1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Mecânica 22/08/2022

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Usando as matrizes abaixo, resolva as operações abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) A^T (b) AA^T (c) B^{-1} (d) $\text{tr}(AA^T + C)$

2. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, encontre

   (a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

   justificando sua resposta.

3. Suponha $\langle u, v \times w \rangle = -2$. Encontre
   (a) $\langle u, w \times v \rangle$ (b) $\langle v \times w, u \rangle$ (c) $\langle w, u \times v \rangle$
   justificando sua resposta.

4. Dados $A = (1, 2, 3)$ e $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$. Determine a equação paramétrica da reta que passa por A e é perpendicular a r e ao eixo z.

5. Encontre a equação paramétrica do plano paralelo ao eixo y e que intersecta o eixo x em 3 e o eixo z em 2.

Boa Prova!

Solução P1

(1) a) $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{2} L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$

$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{4} L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$

$\therefore B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

d) $AA^T + C = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 5 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow tr(AA^T + C) = 10 + 5 + 6 = 21.$

② a) Trocar duas linhas de posição faz o determinande mudar de sinal, logo

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3$$

b) Substituir uma linha pela soma dela com o múltiplo de outra linha não altera o valor do determinante, logo

$$\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$, pois fizemos $L_1 \to L_1 + 1 \cdot L_3$.

c) Multiplicar uma coluna por um escalar faz com que o determinante seja multiplicado pelo mesmo escalar

$$\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

d) Se a matriz tem linhas múltiplas, então seu det. é zero

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

③ Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$

a) $$\langle u, w \times v \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -\langle u, v \times w \rangle = 2$$

b) O produto interno é comutativo, logo $\langle v \times w, u \rangle = \langle u, v \times w \rangle = 2$.

c) $$\langle w, u \times v \rangle = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \langle u, v \times w \rangle = -2.$$

④ O vetor diretor de r é $v = (-1, 1, 3)$, o eixo z tem a direção do vetor $u = (0,0,1)$. A direção w perpendicular a u e v é dada por

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 0).$$

Portanto, a reta tem eq. $(x, y, z) = (1,2,3) + t(1,1,0)$, $t \in \mathbb{R}$.

⑤ Os pontos $A(3,0,0)$ e $B(0,0,2)$ estão no plano, logo o seg. orientado $\vec{AB} = (-3, 0, 2)$ também está no plano. Como o plano é paralelo ao eixo y, ele se estende na direção $(0,1,0)$. Como $(-3,0,2)$ e $(0,1,0)$ não são paralelos, a eq. do plano é $(x,y,z) = (3,0,0) + t(-3,0,2) + s(0,1,0)$, $s,t \in \mathbb{R}$.