1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Física 13/06/2022

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Encontre a equação da reta tangente a $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ no ponto $(0, -1)$.

2. Seja $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Calcule $f''(x)$.

3. Se $g(x) = f(x) + x\cos(f(x))$ e $f'(0) = f(0) = 0$, calcule $g'(0)$.

4. Se $f(x) = e^{2x}$, encontre a fórmula para $f^{(n)}(x)$ (derivada de ordem n) em função de n.

5. Determine os pontos onde a tangente a $f(x) = x - x\ln x$ é horizontal.

Avaliação P2:

1. Encontre o erro no cálculo abaixo e calcule o limite corretamente.
$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

2. Dado que $x^2 + y^2 = 2x + 4y$, onde x e y são funções de t, calcule $\dfrac{dx}{dt}$ sabendo que $\dfrac{dy}{dt} = 6$ quando $(x, y) = (2, 3)$.

3. Mostre que entre todos os retângulos de área A, o quadrado é o que tem o menor perímetro.

4. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $x = 1 - y^2, x = y^2 - 1$.

5. Utilizando integrais, calcule o volume da pirâmide de altura H e base quadrada de lado L.

Boa Prova!

P1 – Solução

① A tangente a f em $(0,-1)$ tem inclinação $f'(0)$, logo

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

Portanto, a eq. da tangente a f em $(0,-1)$ é

$$y - (-1) = 0\,(x-0) \Rightarrow y = -1.$$

② $f(x) = x \operatorname{sen} x$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cos x = \operatorname{sen} x + x \cos x$$

$$\Rightarrow f''(x) = \cos x + 1 \cdot \cos x + x(-\operatorname{sen} x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x.$$

③ Derivando:

$$g'(x) = f'(x) + 1 \cdot \cos(f(x)) - x \operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= f'(x) + \cos(f(x)) - x \operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(0) = f'(0) + \cos(f(0)) - 0 \cdot \operatorname{sen}(f(0)) \cdot f'(0)$$

$$= 0 + \cos 0 = 1.$$

④ Derivando:

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 2e^{2x} = 2^2 e^{2x}$$

$$f'''(x) = 2^2 \cdot 2e^{2x} = 2^3 e^{2x}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$$

⑤ A tangente a f é horizontal quando $f'(x) = 0$.

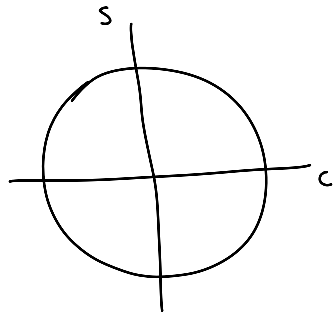
$$f'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

$$\therefore \quad f'(x) = 0 \iff -\ln x = 0 \iff x = 1.$$

Portanto, o ponto onde a tangente a f é horizontal é $(1, f(1)) = (1, 1)$.

P2 - Solução

① Observe que:



$$x = \pi^- \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x \to 0 \\ 1 - \cos x \to 1-(-1) = 2 \end{cases}$$

Logo, não há indeterminação e o limite é igual a 0.

② $x^2 + y^2 = 2x + 4y$

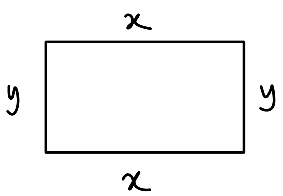
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \frac{d}{dt}(2x+4y) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}$$

Quando $(x,y) = (2,3)$ e $\frac{dy}{dt} = 6$, temos:

$$2\cdot 2\cdot \frac{dx}{dt} + 2\cdot 3\cdot 6 = 2\frac{dx}{dt} + 4\cdot 6 \Rightarrow 4\frac{dx}{dt} + 36 = 2\frac{dx}{dt} + 24$$

$$\Rightarrow 2\frac{dx}{dt} = -12 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -6.$$

③



$$A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x}$$

$$p = 2x + 2y \Rightarrow p(x) = 2x + \frac{2A}{x} = \frac{2x^2+2A}{x}$$

Calculando os pontos críticos de $p(x)$:

$$p'(x) = \frac{4x\cdot x - (2x^2+2A)\cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2A}{x^2} = \frac{2x^2-2A}{x^2}$$ está def. p/ $x \neq 0$.

$$\therefore p'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2A}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2A = 0 \Leftrightarrow x^2 = A \overset{(x>0)}{\Rightarrow} x = \sqrt{A}$$

Logo, $x = \sqrt{A}$ é pto crítico de $p(x)$,

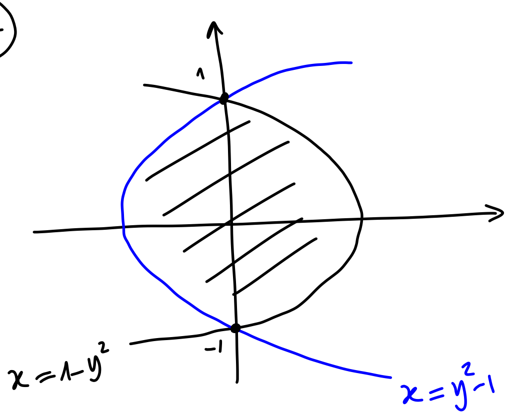
Aplicando o teste da $2^{\underline{a}}$ derivada:

$$p''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2 - 2A) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 - 4x^3 + 4Ax}{x^4} = \frac{4A}{x^3}$$

$$\Rightarrow p''(\sqrt{A}) = \frac{4A}{(\sqrt{A})^3} > 0 \quad \Rightarrow x = \sqrt{A} \text{ é pto de mín. local.}$$

Portanto, $x = \sqrt{A} \Rightarrow y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \frac{A\sqrt{A}}{A} = \sqrt{A} = x$ e o retângulo de perímetro mínimo é um quadrado.

④



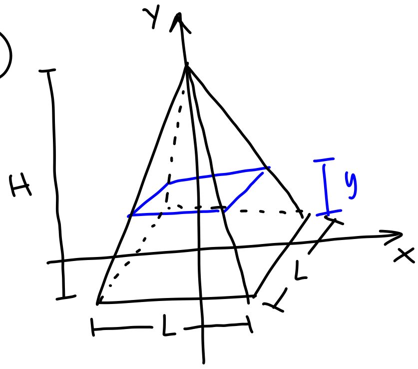
Observe que:

$$1 - y^2 = y^2 - 1 \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1$$
$$\Rightarrow y = \pm 1$$

$$\therefore A = \int_{-1}^{1} 1 - y^2 - (y^2 - 1)\, dy = \int_{-1}^{1} 2 - 2y^2\, dy$$

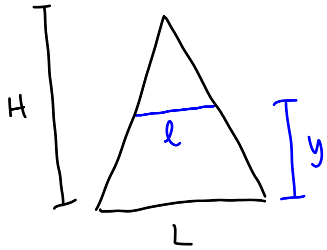
$$= 2y - \frac{2y^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

5



Os cortes paralelos a base da pirâmide tem o formato de quadrado de lado ℓ.

Por semelhança de triângulos:



$$\frac{\ell}{y} = \frac{L}{H} \Rightarrow \ell = \frac{L}{H} y$$

Assim, a área do corte é:

$$A(y) = \ell^2 = \frac{L^2}{H^2} y^2$$

Portanto,

$$V = \int_0^H A(y)\,dy = \int_0^H \frac{L^2}{H^2} y^2 dy = \frac{L^2}{H^2}\int_0^H y^2 dy = \frac{L^2}{H^2}\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^H\right)$$

$$= \frac{L^2}{H^2}\left(\frac{H^3}{3}\right) = \frac{L^2 H}{3}.$$