Análise Numérica

Aula 8 — Decomposição LU

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

13 de fevereiro de 2017

Motivação

Suponha que a matriz A de um sistema linear pode ser escrita como $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior.

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b$$

Chamando $y = Ux$, resolvemos

$$Ly = b \tag{1}$$

e

$$Ux = y \tag{2}$$

Motivação

Resolvendo a equação (1):

$$Ly = b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

precisamos de $n^2 - n$ operações para encontrar y.

Motivação

Resolvendo a equação (2):

$$Ux = y$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

precisamos de $n^2 - n$ operações para encontrar x.

Motivação

As equações (1) e (2) requerem $n^2 - n$ operações cada, totalizando operações da ordem de $2n^2$.

Motivação

Dada a decomposição $A = LU$, reduzimos o número de operações para encontrar a solução do sistema da ordem de $\frac{2}{3}n^3$ para a ordem de $2n^2$:

n	$\frac{2}{3}n^3$	$2n^2$	Redução (%)
10	850	180	77.6
100	681.550	19.800	97.1
1000	668.165.500	1.998.000	99.7

Motivação

Problema: o custo de encontrar uma decomposição da forma $A = LU$ requer operações da ordem de $\frac{2}{3}n^3$.

De qualquer forma, ter a decomposição $A = LU$ ainda pode ser viável quando precisamos resolver o sistema $Ax = b$ para vários vetores b.

Decomposição LU

Suponha que é possível aplicar eliminação Gaussiana à matriz A sem a necessidade de pivotamento.

$$A^{(1)} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

O primeiro passo da eliminação consiste em, para cada $i = 2, 3, \ldots, n$, fazer $L_i - m_{i1}L_1 \to L_i$, onde $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ e $A^{(1)}$ se torna

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Note que a matriz $A^{(2)}$ pode ser encontrada através do produto $M^{(1)}A$ (verifique!), onde

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $M^{(1)}$ é chamada primeira matriz de transformação de Gauss.

Decomposição LU

De maneira similar podemos construir $M^{(2)}$, matriz identidade com as entradas abaixo da diagonal na segunda coluna sendo
$-m_{i2} = -\frac{a_{i2}}{a_{22}}$:

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

E o resultado do produto $M^{(2)}A^{(2)}$ será a matriz

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ou seja, $A^{(3)} = M^{(2)}A^{(2)} = M^{(2)}(M^{(1)}A^{(1)}) = M^{(2)}M^{(1)}A$

Decomposição LU

Seguindo com o algoritmo de eliminação de Gauss, fazemos $L_i - m_{ij}L_j \rightarrow L_i$, onde $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $i = 2, 3, \ldots, n$ e $j = i+1, \ldots, n$:

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e simultaneamente, construímos as matrízes $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(n-1)}$.

$$M^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ddots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & -m_{ij} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & -m_{nj} & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Portanto, $A^{(n)} = M^{(n-1)}M^{(n-2)} \ldots M^{(2)}M^{(1)}A$.

Esse processo retorna a matriz $U = A^{(n)}$ da decomposição $A = LU$.

Para encontrar a matriz L, observe que

$$L^{(j)} = [M^{(j)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ddots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & m_{ij} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & m_{nj} & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Logo,

$$A^{(n)} = M^{(n-1)} M^{(n-2)} \cdots M^{(2)} M^{(1)} A$$

$$\Rightarrow L^{(1)} \cdots L^{(n-1)} A^{(n)} = L^{(1)} \cdots L^{(n-1)} M^{(n-1)} \cdots M^{(1)} A$$

$$\Rightarrow L^{(1)} \cdots L^{(n-1)} A^{(n)} = A$$

$$\Rightarrow LU = A, \text{ onde } L = L^{(1)} L^{(2)} \cdots L^{(n-2)} L^{(n-1)}$$

Exemplo

Calcule a decomposição LU para a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Resolva o sistema $Ax = b$ para $b = (2, 9, -8)$ e $b = (1, 2, 0)$.

Trabalho: matrizes de permutação

Leia a seção sobre permutação de matrizes do Capítulo 6.5 e descreva a decomposição $PA = LU$ com exemplos em, no máximo, duas páginas.