UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Números e Funções Reais — Avaliação 1
Prof. Adriano Barbosa

PROFMAT 20/05/2022

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a):...

1. Sejam X_1, X_2, Y_1, Y_2 subconjuntos do conjunto universo U. Suponha que $X_1 \cup X_2 = U$ e $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, que $X_1 \subset Y_1$ e que $X_2 \subset Y_2$. Prove que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.

2. Considere as seguintes (aparentes) equivalências lógicas:
$$\begin{aligned} x = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$
Conclusão: $x = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Onde está o erro?

3. Use indução para provar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto não-vazio com a seguinte propriedade: para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se todos os números naturais menores do que n pertencem a X então $n \in X$. Prove que $X = \mathbb{N}$. (Sugestão: boa ordenação)

5. Prove, por indução, que um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos.

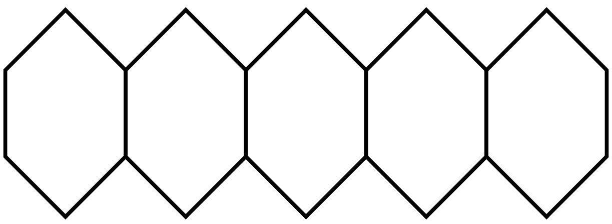
6. Verifique se cada passo na solução das inequações abaixo está correto:

   (a) $\dfrac{5x+3}{2x+1} > 2 \Rightarrow 5x + 3 > 4x + 2 \Rightarrow x > -1$

   (b) $\dfrac{2x^2 + x}{x^2 + 1} < 2 \Rightarrow 2x^2 + x < 2x^2 + 2 \Rightarrow x < 2$

7. Considere todos os intervalos da forma $[0, \frac{1}{n}]$, onde $n \in \mathbb{N}$. Existe um número comum a todos estes intervalos? E se forem tomados os intervalos abertos?

8. Um garoto brinca de arrumar palitos fazendo uma sequência de hexágonos como na figura. Se ele fez 2022 hexágonos, quantos palitos utilizou?



Boa Prova!

Solução

(1) Como $X_1 \subset Y_1$ e $X_2 \subset Y_2$, basta mostrar que $Y_1 \subset X_1$ e $Y_2 \subset X_2$.

Tome $y \in Y_1$, como $U = X_1 \cup X_2$, temos que $y \in X_1$ ou $y \in X_2$.

$y \in X_2$ não é possível, pois $X_2 \subset Y_2$ e $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Portanto, $y \in X_1$.

Analogamente, $y \in Y_2 \Rightarrow y \in X_2$.

(2) Observe que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Logo,

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Assim, a primeira equivalência é verdadeira.

Por outro lado, $x = 1 \Rightarrow 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$. Mas, $x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = x^2 - 1$.

Logo,

$$x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Portanto, a única implição que não se verifica é

$$x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ pois}$$

$$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 4 \neq 0$$

③ Temos que:

$$\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(1+1)^2 = 1 = 1^3.$$

Supondo que

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

mostremos que

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

De fato,

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+(n+1)^3$$

$$= (n+1)^2\left[\frac{1}{4}n^2+(n+1)\right] = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

④ Suponha $X \neq \mathbb{N}$ e seja $A = \mathbb{N} - X$. Pelo PBO, A tem um menor elemento $a \in A$. Logo, todos os naturais menores que a pertencem a X. Por hipótese, $a \in X$. Absurdo! Portanto, $X = \mathbb{N}$.

⑤ Um conjunto X com 1 elemento possui $2 = 2^1$ subconjuntos, $\emptyset$ e X. Suponha, por indução, que um conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ com n elementos tenha 2^n subconjuntos. Mostremos que $X \cup \{a\}$ tem 2^{n+1} subconjuntos. De fato, os subconjuntos de $X\cup\{a\}$ são os 2^n subconjuntos de X e os mesmos subconjuntos unidos com $\{a\}$, ou seja, mais 2^n subconjuntos. Portanto, $X\cup\{a\}$ tem $2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos.

⑥ Resolvendo as inequações:

a) Observe que $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$ e

$2x+1<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$

Logo, para $x>-\frac{1}{2}$:

$$\frac{5x+3}{2x+1}>2 \overset{(\times\, 2x+1)}{\Longleftrightarrow} 5x+3>4x+2 \overset{(-4x-3)}{\Longleftrightarrow} x>-1.$$

a solução é $x>-\frac{1}{2}$.

Para $x<-\frac{1}{2}$:

$$\frac{5x+3}{2x+1}>2 \overset{(\times\, 2x+1)}{\Longleftrightarrow} 5x+3<4x+2 \overset{(-4x-3)}{\Longleftrightarrow} x<-1$$

a solução é $x<-1$.

Portanto, a solução da inequação é $x<-1$ e $x>-\frac{1}{2}$.

b) Observe que $x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Logo,

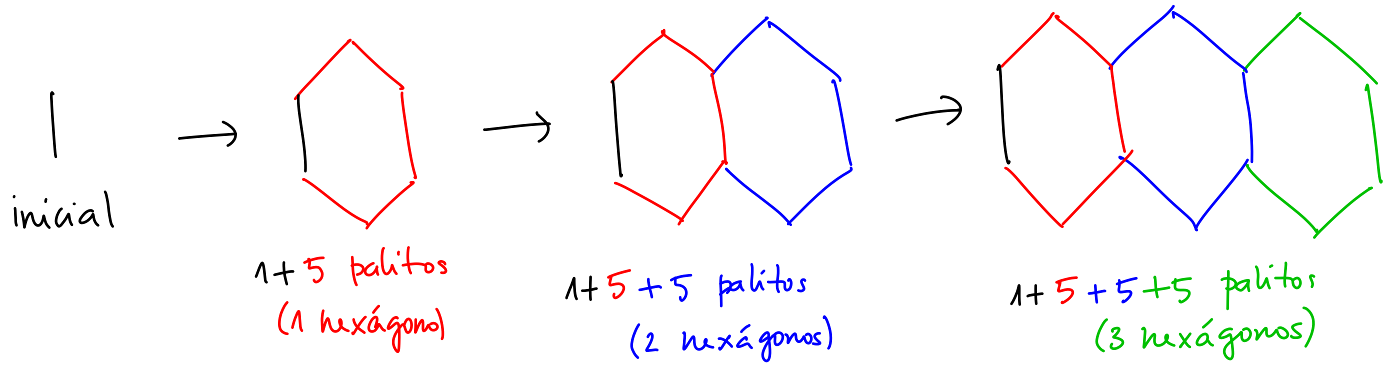
$$\frac{2x^2+x}{x^2+1}<2 \overset{(\times\, x^2+1)}{\Longleftrightarrow} 2x^2+x<2x^2+2 \overset{(-2x^2)}{\Longleftrightarrow} x<2.$$

⑦ Considerando os intervalos fechados, temos que 0 pertence a todos os intervalos $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Considerando os intervalos abertos, não pode existir $x > 0$ pertencente a todos os intervalos $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{x}$, logo $\frac{1}{n_0} < x \Rightarrow x \notin \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$.

⑧ Observe que a sequência pode ser construida partindo de um palito inicial e adicionando sempre os cinco outros palitos do hexágono:



Assim, se x é o número de hexágonos, a função afim $f(x) = 5x + 1$ nos dá o número de palitos utilizados.

Portanto, $f(2022) = 10.111$.