

Prêmio Gauss, Medalha Fields e Compressão de Imagens

Dias Exatos

Adriano Oliveira Barbosa
Universidade Federal da Grande Dourados
<https://adrianobarbosa.xyz>

Dezembro, 2018

Os prêmios



Medalha Fields, oficialmente conhecida como Medalha Internacional de Descobrimentos Proeminentes em Matemática, é um prêmio concedido a dois, três ou quatro matemáticos com não mais de 40 anos de idade durante cada Congresso Internacional da União Internacional de Matemática (IMU), que acontece a cada quatro anos.¹

¹https://pt.wikipedia.org/wiki/Medalha_Fields

Os prêmios

O Prêmio Carl Friedrich Gauss de Aplicações Matemáticas é um prêmio de matemática, concedido em conjunto pela União Internacional de Matemática e pela Associação dos Matemáticos da Alemanha para “notáveis contribuições matemáticas que têm encontrado aplicações importantes fora da matemática”.²

²https://pt.wikipedia.org/wiki/Prêmio_Carl_Friedrich_Gauss

A revolução



David Donoho, ganhador do Prêmio Gauss (2018)

A revolução



Terence Tao, ganhador da Medalha Fields (2006) e Emmanuel Candès

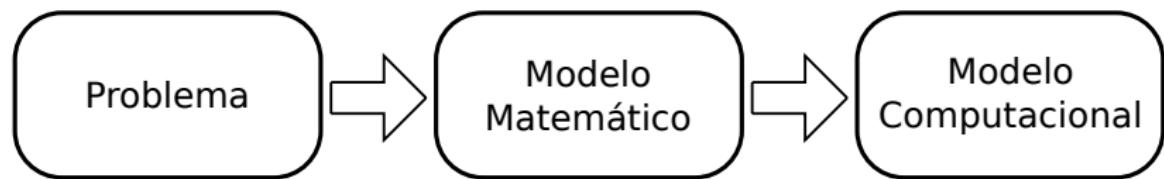
A revolução

- ▶ Ressonância magnética (*compressed sensing*)
- ▶ Tempo dos profissionais de saúde
- ▶ 6 minutos segurando o folego em vários momentos → 25s respirando normalmente
- ▶ Pacientes cardíacos
- ▶ Crianças precisavam ser sedadas (1h → 10m)

A revolução

- ▶ Matemática em 2006 → Produto em 2017
- ▶ Importância do investimento em pesquisa
 $(40mi \times 5200 = 20.8bi$ vs $230mi$ por ano)

Modelagem de problemas

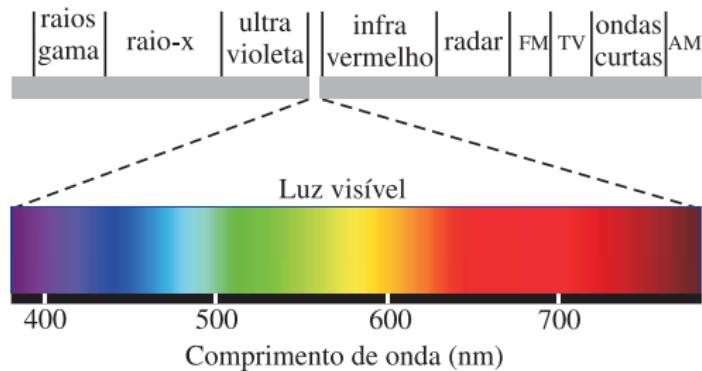


Nosso problema

Comprimir imagens no computador.

Como vemos uma imagem?

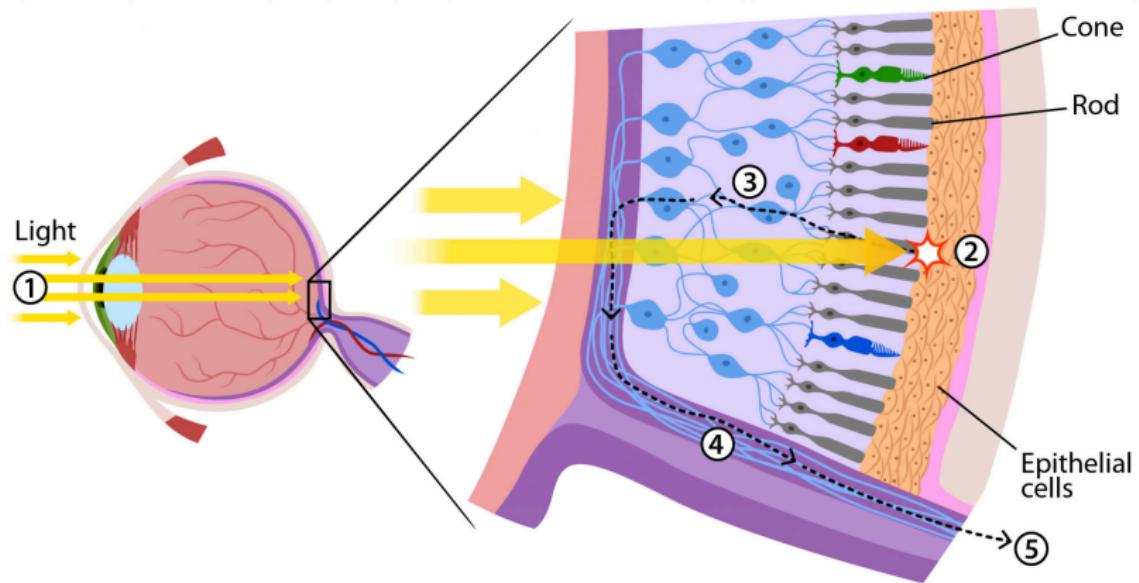
Luz



Fonte: Gomes, J. e Velho, L., Fundamentos de Computação Gráfica

Como vemos uma imagem?

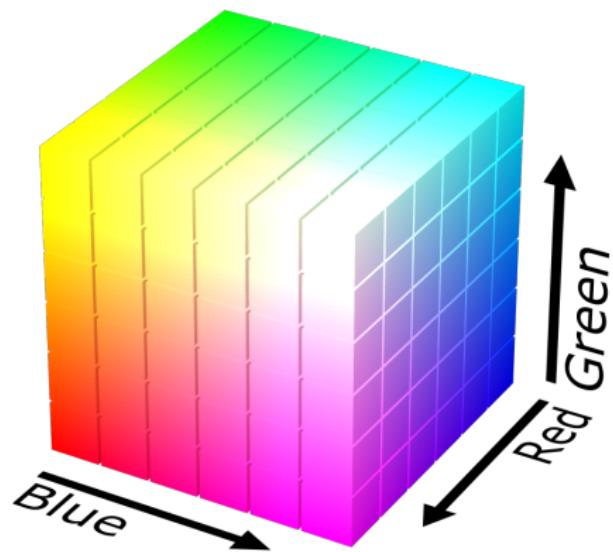
Olho



Fonte: <https://askabiologist.asu.edu/rods-and-cones>

Como vemos uma imagem?

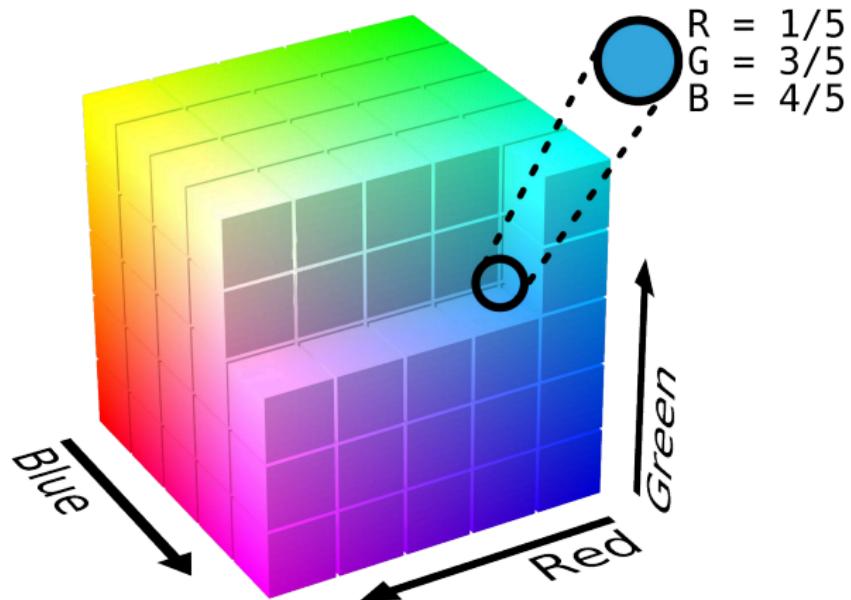
Sistema **RGB**



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/RGB_color_model

Como vemos uma imagem?

Sistema **RGB**



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/RGB_color_space

Uma imagem no computador



Fonte: Márcio no Mundo

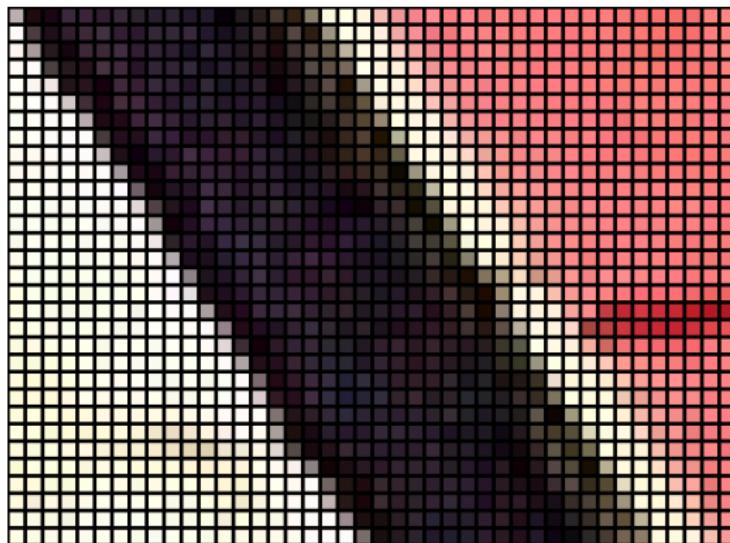
Uma imagem no computador



Fonte: Márcio no Mundo

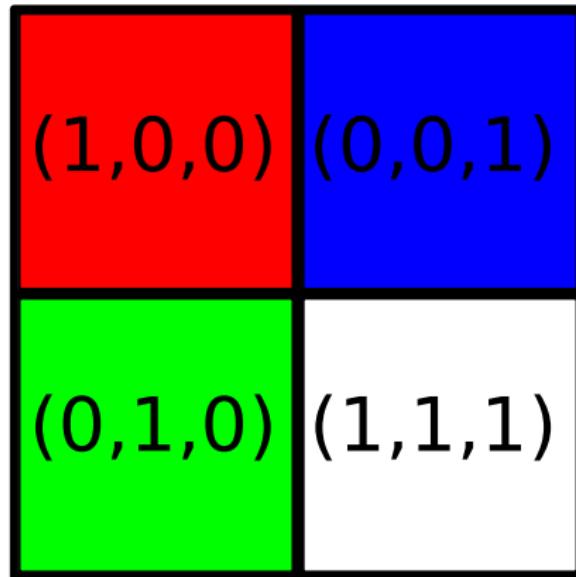
Uma imagem no computador

Matrizes



Uma imagem no computador

Matrizes

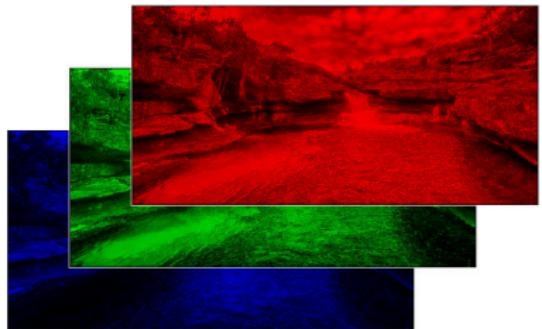


Uma imagem no computador

Matrizes



=



Fonte: Mario Carvajal

Decomposição SVD

Dada $A_{m \times n}$, existem matrizes $U_{m \times m}$, $D_{m \times n}$ e $V_{n \times n}$ tais que

$$A = UDV^T$$

Decomposição SVD

Dada $A_{m \times n}$, existem matrizes $U_{m \times m}$, $D_{m \times n}$ e $V_{n \times n}$ tais que

$$A = UDV^T$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bullet & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bullet \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hline & \hline & \hline & \hline \end{bmatrix}$$

Decomposição SVD

Dada $A_{m \times n}$, existem matrizes $U_{m \times m}$, $D_{m \times n}$ e $V_{n \times n}$ tais que

$$A = UDV^T$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | & | & | & | \end{bmatrix}$$

Decomposição SVD

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \bullet \cdot \begin{bmatrix} & | \\ & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{---} \end{bmatrix} + \bullet \cdot \begin{bmatrix} & | \\ & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{---} \end{bmatrix}$$
$$+ \bullet \cdot \begin{bmatrix} & | \\ & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{---} \end{bmatrix} + \bullet \cdot \begin{bmatrix} & | \\ & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{---} \end{bmatrix}$$

Decomposição SVD

$$A = \begin{bmatrix} A \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{yellow stars} \\ \vdots \\ \text{yellow stars} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{cyan stars} \\ \vdots \\ \text{cyan stars} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{green stars} \\ \vdots \\ \text{green stars} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{magenta stars} \\ \vdots \\ \text{magenta stars} \end{bmatrix}$$

Compressão de imagem

Imagen original



Tamanho: 2448 × 3264

Compressão de imagem

Imagen original



Tamanho: 2448×3264

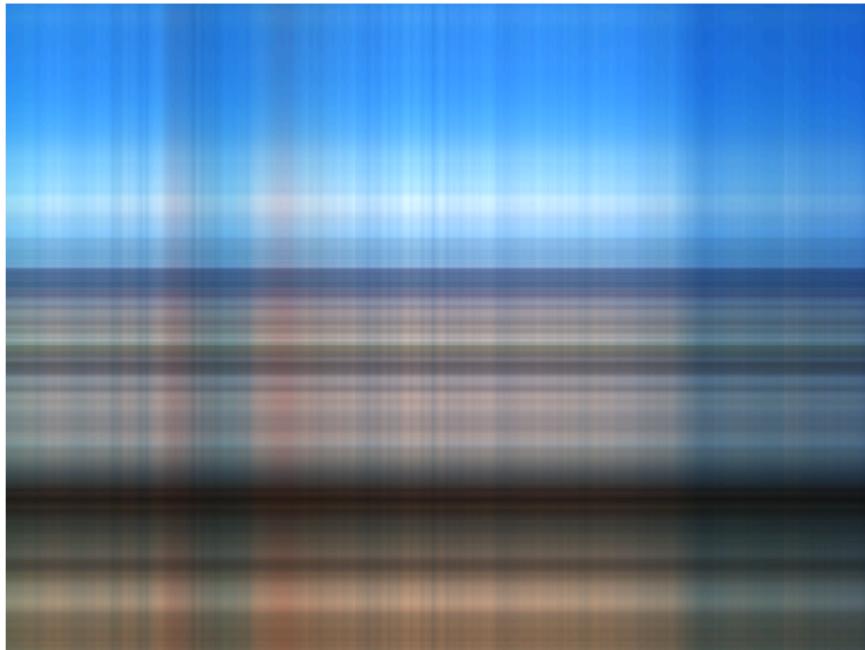
Números reais: $2448 \times 3264 \times 3 = 23.970.816$

Compressão de imagem

$$A \approx d_{1,1} \cdot u(:, 1) \cdot v(1, :)$$

Compressão de imagem

$$A \approx d_{1,1} \cdot u(:, 1) \cdot v(1, :)$$



Apenas 1 parcela

$$\text{Números reais: } (1 + 2448 + 3264) \times 3 = 17.139 \text{ (0,07\%)}$$

Compressão de imagem

$$A \approx d_{1,1} \cdot u(:, 1) \cdot v(1, :) + d_{2,2} \cdot u(:, 2) \cdot v(2, :) + \cdots + d_{50,50} \cdot u(:, 50) \cdot v(50, :)$$



Com 50 parcelas

Números reais: $(1 + 2448 + 3264) \times 50 \times 3 = 856.950$ (3,5%)

Compressão de imagem

$$A \approx d_{1,1} \cdot u(:, 1) \cdot v(1, :) + d_{2,2} \cdot u(:, 2) \cdot v(2, :) + \cdots + d_{100,100} \cdot u(:, 100) \cdot v(100, :)$$



Com 100 parcelas

Números reais: $(1 + 2448 + 3264) \times 100 \times 3 = 1.713.900$ (7,1%)

Compressão de imagem

$$A \approx d_{1,1} \cdot u(:, 1) \cdot v(1, :) + d_{2,2} \cdot u(:, 2) \cdot v(2, :) + \cdots + d_{200,200} \cdot u(:, 200) \cdot v(200, :)$$



Com 200 parcelas

Números reais: $(1 + 2448 + 3264) \times 200 \times 3 = 3.427.800$ (14,3%)

Perguntas



