**UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS**
**Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P2**
**Prof. Adriano Barbosa**

Eng. de Energia 26/10/2018

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Nota | |

**Aluno(a):**...........................................................................................

**Todas as respostas devem ser justificadas.**

1. Verifique se $y(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ é solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

2. Classifique a equação diferencial como linear e/ou separável e resolva o problema de valor inicial: $y' + 2xy = y$, $y(0) = 5$.

3. Classifique a equação diferencial $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x$, $x > 0$, como linear e/ou separável e resolva.

4. Resolva a equação diferencial $x^2y'' + 2xy' = \ln x$, $x > 0$. (Use a mudança de variáveis $u = y'$)

5. Resolva as equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes:

   (a) $y'' - y = 0$

   (b) $y'' - y = e^x$

*Boa Prova!*

① Dado $y = \frac{\ln x}{x}$, derivando, temos:

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Logo,

$$x^2 y' + xy = x^2 \cdot \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) + x\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 1 - \ln x + \ln x = 1$$

Portanto, $y$ é solução da EDO.

② Temos que:

$$y' + 2xy = y \iff y' + 2xy - y = 0 \iff y' + (2x-1)y = 0 \quad \text{é linear.}$$

Por outro lado,

$$y' + 2xy = y \iff y' = y - 2xy \iff y' = (1-2x)y$$

$$\overset{(y \neq 0)}{\iff} \frac{1}{y} y' = 1 - 2x \quad \text{é separável.}$$

Resolvendo a EDO:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int 1 - 2x \, dx \Rightarrow \ln|y| + C_1 = x - x^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -x^2 + x + C \Rightarrow |y| = e^{-x^2+x+C} = e^{-x^2+x} \cdot e^{C}$$

$$\Rightarrow y = k e^{-x^2+x}, \text{ onde } k = \pm e^{C}.$$

Resolvendo o PVI:

$$5 = y(0) = k e^{-0^2+0} \Rightarrow k = 5.$$

Portanto,

$$y(x) = 5 e^{-x^2+x}.$$

③ Temos que:

$$xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x \iff xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$$

$$\overset{(x>0)}{\iff} y' - \frac{1}{x} y = x \operatorname{sen} x \quad \text{é linear.}$$

Calculando o fator integrante:

$$\varphi(x) = e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} \overset{(x>0)}{=} e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Logo,

$$\frac{1}{x}\left(y' - \frac{1}{x} y\right) = \frac{1}{x}\left(x \operatorname{sen} x\right) \Rightarrow \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} \cdot y\right)' = \operatorname{sen} x \Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} \cdot y\right)' dx = \int \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} y + c_1 = -\cos x + c_2 \Rightarrow \frac{1}{x} y = -\cos x + c$$

$$\Rightarrow y = -x \cos x + cx.$$

④ Tomando $u = y'$, temos $u' = y''$. Assim,

$$x^2 y'' + 2xy' = \ln x \Rightarrow x^2 u' + 2xu = \ln x \Rightarrow (x^2 \cdot u)' = \ln x$$

$$\Rightarrow \int (x^2 u)' dx = \int \ln x\, dx \overset{(*)}{\Rightarrow} x^2 u + c_1 = x \ln x - x + c_2$$

$$\Rightarrow x^2 u = x \ln x - x + c \Rightarrow u = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}.$$

Portanto,

$$y = \int y'\, dx = \int \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}\, dx = \int \frac{\ln x}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx + c \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x - c\frac{1}{x} + k$$

(*) Integrando por partes:

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x & \Rightarrow du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= dx & v &= x \end{aligned}$$

(**) Tome $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x} dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

⑤ a) Resolvendo sua eq. auxiliar:

$$r^2 - 1 = 0 \iff r^2 = 1 \iff r = \pm 1.$$

Assim, a sol. da equação é dada por

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$$

b) Já calculamos a sol. da eq. homogênea no item anterior:

$$y_h(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$$

Vamos calcular uma sol. particular $y_p$ de $y'' - y = e^{x}$ usando o método da variação de parâmetros. Tome as sol. linearmente independentes da eq. homogênea $y_1 = e^{x}$ e $y_2 = e^{-x}$. Queremos determinar $u_1$ e $u_2$ tais que:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 e^{x} + u_2 e^{-x}.$$

Basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} u_1' y_1' + u_2' y_2' = e^{x} \\ u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' e^{x} - u_2' e^{-x} = e^{x} \\ u_1' e^{x} + u_2' e^{-x} = 0 \end{cases}$$

Somando as equações, temos:

$$2e^{x} u_1' = e^{x} \Rightarrow u_1' = \frac{1}{2}$$

Substituindo na segunda eq.:

$$\frac{1}{2} e^{x} + u_2' e^{-x} = 0 \Rightarrow u_2' e^{-x} = -\frac{1}{2} e^{x} \Rightarrow u_2' = -\frac{1}{2} e^{2x}$$

Assim,

$$u_1 = \int u_1' \, dx = \int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x$$

$$u_2 = \int u_2' \, dx = \int -\frac{1}{2} e^{2x} dx = -\frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{2} = -\frac{e^{2x}}{4}$$

(podemos tomar as constantes de integração iguais a zero, pois estamos buscando uma sol. particular)

Portanto, $y_p = \frac{1}{2} x e^{x} - \frac{1}{4} e^{2x} \cdot e^{-x} = \frac{1}{2} x e^{x} - \frac{1}{4} e^{x}$ e a sol. geral da eq. não-homogênea é

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{x} - \frac{1}{4} e^{x} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c_1\right) e^{x} + c_2 e^{-x}.$$