Análise Numérica

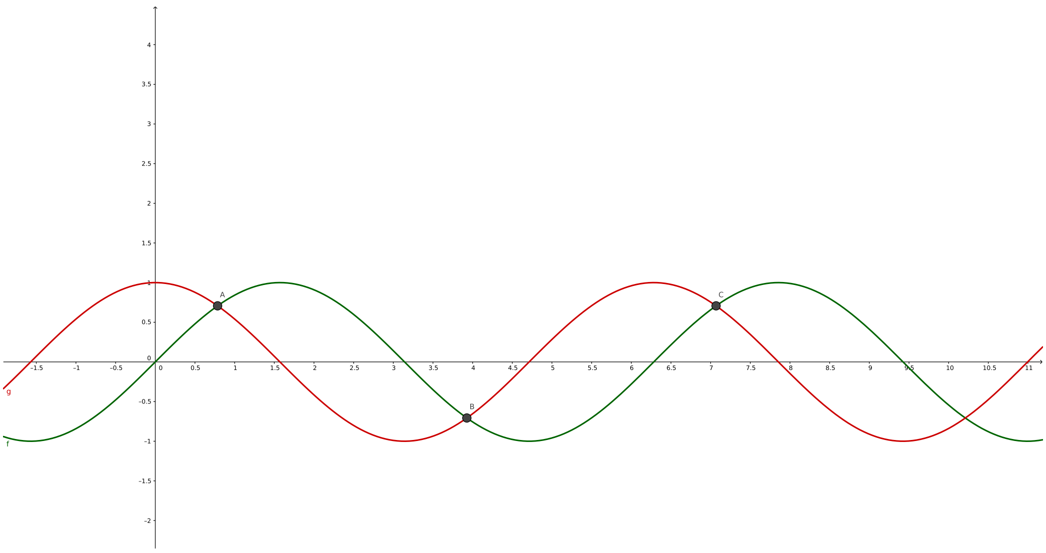
Aula 5 — Interpolação de Lagrange

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

12 de dezembro de 2016

Motivação



Polinômios

Utilizamos polinômios para a aproximação pois:

- A derivada e a integral de polinômios ainda é um polinômio
- Teorema da aproximação de Weierstrass:
  Se f é contínua em $[a, b]$, para todo $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $P(x)$ tal que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [a, b]$$

Problema

Encontrar um polinômio de grau no máximo um que passe pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Defina

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

então,

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

interpola os pontos.

Problema

Polinômio interpolador de Lagrange linear:

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

De fato,

$$\begin{aligned} P(x_0) &= f(x_0)L_0(x_0) + f(x_1)L_1(x_0) = f(x_0)\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= f(x_0) \cdot 1 + f(x_1) \cdot 0 = f(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x_1) &= f(x_0)L_0(x_1) + f(x_1)L_1(x_1) = f(x_0)\frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= f(x_0) \cdot 0 + f(x_1) \cdot 1 = f(x_1) \end{aligned}$$

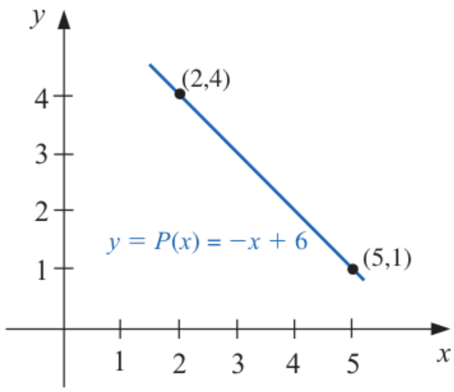
Exemplo

Calcule o polinômio interpolador de Lagrange linear para os pontos $(2, 4)$ e $(5, 1)$.

$$L_0(x) = \frac{x - 5}{-2 - 5} = -\frac{x - 5}{3} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{x - 2}{3}$$

$$P(x) = -\frac{x - 5}{3} \cdot 4 + \frac{x - 2}{3} \cdot 1 = \frac{-4x + 20 + x - 2}{3} = -x + 6$$

Exemplo



Teorema

Corolário (Teo. Fund. álgebra):
Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios de grau no máximo n. Se $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $k > n$, são números distintos com $P(x_i) = Q(x_i)$, então $P(x) = Q(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $R(x) = P(x) - Q(x)$
grau de $R(x) \leq n$ e $R(x_i) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, k$
$R(x)$ tem k raízes e $k > n \Rightarrow R(x) \equiv 0 \Rightarrow P(x) = Q(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Generalizando

Queremos interpolar $n+1$ pontos $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ com um polinômio de grau no máximo n.

Para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, definimos

$$L_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq k \\ 1, & \text{se } i = k \end{cases}$$

logo,

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

e portanto,

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x)$$

Polinômio interpolador de Lagrange de grau n

Se $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são $n+1$ números distintos e f uma função cujo valor nesses pontos é dado, então existe um único polinômio $P(x)$ de grau no máximo n tal que

$$f(x_k) = P(x_k), \ \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

$P(x)$ é dado por

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x) = f(x_0)L_0(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x)$$

onde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Exemplo

Calcule o polinômio interpolador de Lagrange de grau 2 para $f(x) = \frac{1}{x}$ usando $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ e $x_2 = 4$.

$$L_0(x) = \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.75)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.75)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75)$$

$f(2) = \frac{1}{2}$, $f(2.75) = \frac{4}{11}$ e $f(4) = \frac{1}{4}$

Exemplo

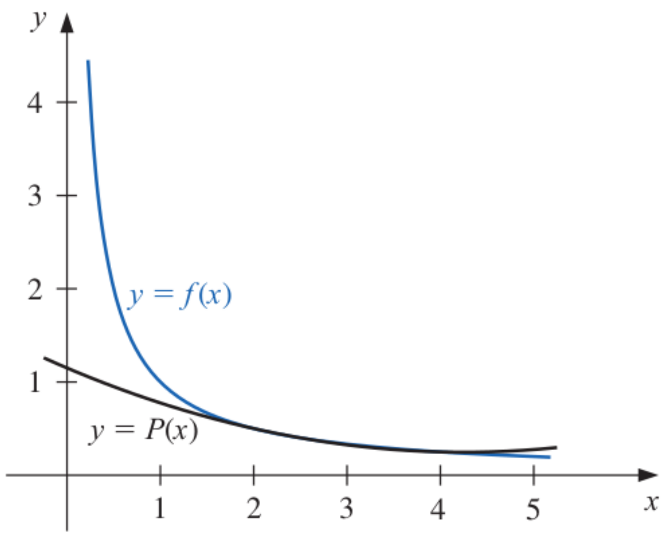
Portanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{3}(x-2.75)(x-4) - \frac{64}{165}(x-2)(x-4) + \frac{1}{10}(x-2)(x-2.75) \\ &= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44} \end{aligned}$$

Use $P(x)$ para aproximar $f(3) = \frac{1}{3}$:

$$f(3) \approx P(3) = \frac{9}{22} - \frac{105}{88} + \frac{49}{44} = \frac{29}{88} \approx 0.32955$$

Exemplo



Erro

Teorema:
Suponha $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números distintos no intervalo $[a, b]$ e $f \in C^{n+1}[a, b]$. Então, para cada $x \in [a, b]$, existe um número $\xi(x)$ em (a, b) tal que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

onde $P(x)$ é o polinômio interpolador de Lagrange de grau n.

Exemplo

Calcule o máximo do erro para a aproximação do exemplo anterior.

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$\Rightarrow f'(x) = -x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$

Pelo Teorema,
$\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) =$
$-(\xi(x))^{-4}(x - 2)(x - 2.75)(x - 4), \text{ com } \xi(x) \in (a, b)$

Exemplo

Como $\xi(x) \in (2, 4)$, temos $(\xi(x))^{-4} < 2^{-4} = \frac{1}{16}$.

Além disso, calculando os pontos críticos de
$g(x) = (x - 2)(x - 2.75)(x - 4) = x^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - 22$:

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{35}{2}x + \frac{49}{2} = \frac{1}{2}(3x - 7)(2x - 7)$$

$$x = \frac{7}{3} \Rightarrow g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{25}{108} \text{ e } x = \frac{7}{2} \Rightarrow g\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{9}{16}$$

Exemplo

Portanto, o máximo do erro é dado por

$$\left|\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x-2)(x-2.75)(x-4)\right| \leq \left|\frac{1}{16}\left(-\frac{9}{16}\right)\right| \approx 0.03516$$