UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Lista 7
Prof. Adriano Barbosa

(1) Sejam $u = (-3, 2, 1, 0)$, $v = (4, 7, -3, 2)$ e $w = (5, -2, 8, 1)$. Encontre
(a) $v - w$ (b) $2u + 7v$ (c) $-u + (v - 4w)$ (d) $(6v - w) - (4u + v)$

(2) Sejam $u = (4, 1, 2, 3)$, $v = (0, 3, 8, -2)$ e $w = (3, 1, 2, 2)$. Calcule:
(a) $\|u + v\|$ (b) $\left\| \frac{1}{\|w\|} w \right\|$ (c) $\| - 2u\| + 2\|u\|$ (d) $\langle u, v\rangle$

(3) Mostre que se v é um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^n$, então $w = \frac{1}{\|v\|} v$ tem norma 1.

(4) Mostre que não existem escalares a, b e c tais que

$$a(1, 0, 1, 0) + b(1, 0, -2, 1) + c(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$$

(5) Verifique que a fórmula $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^T v\rangle$ é válida para
(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$
(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

(6) Determine os valores de k para que os vetores u e v sejam ortogonais
(a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (1, 7, k)$
(b) $u = (k, k, 1)$, $v = (k, 5, 6)$

(7) Se u e v são vetores em $\mathbb{R}^n$, vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. Verifique que a desigualdade de Cauchy-Schwarz vale para os vetores abaixo:
(a) $u = (3, 2)$, $v = (4, -1)$
(b) $u = (-3, 1, 0)$, $v = (2, -1, 3)$
(c) $u = (0, -2, 2, 1)$, $v = (-1, -1, 1, 1)$

(8) Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que

$$(a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

(9) Se u e v são matrizes $n \times 1$ e A é uma matriz $n \times n$, mostre que

$$\left(v^T A^T A u\right)^2 \leq \left(u^T A^T A u\right) \left(v^T A^T A v\right)$$

(10) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}^2$, os vetores $v_1 = (a_1, 0)$ e $v_2 = (0, a_2)$ determinam um retângulo de área $A = a_1 a_2$ e em $\mathbb{R}^3$, os vetores $v_1 = (a_1, 0, 0)$, $v_2 = (0, a_2, 0)$ e $v_3 = (0, 0, a_3)$ determinam um paralelepípedo de volume $V = a_1 a_2 a_3$. A área A e o volume V são chamados, às vezes, de "medida euclidiana" do retângulo e do paralelepípedo, respectivamente.
(a) Como você definiria a medida euclidiana da "caixa" em $\mathbb{R}^n$ determinada pelos vetores $v_1 = (a_1, 0, 0, \ldots, 0)$, $v_2 = (0, a_2, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $v_n = (0, 0, 0, \ldots, a_n)$?
(b) Como você definiria o comprimento da diagonal da caixa do item acima?