1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Matemática 23/08/2017

Aluno(a):...

1. Dado o conjunto $\{(3,3,3),(0,2,2),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, verifique:

   (a) Os vetores são LI ou LD?

   (b) Podemos escrever qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores dados?

   (c) Os vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$?

2. Dada $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x, y, x+y)$

   (a) Calcule a matriz canônica de T.

   (b) Calcule o núcleo e a imagem de T.

   (c) T é injetiva? E sobrejetiva?

3. Mostre que os vetores $T(v)$ e $v - T(v)$ são ortogonais, onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma projeção ortogonal sobre os eixos coordenados .

4. Determine a transformação linear resultante de uma rotação de 45° em torno da origem no sentido anti-horário seguida de uma reflexão em torno do eixo y.

5. Dada $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, calcule:

   (a) Seus autovalores.

   (b) Seus autovetores.

   (c) Uma matriz P que diagonaliza A.

   (d) $P^{-1}AP$.

Boa Prova!

① $\{(3,3,3),(0,2,2),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

RASCUNHO DA SOLUÇÃO

a) São LI?

$$a(3,3,3)+b(0,2,2)+c(0,0,1)=(0,0,0) \Rightarrow (3a,\,3a+2b,\,3a+2b+c)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 0 & \Rightarrow a=0 \\ 3a+2b = 0 & \Rightarrow b=0 \\ 3a+2b+c=0 & \Rightarrow c=0 \end{cases} \qquad \therefore \text{ os vetores são LI.}$$

b) Geram? Sim, são 3 vetores LI em $\mathbb{R}^3$.

c) Base? Sim, são LI e geram.

② $T(x,y)=(x,y,x+y)$

a) Matriz canônica

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) N, Im

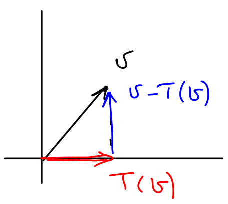
$$T(x,y)=(0,0,0) \Rightarrow (x,y,x+y)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad \therefore N(T)=\{(0,0)\}$$

$$T(x,y)=(x,y,x+y)=(x,0,x)+(0,y,y) = x(1,0,1)+y(0,1,1)$$

$\therefore Im(T)=$ plano passando na origem e contendo $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$.

c) Injetiva? Sim, $N(T)=\{(0,0)\}$ Sobrej.? Não, $Im(T)\neq\mathbb{R}^3$.

③ $T(v) \perp v-T(v)$, com T proj. ortogonal nos eixos coord.



$v=(x,y)$

$T_x(x,y)=(x,0)$

$T_y(x,y)=(0,y)$

$v-T_1(v)=(0,y)$

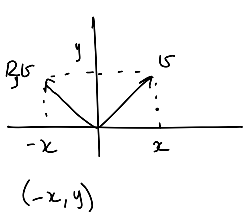
$v-T_2(v)=(x,0)$

$\therefore \langle T_1(v), v-T_1(v)\rangle = 0$

$\langle T_2(v), v-T_2(v)\rangle = 0$

④ R_{45} seguida de R_y

$$R_{45}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \end{bmatrix}, \quad R_y=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow [T]=[R_y][R_{45}]=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \end{bmatrix}$$



5) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

a) autovalores

$$0=\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(-\lambda)(3-\lambda)+2\right] = (2-\lambda)\left[-3\lambda+\lambda^2+2\right]$$

$\Rightarrow \lambda=1$ ou $\lambda=2$

b) autovetores

$\lambda=1$: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x \quad\quad -2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x \quad\quad +2z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow x=-2z$

$\Rightarrow -2z+y+z=0 \Rightarrow y=z$

$\therefore (-2z, z, z)$, $z\neq 0$.

$\lambda=2$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x \quad -2z=0 \\ x \quad +z=0 \\ x \quad +z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow 0=0$.

$\Rightarrow z=-x$

$\therefore (x, y, -x)$, $x\neq 0$ ou $y\neq 0$

c) $P=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$