1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Fundamentos de Matemática III — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 20/02/2018

Aluno(a):...

Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Determine o polinômio $p(x)$ de grau 3 cujas raízes são 1, 2 e 3 sabendo que $p(0) = 1$.

2. Resolva a equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ sabendo que uma raiz é igual a soma das outras duas.

3. Resolva a equação $x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ sabendo que i é uma raiz com multiplicidade 3.

4. Escreva as funções quadráricas abaixo na forma canônica e esboce seus gráficos indicando o vértice da parábola:
   (a) $f(x) = -x^2 - x + 1$
   (b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}$

5. Verifique se a equação $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$ possui raízes racionais.

Relações de Girard:

Para $ax^2 + bx + c = 0$: $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ e $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$

Para $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$: $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$, $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{c}{a}$ e $r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}$

Boa Prova!

① Pelo Teorema de decomposição, temos $p(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$. Assim,

$p(0) = 1 \Rightarrow a(0-1)(0-2)(0-3) = 1 \Rightarrow -6a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$.

Portanto, $p(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$.

② Sem perda de generalidade, suponha $r_1 \overset{\circledast}{=} r_2 + r_3$. Pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 4 & \text{I} \\ r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 1 & \text{II} \\ r_1 r_2 r_3 = -6 & \text{III} \end{cases}$$

De I e $\circledast$, temos:

$$r_1 + r_1 = 4 \Rightarrow r_1 = 2$$

Substituindo em II:

$$2r_2 + r_2 r_3 + 2r_3 = 1 \Rightarrow 2(r_2 + r_3) + r_2 r_3 = 1 \Rightarrow 2r_1 + r_2 r_3 = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 + r_2 r_3 = 1 \Rightarrow r_2 r_3 = -3$$

A eq. III é verdadeira, pois $2 \cdot (-3) = -6$. Logo, queremos r_2 e r_3 tais que:

$$\begin{cases} r_2 + r_3 = 2 \\ r_2 r_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = 2 - r_3 \\ r_2 r_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow (r_3 - 2) r_3 = 3 \Rightarrow r_3^2 - 2r_3 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow r_3 = 3 \text{ ou } r_3 = -1$$

$\therefore$ $r_3 = 3 \Rightarrow r_2 = -1$

e $r_3 = -1 \Rightarrow r_2 = 3$

Portanto, as raízes da eq. são -1, 2 e 3.

③ Como i é raiz com multiplicidade 3, $-i$ também é raiz da eq. com multiplicidade 3. Além disso,

$$(x-i)(x+i) = x^2 - i^2 = x^2+1$$

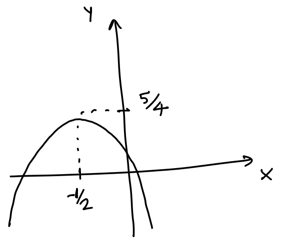
$$\Rightarrow (x-i)^3(x+i)^3 = \left[(x-i)(x+i)\right]^3 = \left[x^2+1\right]^3 = x^6+3x^4+3x^2+1.$$

Logo, $x^7-x^6+3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+x-1$ é divisível por $x^6+3x^4+3x^2+1$. Dividindo:

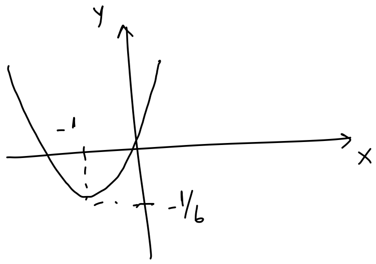
$$\begin{array}{l|l}
x^7-x^6+3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+x-1 & x^6+3x^4+3x^2+1 \\ \cline{2-2}
-x^7 \quad -3x^5 \quad -3x^3 \quad -x & x-1 \\ \cline{1-1}
-x^6-3x^4-3x^2-1 & \\
x^6+3x^4+3x^2+1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Portanto, $x^7-x^6+3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+x-1 = (x-i)^3(x+i)^3(x-1)$ e suas raízes são i e $-i$ com multiplicidade 3 e 1.

④ a) $-x^2-x+1 = (-1)(x^2+x-1) = (-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right] = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$



b) $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(x^2+2x+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[(x+1)^2-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{6}$



⑤ Como os coeficientes da eq. são todos inteiros, se $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional da eq. então

$p \mid 6 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ou ± 6

e $q \mid 1 \Rightarrow q = \pm 1$

$\therefore \frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ou ± 6

Verificando: seja $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$

$f(1) = 4$ $\qquad$ $f(-1) = 10$

$f(2) = 10$ $\qquad$ $f(-2) = 10$ $\qquad$ $\therefore$ -3 é a única raiz racional (inteira) da eq.

$f(3) = 30$ $\qquad$ $f(-3) = 0$

$f(6) = 234$ $\qquad$ $f(-6) = -150$