Cálculo III

Teorema de Green

Prof. Adriano Barbosa

Teorema (Green)

Sejam C uma curva

- *simples*
- *fechada*
- *suave por partes*
- *orientada positivamente*

$$+$$

D uma região delimitada por C

$$+$$

P e Q com derivadas parciais contínuas, onde $F = (P, Q)$

$$\Downarrow$$

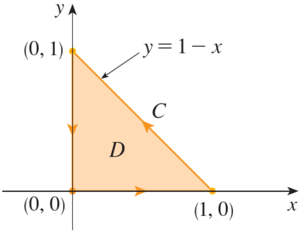
$$\int_C F \cdot dr = \int_C P\ dx + Q\ dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ dA$$

Exemplo

Calcule $\int_C x^4 \ dx + xy \ dy$, onde C é a curva triangular construída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

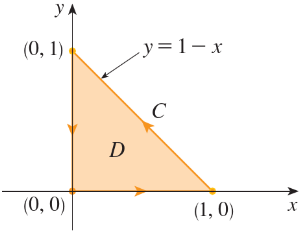
Exemplo

Calcule $\int_C x^4 \; dx + xy \; dy$, onde C é a curva triangular construída pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$, e de $(0,1)$ a $(0,0)$.



Exemplo

Calcule $\int_C x^4 \; dx + xy \; dy$, onde C é a curva triangular construída pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$, e de $(0,1)$ a $(0,0)$.



$$\int_{C_1} x^4 \; dx + xy \; dy + \int_{C_2} x^4 \; dx + xy \; dy + \int_{C_3} x^4 \; dx + xy \; dy$$

Exemplo

Aplicando o Teorema de Green (valem as hipóteses?):

Exemplo

Aplicando o Teorema de Green (valem as hipóteses?):

$$F(x, y) = (x^4, xy)$$

$$P(x, y) = x^4 \text{ e } Q(x, y) = xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

Exemplo

Aplicando o Teorema de Green (valem as hipóteses?):

$$F(x,y) = (x^4, xy)$$

$$P(x,y) = x^4 \text{ e } Q(x,y) = xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

$$\int_C x^4\ dx + xy\ dy = \iint_D y\ dA$$

Exemplo

Resolvendo a integral:

$$\begin{aligned}
\iint_D y \; dA &= \int_0^1 \int_0^{1-x} y \; dy \; dx \\
&= \int_0^1 \left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{1-x} \right) \; dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \; dx \\
&= -\left. \frac{1}{6}(1-x)^3 \right|_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\, dy$, onde $C : x^2 + y^2 = 9$.

Exemplo

Calcule $\int_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\ dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\ dy$, onde $C : x^2 + y^2 = 9$.

Por Green (hipósteses?):

$$F(x,y) = (3y - e^{\operatorname{sen} x}, 7x + \sqrt{y^4+1})$$

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr =& \iint_D 7 - 3\ dA \\ =& 4 \iint_D\ dA\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\ dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\ dy$, onde $C : x^2 + y^2 = 9$.

Por Green (hipósteses?):

$$F(x,y) = (3y - e^{\operatorname{sen} x}, 7x + \sqrt{y^4+1})$$

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr =& \iint_D 7 - 3\ dA \\ =& 4 \iint_D\ dA \\ =& 4 \cdot \text{área}(D) \\ =& 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi\end{aligned}$$

Área

$$\text{área}(D) = \iint_D \, dA$$

Área

$$\text{área}(D) = \iint_D \, dA$$

Se $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, então

$$\begin{cases} P = 0, Q = x \\ P = -y, Q = 0 \\ P = -\frac{1}{2}y, Q = \frac{1}{2}x \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

Área

$$\text{área}(D) = \iint_D \, dA$$

Se $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, então

$$\begin{cases} P = 0, Q = x \\ P = -y, Q = 0 \\ P = -\frac{1}{2}y, Q = \frac{1}{2}x \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

$$\text{área}(D) = \int_C x \; dy = -\int_C y \; dx = \frac{1}{2}\int_C x \; dy - y \; dx$$

Exemplo

Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Exemplo

Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$r(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t), \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Exemplo

Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$r(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t), \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$A = \iint_D \, dA = \frac{1}{2} \int_C x \ dy - y \ dx$$

Exemplo

Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$r(t) = (a\cos t, b \operatorname{sen} t), \; 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{aligned} A = \iint_D dA = \frac{1}{2}\int_C x\ dy - y\ dx \\ =& \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t) - (b\operatorname{sen} t)(-a\operatorname{sen} t)\ dt \\ =& \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\ dt \\ =& \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \pi ab \end{aligned}$$

Exercício

Calcule a integral $\int_C (x - y)\ dx + (x + y)\ dy$, onde C é o círculo de centro na origem e raio 2, diretamente e utilizando o Teorema de Green.

Calcule a área entre um arco da cicloide $r(t) = (t - \text{ sen } t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ e o eixo x.