1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral III — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Mecânica 11/04/2019

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o maior domínio de $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$ e interprete esse conjunto geometricamente.

2. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, onde $x = \cos t$ e $y = e^t$. Calcule $\dfrac{df}{dt}$ quando $t = 0$.

3. Dada $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5)$:

   (a) Encontre a aproximação linear $L(x, y)$ de f no ponto $(2, 3)$.

   (b) Use $L(x, y)$ para aproximar o valor de $1 + (2.1) \ln((2.1) \cdot (2.9) - 5)$.

4. Dada $f(x, y) = x - x^2y - y + xy^2$:

   (a) Encontre os pontos críticos de f.

   (b) Classifique os pontos críticos de f em máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

   (c) Sabendo que a taxa de variação máxima de f em P ocorre na direção $(1, -1)$, determine seu valor.

5. Encontre as dimensões da caixa retangular com volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas arestas é igual a 4.

Boa Prova!

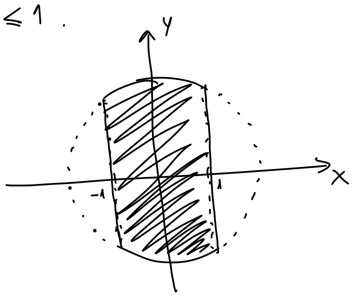
① Para que f esteja bem definida precisamos que:

$$4-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4$$ (disco de centro na origem e raio 2)

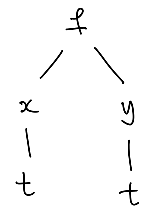
e $$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Logo, o domínio de f é o conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } -1 \leq x \leq 1\}$$



②



Pela regra da cadeia:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x \quad , \quad \frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

$$\therefore \quad \frac{df}{dt} = (2x-y)\cdot(-\operatorname{sen} t) + (2y-x)\cdot e^t$$

Quando $t=0$, temos $x=1$ e $y=1$. Logo, quando $t=0$:

$$\frac{df}{dt} = (2\cdot 1 - 1)(-\operatorname{sen} 0) + (2\cdot 1 - 1)\cdot e^0 = 1.$$

③ a) $f(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \ln(xy-5) + x \cdot \frac{1}{xy-5} \cdot y = \ln(xy-5) + \frac{xy}{xy-5}$$

e $$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{xy-5} \cdot x = \frac{x^2}{xy-5}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = \ln 1 + \frac{6}{6-5} = 6 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = \frac{4}{6-5} = 4 \quad \text{e} \quad f(2,3) = 1 + 2\ln 1 = 1$$

Logo,

$$L(x,y) = 1 + 6\cdot(x-2) + 4(y-3) = 6x + 4y + 1 - 12 - 12$$

$$= 6x + 4y - 23$$

b) Note que $1 + 2{,}1 \ln(2{,}1 \cdot 2{,}9 - 5) = f(2{,}1, 2{,}9) \approx L(2{,}1, 2{,}9)$. Onde

$$L(2{,}1, 2{,}9) = 6 \cdot 2{,}1 + 4 \cdot 2{,}9 - 23 = 1{,}2.$$

4 a) $f(x,y) = x - x^2y - y + xy^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2xy + y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 - 1 + 2xy$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ estão bem definidas para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} y^2 - 2xy + 1 = 0 & (*) \\ -x^2 + 2xy - 1 = 0 & (\times -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy + 1 = 0 \\ x^2 - 2xy - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2xy + 1 = x^2 - 2xy - 1$$

$$\Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow |y| = |x|$$

Se $y \geq 0$ e $x \geq 0$: $|x| = |y| \Rightarrow x = y \overset{(*)}{\Rightarrow} x^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 = y$.

Se $y \geq 0$ e $x < 0$: $|x| = |y| \Rightarrow -x = y \overset{(*)}{\Rightarrow} x^2 + 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -1$. Sem solução.

Se $y < 0$ e $x \geq 0$: $|x| = |y| \Rightarrow x = -y \overset{(*)}{\Rightarrow} x^2 + 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -1$. Sem solução

Se $y < 0$ e $x < 0$: $|x| = |y| \Rightarrow x = y \overset{(*)}{\Rightarrow} x^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 = y$.

Assim, os pontos críticos de f são $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

b) Aplicando o teste da segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x + 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

$$\therefore D(x,y) = \begin{vmatrix} -2y & -2x+2y \\ -2x+2y & 2x \end{vmatrix} = -4xy - (2y - 2x)^2$$

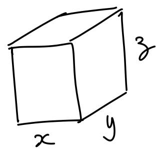
$\Rightarrow D(1,1) = -4 < 0 \quad \therefore (1,1)$ é ponto de sela

e $D(-1,-1) = -4 < 0 \quad \therefore (-1,-1)$ é ponto de sela

c) Supondo que $\nabla f(P) = (1,-1)$, a taxa de var. máx. é $\|\nabla f(P)\| = \sqrt{2}$.

Caso contrário, teríamos $\nabla f(P) = k(1,-1)$ e a taxa de var. máx. é $\|\nabla f(P)\|$, onde $P = (x,y)$ é a sol. do sistema $\begin{cases} 1 - 2xy + y^2 = k \\ -1 + 2xy - x^2 = -k \end{cases}$.

5



$x, y, z > 0$

$4x + 4y + 4z = 4 \Leftrightarrow x + y + z = 1$

Aplicando o método dos Multiplicadores de Lagrange, sejam

$$f(x,y,z) = xyz \qquad \Rightarrow \qquad \nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$
$$g(x,y,z) = x+y+z \qquad \qquad \nabla g(x,y,z) = (1,1,1)$$

$$\therefore \begin{cases} yz = \lambda & (1) \\ xz = \lambda & (2) \\ xy = \lambda & (3) \\ x+y+z = 1 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (2): $yz = xz \overset{(z>0)}{\Rightarrow} y = x$

De (2) e (3): $xz = xy \overset{(x>0)}{\Rightarrow} z = y$

De (4): $3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ e $z = \frac{1}{3}$.