Cap. 3 – Números cardinais

29/04/2022

Funções

Dados conjuntos X e Y, uma função $f : X \to Y$ é uma regra que diz como associar **todo** elemento $x \in X$ a um **único** elemento $y = f(x) \in Y$.

X é o domínio de f.
Y é o contra-domínio de f.
$f(x)$ é a imagem de x por f ou o valor de f em x.
$f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x)$, com $x \in X\}$ é o conjunto imagem de f.

Duas funções $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ são iguais se $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x), \forall x \in X$.

Funções: exemplos

- $f : X \to X, f(x) = x$ (função identidade);
- $f : X \to Y, f(x) = c$ (função constante);
- $f : \{alunos\} \to \{cadeiras\}, f(aluno) = cadeira$;
- X=conjunto dos triângulos.
  $f : X \to \mathbb{R}, f(T)$=área do triângulo T;
- X=conjunto dos triângulos.
  $g : \mathbb{R} \to X, g(x)$=triângulo com área x (não é função!);
- S=conjunto dos segmentos de reta, R=conjunto das retas.
  $f : S \to R, f(AB)$=mediatriz de AB.

Injetividade

Uma função é injetiva quando elementos distintos do domínio são levados por f em elementos distintos do contra-domínio:
$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
ou
$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (contra-positiva)

Injetividade: exemplos

- $f : X \to X, f(x) = x$, é injetiva;
- $f : X \to Y, f(x) = c$, não é injetiva;
- $f : \{alunos\} \to \{cadeiras\}, f(aluno) = cadeira$, é injetiva;
- X=conjunto dos triângulos.
  $f : X \to \mathbb{R}, f(T)$=área do triângulo T, não é injetiva;
- S=conjunto dos segmentos de reta, R=conjunto das retas.
  $f : S \to R, f(AB)$=mediatriz de AB, não é injetiva.

Sobrejetividade

Uma função é sobrejetiva se dado $y \in Y$, existe (pelo menos) um $x \in X$ tal que $y = f(x)$, ou seja, $f(X) = Y$.

Sobrejetividade: exemplos

- $f : X \to X, f(x) = x$, é sobrejetiva;
- $f : X \to Y, f(x) = c$, não é sobrejetiva;
- $f : \{alunos\} \to \{cadeiras\}, f(aluno) = cadeira$, é sobrejetiva se o número de cadeiras é igual o número de alunos;
- X=conjunto dos triângulos.
  $f : X \to \mathbb{R}, f(T)$=área do triângulo T, não é sobrejetiva;
- S=conjunto dos segmentos de reta, R=conjunto das retas.
  $f : S \to R, f(AB)$=mediatriz de AB, é sobrejetiva.

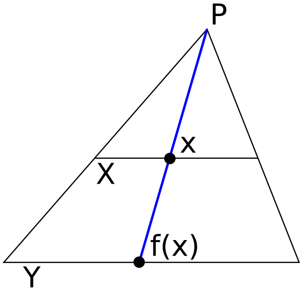
Mais exemplos

$P =$ conj. dos números naturais pares.
$f : \mathbb{N} \to P, f(n) = 2n$

$f(n) = f(m) \Leftrightarrow 2n = 2m \overset{(corte)}{\Longleftrightarrow} n = m$, logo f é injetiva.
Dado $p \in P$, temos que $p = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, logo f é sobrejetiva.

Dizemos então que f é uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e P.

Mais exemplos



X e Y são os segmentos horizontais do desenho.
$f : X \to Y$ definida como no desenho é bijetiva.

Se $x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y)$, então temos duas semi-retas que passam por P e $f(x)$ e são distintas, um absurdo. Logo, f é injetiva.
Dado $y \in Y$, o segmento que liga y a P está inteiramente contido no triângulo, logo deve tocar o segmento X em algum ponto x e, portanto, $f(x) = y$.

Conjuntos (in)finitos

Dizemos que X e Y tem o mesmo número cardinal ou mesma cardinalidade se existe uma bijeção $f : X \to Y$.

Dizemos que um conjunto X é finito e que tem n elementos se existe uma bijeção $f : I_n \to X$. n é o número cardinal do conjunto X.

Ao conjunto vazio atribuimos o número cardinal zero a fim de evitar exceções.

Um conjunto é infinito quando não é finito, ou seja, $X \neq \varnothing$ e, independente do $n \in \mathbb{N}$ tomado, não existe $f : I_n \to X$ que seja bijeção.

$I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Conjuntos (in)finitos

$\mathbb{N}$ é infinito.

Dada $f : I_n \to \mathbb{N}$ qualquer, tome $k = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.
Temos $f(x) < k, \forall x \in I_n$, logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$.
Portanto, f não é sobrejetiva.

Propriedades do número cardinal de um conjunto

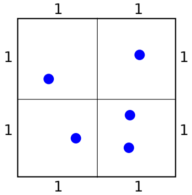
Indicando $n(X)$ como o número cardinal do conjunto X (finito):

1. Se $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$ são bijeções, então $m = n$;
2. Se $Y \subset X$, então Y é finito e $n(Y) \leq n(X)$, valendo a igualdade somente se $Y = X$;
3. Dados X e Y finitos, o conjunto $X \cup Y$ é finito e $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(x \cap Y)$;
4. Se $n(X) > n(Y)$, então não pode haver $f : X \to Y$ injetiva nem $g : Y \to X$ sobrejetiva. (princípio da casa dos pombos ou princípio das gavetas)

Princípio da casa dos pombos

Num grupo com pelo menos 13 pessoas, pelo menos 2 fazem aniversário no mesmo mês.

Escolhendo cindo pontos quaisquer sobre a superfície de um quadrado de lado 2, pelo menos um dos segmentos formados por dois desses pontos tem comprimento no máximo $\sqrt{2}$.



Conjuntos (in)finitos

Se X é finito e $f : X \to X$ é injetiva, então também é sobrejetiva.

Sejam X finito e $f : X \to X$ injetiva.
Suponha que existe $x' \in X$ tal que $f(x) \neq x'$.
Temos então n elementos do domínio para distribuir em $n - 1$ posições do contra-domínio.
Pelo princípio da casa dos pombos, algume posição deve ter dois elementos, contradizendo a injetividade de f.
Portanto, f deve ser sobrejetiva

Conjuntos (in)finitos

Se X é finito e $f : X \to X$ é sobrejetiva, então também é injetiva.

Sejam X finito e $f : X \to X$ sobrejetiva, ou seja, dado $x' \in X$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = x'$.
Suponha que existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = x' = f(x_2)$ para um $x' \in X$ arbitrário.
Sobram $n - 2$ elementos no domínio para associar a $n - 1$ elementos do contra-domínio.
Independente da associação, sobrará algum elemento do contra-domínio (def. de função), ferindo a sobrejetividade de f.

Conjuntos (in)finitos

Os resultados acima só valem se X é finito!

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n + 1$, é injetiva, mas não é sobrejetiva, pois nenhum elemento do domínio foi associado a 1.

O hotel de Hilbert

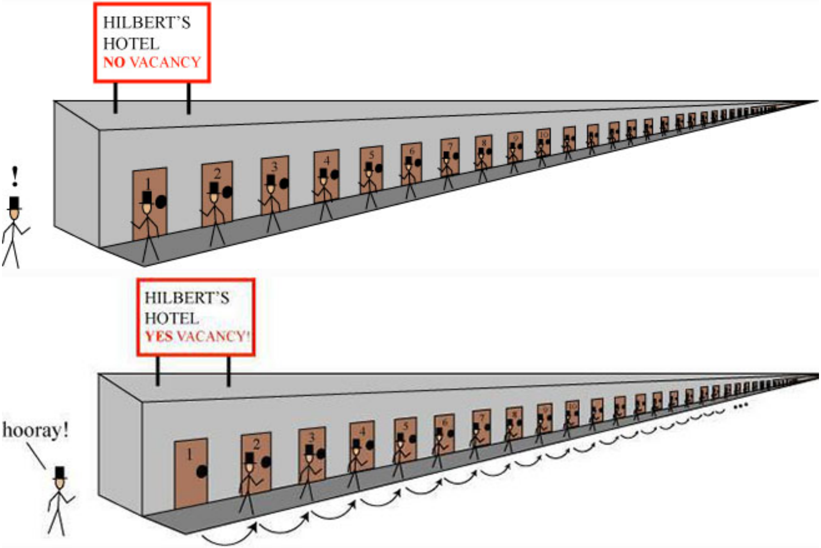


Imagem: Greg Gbur