1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Energia 26/07/2018

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Calcule os limites:

   (a) $\lim_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

   (b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3}$

2. Determine o maior domínio de $f(x) = \dfrac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 5}$ e os valores de x para os quais f é contínua.

3. Calcule a derivada das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

   (b) $f(x) = x^2 \cos(3x)$

4. Dada $y = \cos(\operatorname{sen}(1 + x^2))$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

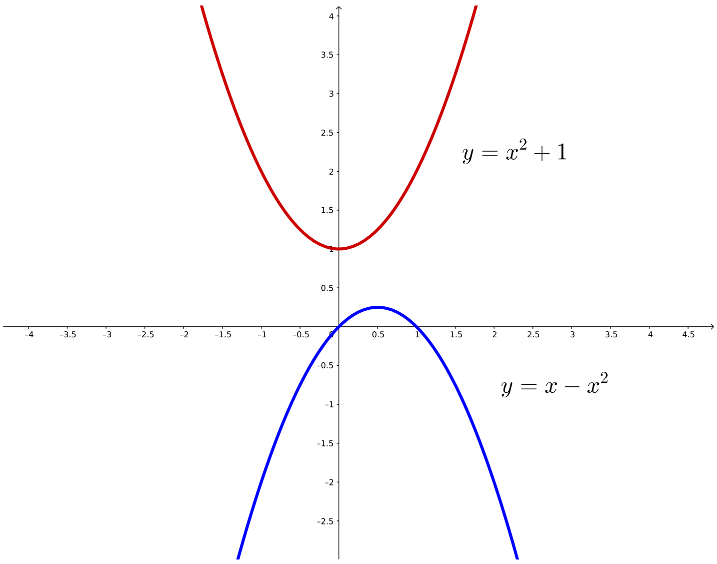
5. Use derivação implícita para calcular $\dfrac{dy}{dx}$, onde $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$.

Avaliação P2:

1. Ao meio dia o navio A está 100km a oeste do navio B. Sabendo que o navio A viaja para sul a 35km/h e o navio B viaja para norte a 25km/h, quão rápido eles estão se distanciando as 16h?

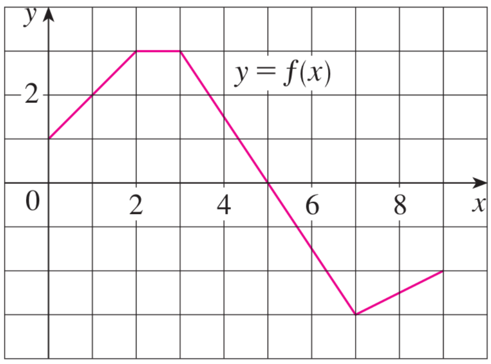
2. Encontre f tal que $f''(t) = \operatorname{sen} t + \cos t$, $f(0) = 3$ e $f'(0) = 4$.

3. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^4 (4 - x)\sqrt{x}\, dx$.



4. Qual a menor distância vertical entre as parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$?

5. O gráfico de f é dado abaixo. Calcule as integrais definidas:



(a) $\int_0^5 f(x)\ dx$ (b) $\int_2^7 f(x)\ dx$

Boa Prova!

① a) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+6)-3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{1}{6}$

② f está definida para todo x tal que $4x^2+4x+5 \neq 0$. Como $\Delta = 4^2 - 4.4.5 = -64$, não existe x real tal que $4x^2+4x+5=0$. Assim, o domínio de f é $\mathbb{R}$. Além disso, como f é racional, é contínua em seu domínio.

③ a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/2} - x^{-1/3}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} + \frac{1}{3}x^{-4/3}$

b) $f(x) = x^2\cos(3x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2x\cos(3x) + x^2(-\text{sen}(3x))\cdot 3 = 2x\cos(3x) - 3x^2\,\text{sen}(3x)$

④ Aplicando a regra da cadeia:

$y' = -\,\text{sen}(\text{sen}(1+x^2))\cdot\cos(1+x^2)\cdot 2x$

$= -2x\,\text{sen}(\text{sen}(1+x^2))\cdot\cos(1+x^2)$

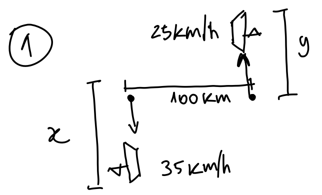
⑤ Derivando implicitamente:

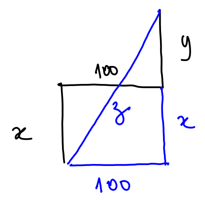
$2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

Avaliação P2

(1)





Indicando por $x(t)$ e $y(t)$ a distância percorrida pelos navios, temos $\frac{dx}{dt} = 35$ e $\frac{dy}{dt} = 25$. Se z indica a distância entre os navios, por Pitágoras, $z^2 = 100^2 + (x+y)^2$ (I). Queremos determinar $\frac{dz}{dt}$ 4h após o início da viagem, ou seja, quando $x = 4 \cdot 35 = 140$ km e $y = 4 \cdot 25 = 100$ km. Derivando (I), temos:

$$2z\frac{dz}{dt} = 0 + 2(x+y)\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{(x+y)\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)}{z}$$

Às 16h:

$$z^2 = 100^2 + (140+100)^2 = 67600 \Rightarrow z = 260 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{(140+100)(35+25)}{260} = \frac{14400}{260} = \frac{720}{13} \text{ km/h}$$

(2) $f''(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \Rightarrow f'(t) = -\cos t + \operatorname{sen} t + c_1 \Rightarrow f(t) = -\operatorname{sen} t - \cos t + c_1 t + c_2$

$\therefore \quad 4 = f'(0) = -\cos 0 + \operatorname{sen} 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 5$

e $\quad 3 = f(0) = -\operatorname{sen} 0 - \cos 0 + 5 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 4$

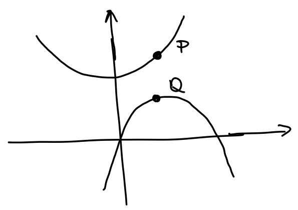
Portanto, $f(t) = -\operatorname{sen} t - \cos t + 5t + 4$.

(3) $\displaystyle\int_0^4 (4-x)\sqrt{x}\,dx = \int_0^4 (4-x)\,x^{1/2}\,dx = \int_0^4 4x^{1/2} - x^{3/2}\,dx = 4\int_0^4 x^{1/2}\,dx - \int_0^4 x^{3/2}\,dx$

$$= 4\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4\right) - \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4 = 4\left(\frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot 0^{3/2}\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 4^{5/2} - \frac{2}{5}\cdot 0^{5/2}\right)$$

$$= 4 \cdot \frac{16}{3} - \frac{64}{5} = \frac{320 - 192}{15} = \frac{128}{15}$$

④



Sejam P um ponto na parábola $y=x^2+1$ e Q um ponto na parábola $y=x-x^2$. Logo,

$$P=(x,x^2+1) \quad e \quad Q=(x,x-x^2).$$

A distância vertical entre P e Q é dada por:

$$D(x)=(x^2+1)-(x-x^2)=2x^2-x+1$$

Calculando os números críticos de $D(x)$:

$$D'(x)=4x-1\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

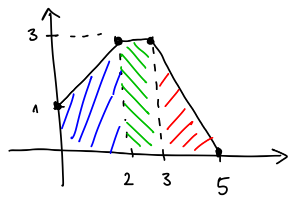
$$\therefore\ D'(x)=0 \iff 4x-1=0 \iff x=\frac{1}{4}$$

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$$D''(x)=4 \Rightarrow D''\left(\tfrac{1}{4}\right)=4>0$$

Portanto, $D(x)$ tem um mínimo local em $x=\frac{1}{4}$. Assim, a menor distância entre as parábolas é $D\left(\frac{1}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\frac{7}{8}$.

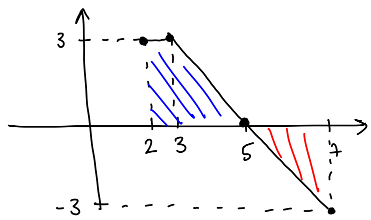
⑤ a)



$$\int_0^5 f(x)\,dx = \text{área do trapézio} + \text{área do retângulo} + \text{área do triângulo}$$

$$=\frac{(1+3)\cdot 2}{2}+1\cdot 3+\frac{2\cdot 3}{2}=10$$

b)



$$\int_2^7 f(x)\,dx = \text{área do trapézio} - \text{área do triângulo}$$

$$=\frac{(1+3)\cdot 3}{2}-\frac{2\cdot 3}{2}=3$$