1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Engenharia de Energia 21/09/2018

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule a integral definida $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$.

2. Resolva a integral indefinida $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$.

3. Calcule as integrais:

   (a) $\int \frac{1}{x^3} \, dx$

   (b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3} \, dx$

4. Sejam $p(x) = 10$ e $q(x) = 5x - 2x^2$.

   (a) Fatore o polinômio $q(x)$.

   (b) Escreva $\frac{p(x)}{q(x)}$ como soma de frações parciais.

   (c) Calcule a integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$.

5. Calcule a integral $\int \cos(\sqrt{x}) \, dx$. [Sugestão: faça uma substituição e em seguida use integração por partes.]

Boa Prova!

(1) Calculando a integral indefinida por partes:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Logo,

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right)\Big|_1^e = \left(\frac{e^3}{3}\ln e - \frac{e^3}{9}\right) - \left(\frac{1^3}{3}\ln 1 - \frac{1^3}{9}\right)$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3e^3 - e^3 + 1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$$

(2) Chamando $u = \ln x$, temos $du = \frac{1}{x}dx$ e

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

(3) a) $$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

b) A função $f(x) = \frac{1}{x^3}$ é descontínua (não está definida) em $x=0$, logo a integral é imprópria. Por definição, temos

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}dx = \underbrace{\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx}_{(I)} + \underbrace{\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}dx}_{(II)},$$ caso as integrais sejam convergentes.

Estudando as integrais:

$$(I) = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) = -\infty$$

$$(II) = \int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{t}^{1} = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right) = +\infty$$

Como as integrais são divergentes (basta que uma seja divergente), segue-se que $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx$ é divergente.

④ a) $q(x) = 5x - 2x^2 = x(5-2x)$

b) $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{10}{5x-2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{5-2x} = \frac{A(5-2x)+Bx}{x(5-2x)}$$

$$\Rightarrow 10 = A(5-2x) + Bx = 5A - 2Ax + Bx = (-2A+B)x + 5A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A+B = 0 \\ 5A = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2A+B = 0 \\ A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 4 \\ A = 2 \end{cases}$$

Assim, $\dfrac{10}{5x-2x^2} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{5-2x}$.

c) $$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{10}{5x-2x^2}\,dx = \int \frac{2}{x} + \frac{4}{5-2x}\,dx$$

$$= 2\underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{(I)} + 4\underbrace{\int \frac{1}{5-2x}\,dx}_{(II)}$$

Calculando as integrais:

$$(I) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_1$$

$$(II) = \int \frac{1}{5-2x}\,dx = \int \frac{1}{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u| + C_2 = -\frac{1}{2}\ln|5-2x| + C_2$$

$$\left(\begin{array}{l} u = 5-2x \\ du = -2\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}du = dx \end{array} \right)$$

Portanto,

$$\int \frac{10}{5x-2x^2}\,dx = 2\ln|x| - 2\ln|5-2x| + C.$$

⑤ Tome $z = \sqrt{x}$, então $dz = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \dfrac{1}{2z}\,dx \Rightarrow 2z\,dz = dx$. Logo,

$$\int \cos(\sqrt{x})\,dx = \int \cos z \cdot 2z\,dz = 2\int z\cos z\,dz.$$

Integrando por partes: $u = z \Rightarrow du = dz$
$dv = \cos z\,dz \Rightarrow v = \operatorname{sen} z$

$$\therefore 2\int z\cos z\,dz = 2\left(z\operatorname{sen} z - \int \operatorname{sen} z\,dz\right) = 2z\cdot\operatorname{sen} z + 2\cos z + C$$

$$\Rightarrow \int \cos(\sqrt{x})\,dx = 2\sqrt{x}\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C.$$