Cap. 6 – Funções quadráticas

27/05/2022

Funções quadráticas

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$
com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Dadas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, para que se tenha $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$ basta que $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, onde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ são distintos.

De fato, seja $h(x) = f(x) - g(x)$
$\Rightarrow h(x) = \underbrace{(a - a')}_{\alpha} x^2 + \underbrace{(b - b')}_{\beta} x + \underbrace{(c - c')}_{\gamma} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$
Assim, mostrar que $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$ é equivalente a mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Funções quadráticas

Mas, $h(x_i) = f(x_i) - g(x_i) = 0$, para $i = 1, 2, 3$, ou seja,

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \ (1) \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \ (2) \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \ (3) \end{cases}$$

Fazendo $(2) - (1)$ e $(3) - (1)$:

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0 \overset{\div(x_2 - x_1)}{\Rightarrow} \alpha(x_2 + x_1) + \beta = 0 \ (I)$$

$$\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0 \overset{\div(x_3 - x_1)}{\Rightarrow} \alpha(x_3 + x_1) + \beta = 0 \ (II)$$

$$\therefore (II) - (I) \Rightarrow \alpha(x_3 - x_2) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Pondo $\alpha = 0$ em (I), temos $\beta = 0$.
De (1), temos $\gamma = 0$.

Funções quadráticas

O sistema acima tem pelo menos a solução trivial, sendo essa a única solução se $\det A \neq 0$, onde $A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$.

($\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ é invertível (bijetiva) $\Leftrightarrow$ o sistema tem só a solução trivial)

Função quadrática

De modo geral,

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = y_1 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = y_2 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = y_3 \end{cases}$$

tem solução única $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Função quadrática

Dados três pontos distintos do plano, existe uma única função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_i) = y_i, i = 1, 2, 3$.

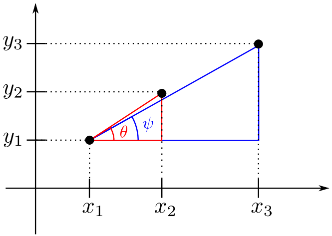
Nesse caso, $a = \dfrac{1}{x_3 - x_2}\left(\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ e f é quadrática se $a \neq 0$, ou seja, se $\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \neq \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Função quadrática

Se $a = 0$:

$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \tan\psi$$

como $\theta, \psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e tan é bijetiva em $(0, \frac{\pi}{2})$, temos $\theta = \psi$. Logo, os três pontos são colineares.



Função quadrática

É comum caracterizar colinearidade de três pontos por:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Função quadrática

É comum caracterizar colinearidade de três pontos por:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2(y_3 - y_1) - x_3(y_2 - y_1) \\ &\quad - x_1(y_3 - y_1) + x_1(y_3 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) + x_1(y_2 - y_1) = 0 \end{aligned}$$

Função quadrática

É comum caracterizar colinearidade de três pontos por:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) = 0 \\
\Leftrightarrow & x_1y_2 - x_1y_3 + x_2(y_3 - y_1) - x_3(y_2 - y_1) \\
& -x_1(y_3 - y_1) + x_1(y_3 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) + x_1(y_2 - y_1) = 0 \\
\Leftrightarrow & (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \\
& + x_1y_2 - x_1y_3 + x_1y_3 - x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = 0
\end{aligned}$$

Função quadrática

É comum caracterizar colinearidade de três pontos por:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) = 0 \\
\Leftrightarrow & x_1y_2 - x_1y_3 + x_2(y_3 - y_1) - x_3(y_2 - y_1) \\
& - x_1(y_3 - y_1) + x_1(y_3 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) + x_1(y_2 - y_1) = 0 \\
\Leftrightarrow & (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \\
& + x_1y_2 - x_1y_3 + x_1y_3 - x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = 0 \\
\Leftrightarrow & (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

Um problema antigo

(Babilônicos, 2000a.C.)
Como encontrar dois númeors x_1 e x_2 sabendo que $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 x_2$?

Geometricamente, x_1 e x_2 são os lados de um retângulo, s é seu semi-perímetro e p sua área.

Um problema antigo

x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$.

De fato, se x é um dos números então $s - x$ é o outro. Logo,

$$p = x(s-x) \Leftrightarrow p = sx - x^2 \Leftrightarrow x^2 - sx + p = 0$$

Além disso, se x é raiz da equação, então $s - x$ também é raiz da equação:

$$\begin{aligned} (s-x)^2 - s(s-x) + p &= s^2 - 2sx + x^2 - s^2 + sx + p \\ &= x^2 - sx + p = 0 \end{aligned}$$

Forma canônica

Dado o trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}
$$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

Forma canônica

Resolvendo a equação $ax^2 + bx + c = 0$:

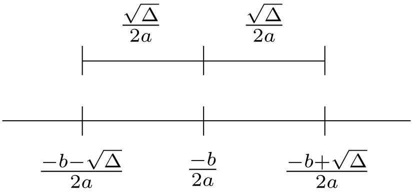
$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \\
&\overset{(\div a)}{\Leftrightarrow} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\
&\overset{(\Delta \geq 0)}{\Leftrightarrow} x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
$$

Forma canônica

Se $\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, temos $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ e $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

Além disso, $\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{b}{2a}$, logo α e β são equidistantes.



Se $\Delta = 0$ temos uma raiz dupla igual a $-\frac{b}{2a}$.

Forma canônica

Observe que:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \geq -\frac{\Delta}{4a}, & \text{se } a > 0 \\ a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \leq -\frac{\Delta}{4a}, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Logo, se $a > 0$, temos um mínimo em $x = -\frac{b}{2a}$ valendo $-\frac{\Delta}{4a}$ e se $a < 0$, temos um máximo em $x = -\frac{b}{2a}$ valendo $-\frac{\Delta}{4a}$.

Gráfico da função quadrática

O gráfico de $f(x) = x^2$ é a parábola de foco $F = (0, \frac{1}{4})$ e diretriz $r : y = -\frac{1}{4}$.

De fato, seja $P = (x, x^2) \in G(f)$

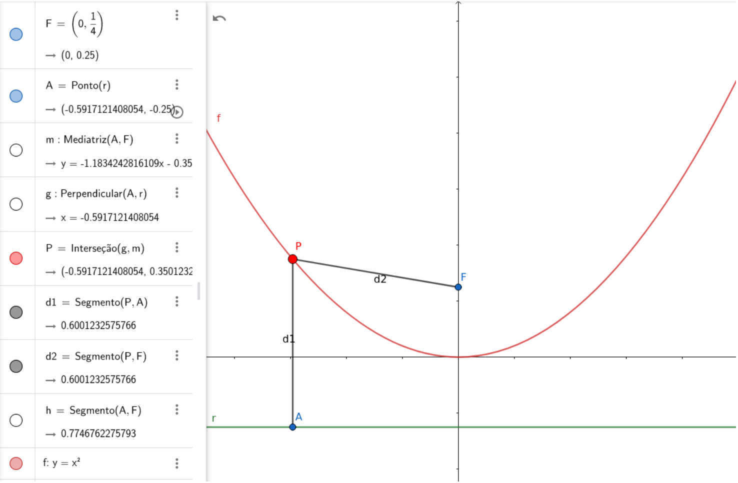
$$d(P,F) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$$
$$\Rightarrow d(P,F)^2 = x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}$$

e

$$d(P,r) = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow d(P,r)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2 = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}$$

Gráfico da função quadrática

$$\therefore d(P,F)^2 = d(P,r)^2 \overset{(\text{dist.}\geq 0)}{\Longrightarrow} d(P,F) = d(P,r)$$



https://www.geogebra.org/m/vrgked3n

Gráfico da função quadrática

Exercícios:

Mostre que:

1. O gráfico de $f(x) = ax^2$ é a parábola de foco $F = (0, \frac{1}{4a})$ e diretriz $r : y = -\frac{1}{4a}$.
2. O gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ é a parábola de foco $F = (m, \frac{1}{4a})$ e diretriz $r : y = -\frac{1}{4a}$.
3. O gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola de foco $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ e diretriz $r : y = k - \frac{1}{4a}$.

---

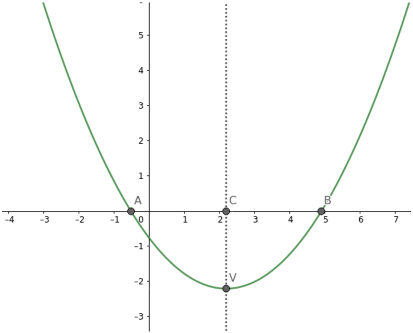
https://www.geogebra.org/m/syn9fp9d

Gráfico da função quadrática

Segue-se que o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola de foco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta+1}{4a}\right)$ e diretriz $r : y = \frac{-\Delta-1}{4a}$, pois

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x - \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{m}\right)^2 \underbrace{-\frac{\Delta}{4a}}_{k}$$

Gráfico da função quadrática



$A = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$, $B = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$, $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
$C = \left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, C é o ponto médio do segmento AB.
A reta vertical que passa por C e V é o eixo de simetria da parábola.

Translação de parábolas

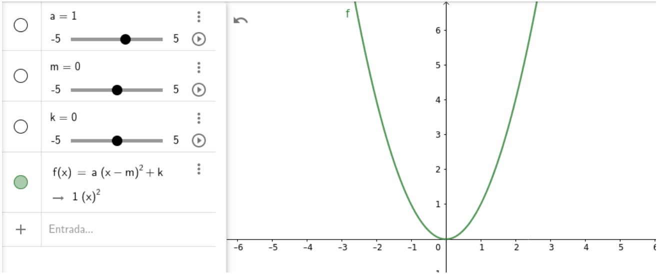


Figura: $y = x^2$

https://www.geogebra.org/m/xcdy2ge3

Translação de parábolas

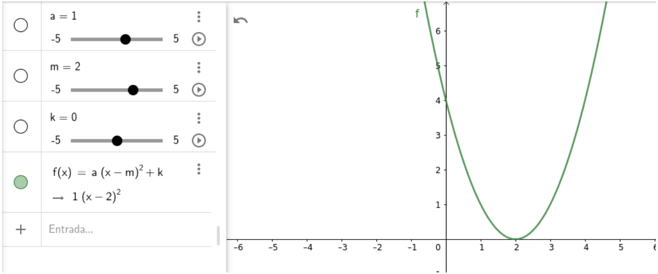


Figura: $y = (x - m)^2$

https://www.geogebra.org/m/xcdy2ge3

Translação de parábolas

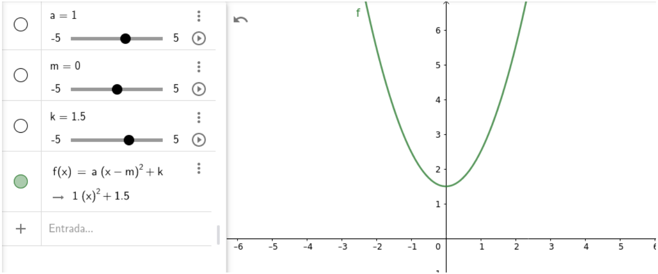


Figura: $y = x^2 + k$

https://www.geogebra.org/m/xcdy2ge3

Translação de parábolas

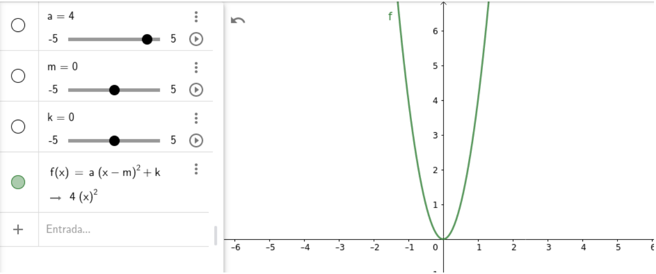


Figura: $y = ax^2, a > 1$

---

https://www.geogebra.org/m/xcdy2ge3

Translação de parábolas

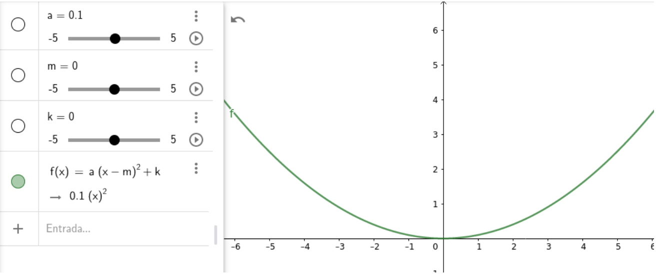


Figura: $y = ax^2, 0 < a < 1$

https://www.geogebra.org/m/xcdy2ge3

Translação de parábolas

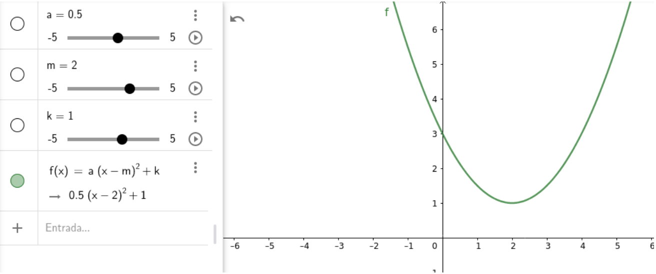
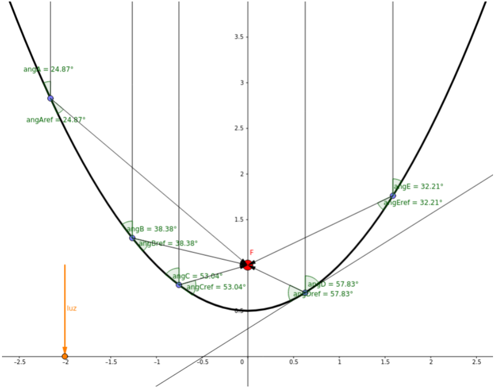


Figura: $y = a\left[x - \frac{-b}{2a}\right]^2 - \frac{\Delta}{4a}$

https://www.geogebra.org/m/xcdy2ge3

Uma propriedade notável da parábola

O ângulo entre uma reta e uma parábola é definido pelo ângulo entre a reta e a tangente a parábola naquele ponto.

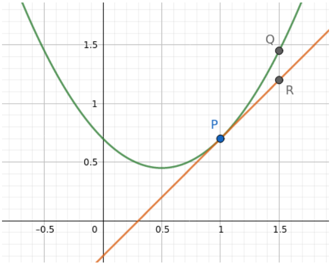


https://www.geogebra.org/m/xBaG5dVR

Uma propriedade notável da parábola

Teorema: Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, sua tangente em $P = (x_0, y_0)$ é a reta r que passa por P e tem inclinação $\alpha = 2ax_0 + b$.

Mostremos que a parábola está inteira de um mesmo lado da reta r. Para isso, mostremos que o ponto $Q = (x, f(x))$ está sempre acima (ou abaixo se $a < 0$) de $R = (x, y)$, onde $y = \alpha(x - x_0) + y_0, \forall x \neq x_0$.



Uma propriedade notável da parábola

De fato,

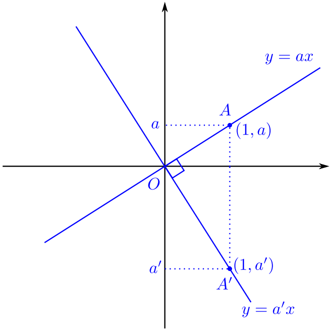
$$
\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c - [\alpha(x - x_0) + y_0] \\
=& ax^2 + bx + c - [(2ax_0 + b)(x - x_0) + (ax_0^2 + bx_0 + c)] \\
=& ax^2 + bx + c - 2ax_0x + 2ax_0^2 - bx + bx_0 - ax_0^2 - bx_0 - c \\
=& ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 \\
=& a(x^2 - 2x_0x + x_0^2) \\
=& a(x - x_0)^2 > 0 \ (a > 0, x \neq x_0)
\end{aligned}
$$

Uma propriedade notável da parábola

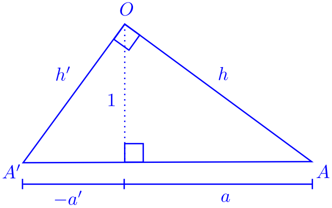
Lema: $r : y = ax + b$ e $r' : a'x + b'$, com $a \neq 0$ e $a' \neq 0$, são perpendiculares se, e somente se, $a' = -\frac{1}{a}$.

Prova:

Sejam $s : y = ax$ e $s' : y = a'x$. Temos que $s//r$ e $s'//r'$ e caracterizaremos a perpendicularidade de r e r' através de s e s'. Suponha $s \perp s'$, como $(1, a) \in s$ e $(1, a') \in s'$, temos que $\triangle OAA'$ é retângulo.



Uma propriedade notável da parábola



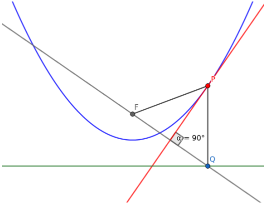
$$\left.\begin{array}{r} h^2 = a^2 + 1 \\ h'^2 = a'^2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow h^2 + h'^2 = a^2 + a'^2 + 2$$

$$a^2 - 2aa' + a'^2 = (a - a')^2 \stackrel{\triangle OAA'}{=} h^2 + h'^2 = a^2 + a'^2 + 2$$
$$\Rightarrow -2aa' = 2 \Rightarrow -aa' = 1 \Rightarrow a' = -\tfrac{1}{a}$$

Reciprocamente, se $a' = -\frac{1}{a}$, a reta $s'' : y = bx \perp s$ tem $b = -\frac{1}{a}$ pelo que acabamos de mostrar. Logo, $b = a'$ e portanto $s' = s'' \perp s$.

Uma propriedade notável da parábola

Dada a parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e $Q = \left(x, k - \frac{1}{4a}\right)$, onde $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$.
A inclinação da reta FQ é dara por:



$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{k - \frac{1}{4a} - \left(k + \frac{1}{4a}\right)}{x - m}$$

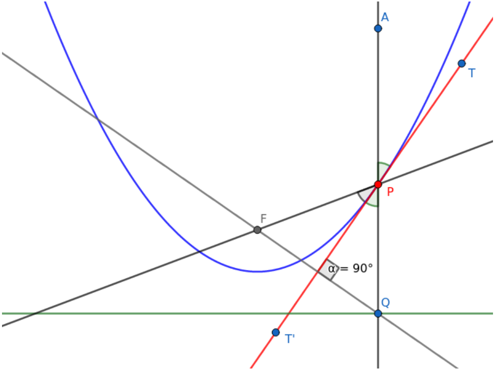
$$\Rightarrow m = \frac{-1}{2ax - 2a\left(\frac{-b}{2a}\right)} = \frac{-1}{2ax + b}$$

$$\therefore FQ \perp \text{tangente}$$

Uma propriedade notável da parábola

Teorema: A tangente a parábola em P faz ângulos iguais com a paralela ao seu eixo de simetria e com a reta que une F a P.

De fato, $PQ = FP \Rightarrow \triangle FQP$ é isosceles.
Como $FQ \perp t$, t é a altura de $\triangle FQP$ e portanto a bissetriz.
Assim, $F\hat{P}T' = T'\hat{P}Q = A\hat{P}T$



Movimento uniformemente variado

Lembre que:
$s(t) \Rightarrow v(t) = s'(t) \Rightarrow a(t) = v'(t) = s''(t)$
Dada a aceleração a constante:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a\ dx = ax|_{t_0}^{t} = a(t - t_0) = at - at_0$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(x)\ dx = \int_{t_0}^{t} ax - at_0\ dx = \left(\frac{1}{2}ax^2 - at_0 x\right)\Big|_{t_0}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}at^2 \underbrace{-at_0}_{b} t \underbrace{- \left(\frac{1}{2}at_0^2 - at_0 t_0\right)}_{c}$$

onde $a =$ aceleração, $b = v(0)$ e $c = s(0)$

Movimento uniformemente variado

Queda de corpos no vácuo:
$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, com a=aceleração, b=velocidade em $t = 0$ e c=posição em $t = 0$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\text{vel. média} =& \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
=& \frac{\frac{1}{2}a(t+h)^2 + b(t+h) + c - \left(\frac{1}{2}at^2 + bt + c\right)}{h} \\
=& \frac{\frac{1}{2}a(t^2 + 2th + h^2) + bt + bh + c - \frac{1}{2}at^2 - bt - c}{h} \\
=& \frac{ath + \frac{1}{2}ah^2 + bh}{h} \\
=& at + b + \frac{1}{2}ah \xrightarrow{h \to 0} v(t) = at + b \therefore v(0) = b
\end{aligned}
$$

Movimento uniformemente variado

Além disso,

$$\begin{aligned}\text{aceleração} = & \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{a(t+h)+b-(at+b)}{h}\\ = & \frac{at+ah+b-at-b}{h} = \frac{ah}{h} = a\end{aligned}$$

é constante.

Movimento uniformemente variado

Exemplo: Uma partícula se move a partir da abcissa -6m com velocidade 5m/s e aceleração -2m/s^2. Quanto tempo é necessário até que mude de sentido?

$$f(t) = -t^2 + 5t - 6 = -(t^2 - 5t + 6) = -\left[\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

queremos t onde $f(t)$ é máximo, ou seja, $t = \frac{5}{2}$s.

Movimento uniformemente variado

Exemplo: Lançamento de um projétil:
$a = -g$ (gravidade), $v = (v_1, v_2)$, posição inicial: origem

Movimento horizontal: não há forças atuando horizontalmente (movimento uniforme)

$$x(t) = v_1 t$$

Movimento vertical: a única força atuando é a gravidade no sentido contrário ao movimento (movimento uniformemente variado)

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t$$

Movimento uniformemente variado

Supondo $v_1 \neq 0$, tem-se $t = \frac{x}{v_1}$ e

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_1}\right)^2 + v_2\left(\frac{x}{v_1}\right) = \underbrace{\left(-\frac{g}{2v_1^2}\right)}_{a}x^2 + \underbrace{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)}_{b}x$$

Portanto, a trajetória é uma parábola.