1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação PS
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Energia 07/12/2018

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

Avaliação P1:

1. Resolva a integral indefinida $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$.

2. Resolva a integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \; e^{\cos x} \, dx$.

3. Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-9} \, dx$.

4. Determine se a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} \, dx$ é convergente ou divergente.

5. Resolva a integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi} x + x\cos x \, dx$.

Avaliação P2:

1. Resolva a equação diferencial $y' = xe^{-\cos x} + y\operatorname{sen} x$.

2. Resolva o problema de valor inicial $y' = 3x^2e^y$, $y(0) = 1$.

3. Aplique a mudança de variáveis $u = y''$ e resolva a equação diferencial $y^{(4)} - y'' = 0$.

4. Resolva as equações lineares de segunda ordem:

   (a) $y'' - 2y' - 3y = 0$

   (b) $y'' - 2y' - 3y = x + 2$

5. Verifique se a função $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$ é solução da equação diferencial $y''' - y' = 0$.

Avaliação P3:

1. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$, onde:

   (a) $x_n = \dfrac{2+n^{2018}}{1+2n^{2019}}$

   (b) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$

2. Escreva o número $4,17326326326...$ como uma fração.

3. Determine se as séries são convergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\pi}$

4. Determine para quais valores de x a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$ é convergente.

5. Escreva a série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Boa Prova!

Avaliação P1:

① Integrando por partes:

$$u = e^x \qquad \Rightarrow \qquad du = e^x dx$$
$$dv = \cos x \, dx \qquad\qquad v = \operatorname{sen} x$$

$$\therefore I = \int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen} x \, dx}_{II}$$

Resolvendo II por partes:

$$u = e^x \qquad \Rightarrow \qquad du = e^x dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \qquad\qquad v = -\cos x$$

$$\therefore II = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

Logo,

$$I = \int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx\right)$$
$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2}$$

② Tomando $u = \cos x$, temos $du = -\operatorname{sen} x \, dx$, $x = 0 \Rightarrow u = 1$ e $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$, logo

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, e^{\cos x} dx = \int_1^0 -e^u du = \int_0^1 e^u du = e^u \Big|_0^1 = e - 1.$$

③ Observe que:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

Logo, escrevendo o integrando como soma de frações parciais:

$$\frac{x+2}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \quad x+2 = A(x+3) + B(x-3)$$

Para $x=3$: $\quad 3+2 = A(3+3) + B(3-3) \Rightarrow A = \frac{5}{6}$.

Para $x=-3$: $\quad -3+2 = A(-3+3) + B(-3-3) \Rightarrow B = \frac{1}{6}$.

Assim,

$$\frac{x+2}{x^2-9} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+2}{x^2-9}\,dx = \frac{5}{6}\int\frac{1}{x-3}\,dx + \frac{1}{6}\int\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{5}{6}\cdot \ln|x-3| + \frac{1}{6}\ln|x+3| + C$$

4 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^4}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx$, caso o limite exista.

Tomando $u = \ln x$, temos $du = \frac{1}{x}\,dx$, $x=1 \Rightarrow u=0$ e $x=t \Rightarrow u=\ln t$, logo

$$\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^{\ln t} u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\ln t} = \frac{(\ln t)^2}{2}.$$

Assim,

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)^2}{2} = \infty.$$

Portanto, a integral é divergente.

5 $$\int_0^\pi x + x\cos x\,dx = \underbrace{\int_0^\pi x\,dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_0^\pi x\cos x\,dx}_{\mathrm{II}}$$

Resolvendo I:

$$\mathrm{I} = \int_0^\pi x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Resolvendo II por partes:

$$u = x \qquad\qquad du = dx$$
$$\Rightarrow$$
$$dv = \cos x \, dx \qquad\qquad v = \operatorname{sen} x$$

$$\therefore \; II = \int_0^{\pi} x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \pi \operatorname{sen} \pi - 0 \cdot \operatorname{sen} 0 + \cos x \Big|_0^{\pi} = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi} x + x \cos x \, dx = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

Avaliação P2:

① Observe que $y' = xe^{-\cos x} + y \operatorname{sen} x \Leftrightarrow y' - \operatorname{sen} x \cdot y = xe^{-\cos x}$ (linear 1ª ordem)

Calculando o fator integrante:

$$\varphi(x) = e^{\int -\operatorname{sen} x \, dx} = e^{\cos x}$$

$$\therefore e^{\cos x}\left(y' - \operatorname{sen} x \cdot y\right) = e^{\cos x}\left(x e^{-\cos x}\right) \Rightarrow e^{\cos x} \cdot y' - \operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x} \cdot y = x$$

$$\Rightarrow \left(e^{\cos x} \cdot y\right)' = x \Rightarrow \int \left(e^{\cos x} \cdot y\right)' dx = \int x \, dx$$

$$\Rightarrow e^{\cos x} \cdot y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-\cos x} + C \cdot e^{-\cos x}$$

② $y' = 3x^2 e^y \Leftrightarrow \frac{1}{e^y} \cdot \frac{dy}{dx} = 3x^2$ (1ª ordem separável)

$$\therefore \int \frac{1}{e^y} dy = \int 3x^2 dx \Rightarrow -e^{-y} = x^3 + C \Rightarrow e^y = -\frac{1}{x^3 + C}$$

$$\Rightarrow y = \ln\left(-\frac{1}{x^3 + C}\right) = \ln 1 - \ln(-x^3 - C) = -\ln(-x^3 - C)$$

Resolvendo o PVI:

$$1 = y(0) = -\ln(-0^3 - C) \Rightarrow \ln(-C) = -1 \Rightarrow -C = e^{-1} \Rightarrow C = -e^{-1}$$

Portanto,

$$y(x) = -\ln(-x^3 + e^{-1})$$

③ Fazendo $u = y''$, temos $u'' = y^{(4)}$ e

$y^{(4)} - y'' = 0 \Rightarrow u'' - u = 0$ (2ª ordem linear homog. com coef. ctes)

Resolvendo a eq. auxiliar: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$.

Logo, $u = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ é solução de $u'' - u = 0$.

Integrando duas vezes:

$$\int c_1 e^x + c_2 e^{-x} dx = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3$$

e $\int c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 \, dx = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x + c_4$

Portanto, $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x + c_4$ é sol. da eq. inicial.

④ a) Resolvendo a eq. auxiliar: $r^2-2r-3=0 \Rightarrow r=3$ ou $r=-1$.

Assim, $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$ é solução da equação.

b) Já temos a sol. da eq. homogênea, $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$. Tomando as sol. LI $y_1 = e^{3x}$ e $y_2 = e^{-x}$ da eq. homogênea, vamos determinar u_1 e u_2 tais que $y_p = u_1 e^{3x} + u_2 e^{-x}$ seja uma sol. particular da eq. não-homogênea. Pelo método da variação de parâmetros basta resolver o sistema

$$\begin{cases} u_1' y_1' + u_2' y_2' = x+2 \\ u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3e^{3x} u_1' - e^{-x} u_2' = x+2 & (1) \\ e^{3x} u_1' + e^{-x} u_2' = 0 & (2) \end{cases}$$

Somando (1) e (2):

$$4e^{3x} u_1' = x+2 \Rightarrow u_1' = \frac{x+2}{4e^{3x}}.$$

Substituindo em (2):

$$e^{3x} \cdot \frac{x+2}{4e^{3x}} + e^{-x} u_2' = 0 \Rightarrow e^{-x} u_2' = -\frac{x+2}{4} \Rightarrow u_2' = -\frac{x+2}{4e^{-x}}.$$

Assim,

$$u_1 = \int u_1' \, dx = \int \frac{x+2}{4e^{3x}} \, dx = \frac{1}{4} \underbrace{\int (x+2) e^{-3x} \, dx}_{I}$$

e $$u_2 = \int u_2' \, dx = \int -\frac{x+2}{4e^{-x}} \, dx = -\frac{1}{4} \underbrace{\int (x+2) e^{x} \, dx}_{II}$$

Integrando por partes:

$$\begin{matrix} u = x+2 \\ dv = e^{-3x} dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{matrix}$$

$$\therefore I = \int (x+2) e^{-3x} \, dx = -\frac{(x+2)}{3} \cdot e^{-3x} + \int \frac{e^{-3x}}{3} \, dx = -\frac{(x+2)}{3} \cdot e^{-3x} - \frac{e^{-3x}}{9} + c_1$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{4}\left[-\frac{(x+2)}{3} e^{-3x} - \frac{e^{-3x}}{9} + c_1 \right] = \frac{e^{-3x}}{4}\left(-\frac{x+2}{3} - \frac{1}{9} \right) + \frac{c_1}{4} = \frac{e^{-3x}}{4}\left(\frac{-3x-7}{9} \right) + k_1$$

$u = x+2 \qquad du = dx$

$d\upsilon = e^x dx \quad \Rightarrow \quad \upsilon = e^x dx$

$\therefore \; \mathrm{II} = \int (x+2)\, e^x\, dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + c_2$

$\Rightarrow \; u_2 = -\frac{1}{4}\left[(x+2)e^x - e^x + c_2 \right] = -\frac{e^x}{4}(x+1) + k_2 .$

Assim, $y_p = \frac{e^{-3x}}{4}\left(-\frac{3x-7}{9}\right) \cdot e^{3x} - \frac{e^x}{4}(x+1) \cdot e^{-x} + k_1 + k_2$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{-3x-7}{9} - x - 1 \right) + k = \frac{1}{4}\left(\frac{-3x-7-9x-9}{9} \right) + k$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{-12x-16}{9} \right) + k = \frac{-3x-4}{9} + k$

Portanto, a solução geral da eq. não-homogênea é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{3x+4}{9} + k$$

⑤ Derivando $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$:

$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$

$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

$y''' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$

Logo,

$y''' - y' = (c_1 e^x - c_2 e^{-x}) - (c_1 e^x - c_2 e^{-x}) = 0 .$

Portanto, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ é sol. de $y''' - y' = 0$.

Avaliação P3:

① a) $$x_n = \frac{2+n^{2018}}{1+2n^{2019}} \cdot \frac{\frac{1}{n^{2019}}}{\frac{1}{n^{2019}}} = \frac{\frac{2}{n^{2019}}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{2019}}+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^{2019}}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{2019}}+2} = 0.$$

b) $x_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Como $0<\frac{1}{2}<1$, temos $0<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^n$, logo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

② $4{,}17326326\ldots = 4{,}17 + 0{,}00326 + 0{,}00000326 + 0{,}00000000326 + \cdots$

$$= \frac{417}{100} + \frac{326}{10^5} + \frac{326}{10^8} + \frac{326}{10^{11}} + \cdots = \frac{417}{100} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{326}{10^5}\cdot\left(\frac{1}{10^3}\right)^{n-1}.$$

Temos uma série geométrica com $a = \frac{326}{10^5}$ e razão $r = \frac{1}{10^3}$.

Como $|r| = \frac{1}{10^3} < 1$, a série é convergente e sua soma é dada por

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{326}{10^5}}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{326}{10^5}\cdot\frac{10^3}{999} = \frac{326}{99900}.$$

Logo,

$$4{,}17326326\ldots = \frac{417}{100} + \frac{326}{99900} = \frac{416583+326}{99900} = \frac{416909}{99900}$$

③ a) Observe que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \infty.$$

Pelo teste da divergência, a série diverge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$ é uma série p com $p=\pi>1$, logo a série converge.

④ Aplicando o teste da razão:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}} \cdot \frac{n^2 5^n}{(-1)^n x^n}\right| = \left|(-1) \cdot x \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right| = \frac{|x|}{5} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \cdot \frac{|x|}{5} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x|}{5}.$$

Logo, a série converge para valores de x tais que

$$\frac{|x|}{5} < 1 \iff |x| < 5 \iff -5 < x < 5.$$

A série diverge para valores de x tais que:

$$\frac{|x|}{5} > 1 \iff |x| > 5 \iff x > 5 \text{ ou } x < -5.$$

Para $x = 5$, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n^2 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Aplicando o teste da série alternada:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

- $n^2 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n^2}$.

Assim, a série é convergente.

Para $x = -5$, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-5)^n}{n^2 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n 5^n}{n^2 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, uma série p com $p = 2 > 1$, logo convergente.

Portanto, a série de potências converge para $x \in [-5, 5]$.

⑤ Calculando as derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ e avaliando em $x = 0$:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$$ e o ciclo se repete

A série de Maclaurin é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$