Cap. 8 – Funções exponenciais e logarítmicas

10/06/2022

Motivação

Sejam:

- c_0 : capital inicial capitalizado continuamente a juros fixos;
- $c(t)$: capital gerado a partir de c_0 decorrido tempo t;

Se $t < t'$ então $c(t) < c(t')$, logo $c(t)$ é crescente, pois quanto maior o tempo maior rendimento.

Além disso, $c(t+h) - c(t) < c(t'+h) - c(t')$, pois quanto maior o capital maior, maior rendimento.

$\therefore$ $c(t+h) - c(t)$ depende de h e de t, logo não pode ser função afim.

Motivação

Por outro lado, $c(t+h)-c(t)$ é o lucro obtido ao investir $c(t)$ por um tempo h e quanto maior o valor inicial $c(t)$, maior o lucro. Logo, como o lucro é proporcional ao valor inicial,

$$\begin{aligned}
& c(t+h)-c(t)=\varphi c(t) \\
\Rightarrow & \varphi=\frac{c(t+h)-c(t)}{c(t)}, \forall t \\
\Rightarrow & \varphi=\varphi(h) \\
\therefore\ & \varphi(h)=\frac{c(t+h)}{c(t)}-1 \text{ não depende de } t,
\end{aligned}$$

ou seja, se $\varphi(h)=2$, então

$$\frac{c(t_1+h)}{c(t_1)}=1=\frac{c(t_2+h)}{c(t_2)}, \forall t_1, t_2 \text{ e mesmo } h$$

Motivação

Isso diz que o tempo h para dobrar o capital $c(t)$ é o mesmo idependentemente de t, isto é, seja $c(t)$ grande ou pequeno.

Portanto, nosso modelo deve ser uma função $c(t)$ crescente e qual que $\frac{c(t+h)-c(t)}{c(t)}$ dependa somente de h.

Motivação

No decaimento radioativo, onde o tempo necessário para reduzir à metade a radioatividade (meia-vida) de uma tonelada de uma substância é igual ao tempo que leva um grama da mesma substância para ter sua metade desinstegrada.

Nesse caso, a função é decrescente e sua variação também é proporcional a quantidade da substância no tempo t:

$$m(t+h) - m(t) = \varphi m(t) \Rightarrow \varphi(h) = \frac{m(t+h) - m(t)}{m(t)}$$

Motivação

O modelo para ambos os problemas é a função exponencial:

$$c(t) = c_0 a^t$$

$$m(t) = ba^t, (0 < a < 1)$$

Potências

Dado $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$a^1 = a$$

$$a^n = a \cdot a^{n-1}$$

De outra forma,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Potências

Observe que:

1. $a^m a^n = \underbrace{(a\cdots a)}_{m \text{ vezes}} \underbrace{(a\cdots a)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a\cdots a}_{m+n \text{ vezes}} = a^{m+n}, \forall m,n \in \mathbb{N};$
2. $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdots a^m}_{n \text{ vezes}} = a^{\overbrace{m+\cdots+m}^{n \text{ vezes}}} = a^{mn}, \forall m,n \in \mathbb{N};$
3. Se $a > 1$ então $a < a^2 < a^3 < \cdots < a^n < \cdots$, pois $1 < a \xRightarrow{(a>0)} a < a^2;$
4. Se $a < 1$ então $a > a^2 > a^3 > \cdots > a^n > \cdots$, pois $1 > a \xRightarrow{(a>0)} a > a^2.$

Potências

De 3., temos que, para $a > 1$, a sequência (a^n) é crescente e ilimitada.

De fato, escrevendo $a = 1 + \alpha$, pela desigualdade de Bernoulli, temos

$$a^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

Dado $M > 0$, tome $n > \frac{M-1}{\alpha}$ e teremos

$$a^n > 1 + \frac{M-1}{\alpha}\alpha = M.$$

Dizemos então que, para $a > 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = +\infty$.

Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + nx, \forall x > -1, n \geq 1$

Potências

Analogamente, de 4., para $0 < a < 1$, temos que (a^n) é decrescente e limitada inferiormente por zero.

De fato, como $0 < a < 1$, chamando $b = \frac{1}{a}$, temos $b > 1$ e, pelo que acabamos de mostrar, $(b^n) = \left(\frac{1}{a^n}\right)$ é ilimitada.
Logo, para $n > n_0$,

$$b^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow a^n < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Portanto, para $0 < a < 1$, $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$.

Potências

Para que a^n preserve as propriedade acima com $n \in \mathbb{Z}$, devemos ter:

- $a^0 a = a^{0+1} = a \Rightarrow a^0 = 1$;
- $a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Potências

De modo geral, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, f(n) = a^n$ deve satisfazer:

- $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$;
- Se $a > 1$, então f é crescente;
- Se $0 < a < 1$, então f é decrescente.

Potências

Analogamente, se $r, s \in \mathbb{Q}$, queremos que $a^{r+s} = a^r a^s$, logo para $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$$(a^r)^n = \underbrace{a^r \cdots a^r}_{n \text{ vezes}} = a^{\overbrace{r + \cdots + r}^{n \text{ vezes}}} = a^{nr} = a^m$$

e

$$a^r > 0 \Leftrightarrow a^r = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\therefore a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Potências

De modo geral, veremos que $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, f(r) = a^r$ é tal que:

- Se $r = \frac{m}{n} = \frac{pm}{pn}$, então $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$;
- $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$;
- f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Potências

Lema: Fixado $a > 0$ e $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe uma potência a^r, onde $r \in \mathbb{Q}$.

Prova: Dados $0 < \alpha < \beta$, encontraremos $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < a^r < \beta$.

Sejam $a > 1$ e $\alpha > 1$ (os demais casos são análogos), como as potências a^n formam uma sequência crescente e ilimitada, existem $n, M \in \mathbb{N}$ tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad \text{e} \quad 1 < a < \Bigg(\underbrace{1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}}_{>1}\Bigg)^n$$

$$\Rightarrow 1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \Rightarrow 0 < a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha$$

Logo,

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha$$

Potências

Assim,

$$a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \ldots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, cujos comprimentos são menores do que $\beta - \alpha$.
Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Função exponencial

Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $(f(x) = a^x)$ deve satisfazer:

1. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$;
2. $f(1) = a$;
3. f é crescente se $a > 1$ e f é decrescente se $0 < a < 1$.

Função exponencial

Dada f satisfazendo 1., temos que

- $f(x) \equiv 0$ ou $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
  De fato,
  $f(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, então
  $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
  Se $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Função exponencial

Se f satisfaz 1. e 2.:

- $f(n) = a^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(1) \cdot \; \cdots \; \cdot f(1)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot \; \cdots \; \cdot a}_{n \text{ vezes}} = a^n$$

$$\Rightarrow f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}, \forall r = \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

Logo, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+, f(r) = a^r$ é a única função que satisfaz 1. e 2. já que qualquer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo 1. e 2. quando restrita a $\mathbb{Q}$ resulta em $f(r) = a^r$.

Função exponencial

Dessa forma, existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ para x irracional. De fato, pela propriedade 3., se x é irracional, temos:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \xrightarrow{(a>1)} a^r = f(r) < f(x) < f(s) = a^s.$$

Caso existissem dois valores distintos $A < B$ para $f(x)$, teríamos

$$r < x < s \Rightarrow a^r = f(r) < A < B < f(s) = a^s.$$

Se existir $A < a^t < B$ com $t \in \mathbb{Q}$, teríamos $x < t$ e $t < x$, logo o intervalo $[A, B]$ não pode conter nenhuma potência de a com expoente racional, o que contradiz o lema.

Função exponencial

Se x é irracional, como definir $f(x)$?

Dado $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, tome (r_n) com $r_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \in \mathbb{Q}$ e definimos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Assim, denotando $f(x) = a^x$, temos $a^x = \lim a^{r_n}$, onde $r_n \in \mathbb{Q}$ e $r_n \to x$.

Função exponencial

Outras propriedades da função exponencial:

1. É ilimitada superiormente;
   a^r é ilimitada se $r \in \mathbb{Q}$
2. É contínua (Bernoulli);
3. É bijetiva;
   (de)crescente $\Rightarrow$ injetiva
   sobrejetiva pelo lema
4. Se $a > 1$: $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$
   Se $0 < a < 1$: $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$

Função exponencial

Teorema: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é monótona e injetiva, são equivalentes:

1. $f(nx) = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R},$ onde $f(1) = a$;
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Função exponencial

Teorema: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é monótona e injetiva, são equivalentes:

1. $f(nx) = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R},$ onde $f(1) = a$;
3. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Prova: 1.$\Rightarrow$2.: Mostremos inicialmente que 1. vale para todo $n \in \mathbb{Q}$. Seja $r = \frac{m}{n} \Rightarrow nr = m$:

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$$

logo, $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Função exponencial

Supondo $f(1) = a$, temos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$$

Supondo f crescente (os demais casos são análogos), temos

$$f(0) = f(0 \cdot 1) = f(1)^0 = a^0 = 1$$

$$\Rightarrow 1 = f(0) < f(1) = a.$$

Admita, por absurdo, $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$.
Digamos que seja $f(x) < a^x$. Pelo lema, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que
$f(x) < \underbrace{a^r}_{f(r)} < a^x$.
Como f é crescente, $f(x) < f(r) \Rightarrow x < r$. Mas, $a^r < a^x \Rightarrow r < x$.
Absurdo.

Caracterização da função exponencial

2.⇒3.:

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

3.⇒1.:

$$f(nx) = f(\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(x) \cdot \ \cdots \ \cdot f(x)}_{n \text{ vezes}} = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

Podemos trocar a hipótese de monotonicidade por continuidade no teorema e ele continuará válido:

$$x = \lim r_n, r_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f(\lim r_n) = \lim f(r_n) = \lim a^{r_n} = a^x$$

Caracterização da função exponencial

Dizemos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é do tipo exponencial se $g(x) = ba^x$, onde $a, b > 0$ e $a \neq 1$.

Teorema: Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona e injetiva tal que $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ depende apenas de h. Se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, então $g(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Caracterização da função exponencial

Prova: Se $f(x) = \frac{g(x)}{g(0)}$, então f é monótona, injetiva e

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{\frac{g(x+h)}{g(0)}}{\frac{g(x)}{g(0)}} = \frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} + 1 = \varphi(h)$$

depende só de h. Logo, pondo $x = 0$

$$\varphi(h) = \frac{f(h)}{f(0)} = \frac{f(h)}{1} = f(h), \forall h \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \frac{f(x+h)}{f(x)} = \varphi(h) = f(h) \Rightarrow f(x+h) = f(x) \cdot f(h),$$

pelo teorema, $f(x) = a^x$.

Portanto, se $b = g(0), a^x = f(x) = \frac{g(x)}{b} \Rightarrow g(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Caracterização da função exponencial

Teorema: Suponha $f(b,t) > 0$ tal que:

1. $f(b,t)$ depende linearmente de b e é monótona injetiva em relação a t;
2. $f(b, s+t) = f(f(b,s), t)$.

Então, pondo $a = f(1,1)$, tem-se $f(b,t) = ba^t$.

Caracterização da função exponencial

Teorema: Suponha $f(b,t) > 0$ tal que:

1. $f(b,t)$ depende linearmente de b e é monótona injetiva em relação a t;
2. $f(b, s+t) = f(f(b,s), t)$.

Então, pondo $a = f(1,1)$, tem-se $f(b,t) = ba^t$.

Prova: Por 1., $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \varphi(t) = f(1,t)$ é monótona injetiva. Além disso,

$$\begin{aligned}\varphi(s+t) = f(1, s+t) &= f(f(1,s),t) = f(f(1,s)\cdot 1, t)\\ &= f(1,s)\cdot f(1,t) = \varphi(s)\cdot\varphi(t)\end{aligned}$$

Pelo teorema de caracterização, temos $\varphi(t) = a^t$, onde $a = \varphi(1) = f(1,1)$.
Portanto, $f(b,t) = f(b\cdot 1, t) = bf(1,t) = b\varphi(t) = ba^t$.

Caracterização da função exponencial

Observe que $b = ba^0 = f(b, 0)$ é o valor inicial de $f(b, t)$, então 2. diz que começar com o valor b e deixar passar o tempo $s + t$ é o mesmo que começar com $f(b, s)$ e deixar passar o tempo t.

Funções exponenciais e progressões

Se (x_n) é uma PA de razão r e $f(x) = ba^x$, então

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f(x_1) = ba^{x_1} \\
y_2 &= f(x_2) = f(x_1 + r) = ba^{x_1+r} = ba^{x_1}a^r = y_1 a^r \\
y_3 &= f(x_3) = f(x_1 + 2r) = ba^{x_1+2r} = ba^{x_1}(a^r)^2 = y_1(a^r)^2 \\
&\vdots \\
y_{n+1} &= f(x_{n+1}) = f(x_1 + nr) = ba^{x_1+nr} = ba^{x_1}(a^r)^n = y_1(a^r)^n
\end{aligned}
$$

é (y_n) é uma PG de razão a^r.

Funções exponenciais e progressões

Teorema: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva e que transforma toda PA (x_n) numa PG (y_n), $y_n = f(x_n)$. Pondo $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ temos $f(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Funções exponenciais e progressões

Teorema: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva e que transforma toda PA (x_n) numa PG (y_n), $y_n = f(x_n)$. Pondo $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ temos $f(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Prova: Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{b}$ é monótona injetiva e transforma PAs em PGs com $g(0) = 1$.

Dado $x \in \mathbb{R}$, a sequência $x, 0, -x$ é uma PA de razão $-x$ e $g(x), 1, g(-x)$ é uma PG de razão $g(-x) \Rightarrow g(-x) = \frac{1}{g(x)}$.

Funções exponenciais e progressões

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, a sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma PA de razão $x \Rightarrow 1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma PG de razão $g(x)$ e seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$.

Se $-n$ é um inteiro negativo, então

$$g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}$$

Portanto, $g(nx) = g(x)^n, \forall n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$. Segue-se do teorema de caracterização que, pondo $a = g(1) = \frac{f(1)}{f(0)}$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba, \forall x \in \mathbb{R}$.

Função inversa

$g : Y \to X$ é a inversa de $f : X \to Y$ quando se tem $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x, \forall x \in X$ e $y \in Y$.

f admite inversa $\Leftrightarrow$ f é uma bijeção.

Denotamos a inversa de f por f^{-1}.

Função inversa

Exercício: Mostre que a inversa de uma função (de)crescente é (de)crescente.

Função inversa

Exercício: Mostre que a inversa de uma função (de)crescente é (de)crescente.

Seja $f : X \to Y$ crescente e invertível. Dados $y_1, y_2 \in Y$ com $y_1 < y_2$, existem $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ (pois f^{-1} é injetiva), tais que $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

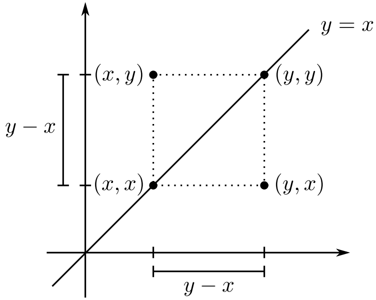
Supondo $x_1 > x_2$ temos $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$. Absurdo.

Portanto, $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$ e f^{-1} é crescente. A prova para f decrescente é análoga.

Função inversa

Se $X, Y \subset \mathbb{R}$ então o gráfico de $f^{-1} : Y \to X$ é simétrico ao gráfico de $f : X \to Y$ em relação a reta $y = x$.

De fato,



$$
\begin{aligned}
(x, y) \in G(f) &\Leftrightarrow y = f(x) \\
&\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \\
&\Leftrightarrow (y, x) \in G(f^{-1})
\end{aligned}
$$

Função logarítmica

A função inversa da exponencial de base a é a função

$$log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

Logo,

$$a^{\log_a x} = x, \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ e } \log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

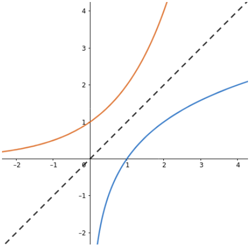
Função logarítmica

Observe que:

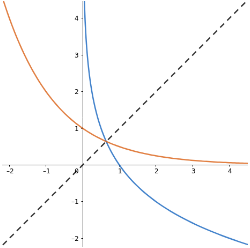
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$;
  Tomando $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$, temos $x = a^u$ e $y = a^v$.
  Logo,
  $xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v} \Leftrightarrow \log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$.
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$;
  Análogo ao item acima.
- $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;
  A inversa de (de)crescente é (de)crescente.
- $a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$;
  Definição.

Função logarítmica

- Se $a > 1$, $\log_a x > 0, \forall x > 1$ e $\log_a x < 0, \forall\ 0 < x < 1$;



- Se $0 < a < 1$, $\log_a x < 0, \forall x > 1$ e $\log_a x > 0, \forall\ 0 < x < 1$;



Função logarítmica

- Existe $c > 0$ tal que $\log_a x = c \log_b x$;
  Pondo $c = \log_a b$, temos $a^c = b$. Temos,
  $v = \log_b x \Leftrightarrow x = b^v = (a^c)^v = a^{cv} \Leftrightarrow \log_a x = cv = c \log_b x$
  $\therefore \log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ ou $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
- Como $log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é bijetiva, também é ilimitada.
  $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$, se $a > 1$
  $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = \infty$, se $0 < a < 1$

Caracterização das funções logarítmicas

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Caracterização das funções logarítmicas

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Prova: Provemos para f crescente (o caso decrescente é análogo). Temos

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$$

Suponha que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$ (mostraremos que isso sempre acontece depois).
Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$.

Caracterização das funções logarítmicas

Para todo $m \in \mathbb{N}$

$$f(a^m) = f(\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ vezes}}) = \underbrace{f(a) + \dots + f(a)}_{m \text{ vezes}} = \underbrace{1 + \dots + 1}_{m \text{ vezes}} = m$$

e

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m})$$

$$\Rightarrow f(a^{-m}) = -m.$$

Se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$ e

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = f(\overbrace{a^r \cdot \dots \cdot a^r}^{n \text{ vezes}})$$

$$= \underbrace{f(a^r) + \dots + f(a^r)}_{n \text{ vezes}} = n \cdot f(a^r) \Rightarrow f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Caracterização das funções logarítmicas

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então para $r, s \in \mathbb{Q}$ tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s)$$

$$\Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Assim todo racional r menor do que x é também menor do que $f(a^x)$ e todo racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$.

Segue-se que $f(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(y) = \log_a y, \forall y > 0$.

Caracterização das funções logarítmicas

Considere o caso geral, onde $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente tal que $g(xy) = g(x) + g(y)$. Então $g(1) = 0$ e como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$.
A nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$ é crescente, transforma somas em produtos e $f(2) = 1$.
Logo, pela primeira parte, tem-se $f(x) = \log_2 x, \forall x > 0$.
Assim,

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)}, \forall x > 0 \text{ e } a = 2^{\frac{1}{b}}$$

$$\Rightarrow g(x) = \log_a x$$