1	
2	
3	
4	
5	
Total	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Prof. Adriano Barbosa
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P1

Eng. Civil 05 de Julho de 2017

Aluno(a):..

(1) Mostre que se o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x \quad\; + \; z = c \end{cases}$$

tem solução, então as constantes a, b e c devem satisfazer $c = b - a$.

(2) Determine a, b, c e d tais que

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

(3) Encontre os valores de λ para os quais $\det(A) = 0$, com $A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$.

(4) Determine o valor de n para que o ângulo entre as retas seja $\frac{\pi}{6}$:

$$r_1 : \frac{x-6}{4} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-3}{3} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} y = nx + 5 \\ \frac{z}{2} = x - 1 \end{cases}$$

(5) Dados os planos $\pi_1 : y = 3 - x$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t - 2s \\ y = 1 - t - s \\ z = 2 - 2t + 2s \end{cases}$

(a) Escreva a equação implícita de π_2.
(b) Calcule a interseção entre π_1 e π_2.

Boa Prova!

① $\begin{cases} x + y + 2z = a & ① \\ 2x + y + 3z = b & ② \\ x + z = c & ③ \end{cases}$

③ $\Rightarrow z = c - x$

Substituindo em ① e ②:

$\begin{cases} x + y + 2(c-x) = a \\ 2x + y + 3(c-x) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = a - 2c \\ -x + y = b - 3c \end{cases} \Rightarrow a - 2c = b - 3c \Rightarrow \boxed{c = b - a}$

② $\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 & ① \\ b + c = 1 & ② \\ c + 3d = 7 & ③ \\ 2a - 4d = 6 & ④ \end{cases}$

① $\Rightarrow a = 8 + b$

② $\Rightarrow c = 1 - b$

Substituindo em ③ e ④:

$\begin{cases} 1 - b + 3d = 7 \\ 2(8+b) - 4d = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b + 3d = 6 \\ 2b - 4d = -10 \end{cases} \underset{(\div 2)}{\Rightarrow} \begin{cases} -b + 3d = 6 \\ b - 2d = -5 \end{cases}$

Somando as eq.: $\boxed{d = 1}$

logo, $b - 2 = -5 \Rightarrow \boxed{b = -3}$

$a = 8 - 3 \Rightarrow \boxed{a = 5}$

$c = 1 + 3 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

③ $0 = \det(A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+4) + 5 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3 \text{ ou } \lambda = 1}$

④ Vetor diretor de r_1:

$A = (6, 5, 3) \in r_1$ $\quad \therefore v_1 = \vec{AB} = B - A = (4, 5, 3)$ (basta olhar o denominador das eq. simétricas)

$B = (10, 10, 6) \in r_1$ $\quad \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50}$

Vetor diretor de r_2:

$C = (0, 5, -2) \in r_2$ $\quad \therefore v_2 = \vec{CD} = (1, n, 2)$

$D = (1, n+5, 0) \in r_2$ $\quad \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{n^2 + 5}$

Logo,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|} = \frac{4+5n+6}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{n^2+5}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5n+10}{\sqrt{50(n^2+5)}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5(n+2)}{5\sqrt{2(n^2+5)}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6(n^2+5)} = 2n+4 \Rightarrow 6(n^2+5) = (2n+4)^2 \Rightarrow 6n^2+30 = 4n^2+16n+16$$

$$\Rightarrow 2n^2-16n+14=0 \Rightarrow n^2-8n+7=0 \Rightarrow \boxed{n=1 \text{ ou } n=7}$$

5

a) $\pi_2: \begin{cases} x = 2+2t-2s \\ y = 1-t-s \\ z = 2-2t+2s \end{cases} \Rightarrow \pi_2: (x,y,z) = (2+2t-2s,\ 1-t-s,\ 2-2t+2s)$

$$= (2,1,2) + t(2,-1,-2) + s(-2,-1,2)$$

Logo, $u=(2,-1,-2)$ e $v=(-2,-1,2)$ são vetores do plano π_2. Para obter um vetor normal a π_2, podemos fazer:

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-4,0,-4)$$

Assim, a eq. implícita de π_2 é: $-4x-4z=d$, onde $d=-4\cdot 2-4\cdot 2=-16$.

Portanto, $\pi_2: -4x-4z=-16$ (ou $x+z=4$).

b) Os pontos que estão em ambos os planos devem satisfazer:

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

Subtraindo as eq.: $y-z=-1 \Rightarrow \boxed{y=z-1}$

Substituindo na 1ª eq.: $x+z-1=3 \Rightarrow \boxed{x=4-z}$

Portanto, a interseção entre π_1 e π_2 são os pontos da reta $r: \begin{cases} x = 4-z \\ y = z-1 \end{cases}$.