1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P3
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Energia 30/11/2018

Aluno(a):. . . . .

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$, onde:

   (a) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   (b) $x_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

2. Determine se a série $2 + 0,5 + 0,125 + 0,03125 + \cdots$ é convergente e, se possível, calcule sua soma.

3. Determine se as séries abaixo são convergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n}$

4. Determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ as séries são convergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

5. Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ centrada em $a = -3$.

Boa Prova!

(1) a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

b) Calculando a integral:

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

(2) Observe que

$$\frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 \quad , \quad \frac{0{,}125}{0{,}5} = 0{,}25 \text{ e } \frac{0{,}03125}{0{,}125} = 0{,}25 .$$

Assim, temos uma série geométrica com razão $r = 0{,}25$ e primeira parcela $a = 2$. Como $|r| = 0{,}25 < 1$, a série é convergente e sua soma é igual a

$$\frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-0{,}25} = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} \approx 2{,}666 .$$

(3) a) Observe que $x_n = \dfrac{n^2}{3n^2+2}$ é tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+2} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0$$

Portanto, pelo teste da divergência, a série diverge.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} = 1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^3} + \cdots$ é geométrica com razão $r = \frac{1}{\pi}$. Como $|r| = \frac{1}{\pi} < 1$, a série é convergente.

④ a) Aplicando o teste da razão:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\,(2x-1)^{n+1}}{n!\,(2x-1)^n}\right| = \left|(n+1)(2x-1)\right| = (n+1)\,|2x-1|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|2x-1| = \infty\ ,\ \forall x \neq \frac{1}{2}$$

Portanto, a série converge apenas para $x = \frac{1}{2}$.

b) Aplicando o teste da raiz:

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{n^n}\right|} = \sqrt[n]{\left|\frac{x-2}{n}\right|^n} = \left|\frac{x-2}{n}\right| = \frac{|x-2|}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|}{n} = 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Portanto, a série converge para todo $x\in\mathbb{R}$.

⑤ Calculando as derivadas de f em $a=-3$:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f(-3) = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-3) = -\frac{1}{3^2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(-3) = -\frac{2}{3^3}$$

$$f'''(x) = -3\cdot 2x^{-4} = -\frac{3\cdot 2}{x^4} \Rightarrow f'''(-3) = -\frac{3\cdot 2}{3^4}$$

$$f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\,x^{-5} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{x^5} \Rightarrow f^{(4)}(-3) = -\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(-3) = (-1)^n\frac{n!}{(-3)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\cdot\frac{n!}{3^{n+1}} = -\frac{n!}{3^{n+1}}$$

Logo, a série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{x}$ centrada em $a=-3$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n!}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{n!}(x+3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+1}}(x+3)^n$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x+3) - \frac{1}{3^3}(x+3)^2 - \frac{1}{3^4}(x+3)^3 - \dots$$