1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Cálculo Diferencial e Integral — Avaliação P2
Prof. Adriano Barbosa

Eng. de Energia 19/07/2018

Aluno(a):..

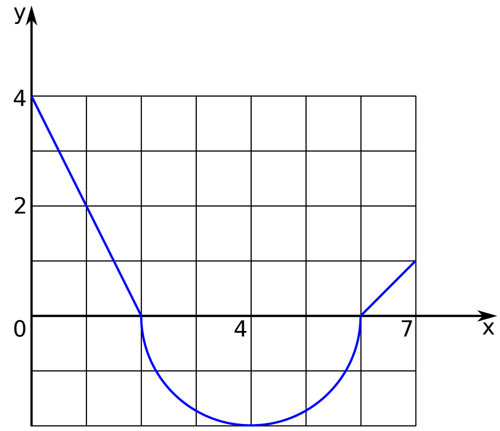
Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Calcule o limite: $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$.

2. Um tanque cilíndrico com raio de 10 m enche com água a uma taxa de 5 m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?

3. Um fazendeiro precisa cercar uma área retangular de 1000 m^2 e em seguida dividir a área pela metade passando uma cerca paralela a um dos lados do terreno. Quais devem ser as dimensões do terreno para que ele minimize o custo com a cerca?

4. O gráfico de g consiste em duas retas e um semicírculo. Use-o para calcular as integrais abaixo.



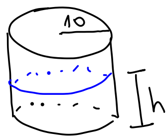
(a) $\displaystyle\int_6^7 g(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_4^6 g(x)\ dx$ (c) $\displaystyle\int_4^7 g(x)\ dx$

5. Calcule a integral $\displaystyle\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\ dx$.

Boa Prova!

① $x \to 0^+ \Rightarrow \ln x \to -\infty$. Temos uma ideterminação do tipo $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

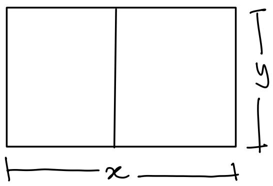
② 

Indicando por h o nível da água no tanque e por V o volume que a água ocupa, temos:

$$\frac{dV}{dt} = 5 \ m^3/min \quad e \quad V = \pi \cdot 10^2 \cdot h = 100\pi h \quad (I)$$

Queremos determinar $\frac{dh}{dt}$. Derivando (I):

$$\frac{dV}{dt} = 100\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{100\pi} = \frac{1}{20\pi} \ m/min$$

③ 

Sejam x e y as dimensões do terreno. Logo,

$$A = xy = 1000 \Rightarrow y = \frac{1000}{x} \quad (I)$$

e $C = 2x + 3y$ (II) (comprimento da arco)

Substituindo (I) em (II): $C(x) = 2x + 3 \cdot \frac{1000}{x} = 2x + \frac{3000}{x}$

$$\Rightarrow C'(x) = 2 - \frac{3000}{x^2}$$

Como $C'(x)$ não está definida para $x=0$, esse é um dos números críticos de C. Os demais são dados por $C'(x)=0$, ou seja,

$$2 - \frac{3000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 3000 \Leftrightarrow x^2 = 1500 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1500} = \pm 10\sqrt{15}$$

Mas, $x > 0$, logo os únicos números críticos de C são $x=0$ e $x = 10\sqrt{15}$. Podemos descartar $x=0$, pois nesse caso não há terreno retangular.

Para $x > 10\sqrt{15}$: $x^2 > 1500 \Leftrightarrow 2x^2 > 3000 \Leftrightarrow 2x^2 - 3000 > 0$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3000}{x^2} > 0 \quad \therefore C'(x) > 0$$

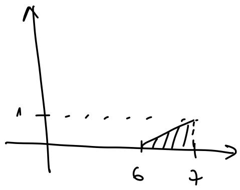
Para $0 < x < 10\sqrt{15}$: $x^2 < 1500 \iff 2x^2 < 3000 \iff 2x^2 - 3000 < 0$

$$\iff 2 - \frac{3000}{x^2} < 0 \quad \therefore C'(x) < 0$$

Pelo teste da 1ª derivada, $C(x)$ tem um mínimo local em $x = 10\sqrt{15}$. Portanto, as dimensões do terreno são

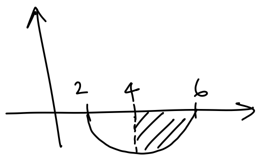
$$x = 10\sqrt{15} \text{ m} \quad \text{e} \quad y = \frac{1000}{10\sqrt{15}} = \frac{20}{3}\sqrt{15} \text{ m}$$

④ a)



$$\int_6^7 g(x)\,dx = \text{área do triângulo} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

b)



$$\int_4^6 g(x)\,dx = -(\text{área do quarto de círculo}) = -\frac{\pi \cdot 2^2}{4} = -\pi$$

c) $$\int_4^7 g(x)\,dx = \int_4^6 g(x)\,dx + \int_6^7 g(x)\,dx = \frac{1}{2} - \pi$$

⑤ $$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^9 \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^9 x x^{-1/2} - x^{-1/2}\,dx = \int_1^9 x^{1/2} - x^{-1/2}\,dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2}\right)\Big|_1^9 = \frac{2}{3}(9)^{3/2} - 2(9)^{1/2} - \frac{2}{3}(1)^{3/2} + 2(1)^{1/2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 27 - 2 \cdot 3 - \frac{2}{3} + 2 = 18 - 6 - \frac{2}{3} + 2 = 14 - \frac{2}{3} = \frac{42-2}{3} = \frac{40}{3}$$