UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS

FACET

Cálculo IV

Lista 02 — 26 de Janeiro de 2016

(1) Calcule as integrais duplas:

a) $\displaystyle\iint_R xe^{xy}dxdy$ onde $R = [1,3] \times [0,1]$.

b) $\displaystyle\iint_R \frac{x}{1+xy}dxdy$ onde $R = [0,1] \times [0,1]$.

c) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\pi} r\text{sen}^2\theta d\theta dr.$

d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2x}dydx.$

e) $\displaystyle\iint_R (2x+y)dxdy$ onde R é a região delimitada por $x = y^2 - 1$, $x = 5$, $y = -1$ e $y = 2$.

f) $\displaystyle\iint_R xdxdy$ onde R é a região delimitada por $y = -x$, $y = 4x$ e $y = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{5}{2}$.

(2) Usando coordenadas polares, calcular:

a) $\displaystyle\int\int_R \frac{dA}{1+x^2+y^2}$, onde R é a região do segundo quadrante delimitada pela

circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

b) $\displaystyle\int\int_R \sqrt{x^2+y^2}dA$, onde R é a região delimitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$.

c) $\displaystyle\int\int_R xdA$, onde R é a região delimitada por $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

(3) A transformação $x = au$, $y = bv$ $(a, b > 0)$ pode ser reescrita como $x/a = u$, $y/b = v$ e, portanto, transforma a região circular

$$u^2 + v^2 \leq 1$$

na região elíptica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Ao efetuar integrações em regiões elípticas, primeiro transformamos esta região em uma circular e depois aplicamos a transformada em coordenadas polares da seguinte maneira:

$$u = r\cos\theta \Rightarrow x/a = u = r\cos\theta \Rightarrow x = ra\cos\theta$$

$$v = r\sin\theta \Rightarrow y/b = v = r\sin\theta \Rightarrow y = rb\sin\theta.$$

Portanto, a mudança a coordenadas polares de uma região elíptica é dada por

$$(x, y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$ e $r \in [0, 1]$.

Usando esta mudança, calcule a integral $\int\int_R \sqrt{16x^2 + 9y^2}dA$, onde R é a região envolvida pela elipse $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$.

(4) Considere o campo de forças $\overrightarrow{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$, definido para $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo de uma circunferência de raio R.

b) Considere D a região delimitada pela circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio R menos a origem. Esta região é descrita por $\{(x, y)/0 < x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Mostre que

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

c) Usando o Teorema de Green e a parte a), mostre que $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.

Dica: aqui o teorema de Green não pode ser usado diretamente com b) - Por quê?

(5) Considere o campo de forças $\overrightarrow{F}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$, definido para $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F}$ numa partícula que se move ao longo de uma circunferência de raio R.

b) Usando o Teorema de Green e a parte a), mostre que $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi$ para toda curva fechada simples C, suave por partes, que circunda a origem.

b) Considere D a região por $\{(x,y)/0 < x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Mostre que

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Por que isto não contradiz o Teorema de Green?

Bons estudos!

Bibliografia:

Stewart, J. - Cálculo Vol II

Flemming, D. - Cálculo B

Howard, A. - Cálculo Vol II.