1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação P1
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Energia 17/05/2018

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o domínio das funções e calcule os limites abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2. Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

   [Lembre que $-1 \leq \cos x \leq 1$, que $x^2 \geq 0$ e use o Teorema do Confronto.]

3. Dados $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$ e $I = (0, 1)$:

   (a) Determine se a função f é contínua no intervalo I.

   (b) Mostre que a função f possui uma raiz no intervalo I.

4. Calcule a derivada das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{2x}{5 - \cos x}$

   (b) $g(x) = \ln(xe^x)$

5. Dada a equação implícita $x^3(x - y) = y^2(x + 2y)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

Boa Prova!

① a) $\sqrt{1-x}$ está def. se $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

$\sqrt{1+x}$ está def. se $1+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

logo, $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ está def. se $x \in (-1,0) \cup (0,1)$.

Além disso,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$$

b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{x}$ está def. para todo $x \neq 0$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{x} \cdot \frac{6}{6} = \lim_{x\to 0}\left[\overset{6}{\cancel{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}\right] = \overset{6}{\cancel{\frac{1}{6}}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}$$

$$= \overset{6}{\cancel{\frac{1}{6}}} \cdot \lim_{6x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x} = \overset{6}{\cancel{\frac{1}{6}}}, \text{ pois } x \to 0 \Rightarrow 6x \to 0.$$

② Temos que:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \overset{(\times x^2)}{\Longrightarrow} -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2, \text{ pois } x^2 \geq 0$$

mas,

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Pelo Teo. do Confronto, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

③ a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$ é polinomial, logo contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, é contínua em I.

b) Observe que:

$$f(0) = 0^4 - 4.0^3 + 2 = 2 > 0$$

$$f(1) = 1^4 - 4.1^3 + 2 = -1 < 0$$

Pelo Teo. do valor médio, existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$.

④ a) $f(x) = \dfrac{2x}{5 - \cos x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(5 - \cos x) - 2x \operatorname{sen} x}{(5 - \cos x)^2} = \frac{10 - 2\cos x - 2x \operatorname{sen} x}{(5 - \cos x)^2}$$

b) $g(x) = \ln(x.e^x)$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x\, e^x} \cdot \left(e^x + x e^x\right) = \frac{e^x(1+x)}{x\, e^x} = \frac{1+x}{x}$$

⑤ $x^3(x-y) = y^2(x+2y)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^3(x-y)\right] = \frac{d}{dx}\left[y^2(x+2y)\right]$$

$$\Rightarrow 3x^2(x-y) + x^3\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 2y\frac{dy}{dx}(x+2y) + y^2\left(1 + 2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow 3x^2(x-y) + x^3 - x^3\frac{dy}{dx} = 2y(x+2y)\frac{dy}{dx} + y^2 + 2y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow -x^3\frac{dy}{dx} - 2y(x+2y)\frac{dy}{dx} - 2y^2\frac{dy}{dx} = y^2 - 3x^2(x-y) - x^3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2(x-y) - x^3}{-x^3 - 2y(x+2y) - 2y^2} = \frac{y^2 - 3x^3 + 3x^2y - x^3}{-x^3 - 2yx - 4y^2 - 2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4x^3 + 3x^2y}{-x^3 - 2yx - 6y^2}$$