UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo IV

Lista 01 — 01 de Dezembro de 2016

(1) Se $\rho(x, y)$ representa a função densidade linear de um ponto (x, y) de um fio fino com a forma de uma curva C, então a **massa total** do fio é dada pela integral de linha

$$m = \int_C \rho(x, y) ds.$$

O **centro de massa** do fio com a função densidade $\rho(x, y)$ encontra-se no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, onde

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y) ds,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y) ds.$$

Se um arame fino tem a forma da parte que está no primeiro quadrante da circunferência com centro na origem e raio a e a função densidade for $\rho(x, y) = kxy$, k constante, encontre:

a) A massa total do arame.

b) O centro de massa do arame.

(2) Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada:

a) $\int_C xy^4 dr$, onde C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.

b) $\int_C xe^{yz} dr$, onde C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

c) $\int_C yzdx - xzdy + xydz$, onde C é a curva determinada por $r(t) = (e^t, e^{3t}, e^{-t})$ com $0 \leq t \leq 1$

(3) O campo de velocidade de um fluido em movimento é dado por $\overrightarrow{v} = (2x, 2y, -z)$. Calcular a circulação do fluido ao redor da curva fechada C, sendo C dada por $\overrightarrow{r} = \cos t\, \overrightarrow{i} + \text{sen} t\, \overrightarrow{j} + 2\, \overrightarrow{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(4) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $F(x, y) = x^2 \overrightarrow{i} + ye^x \overrightarrow{j}$ em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

(5) Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função ϕ tal que $\mathbf{F} = \triangledown \phi$:

a) $\mathbf{F} = (ye^x + \text{sen}y, e^x + x\cos y)$

b) $\mathbf{F} = (y^2z + 2xz^2, 2xyz, xy^2 + 2x^2z)$

c) $\mathbf{F} = \left(\ln y + 2xy^3, 3x^2y^2 + \dfrac{x}{y}\right)$

d) $\mathbf{F} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

(6) Considere o campo de forças $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo da curva C, que consiste do arco da parábola $y = x^2 - 1$ com $-1 \leq x \leq 2$, seguido do segmento da reta que une os pontos $(2,3)$ e $(-1,0)$.

b) Mostre que $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.

(7) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo de uma curva lisa C, do ponto A ao ponto B dados:

a) $F(x,y) = 3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$ do ponto $A = (1,2)$ ao ponto $B = (4,0)$.

b) $F(x,y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$ do ponto $A = (-1,1)$ ao ponto $B = (2,0)$.

c) $F(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ do ponto $A = (0,1,1)$ ao ponto $B = (1,0,1)$.

d) $F(x,y,z) = 2x\text{sen}z\mathbf{i} + (z^3 - e^y)\mathbf{j} + (x^2\cos z + 3yz^2)\mathbf{k}$ do ponto $A = (1,1,1)$ ao ponto $B = (1,2,3)$.

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II.