

Temos $3n$ incógnitas e $3n - 1$ equações.

Temos que encontrar mais uma restrição (equação).

Spline cúbica

Utilizando polinômios de grau 3 em cada subintervalo:

$$s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad x \in [x_i, x_{n+1}]$$

ou

$$s_i(x) = a_i (x - x_i)^3 + b_i (x - x_i)^2 + c_i (x - x_i) + d_i, \quad x \in [x_i, x_{n+1}]$$

com $i = 0, 1, \dots, n - 1$

Temos $4n$ incógnitas.

Spline cúbica

Interpolação:

$$\begin{array}{lll} s_0(x_0) = f(x_0) & & \\ s_0(x_1) = f(x_1) & \text{e} & s_1(x_1) = f(x_1) \\ s_1(x_2) = f(x_2) & \text{e} & s_2(x_2) = f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-2}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) & \text{e} & s_{n-1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) \\ s_{n-1}(x_n) = f(x_n) & & \end{array}$$

Suavidade:

$$\begin{array}{l} s'_0(x_1) = s'_1(x_1) \\ s'_1(x_2) = s'_2(x_2) \\ \vdots \\ s'_{n-2}(x_{n-1}) = s'_{n-1}(x_{n-1}) \end{array}$$

Spline cúbica

Suavidade da derivada:

$$\begin{aligned}s_0''(x_1) &= s_1''(x_1) \\ s_1''(x_2) &= s_2''(x_2) \\ &\vdots \\ s_{n-2}''(x_{n-1}) &= s_{n-1}''(x_{n-1})\end{aligned}$$

Spline cúbica

Suavidade da derivada:

$$\begin{aligned}s_0''(x_1) &= s_1''(x_1) \\ s_1''(x_2) &= s_2''(x_2) \\ &\vdots \\ s_{n-2}''(x_{n-1}) &= s_{n-1}''(x_{n-1})\end{aligned}$$

Temos $4n$ incógnitas e $4n - 2$ equações.

Spline cúbica com fronteira livre (natural)

$$s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n) = 0$$

x_0 e x_n são candidatos a pontos de inflexão.

Spline cúbica com fronteira amarrada

$$s'_0(x_0) = f'(x_0) \text{ e } s'_{n-1}(x_n) = f'(x_n)$$

Precisamos do valor de f' nos pontos extremos do intervalo.

Exemplo

Spline cúbica com fronteira livre passando por $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$.

Exemplo

Spline cúbica com fronteira livre passando por $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$.

$$s_0(x) = a_0(x-1)^3 + b_0(x-1)^2 + c_0(x-1) + d_0, \quad x \in [1, 2]$$

$$s_1(x) = a_1(x-2)^3 + b_1(x-2)^2 + c_1(x-2) + d_1, \quad x \in [2, 3]$$

Exemplo

Spline cúbica com fronteira livre passando por $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$.

$$s_0(x) = a_0(x-1)^3 + b_0(x-1)^2 + c_0(x-1) + d_0, \quad x \in [1, 2]$$

$$s_1(x) = a_1(x-2)^3 + b_1(x-2)^2 + c_1(x-2) + d_1, \quad x \in [2, 3]$$

$$s'_0(x) = 3a_0(x-1)^2 + 2b_0(x-1) + c_0, \quad x \in [1, 2]$$

$$s'_1(x) = 3a_1(x-2)^2 + 2b_1(x-2) + c_1, \quad x \in [2, 3]$$

Exemplo

Spline cúbica com fronteira livre passando por $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$.

$$s_0(x) = a_0(x-1)^3 + b_0(x-1)^2 + c_0(x-1) + d_0, \quad x \in [1, 2]$$

$$s_1(x) = a_1(x-2)^3 + b_1(x-2)^2 + c_1(x-2) + d_1, \quad x \in [2, 3]$$

$$s'_0(x) = 3a_0(x-1)^2 + 2b_0(x-1) + c_0, \quad x \in [1, 2]$$

$$s'_1(x) = 3a_1(x-2)^2 + 2b_1(x-2) + c_1, \quad x \in [2, 3]$$

$$s''_0(x) = 6a_0(x-1) + 2b_0, \quad x \in [1, 2]$$

$$s''_1(x) = 6a_1(x-2) + 2b_1, \quad x \in [2, 3]$$

Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0(1) = 2 \\ s_0(2) = 3 \\ s_1(2) = 3 \\ s_1(3) = 5 \\ s'_0(2) = s'_1(2) \\ s''_0(2) = s''_1(2) \\ s''_0(1) = 0 \\ s''_1(3) = 0 \end{array} \right.$$

Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0(1) = 2 \\ s_0(2) = 3 \\ s_1(2) = 3 \\ s_1(3) = 5 \\ s'_0(2) = s'_1(2) \\ s''_0(2) = s''_1(2) \\ s''_0(1) = 0 \\ s''_1(3) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(1-1)^3 + b_0(1-1)^2 + c_0(1-1) + d_0 = 2 \\ a_0(2-1)^3 + b_0(2-1)^2 + c_0(2-1) + d_0 = 3 \\ a_1(2-2)^3 + b_1(2-2)^2 + c_1(2-2) + d_1 = 3 \\ a_1(3-2)^3 + b_1(3-2)^2 + c_1(3-2) + d_1 = 5 \\ 3a_0(2-1)^2 + 2b_0(2-1) + c_0 = 3a_1(2-2)^2 + 2b_1(2-2) + c_1 \\ 6a_0(2-1) + 2b_0 = 6a_1(2-2) + 2b_1 \\ 6a_0(1-1) + 2b_0 = 0 \\ 6a_1(3-2) + 2b_1 = 0 \end{array} \right.$$

Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 = 2 \\ a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 3 \\ d_1 = 3 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 5 \\ 3a_0 + 2b_0 + c_0 = c_1 \\ 6a_0 + 2b_0 = 2b_1 \\ 2b_0 = 0 \\ 6a_1 + 2b_1 = 0 \end{array} \right.$$

Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 = 2 \\ a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 3 \\ d_1 = 3 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 5 \\ 3a_0 + 2b_0 + c_0 = c_1 \\ 6a_0 + 2b_0 = 2b_1 \\ 2b_0 = 0 \\ 6a_1 + 2b_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + c_0 = 1 \\ a_1 + b_1 + c_1 = 2 \\ 3a_0 + c_0 = c_1 \\ 6a_0 = 2b_1 \\ 6a_1 + 2b_1 = 0 \end{array} \right.$$

Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} a_0 & +c_0 & & & & = & 1 \\ & & a_1 & +b_1 & +c_1 & = & 2 \\ 3a_0 & +c_0 & & & -c_1 & = & 0 \\ 6a_0 & & & -2b_1 & & = & 0 \\ & & 6a_1 & +2b_1 & & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} a_0 & +c_0 & & & = 1 \\ & & a_1 & +b_1 & +c_1 = 2 \\ 3a_0 & +c_0 & & & -c_1 = 0 \\ 6a_0 & & & -2b_1 & = 0 \\ & & 6a_1 & +2b_1 & = 0 \end{array} \right.$$

Solução:

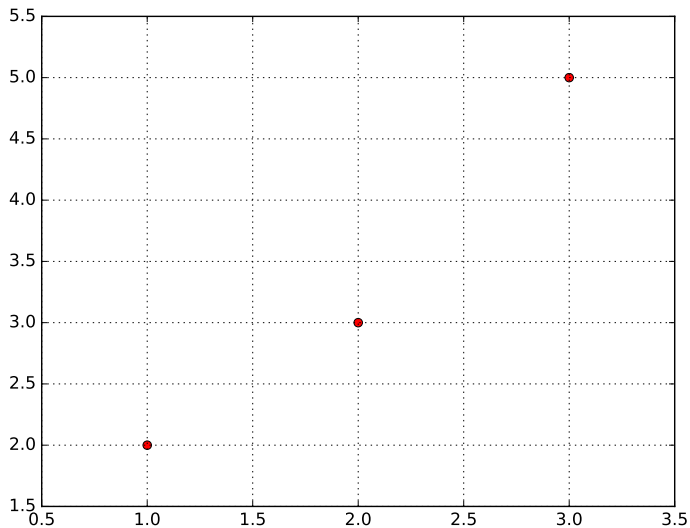
$$a_0 = \frac{1}{4}, b_0 = 0, c_0 = \frac{3}{4}, d_0 = 2, a_1 = -\frac{1}{4}, b_1 = \frac{3}{4}, c_1 = \frac{3}{4} \text{ e } d_1 = 3$$

Exemplo

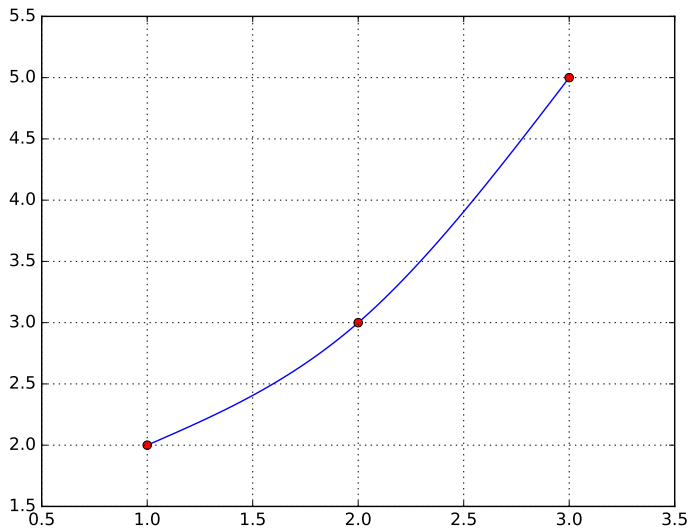
Portanto,

$$s(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, & \text{se } x \in [1, 2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, & \text{se } x \in [2, 3] \end{cases}$$

Exemplo



Exemplo



Exemplo

Spline cúbica amarrada passando por $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ com $f'(1) = 2$ e $f'(3) = 1$.

Exemplo

Spline cúbica amarrada passando por $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ com $f'(1) = 2$ e $f'(3) = 1$.

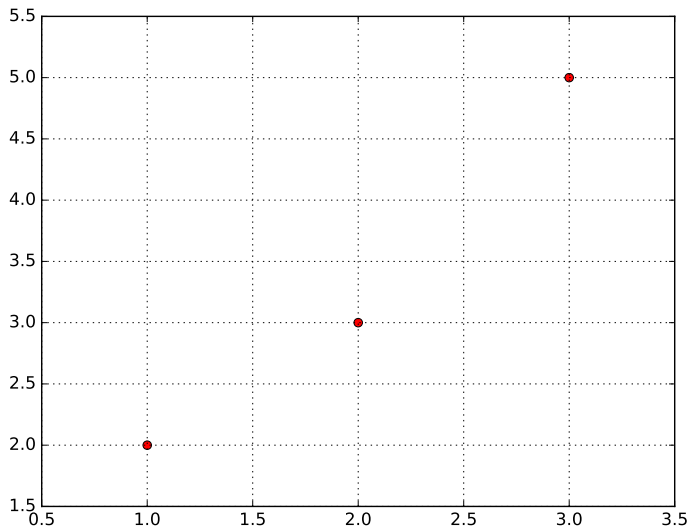
$$\left\{ \begin{array}{l} s_0(1) = 2 \\ s_0(2) = 3 \\ s_1(2) = 3 \\ s_1(3) = 5 \\ s'_0(2) = s'_1(2) \\ s''_0(2) = s''_1(2) \\ s'_0(1) = 2 \\ s'_1(3) = 1 \end{array} \right.$$

Exemplo

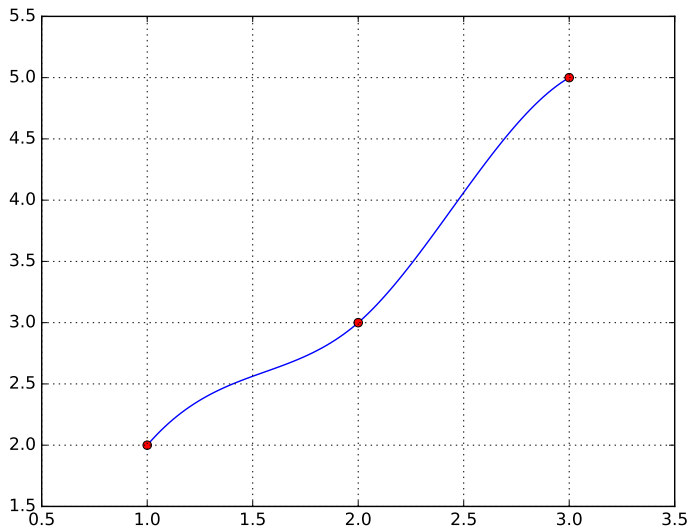
Solução:

$$s(x) = \begin{cases} 2 + 2(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^3, & \text{se } x \in [1, 2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + 2(x-2)^2 - \frac{3}{2}(x-2)^3, & \text{se } x \in [2, 3] \end{cases}$$

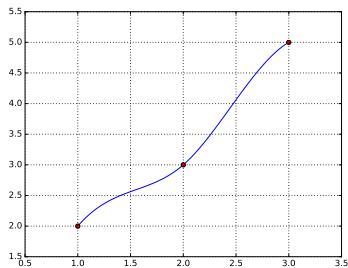
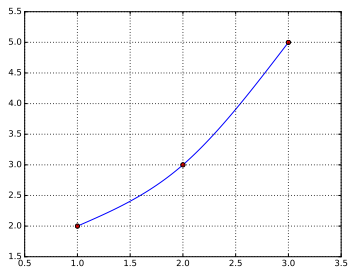
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Teoremas

Teorema: Se f está definida em $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, então existe uma única spline cúbica natural s interpolante para f .
(spline cúbica natural satisfaz: $s''(a) = s''(b) = 0$)

Teorema: Se f é definida em $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e diferenciável em a e b , então existe uma única spline cúbica amarrada s interpolante para f .
(spline cúbica amarrada satisfaz: $s'(a) = f'(a)$ e $s'(b) = f'(b)$)

Exercício

Calcule a spline cúbica natural interpolante para $f(x) = e^x$ nos pontos $(0, 1)$, $(1, e)$, $(2, e^2)$, $(3, e^3)$ e amarrada passando pelos menos pontos com $f'(0) = 1$ e $f'(3) = e^3$.

Exercício

