Cap. 7 – Funções polinomiais

03/06/2022

Funções polinomiais

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.
A soma e o produto de funções polinomiais também são funções polinomiais.

Exemplo:
$p(x) = x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

Funções polinomiais

Dada uma função polinomial $p(x)$:

$$
\begin{aligned}
p(x) - p(\alpha) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&\quad - a_n \alpha^n - a_{n-1} \alpha^{n-1} - \cdots - a_1 \alpha - a_0 \\
&= a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha) \\
&= a_n(x - \alpha)(x^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}) \\
&\quad + a_{n-1}(x - \alpha)(x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}) + \cdots + a_1(x - \alpha) \\
&= (x - \alpha)[a_n(x^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}) \\
&\quad + a_{n-1}(x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}) + \cdots + a_1] \\
&= (x - \alpha) q(x)
\end{aligned}
$$

Se p tem grau n, então q tem grau $n - 1$.

Funções polinomiais

Além disso, se α é raiz de p, então $p(x) = (x - \alpha)q(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Logo, α é raiz de $p \Leftrightarrow x - \alpha$ divide p.

Assim, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes de p, então

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k)q(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

e se o grau de p é n, o grau de q é $n - k$.

Portanto, se p é uma função polinomial de grau n então p tem no máximo n raízes.

Funções polinomiais

A função $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, é a função identicamente nula.

- Todo $x \in \mathbb{R}$ é raiz dessa função, ou seja, a função identicamente nula possui uma infinidade de raízes;
- Dessa forma, nenhum n é grau da função identicamente nula;
- Seus coeficientes são todos nulos, $a_i = 0, \forall i = 0, 1, \ldots, n$.

Funções polinomiais

Dizemos que $p = q$ se $p(x) = q(x), \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja,
$d(x) = p(x) - q(x)$ é a função identicamente nula.
Logo, completando os coeficientes com zero se necessário

$$\begin{aligned}
d(x) &= p(x) - q(x) \\
&= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 - b_n x^n - \cdots - b_1 x - b_0 \\
&= (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) \\
\Leftrightarrow & a_i - b_i = 0, \forall i = 0, 1, \ldots, n \\
\Leftrightarrow & a_i = b_i, \forall i = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Polinômios

Um polinômio sobre um anel A é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de elementos de A, X é a indeterminada e $X^i = \underbrace{X \cdot X \cdot \cdots \cdot X}_{i \text{ fatores}}$.

Funções polinomiais e polinômios

A cada polinômio sobre $\mathbb{R}$

$$p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

podemos fazer corresponder a função polinomial

$$\bar{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \bar{p}(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

A corresponência polinômio $\mapsto$ função é sobrejetiva pela definição de polinômio e da função. Como dois polinômios são iguais se seus coeficientes correspondentes são iguais, então a correspondencia é injetiva e portanto biunívoca.

Determinando um polinômio a partir de seus valores

Dados $n+1$ pares ordenados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, existe um, e só um, polinômio p de grau menor do que ou igual a n tal que $p(x_i) = y_i, \forall i = 0, 1, \dots, n$.

De fato, tome para cada $i = 0, 1, \dots, n$ os polinômios

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \\ &= \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \end{aligned}$$

Determinando um polinômio a partir de seus valores

Observe que

$$L_i(x_i) \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1$$

e

$$L_i(x_j) \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0$$

pois k será igual a j em algum momento.

$$\therefore L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Determinando um polinômio a partir de seus valores

O polinômio

$$p(x) = y_0 L_0(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

tem grau menor do que ou igual a n e $p(x_i) = y_i$.

Se q é outro polinômio de grau menor do que ou igual a n tal que $q(x_i) = y_i, \forall i = 0, 1, \ldots, n$, então $p(x) - q(x)$ é um polinômio de grau menor do que ou igual a n com $n + 1$ raízes. Logo, só pode ser o polinômio identicamente nulo. Portanto, $p(x) = q(x)$.

Gráficos de polinômios

Dado $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$:

- Se n é par, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n quando $|x|$ é suficientemente grande.
- Se n é ímpar, $p(x)$ tem o sinal de a_n para x suficientemente grande e tem o sinal oposto ao de a_n para x suficientemente pequeno.

Gráficos de polinômios

De fato, para $|x|$ suficientemente grande, $x \neq 0$, logo

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &= x^n (a_n + r(x)) \end{aligned}$$

n par: $x^n > 0$ e $r(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} 0 \Rightarrow$ sinal de p igual ao sinal de a_n.

n ímpar: $r(x) \xrightarrow{|x| \to 0} 0$ e $x^n < 0$ se $x < 0 \Rightarrow$ sinal de p oposto ao de a_n.
e $x^n > 0$ se $x > 0 \Rightarrow$ sinal de p igual ao de a_n.

Gráficos de polinômios

Dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &= x^n (a_n + r(x)) \end{aligned}$$

onde $r(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} 0$, logo $|r(x)| < \varepsilon$ para $|x|$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$. De onde segue que

$$|a_n + r(x)| \geq ||a_n| - |r(x)|| \geq |a_n| - |r(x)| > |a_n| - \varepsilon$$

Em particular, se $\varepsilon = \frac{|a_n|}{2}$, $|a_n + r(x))| > |a_n| - \varepsilon$. Assim,

$$|p(x)| = |x|^n \cdot |a_n + r(x)| > |x|^n \cdot \frac{|a_n|}{2}$$

$\therefore$ $|p(x)|$ cresce se $|x|$ cresce.

Gráficos de polinômios

Analogamente, se $q(x) = b_m x^m + \cdot + b_1 x + b_0$, com $b_m \neq 0$ e $m < n$, temos:

$$\begin{aligned} q(x) &= x^n \left(\frac{b_m}{x^{n-m}} + \frac{b_{m-1}}{x^{n-(m-1)}} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n} \right) \\ &= x^n s(x) \end{aligned}$$

onde $s(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} 0$, logo $|s(x)| < \frac{|a_n|}{4}$ para $|x|$ suficientemente grande

$$\Rightarrow |q(x)| = |x|^n \cdot |s(x)| < |x|^n \cdot \frac{|a_n|}{4} \Rightarrow -|q(x)| > -|x|^n \cdot \frac{|a_n|}{4}$$

Gráficos de polinômios

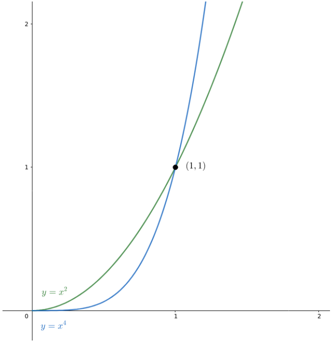
Assim,

$$\begin{aligned} |p(x)| - |q(x)| &> |x|^n \cdot \frac{|a_n|}{2} - |x|^n \cdot \frac{|a_n|}{4} \\ &= |x|^n \cdot \frac{|a_n|}{4} \end{aligned}$$

$\therefore$ $|p(x)| - |q(x)|$ pode ser tão grande quando se queira.

Gráficos de polinômios

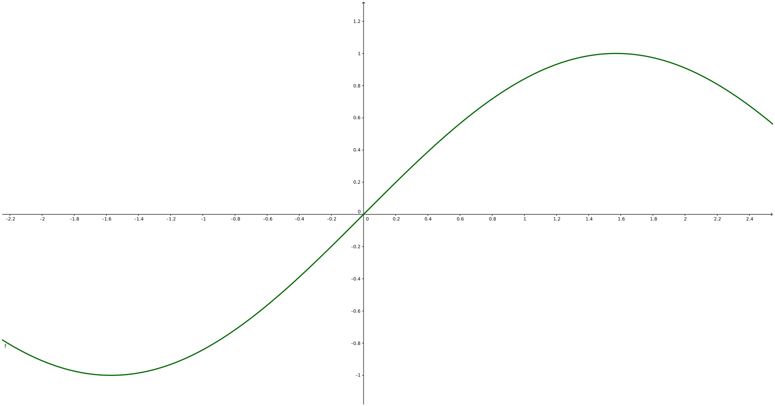
Exemplo: $p(x) = x^4$ e $q(x) = x^2$



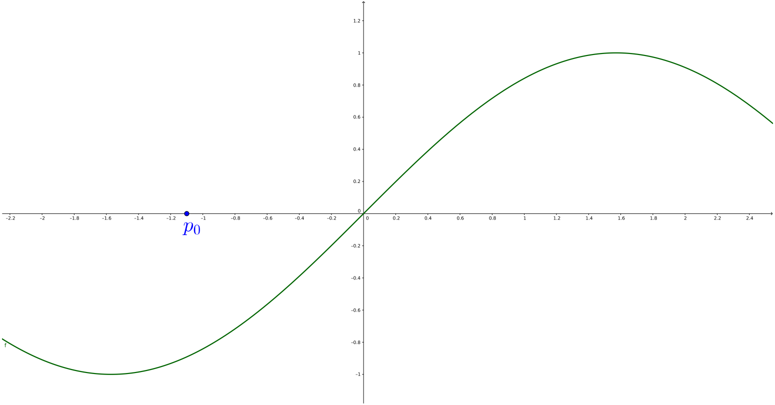
Gráficos de polinômios

Como buscar raízes de $p(x)$?
Observe que, pela continuidade de p, se $p(a)p(b) < 0$, então p tem uma raiz em (a, b).
Uma forma de calcula a raiz é o método de Newton, que constroi uma sequência (x_n) de modo que $p(x_n)$ é cada vez mais próximo de zero.

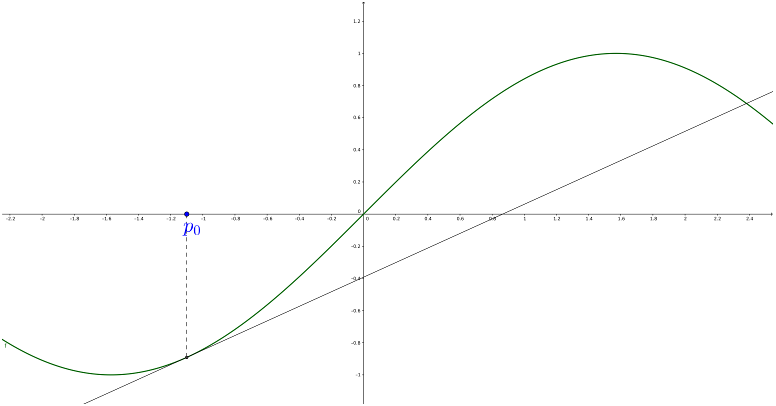
Método de Newton



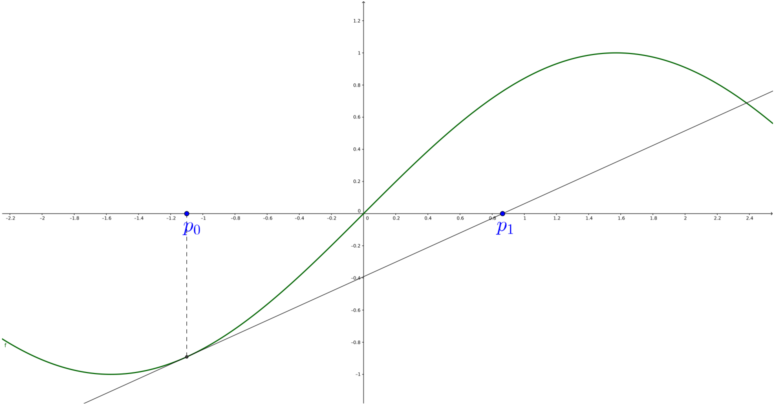
Método de Newton



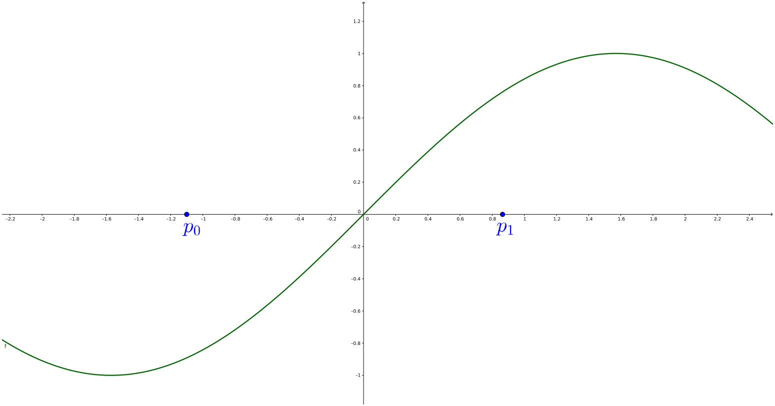
Método de Newton



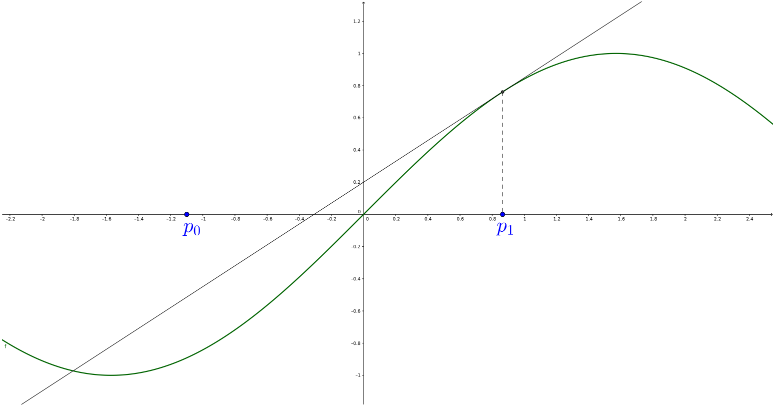
Método de Newton



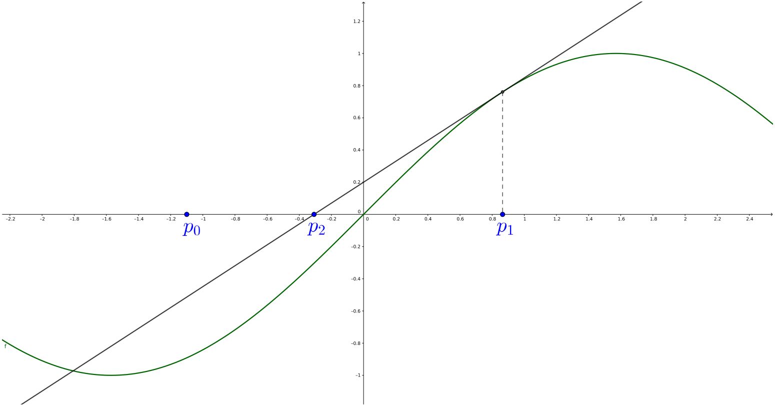
Método de Newton



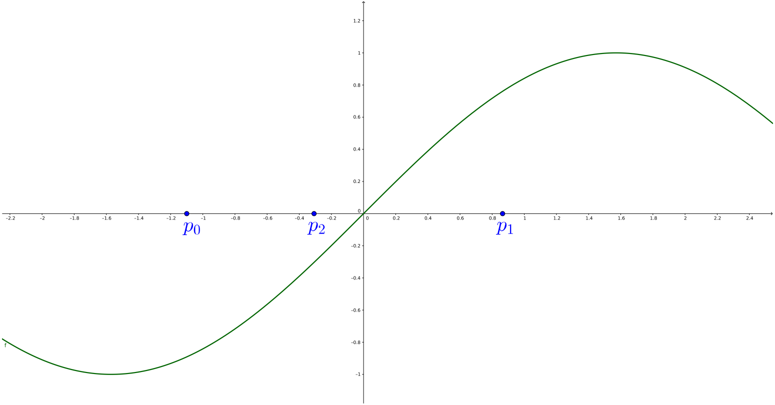
Método de Newton



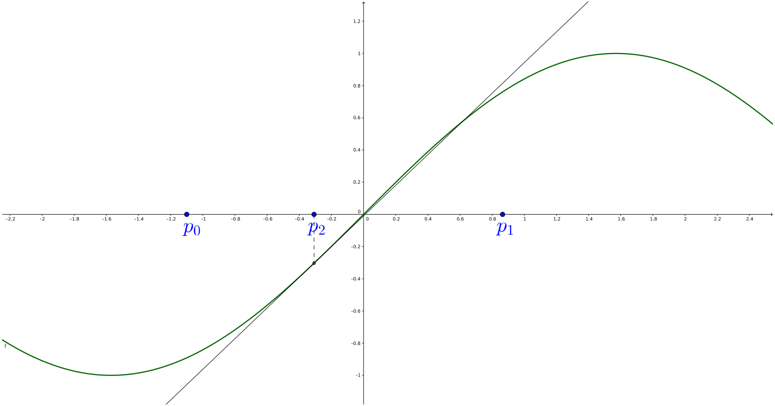
Método de Newton



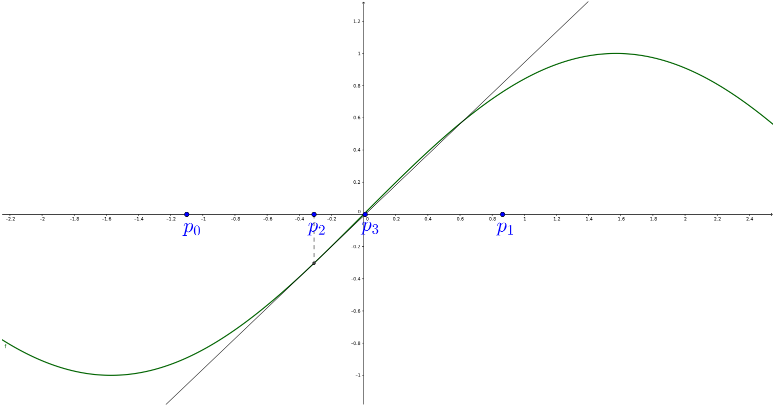
Método de Newton



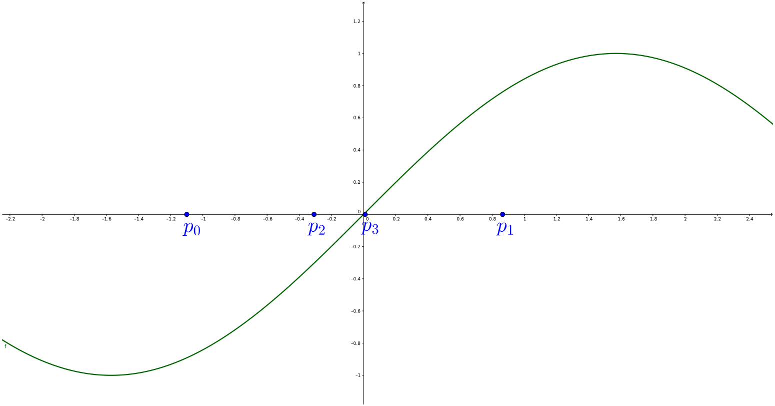
Método de Newton



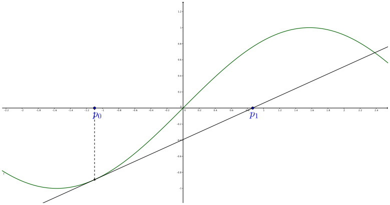
Método de Newton



Método de Newton



Método de Newton



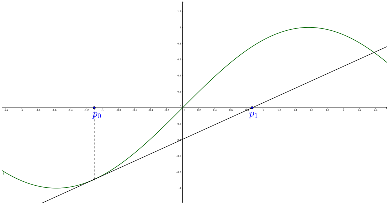
Equação da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ponto: $(x_0, y_0) = (p_0, f(p_0))$
Inclinação: $m = f'(p_0)$
Novo ponto: $(p_1, 0)$

$$0 - f(p_0) = f'(p_0)(p_1 - p_0)$$

Método de Newton



Equação da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ponto: $(x_0, y_0) = (p_0, f(p_0))$
Inclinação: $m = f'(p_0)$
Novo ponto: $(p_1, 0)$

$$0 - f(p_0) = f'(p_0)(p_1 - p_0)$$

$$\Rightarrow p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Método de Newton

De modo geral:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

para $n \geq 1$ e $f'(p_{n-1}) \neq 0$

Método de Newton

Eemplo: Aproximar $\sqrt{2}$.
Temos que $\sqrt{2}$ é raiz de $p(x) = x^2 - 2$, logo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$
$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

Tomando $x_0 = 1$:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1,5 + \frac{2}{1,5}\right) \approx 1,4166$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(1,4166 + \frac{2}{1,4166}\right) \approx 1,4142$$

Método de Newton

Eemplo: $p(x) = x^5 - 5x^2 + 1$ em $(0,1)$, $p'(x) = 5x^4 - 10x$
Tomando $x_0 = 1$:

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 1 - \frac{(-3)}{(-5)} = 0,4$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 0,4 - \frac{0,21024}{(-3,872)} \approx 0,4543$$

$$x_3 \approx 0,45139$$

$$x_4 \approx 0,45138$$