1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Civil 14/12/2017

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Classifique a equação diferencial $xy' - y = x \ln x$, $x > 0$, em separável e/ou linear e resolva.

2. Classifique a equação diferencial $y' = x^2y - y + x^2 - 1$ em separável e/ou linear e resolva.

3. Resolva a equação diferencial de segunda ordem não-homogênea $xy'' + 2y' = 12x^2$.
   (Use a mudança de variáveis $u = y'$)

4. Dada a equação diferencial $y'' - 6y' + 8y = 0$:

   (a) Determine sua solução geral.

   (b) Determine a solução que satisfaz $y(0) = 2$ e $y'(0) = 2$.

5. Verifique se as funções abaixo são solução da equação diferencial $y'' + y = \operatorname{sen} x$:

   (a) $y = \cos x$

   (b) $y = -\dfrac{1}{2}x \cos x$

Boa Prova!

① $xy' - y = x\ln x \overset{(\div x)}{\Rightarrow} y' - \frac{1}{x}y = \ln x$, logo a eq. é linear com $P(x) = -\frac{1}{x}$ e $Q(x) = \ln x$.

Calculando o fator integrante:

$$\varphi(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \text{ pois } x>0.$$

Logo,

$$\frac{1}{x}\left(y' - \frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\cdot y\right)' = \frac{\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{x}\cdot y\right)'dx = \int \frac{\ln x}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot y = \frac{(\ln x)^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{y = \frac{x(\ln x)^2}{2} + Cx}$$

②

$y' = x^2y - y + x^2 - 1 = (x^2-1)y + x^2 - 1 \Rightarrow y' - (x^2-1)y = x^2-1$, logo a eq. é linear com $P(x) = -(x^2-1)$ e $Q(x) = x^2-1$.

Por outro lado,

$$y' = x^2y - y + x^2 - 1 = y(x^2-1) + x^2-1 = (x^2-1)(y+1)$$

$\Rightarrow \frac{1}{y+1}y' = x^2-1$, logo a eq. é separável com $f(y) = \frac{1}{y+1}$ e $g(x) = x^2-1$.

Resolvendo:

$$\int \frac{1}{y+1}dy = \int x^2-1\,dx \Rightarrow \ln|y+1| = \frac{x^3}{3} - x + C \Rightarrow y+1 = \pm e^{\frac{x^3}{3}-x+C}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \pm e^{\frac{x^3}{3}-x+C} - 1}$$

③ Se $u = y'$, então $u' = y''$. Logo,

$$xy'' + 2y' = 12x^2 \Rightarrow xu' + 2u = 12x^2 \overset{(\div x)}{\Rightarrow} u' + \frac{2}{x}u = 12x \quad \text{(linear)}$$

Fator integrante:

$$\varphi(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = |x|^2, \text{ ~~pois $x>0$~~ } = x^2$$

Assim,

$$x^2\left(u' + \frac{2}{x}u\right) = x^2\cdot 12x \Rightarrow x^2u' + 2xu = 12x^3 \Rightarrow (x^2\cdot u)' = 12x^3$$

$$\Rightarrow \int (x^2 u)' dx = \int 12x^3 dx \Rightarrow x^2 u = 12\frac{x^4}{4} + c = 3x^4 + c$$

$$\Rightarrow u = 3x^2 + \frac{c}{x^2}$$

Portanto,

$$y' = 3x^2 + cx^{-2} \Rightarrow \boxed{y = x^3 - \frac{c}{x} + k},$$ com k e c constantes.

④ A eq. $y'' - 6y' + 8y = 0$ tem eq. auxiliar $r^2 - 6r + 8 = 0$. As raízes da eq. auxiliar são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Assim, a solução geral da EDO é $\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}}$. Temos então $y' = 2c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{4x}$ e

$$2 = y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = 2 - c_2$$

$$2 = y'(0) = 2c_1 + 4c_2 \Rightarrow 2(2 - c_2) + 4c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -1 \Rightarrow c_1 = 3.$$

Portanto, $\boxed{y = 3e^{2x} - e^{4x}}$.

⑤ a) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x \Rightarrow y'' = -\cos x$.

Substituindo na eq., temos:

$$-\cos x + \cos x = 0 \neq \operatorname{sen} x \quad \therefore \quad \boxed{y = \cos x \text{ não é solução da EDO}}$$

b) $y = -\frac{1}{2} x \cos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}(\cos x - x \operatorname{sen} x) = \frac{x \operatorname{sen} x - \cos x}{2}$

$$\Rightarrow y'' = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x + x\cos x + \operatorname{sen} x\right) = \frac{x\cos x + 2\operatorname{sen} x}{2}$$

Substituindo na eq.:

$$\frac{x\cos x + 2\operatorname{sen} x}{2} - \frac{1}{2} x \cos x = \operatorname{sen} x$$

$\therefore$ $\boxed{y = -\frac{1}{2} x \cos x \text{ é solução da EDO}}$