1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Engenharia Civil 24/01/2023

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule os limites abaixo:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2023}+n^{2022}}{4n^{2024}+2n^{2023}}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n}$

2. Determine se a série abaixo é convergente ou divergente e calcule sua coma caso seja convergente:

$$3-4+\frac{16}{3}-\frac{64}{9}+\cdots$$

3. Determine se as séries são convergentes ou divergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1+2n^2)^n}$

4. Determine o raio e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$.

5. Calcule a série de Taylor da função $f(x) = \ln x$ centrada em $a=1$.

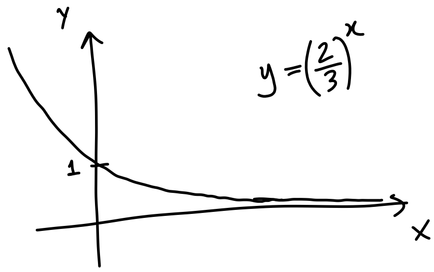
Boa Prova!

Solução P1

① a) $$\frac{n^{2023}+n^{2022}}{4n^{2024}+2n^{2023}} \cdot \frac{\frac{1}{n^{2024}}}{\frac{1}{n^{2024}}} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b) A função $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ é exponencial e como $\frac{2}{3}<1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$.

Como $f(n)=\frac{2^n}{3^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}=0$.



② A série pode ser escrita como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, logo é uma série geométrica com $a=3$ e $r=-\frac{4}{3}$. Como $-\frac{4}{3}<-1$, a série diverge.

③ a) Aplicando o teste da razão:

$$\left|\frac{(n+1)^3}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n^3}\right| = \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3, \text{ pois } n\geq 1.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{5}<1.$$

Portanto, a série converge.

b) Aplicando o teste da raiz:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^{2n}}{(1+2n^2)^n}\right|} = \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{1+2n^2}\right|^n} = \left|\frac{n^2}{1+2n^2}\right| = \frac{n^2}{1+2n^2}, \text{ pois } n \geq 1.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Portanto, a série é convergente.

(4) Aplicando o teste da razão:

$$\left|\frac{3^{n+1}(x+4)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{3^n(x+4)^n}\right| = \left|\frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{(x+4)^{n+1}}{(x+4)^n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = \left|3 \cdot (x+4) \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot |x+4| = 3\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \cdot |x+4| \xrightarrow{n\to 3} 3 \cdot |x+4|$$

$$\therefore 3 \cdot |x+4| < 1 \Rightarrow |x+4| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{13}{3} < x < -\frac{11}{3}$$

Assim, a série converge para $-\frac{13}{3} < x < -\frac{11}{3}$.

Para $x = -\frac{13}{3}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\left(-\frac{13}{3}+4\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Como $\sqrt{n}$ é crescente, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é decrescente. Além disso, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Pelo teste da série alternada, a série converge para $x = -\frac{13}{3}$.

Para $x = -\frac{11}{3}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\left(-\frac{11}{3}+4\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

é uma série p com $p = \frac{1}{2} < 1$, logo divergente.

Portanto, a série congerge se $-\frac{13}{3} \leq x < -\frac{11}{3}$ e diverge caso contrário.

(5) Derivando $f(x)$:

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -2 \cdot 3 = -6$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \Rightarrow f^{(5)}(1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$