1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral II — Avaliação P3
Prof. Adriano Barbosa

Eng. Civil 22/02/2018

Aluno(a):..

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule o limite das sequências abaixo:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{41}+n^{40}}{4n^{42}+2n^{41}}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{5^n}$

2. Identifique as séries abaixo, determine se são convergentes ou divergentes e calcule sua soma quando possível:

   (a) $1+\dfrac{1}{2^{0,42}}+\dfrac{1}{3^{0,42}}+\dfrac{1}{4^{0,42}}+\cdots$

   (b) $-4+3-\dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{16}-\cdots$

3. Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$ é convergente ou divergente.

4. Determine para quais valores de x a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2 x^n}{2^n}$ é convergente.

5. Calcule a série de Taylor da função $f(x)=\ln(x)$ com $a=1$.

Boa Prova!

① a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{41} + n^{40}}{4n^{42} + 2n^{41}} \cdot \dfrac{\frac{1}{n^{42}}}{\frac{1}{n^{42}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}} = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{5^n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^n} = 0,$

pois $\frac{5}{3} > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \infty$

② a) $1 + \dfrac{1}{2^{0,42}} + \dfrac{1}{3^{0,42}} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{0,42}}$ é uma série p com $p = 0,42$.

Como $p < 1$ a série é divergente.

b) $-4 + 3 - \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{16} - \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-4) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ é geométrica com $a = -4$

e $r = -\frac{3}{4}$. Como $-1 < r < 1$ a série converge e sua soma é

$\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{-4}{1 + \frac{3}{4}} = -4 \cdot \dfrac{4}{7} = -\dfrac{16}{7}.$

③ Temos que $\dfrac{(2n+1)^n}{n^{2n}} = \left(\dfrac{2n+1}{n^2}\right)^n$. Aplicando o teste da raiz:

$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{2n+1}{n^2}\right)^n\right|} = \dfrac{2n+1}{n^2} \cdot \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$

Portanto, a série converge.

④ Aplicando o teste da razão:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2 x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n n^2 x^n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}}\right|$$

$$= \left|(-1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}|x|$$

Assim, se

- $\frac{1}{2}|x| < 1$ a série converge:

$\frac{1}{2}|x| < 1 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$

- $\frac{1}{2}|x| > 1$ a série diverge:

$\frac{1}{2}|x| > 1 \iff |x| > 2 \iff x > 2$ ou $x < -2$

Falta verificar para $x = 2$ e $x = -2$.

$x = 2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$

Como $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2$ não existe (pois os termos da seq. crescem em valor absoluto e alternam de sinal), pelo teste da divergência, a série diverge.

$x = -2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$

Novamente, pelo teste da divergência, a série diverge, pois $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Portanto, a série inicial converge para $x \in (-2,2)$.

⑤ A série de Taylor de uma função $f(x)$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Calculando as derivadas de $f(x) = \ln x$, temos:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \cancel{\frac{1}{x^3}}\ \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\cancel{\frac{1}{x^4}}\ -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$$

$$\therefore\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{\cancel{1}\,(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Assim,

$$\ln x = \ln 1 + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

$$= 0 + (x-1) - 1\,\frac{(x-1)^2}{2} + 2!\,\frac{(x-1)^3}{3!} - 3!\,\frac{(x-1)^4}{4!} + \dots$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$