1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Alimentos 22/08/2022

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Usando as matrizes abaixo, resolva as operações abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) A^T (b) AA^T (c) B^{-1} (d) $\text{tr}(AA^T + C)$

2. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1$, encontre

   (a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix}$

   justificando sua resposta.

3. Suponha $\langle u, v \times w \rangle = 7$. Encontre

   (a) $\langle u, w \times v \rangle$ (b) $\langle v \times w, u \rangle$ (c) $\langle w, u \times v \rangle$

   justificando sua resposta.

4. Dados $A = (0, 0, 1)$ e $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$. Determine a equação paramétrica da reta que passa por A e é perpendicular a r e ao eixo y.

5. Encontre a equação implícita do plano paralelo ao plano yz e que intersecta o eixo x em -3.

Boa Prova!

Solução P1

(1) a) $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 3 \\ 8 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{4}L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\therefore B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $AA^T + D = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 3 \\ 8 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 5 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow tr(AA^T + D) = 11 + 8 + 5 = 24.$

② a) Trocar duas linhas de posição faz o determinande mudar de sinal, logo

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -1$$

b) Substituir uma linha pela soma dela com o múltiplo de outra linha não altera o valor do determinante, logo

$$\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1, \text{ pois fizemos } L_1 \to L_1 + 2L_3.$$

c) Multiplicar uma linha por um escalar faz com que o determinante seja multiplicado pelo mesmo escalar

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) = -3$$

d) Se a matriz tem colunas múltiplas, então seu det. é zero

$$\begin{vmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} = 0$$

③ Sejam $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$ e $w=(w_1,w_2,w_3)$

a) $$\langle u, w\times v\rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -\langle u, v\times w\rangle = -7$$

b) O produto interno é comutativo, logo $\langle v\times w, u\rangle = \langle u, v\times w\rangle = 7$

c) $$\langle w, u\times v\rangle = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \langle u, v\times w\rangle = 7.$$

④ O vetor diretor de r é $v=(1,2,3)$, o eixo y tem a direção do vetor $u=(0,1,0)$. A direção w perpendicular a u e v é dada por

$$w = u\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3,0,1)$$

Portanto, a reta tem eq. $(x,y,z) = (0,0,1) + t(-3,0,1)$, $t\in\mathbb{R}$.

⑤ Como o plano é paralelo ao plano yz, a direção $(1,0,0)$ é normal a ele. Logo, sua eq. deve ser

$1x + 0y + 0z = d \Rightarrow x = d.$

Como o ponto $(-3,0,0)$ está no plano, temos que

$d = -3.$

Portanto, $x=-3$ é a eq. implícita do plano.