# Análise Numérica

## Aula 6 — Spline

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

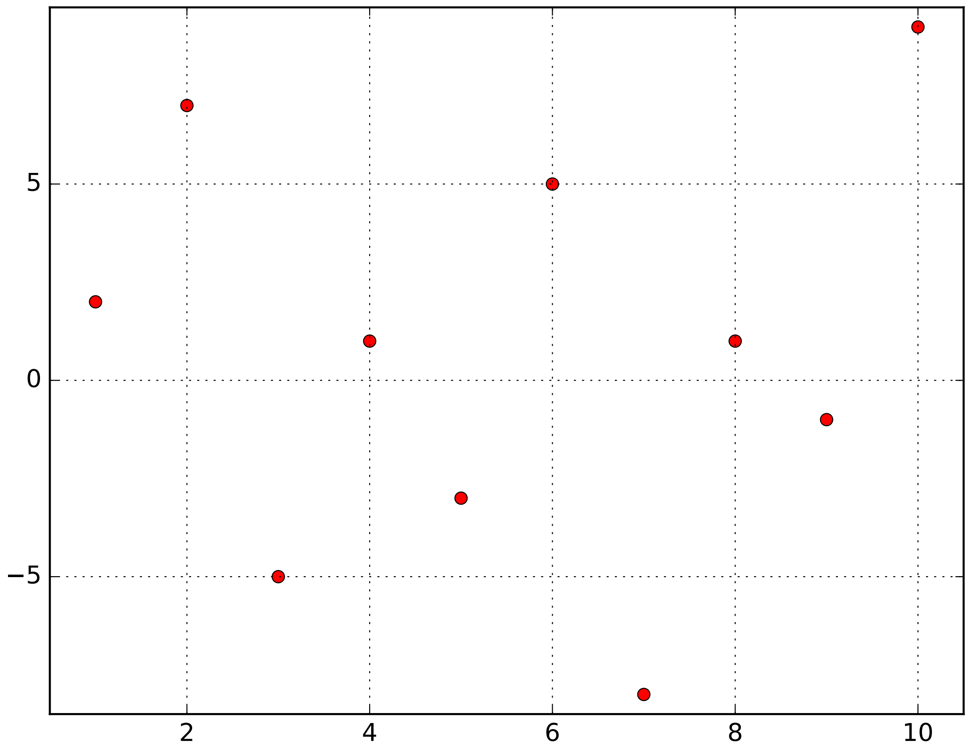
23 de janeiro de 2017

## Motivação

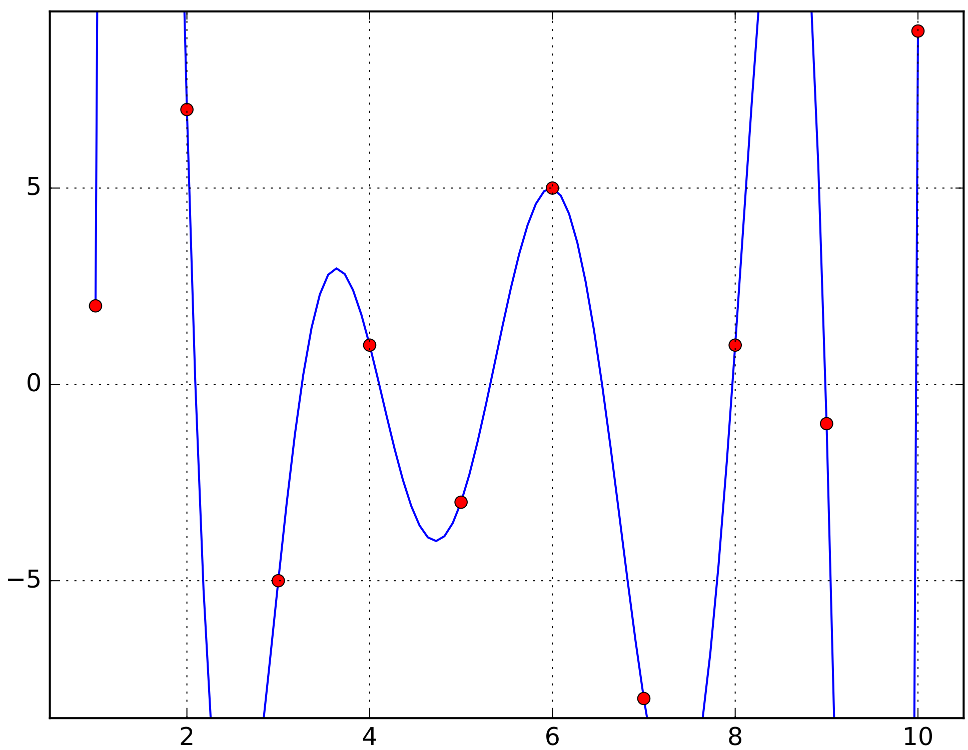
Queremos interpolar $n+1$ pontos:

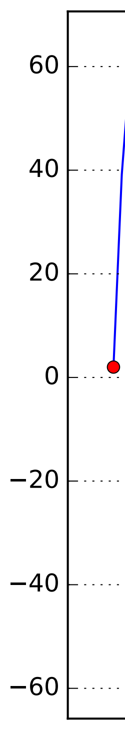
$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$$

# Motivação




# Interpolação de Lagrange



## Interpolação de Lagrange

Problema:
Grande variação dos valores do polinômio.

## Spline

Vamos dividir em subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ e utilizar polinômios aproximantes para cada subintervalo.

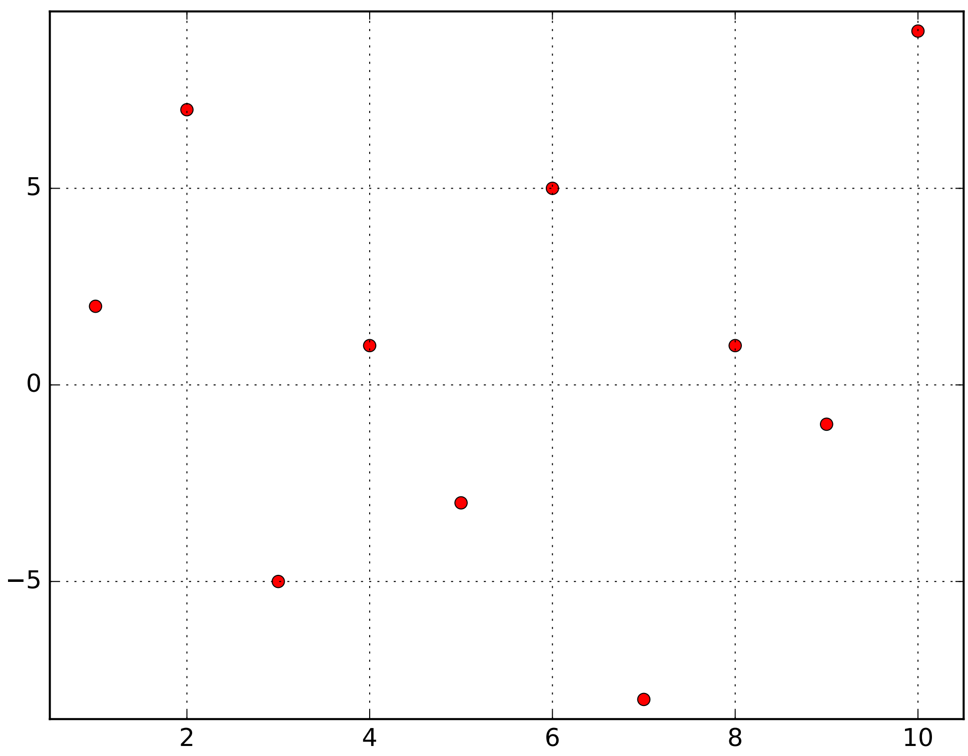
Chamamos **aproximação polinomial por partes**.

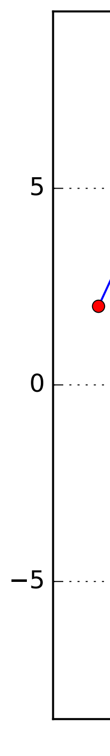
# Spline linear

Utilizamos segmentos de reta em cada subintervalo, para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$s_i(x) = a_i x + b_i, \;\; x \in [x_i, x_{i+1}]$$

# Spline linear



# Spline linear

Problema:
A aproximação de $f$ no intervalo $[x_0, x_n]$ não é diferenciável em todos os pontos.

# Alternativa

Podemos utilizar polinômios de grau 2 em cada subintervalo:

$$s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i,\ x \in [x_i, x_{i+1}]$$

com $i = 0, 1, \ldots, n-1$

# Alternativa

Temos $3n$ incógnitas

$$s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \ \ x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ e } i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Interpolação:

$$\begin{array}{ccc}
s_0(x_0) = f(x_0) & & \\
s_0(x_1) = f(x_1) & \text{e} & s_1(x_1) = f(x_1) \\
s_1(x_2) = f(x_2) & \text{e} & s_2(x_2) = f(x_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
s_{n-2}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) & \text{e} & s_{n-1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) \\
s_{n-1}(x_n) = f(x_n) & &
\end{array}$$

# Alternativa

Suavidade:

$$\begin{array}{c}
s_0'(x_1) = s_1'(x_1) \\
s_1'(x_2) = s_2'(x_2) \\
\vdots \\
s_{n-2}'(x_{n-1}) = s_{n-1}'(x_{n-1})
\end{array}$$

Temos $3n$ incógnitas e $3n-1$ equações.

Temos que encontrar mais uma restrição (equação).

## Spline cúbica

Utilizando polinômios de grau 3 em cada subintervalo:

$$s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \;\; x \in [x_i, x_{n+1}]$$

ou

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \;\; x \in [x_i, x_{n+1}]$$

com $i = 0, 1, \ldots, n-1$

Temos $4n$ incógnitas.

## Spline cúbica

Interpolação:

$$\begin{array}{ccc}
s_0(x_0) = f(x_0) & & \\
s_0(x_1) = f(x_1) & \text{e} & s_1(x_1) = f(x_1) \\
s_1(x_2) = f(x_2) & \text{e} & s_2(x_2) = f(x_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
s_{n-2}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) & \text{e} & s_{n-1}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) \\
s_{n-1}(x_n) = f(x_n) & &
\end{array}$$

Suavidade:

$$\begin{array}{c}
s_0'(x_1) = s_1'(x_1) \\
s_1'(x_2) = s_2'(x_2) \\
\vdots \\
s_{n-2}'(x_{n-1}) = s_{n-1}'(x_{n-1})
\end{array}$$

# Spline cúbica

Suavidade da derivada:

$$\begin{aligned} s_0''(x_1) &= s_1''(x_1) \\ s_1''(x_2) &= s_2''(x_2) \\ &\vdots \\ s_{n-2}''(x_{n-1}) &= s_{n-1}''(x_{n-1}) \end{aligned}$$

Temos $4n$ incógnitas e $4n-2$ equações.

# Spline cúbica com fronteira livre (natural)

$$s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n) = 0$$

$x_0$ e $x_n$ são candidatos a pontos de inflexão.

## Spline cúbica com fronteira amarrada

$$s_0'(x_0) = f'(x_0) \text{ e } s_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$$

Precisamos do valor de $f'$ nos pontos extremos do intervalo.

## Exemplo

Spline cúbica com fronteira livre passando por $(1,2), (2,3), (3,5)$.

$$s_0(x) = a_0(x-1)^3 + b_0(x-1)^2 + c_0(x-1) + d_0, \; x \in [1,2]$$
$$s_1(x) = a_1(x-2)^3 + b_1(x-2)^2 + c_1(x-2) + d_1, \; x \in [2,3]$$

$$s_0'(x) = 3a_0(x-1)^2 + 2b_0(x-1) + c_0, \; x \in [1,2]$$
$$s_1'(x) = 3a_1(x-2)^2 + 2b_1(x-2) + c_1, \; x \in [2,3]$$

$$s_0''(x) = 6a_0(x-1) + 2b_0, \; x \in [1,2]$$
$$s_1''(x) = 6a_1(x-2) + 2b_1, \; x \in [2,3]$$

## Exemplo

$$\begin{cases} s_0(1) = 2 \\ s_0(2) = 3 \\ s_1(2) = 3 \\ s_1(3) = 5 \\ s_0'(2) = s_1'(2) \\ s_0''(2) = s_1''(2) \\ s_0''(1) = 0 \\ s_1''(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0(1-1)^3 + b_0(1-1)^2 + c_0(1-1) + d_0 = 2 \\ a_0(2-1)^3 + b_0(2-1)^2 + c_0(2-1) + d_0 = 3 \\ a_1(2-2)^3 + b_1(2-2)^2 + c_1(2-2) + d_1 = 3 \\ a_1(3-2)^3 + b_1(3-2)^2 + c_1(3-2) + d_1 = 5 \\ 3a_0(2-1)^2 + 2b_0(2-1) + c_0 = 3a_1(2-2)^2 + 2b_1(2-2) + c_1 \\ 6a_0(2-1) + 2b_0 = 6a_1(2-2) + 2b_1 \\ 6a_0(1-1) + 2b_0 = 0 \\ 6a_1(3-2) + 2b_1 = 0 \end{cases}$$

## Exemplo

$$\begin{cases} d_0 = 2 \\ a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 3 \\ d_1 = 3 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 5 \\ 3a_0 + 2b_0 + c_0 = c_1 \\ 6a_0 + 2b_0 = 2b_1 \\ 2b_0 = 0 \\ 6a_1 + 2b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + c_0 = 1 \\ a_1 + b_1 + c_1 = 2 \\ 3a_0 + c_0 = c_1 \\ 6a_0 = 2b_1 \\ 6a_1 + 2b_1 = 0 \end{cases}$$

## Exemplo

$$\begin{cases} a_0 & +c_0 & & & & = & 1 \\ & & a_1 & +b_1 & +c_1 & = & 2 \\ 3a_0 & +c_0 & & & -c_1 & = & 0 \\ 6a_0 & & & -2b_1 & & = & 0 \\ & & 6a_1 & +2b_1 & & = & 0 \end{cases}$$

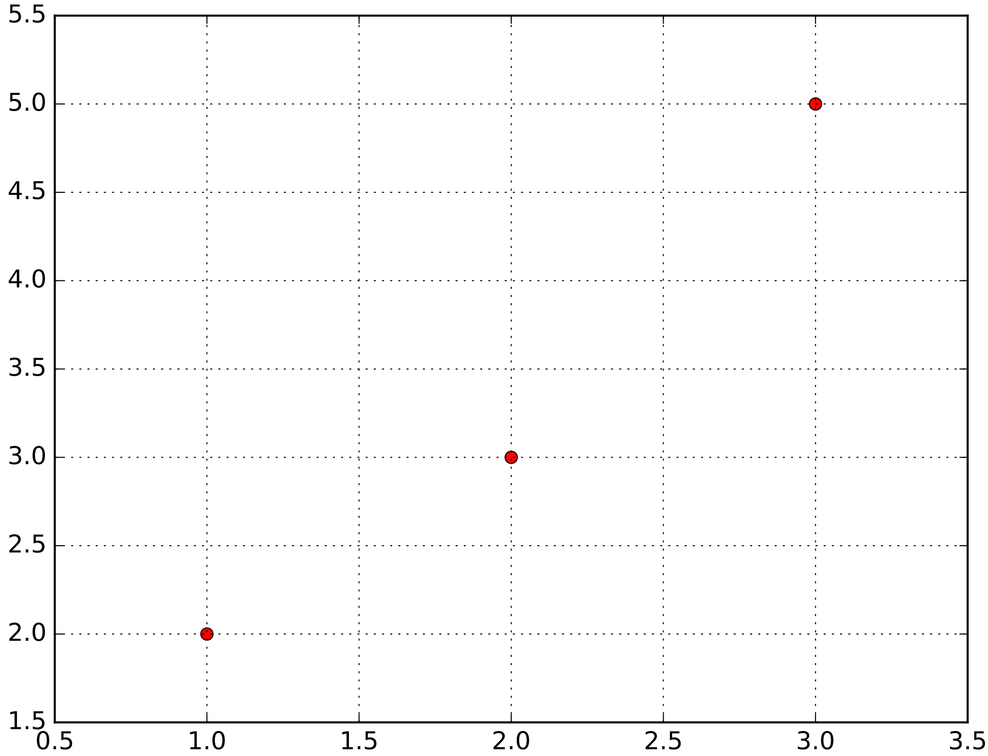
Solução:
$a_0 = \frac{1}{4},\ b_0 = 0,\ c_0 = \frac{3}{4},\ d_0 = 2,\ a_1 = -\frac{1}{4},\ b_1 = \frac{3}{4},\ c_1 = \frac{3}{4}$ e $d_1 = 3$

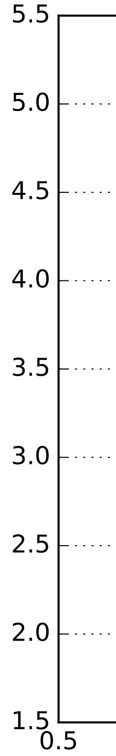
## Exemplo

Portanto,

$$s(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, & \text{se } x \in [1,2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

# Exemplo




# Exemplo

Spline cúbica amarrada passando por $(1,2),(2,3),(3,5)$ com $f'(1)=2$ e $f'(3)=1$.

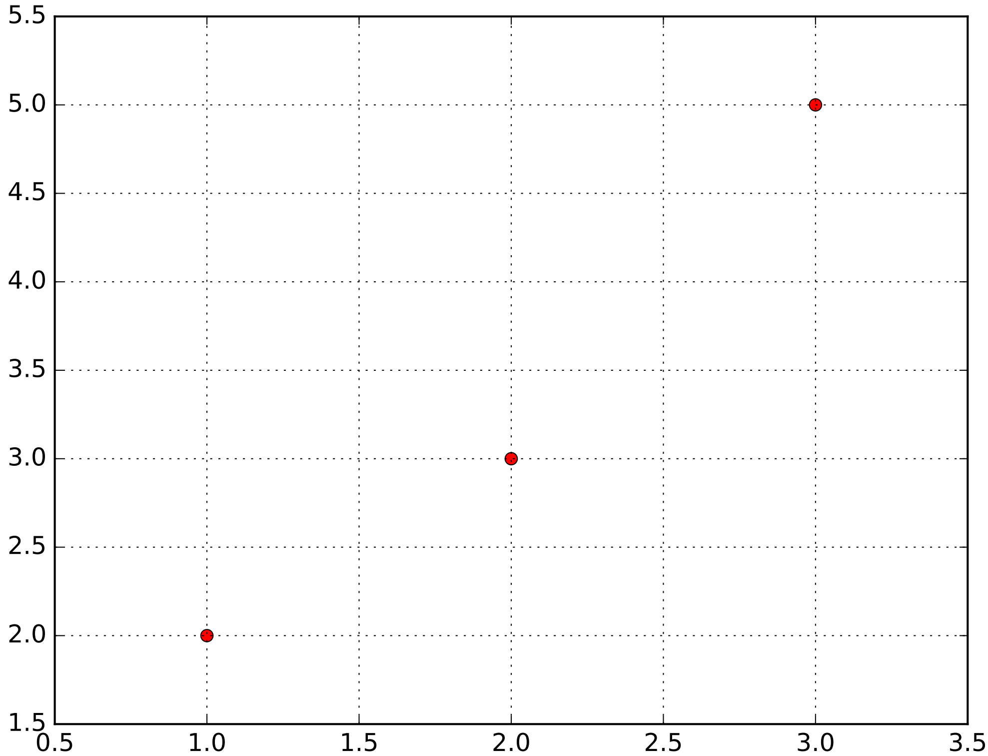
$$\begin{cases} s_0(1) = 2 \\ s_0(2) = 3 \\ s_1(2) = 3 \\ s_1(3) = 5 \\ s_0'(2) = s_1'(2) \\ s_0''(2) = s_1''(2) \\ s_0'(1) = 2 \\ s_1'(3) = 1 \end{cases}$$

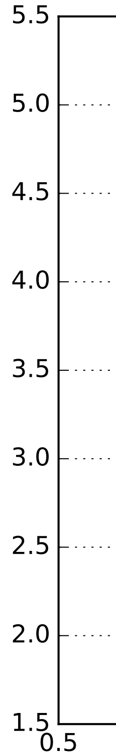
# Exemplo

Solução:

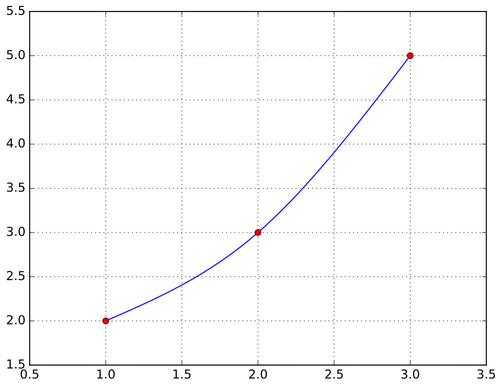
$$s(x) = \begin{cases} 2 + 2(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^3, & \text{se } x \in [1,2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + 2(x-2)^2 - \frac{3}{2}(x-2)^3, & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

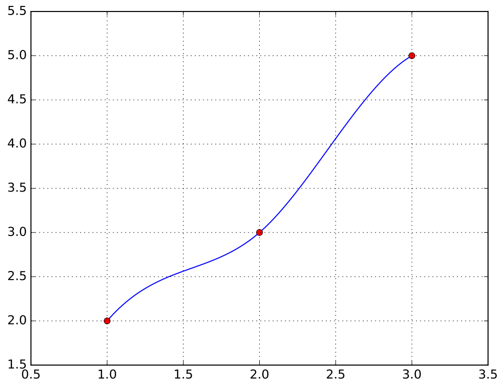
# Exemplo



# Exemplo




# Teoremas

Teorema: Se $f$ está definida em $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, então existe uma única spline cúbica natural $s$ interpolante para $f$.
(spline cúbica natural satisfaz: $s''(a) = s''(b) = 0$)

Teorema: Se $f$ é definida em $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ e diferenciável em $a$ e $b$, então existe uma única spline cúbica amarrada $s$ interpolante para $f$.
(spline cúbica amarrada satisfaz: $s'(a) = f'(a)$ e $s'(b) = f'(b)$)

## Exercício

Calcule a spline cúbica natural interpolante para $f(x) = e^x$ nos pontos $(0, 1), (1, e), (2, e^2), (3, e^3)$ e amarrada passando pelos menos pontos com $f'(0) = 1$ e $f'(3) = e^3$.

## Exercício