1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Civil 31/11/2022

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine a interseção entre os planos $\pi_1 : x + y = 1$ e $\pi_2 : y + z = 1$.

2. Determine uma base para os subespaços de $\mathbb{R}^3$ abaixo.

   (a) o plano $x + y - z = 0$.

   (b) a reta $x = -t$, $y = t$, $z = 0$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x - y, 3x + y)$.

   (a) Determine a matriz canônica de T.

   (b) Determine o núcleo de T. T é injetiva?

   (c) Determine a imagem de T. T é sobrejetiva?

4. Encontre a transformação linear resultante da aplicação de uma projeção ortogonal no eixo y seguida de uma reflexão em torno do eixo y seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário.

5. Calcule os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, x - y)$.

Boa Prova!

Solução PS

1. $\begin{cases} x+y = 1 & (1) \\ y+z=1 \Rightarrow y = 1-z & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1): $x+1-z=1 \Rightarrow x=z$

Portanto, a interseção entre os planos são os pontos da forma $(z, 1-z, z)$, $z \in \mathbb{R}$, ou seja, são os pontos da reta que passa por $(0,1,0)$ e tem direção $(1,-1,1)$.

2. a) $x+y-z=0 \Rightarrow z = x+y$, logo os pontos do plano são da forma $(x, y, x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Assim,

$$(x, y, x+y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1,0,1) + y(0,1,1).$$

$\therefore \beta = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ gera o plano. Além disso, β é LI, pois seus elementos não são múltiplos. Portanto, β é uma base do plano $x+y-z=0$.

b) Os pontos da reta são da forma $(-t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

$(-t, t, 0) = t(-1,1,0) \quad \therefore \beta = \{(-1,1,0)\}$ gera a reta.

Por se tratar de um conj. com um único elemento, β é LI.

Portanto, β é uma base da reta.

③ a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $T(x,y) = (0,0,0) \Rightarrow (x+y,\ x-y,\ 3x+y) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 & \Rightarrow y = -x \\ x-y = 0 & \Rightarrow y = x \\ 3x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Logo, $N(T) = \{(0,0)\}$. Portanto, T é injetiva.

c) $T(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 3x+y) = (x,x,3x) + (y,-y,y)$

$= x(1,1,3) + y(1,-1,1)$

$\therefore \{(1,1,3),(1,-1,1)\}$ gera $Im(T)$. Como os vetores não são múltiplos, o conjunto é uma base de $Im(T)$.

Assim, $\dim(Im(T)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Portanto, T não é sobrejetiva.

④ Temos que:

Proj. ort. em y: $[P_y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Reflex. em y: $[R_y] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rot. $\frac{\pi}{2}$: $[R_{\pi/2}] = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\operatorname{sen} \pi/2 \\ \operatorname{sen} \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore [T] = [R_{\pi/2}][R_y][P_y] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(T-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=1$ ou $\lambda=-1$.

P/ $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y \quad \therefore (2y, y),\ y \in \mathbb{R}$.

P/ $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \quad \therefore (0, y),\ y \in \mathbb{R}$.