UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Lista 11
Prof. Adriano Barbosa

(1) Encontre a matriz canônica para cada composição abaixo:
  (a) Uma rotação de 90° seguida de uma reflexão em torno do eixo y.
  (b) Uma reflexão em torno do eixo x seguida de uma escala de razão $k = 3$.
  (c) Uma rotação de 60°, seguida de uma projeção ortogonal sobre o eixo x, seguida de uma reflexão em torno do eixo y.
  (d) Uma rotação de 15°, seguida de uma rotação de 105°, seguida de uma rotação de 60°.

(2) Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$:
  (a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo y.
  (b) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a rotação por um ângulo θ_1 e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a rotação por um ângulo θ_2.
  (c) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a rotação por um ângulo θ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x.

(3) Definimos as projeções ortogonais de $\mathbb{R}^3$ sobre os eixos x, y e x, respectivamente, por

$$T_x(x, y, z) = (x, 0, 0),\ T_y(x, y, z) = (0, y, 0)\ e\ T_z(x, y, z) = (0, 0, z).$$

Mostre que as projeções acima são transformações lineares.

(4) Mostre que a reflexão de vetores de $\mathbb{R}^2$ em torno da reta $y = x$ é uma transformação linear e encontre sua matriz canônica.

(5) Mostre que a projeção ortogonal de vetores de $\mathbb{R}^2$ sobre a reta $y = x$ é uma transformação linear e encontre sua matriz canônica.

(6) Mostre que os vetores $T(v)$ e $v - T(v)$ são ortogonais, onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma projeção ortogonal sobre os eixos coordenados ou sobre a reta $y = x$.

(7) Calcule o núcleo e a imagem das transformações lineares abaixo:
  (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 3y, 3x)$
  (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y) = (x - y, x, y, y - x)$
  (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x - y + z$

(8) Determine se as transformações lineares do exercício anterior são injetivas e se são sobrejetivas.

(9) O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, 3x + 4y)$ é invertível? Encontre sua inversa se possível.

(10) Determine se os conjuntos de vetores abaixo são LI ou LD
  (a) $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ em $\mathbb{R}^2$
  (b) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$
  (c) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$
  (d) $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$

(11) Para quais conjuntos de vetores do exercício anterior é possível escrever qualquer vetor dos espaços vetoriais dados como combinação linear de seus elementos?

(12) Determine quais dos conjuntos de vetores do exercício (10) são base dos espaços vetoriais dados.