1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Números e Funções Reais — Avaliação 2
Prof. Adriano Barbosa

PROFMAT 08/07/2022

Aluno(a):...

1. Um time de futebol joga num estádio com capacidade para 15.000 espectadores. Com o ingresso custando R$15,00, a média de público nos jogos é de 10.000 pessoas. Uma pesquisa de mercado indicou que o público aumentaria em 1.000 pessoas em cada jogo para cada R$ 1,00 diminuido no valor do ingresso. Qual deve ser o preço do ingresso para que o faturamenteo com a venda de ingressos seja o maior possível?

2. Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, consideremos as funções afins $g(x) = mx + t$, onde m é fixo e t será escolhido convenientemente. Prove que existe uma (única) escolha de t para a qual a equação $f(x) = g(x)$ tem uma, e somente uma, raiz x.

3. Seja $p(x)$ um polinômio cujo grau n é um número ímpar. Mostre que existem números reais x_1, x_2 tais que $p(x_1) > 0$ e $p(x_2) < 0$. Conclua daí que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

4. (a) Encontre uma expressão para $\operatorname{sen}(3x)$ como um polinômio de coeficientes inteiros em termos de $\operatorname{sen} x$.

   (b) Mostre que $\operatorname{sen} 10°$ é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

5. Mostre que, para todo $m > 0$, a equação $\sqrt{x} + m = x$ tem exatamente uma raiz.

6. A grandeza y se exprime como $y = ba^t$ em função de t. Sejam d o acrescimo que se deve dar a t para que y dobre e m (meia-vida de y) o acréscimo de t necessário para que y se reduza à metade. Mostre que $m = -d$ e $y = b2^{t/d}$, logo $d = \log_a 2 = \frac{1}{\log_2 a}$.

7. A expressão $M(t) = 200e^{-(t \ln 2)/30}$ dá a massa em gramas do césio 137 que restará de uma quantidade inicial após t anos de decaimento radionativo.

   (a) Quantos gramas havia inicialmente?

   (b) Quantos gramas permanecem depois de 10 anos? Use, caso necessário, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,794$.

   (c) Quantos anos levará para reduzir pela metade a quantidade inicial de césio 137?

8. Se $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$, calcule $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Boa Prova!

Solução

① Temos que:

ingresso	15	15 − 1	15 − 2	...	15 − x
público	10.000	10.000 + 1.000	10.000 + 2.000	...	10.000 + 1.000x
faturamento	150.000	154.000	156.000	...	(15 − x)(10.000 + 1.000x)

Se x é o desconto no ingresso e $f(x)$ o faturamento relativo ao desconto x, logo

$$f(x) = (15-x)(10.000 + 1000\,x) = 150.000 + 15.000x - 10.000x - 1.000x^2$$

$$= 1.000\left(-x^2 + 5x + 150\right)$$

é uma função quadrática e sua forma canônica é

$$f(x) = -1.000\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{625}{4}\right].$$

Assim, seu máximo ocorre em $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$, tem valor 156.250 e o público será 12.500.

② $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = mx + t \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + c - t = 0$

Se a eq. tem apenas uma solução, então $\Delta = 0$:

$$0 = \Delta = (b-m)^2 - 4a(c-t) \Rightarrow 4a(c-t) = (b-m)^2$$

$$\Rightarrow c - t = \frac{(b-m)^2}{4a} \Rightarrow t = -\frac{(b-m)^2}{4a} + c \quad (a \neq 0, \text{pois } f \text{ é quadrática})$$

③ Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e suponha $a_n > 0$.

Seja $k = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$.

Para $x > 1$: $1 < x < x^2 < \cdots < x^{n-1}$ e

$$|a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \leq |a_{n-1}| x^{n-1} + \cdots + |a_1| x + |a_0| \leq \underbrace{kx^{n-1} + \cdots + kx^{n-1} + kx^{n-1}}_{n \text{ vezes}}$$

$$= nkx^{n-1}.$$

Tomando $x_1 > 1$ e $x_1 > \frac{nk}{a_n}$, temos:

$$a_n x_1 > nk \overset{(\times x_1^{n-1})}{\Rightarrow} a_n x_1^n > nkx_1^{n-1} \geq |a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0| \geq a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$$

$\therefore p(x_1) = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 > 0$, pois a primeira parcela é positiva e maior do que a soma das demais.

Se $x < -1$: $0 < |x| < |x|^2 < \cdots < |x|^{n-1}$

$$|a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \leq |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + \cdots + |a_1| \cdot |x| + |a_0| < \underbrace{k|x|^{n-1} + \cdots + k|x|^{n-1}}_{n \text{ vezes}}$$

$$= nk|x|^{n-1}$$

Tomando $x_2 < -1$ e $x_2 < -\frac{nk}{a_n}$, temos:

$$a_n x_2 < -nk \overset{(\times x_2^{n-1})}{\Rightarrow} \underbrace{\underbrace{a_n}_{>0} \underbrace{x_2^n}_{<0}}_{<0} < \underbrace{-\underbrace{nkx_2^{n-1}}_{>0}}_{<0}, \quad n \text{ ímpar} \Rightarrow n-1 \text{ par} \Rightarrow x_2^{n-1} > 0 \text{ e } x_2^n < 0.$$

$\Rightarrow |a_n x_2^n| > |n k x_2^{n-1}|$ (pois $|x|$ é decrescente p/ $x<0$)

$$> |a_{n-1}x_2^{n-1} + \dots + a_1 x_2 + a_0| \geqslant a_{n-1}x_2^{n-1} + \dots + a_1 x_2 + a_0$$

$\therefore\ p(x_2) = a_n x_2^n + a_{n-1}x_2^{n-1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 < 0$, pois a primeira parcela é negativa e seu módulo é maior que a soma das demais.

Portanto, quando $a_n > 0$, existem x_1 e x_2 tais que $p(x_1) > 0$ e $p(x_2) < 0$.

Quando $a_n < 0$, basta aplicar o mesmo argumento para $q(x) = -p(x)$ e teremos $q(x_1) > 0$ e $q(x_2) < 0 \Rightarrow p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$.

Por fim, com $p(x)$ é contínuo e existem x_1 e x_2 tais que $p(x_1) > 0$ e $p(x_2) < 0$, deve existir $c \in (x_1, x_2)$ tal que $p(c) = 0$, ou seja, uma raiz de $p(x)$.

4 a) $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(2x + x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x + \operatorname{sen} x \cos(2x)$

$= \operatorname{sen}(x+x)\cos x + \operatorname{sen} x \cos(x+x) = (\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\cos x + \operatorname{sen} x(\cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x)$

$= 2\operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 2\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^3 x$

$= 2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^3 x = 3\underbrace{\operatorname{sen} x}_{u} - 4\underbrace{\operatorname{sen}^3 x}_{u^3} = p(u)$, onde

$p(u) = 3u - 4u^3$.

b) $\frac{1}{2} = \text{sen}\,30° = \text{sen}(3 \cdot 10°) = 3 \cdot \text{sen}(10°) - 4\,\text{sen}^3(10°)$

$\Rightarrow -4[\text{sen}(10°)]^3 + 3[\text{sen}(10°)] - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow -8[\text{sen}(10°)]^3 + 6[\text{sen}(10°)] - 1 = 0$

$\therefore$ sen (10°) é raiz do polinômio $p(x) = -8x^3 + 6x - 1$ que tem coef. inteiros.

(5) $\sqrt{x} + m = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - m \overset{\circledast}{\Rightarrow} x = (x-m)^2$

Como $\sqrt{x} \geq 0$ por definição, $x = \sqrt{x} + m \geq m \Rightarrow x - m \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{(x-m^2)} = |x-m| = x - m \Rightarrow$ vale a volta de $\circledast$.

$\therefore \sqrt{x} + m = x \Leftrightarrow x = (x-m)^2 = x^2 - 2mx + m^2 \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0$

$\Delta = (2m+1)^2 - 4m^2 = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 = 4m + 1$

$$\Rightarrow x = \frac{2m+1 \pm \sqrt{4m+1}}{2}$$

Mas,

$$x_2 - m = \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2} - m = \frac{2m+1-\sqrt{4+1}-2m}{2} = \frac{1-\sqrt{4m+1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{4m+1}{4}} = \frac{1}{2} - \sqrt{m+\frac{1}{4}}$$

e

$$m > 0 \Rightarrow m + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{m+\frac{1}{4}} > \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \sqrt{m+\frac{1}{4}} < 0$$

$\therefore x_2 - m < 0$, logo x_2 não é uma sol. válida, pois $x \geq m$.

Portanto, apenas x_1 é sol. da eq.

6 Temos que:

$$y = ba^t \quad (1)$$

$$2y = ba^{t+d} \quad (2)$$

$$\frac{y}{2} = ba^{t+m} \quad (3)$$

Substituindo (1) em (2):

$$2ba^t = ba^{t+d} = ba^t a^d \Rightarrow a^d = 2 \Rightarrow d = \log_a 2$$

$$\Rightarrow d = \frac{\log_2 2}{\log_2 a} = \frac{1}{\log_2 a} \Rightarrow \frac{1}{d} = \log_2 a \Rightarrow 2^{\frac{1}{d}} = a.$$

$$\therefore y = ba^t = b\left(2^{\frac{1}{d}}\right)^t = b\,2^{\frac{t}{d}}.$$

Substituindo (1) em (3):

$$\frac{ba^t}{2} = ba^{t+m} = ba^t a^m \Rightarrow a^m = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \log_a \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m = \log_a 1 - \log_a 2 = -\log_a 2 = -d.$$

(7) a) A massa inicial era $M(0) = 200 e^0 = 200g$.

b) $M(10) = 200 e^{\frac{-10 \ln 2}{30}} = 200\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{10}{30}} = 200 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$

$= 200 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 200 \cdot 0{,}794 = 158{,}8g$

c) Queremos t tal que $M(t) = \frac{M(0)}{2}$:

$200 e^{\frac{-t \ln 2}{30}} = 100 \Rightarrow \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{30}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{30}} = 2^{-1}$

$\Rightarrow \frac{t}{30} = 1 \Rightarrow t = 30$ anos.

(8) $tg x + sec x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{sen x}{cos x} + \frac{1}{cos x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{sen x + 1}{cos x} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2(sen x + 1) = 3 cos x \Rightarrow 4(sen x + 1)^2 = 9 cos^2 x$

$\Rightarrow 4(sen^2 x + 2 sen x + 1) = 9(1 - sen^2 x)$

$\Rightarrow 4 sen^2 x + 8 sen x + 4 - 9 + 9 sen^2 x = 0$

$\Rightarrow 13 sen^2 x + 8 sen x - 5 = 0$

Chame $y = sen x$: $13y^2 + 8y - 5 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-5) = 64 + 260 = 324$

$\therefore y = \frac{-8 \pm 18}{26} \Rightarrow y = \frac{5}{13}$ ou $y = -1$

$\Rightarrow sen x = \frac{5}{13}$ ou $sen x = -1$.

Logo,

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = \begin{cases} 1-\left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \\ 1-(-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{12}{13}.$$

Mas, como $\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow \cos x = 0$ e nesse caso $\operatorname{tg} x$ e $\sec x$ não estão definidas.

Portanto, se $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$, então $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$ e $\cos x = \frac{12}{13}$.