

Compte rendu du TP Simulation numérique

Sillage d'un obstacle confiné

Baran CELIK

1 Introduction

L'écoulement d'un fluide autour d'un objet non profilé engendre un phénomène fascinant et complexe connu sous le nom d'instabilité de Bénard-Von Karman. Cette instabilité se manifeste par la formation d'une série de tourbillons alternés dans le sillage de l'objet, un phénomène observable à des nombres de Reynolds relativement modestes, de l'ordre de quelques dizaines. Ce sujet est la version numérique du TP Sillage instationnaire. Dans cette étude numérique, l'objectif sera de caractériser cette instabilité près de son seuil et de voir comment elle est influencée par le confinement entre deux parois. Pour cela, le paramètre de contrôle que nous ferons varier est le nombre de Reynolds, jusqu'à atteindre le seuil d'instabilité (pour un nombre de Reynolds critique Re_c).

2 Mise en place de la simulation numérique

2.1 Description de la simulation numérique

Le problème abordé est bidimensionnel, ce qui signifie que seules deux composantes du champ de vitesse sont non nulles, et que le problème est invariant dans la troisième dimension de l'espace. Le schéma du domaine de calcul est représenté dans la figure 1. Le diamètre de l'obstacle est fixé à 1. La largeur du canal définit le rapport de blocage. Le centre de l'obstacle est positionné à deux fois la largeur du canal en aval de l'entrée, et la longueur du canal est au moins égale à 10 fois la largeur.

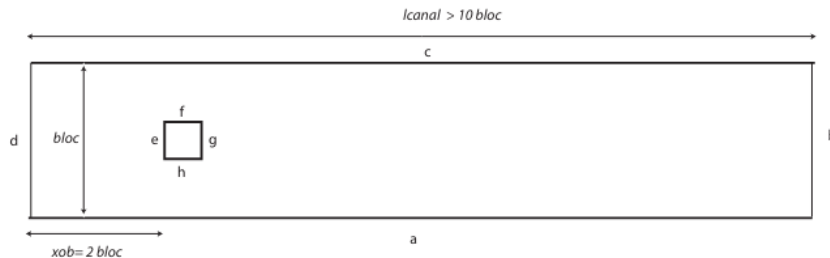


FIGURE 1 – Schéma du domaine de calcul pour un obstacle de section carré

La simulation est programmée en FreeFem et le logiciel utilisée est FREEFEM++, un logiciel Open Source, développé au laboratoire d'analyse numérique de l'UPMC, permettant de résoudre numériquement des équations différentielles par éléments finis. La méthode des éléments finis repose sur la subdivision de l'espace à l'aide d'un maillage, transformant ainsi le système d'équations arbitraires en un système d'équations linéaires par le biais de la formulation matricielle. La résolution de cette matrice, qui contient toutes les équations, fournit une solution approximative au problème sous-jacent.

2.2 Paramètres de simulation

Lorsque le programme FreeFem se lance, plusieurs paramètres doivent être renseignés : des paramètres définissant le maillage (rapport de blocage, longueur du canal...), des paramètres physiques (nombre de Reynolds, pas de temps de calcul, nombres d'itérations...), les données en sortie (calcul des forces, champs de pression, lignes de courant, champs de vorticités...).

Certains paramètres sont fixés et resteront inchangés tout au long de l'étude. La largeur de l'obstacle est prise égale à 1, ce qui revient à adimensionner toutes les longueurs par la largeur de l'obstacle. La vitesse moyenne de l'écoulement en entrée est prise égale à 1, ce qui revient à adimensionner les vitesses par la vitesse moyenne. Le rapport de blocage (largeur

du canal/largeur de l'obstacle) vaut 10, la longueur du canal l_{canal} est 40, la résolution du maillage et le raffinement sur l'obstacle sont fixés à 2 et le pas de temps de calcul (adimensionné) vaut 0.1. On calcule uniquement les forces sur l'obstacle. D'autres paramètres, comme le nombre de Reynolds ($25 < Re < 65$), le nombre d'itérations (entre 800 et 1500) et la perturbation de l'écoulement (oui/non), varient selon les mesures à effectuer.

3 Instabilité de Bénard-Von Karman

Il est envisagé d'étudier plusieurs aspects de l'instabilité de Bénard-von Karman en maintenant constant le rapport de blocage.

3.1 Caractérisation du seuil d'instabilité

Le seuil d'instabilité se caractérise par l'apparition de tourbillons dans le sillage de l'obstacle, accompagnée d'oscillations marquées de vitesse, de pression et de vorticité, en raison de l'instabilité inhérente à l'écoulement. Plus précisément, ce seuil marque la transition d'un régime où la portance, composante normale f_y de la force, décroît exponentiellement (lorsque le nombre de Reynolds est inférieur au seuil critique)   un régime où elle croît exponentiellement (lorsque le nombre de Reynolds dépasse le seuil critique). Ces deux cas sont illustrés sur la figure 2.

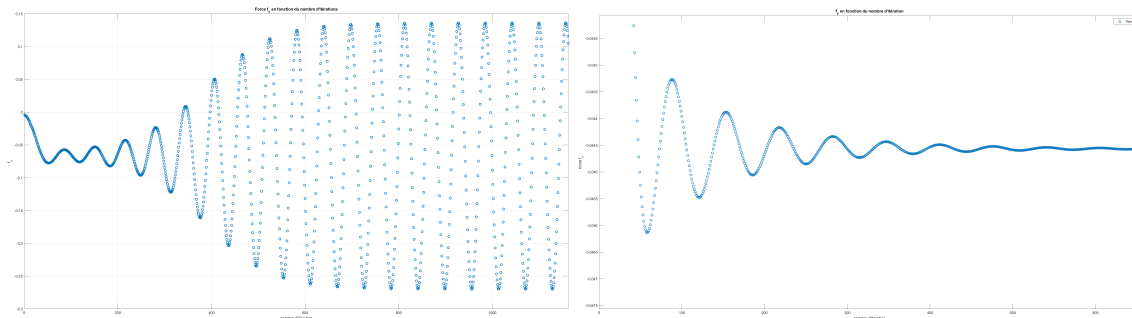


FIGURE 2 – Force f_y en fonction du nombre d' t ration pour $Re = 50 > Re_c$ à gauche, et $Re = 25 < Re_c$ à droite.

Le nombre de Reynolds critique Re_c , à partir duquel les instabilités apparaissent, est déterminé dans un premier temps par dichotomie puis par le biais de plusieurs simulations menées avec différents nombres de Reynolds (par exemple, avec $Re > Re_c$). Par dichotomie, on observe un nombre de Reynolds d'environ 33. Ensuite, les données sont exportées sur MATLAB où la fonction `findpeaks(f_y)` est utilisée pour identifier les maxima locaux de f_y .   l'aide de l'outil `cftool`, un ajustement est réalisé avec une courbe de la forme $A \cdot \exp(-B(x - x_0)) + C$. Lorsqu'on modélise l'exponentielle, on fait attention à ne pas prendre les points proches de la saturation (ce qui fausse le modèle en exponentiel). Les différents B obtenus sont relevés et tracés en fonction de Re . Cette régression permet d'obtenir une droite linéaire $y = 4.10^{-3}x - 1,3.10^{-2}$ ($R^2 = 0.9956$) dont l'intersection avec l'axe des abscisses correspond à $Re = Re_c = 32,5 \pm 2,1$. Ce qui est cohérent avec le nombre de Reynolds trouvé par dichotomie. Deux simulations sont alors lancées afin d'observer le seuil d'instabilité avec l'évolution de la force f_y pour $Re = 32$ et $Re = 33$. Lorsque $Re < 33$, les oscillations s'atténuent au cours du temps (Figure 3).

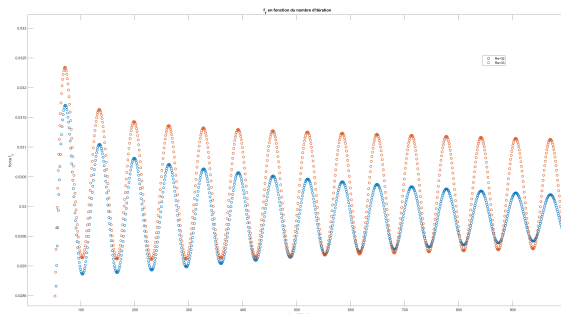


FIGURE 3 – Force f_y en fonction du nombre d' t ration pour $Re = 32$ (bleu) et $Re = 33$ (orange).

De plus, à partir de ces valeurs de B , il est possible de tracer le taux de croissance σ_R au seuil d'instabilité en fonction du nombre de Reynolds. On observe une évolution linéaire.

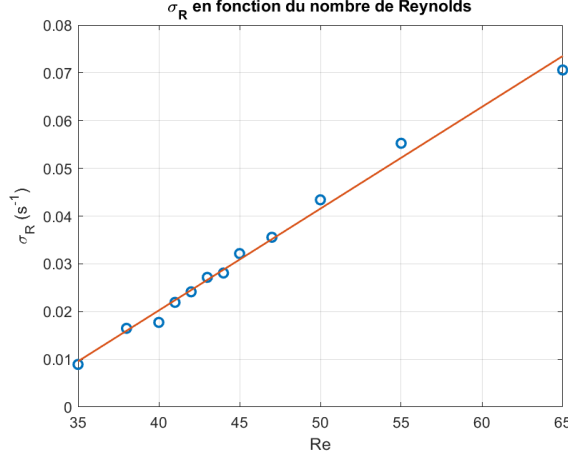


FIGURE 4 – Taux de croissance σ_R en fonction du nombre de Reynolds

3.2 Au delà du seuil : fréquence des tourbillons et amplitude des oscillations

Pour étudier le comportement des oscillations des tourbillons pour des nombres de Reynolds (Re) supérieurs à un seuil critique Re_c , l'intérêt porte sur l'apparition d'un régime permanent, caractérisé par une amplitude d'oscillation des tourbillons qui n'évolue plus avec le temps. Sur la figure 2, pour $Re=50$, il est observé qu'au-delà de 650 itérations, l'amplitude de la sinusoïde devient constante, indiquant l'atteinte d'un régime permanent. Pour certains nombres de Reynolds, le nombre d'itérations a été augmenté jusqu'à 1500, car le régime permanent n'avait toujours pas été atteint après 600 itérations.

Lorsque Re dépasse le seuil d'instabilité, l'amplitude A des oscillations de F_y en régime permanent devrait suivre la relation $A \propto A_0(Re - Re_c)^{1/2}$. Pour vérifier expérimentalement cette relation, plusieurs simulations pour des Re supérieurs à Re_c ont été réalisées, en s'assurant d'avoir suffisamment d'itérations pour atteindre le régime permanent. À l'aide de la fonction findpeaks, l'amplitude A est déterminée avec les extremums locaux. Pour chaque valeur de Re , la valeur de A en régime permanent a été relevée. $\log A$ a ensuite été tracé en fonction de $\log(Re)$ (figure 5). Cette relation devrait donner une droite de pente $\frac{1}{2}$. Le tracé expérimental montre effectivement une droite avec une pente de 0.534, ce qui représente un écart relatif d'environ 7 % par rapport à la valeur attendue de $\frac{1}{2}$. Cet écart peut être expliqué par la méthode de détermination de l'amplitude; une approche alternative aurait pu consister à effectuer une moyenne sur plusieurs pics de maximum afin de déterminer l'amplitude.

Il est également possible de retrouver le nombre de Reynolds critique Re_c grâce à l'évolution de l'amplitude en fonction du nombre de Reynolds. En effet, on observe bien un fit en racine, avec le coefficient de corrélation $R^2 = 0.9996$. On obtient alors $Re_c = 33.10 \in [32.38, 33.62]$, ce qui est compatible avec le nombre de Reynolds critique déterminé dans la première partie.

Au delà du seuil, il est également possible de caractériser l'instabilité par la mesure des fréquences d'oscillation. Pour obtenir une fréquence adimensionnée à partir de la valeur du temps T de l'écoulement, on calcule $f = \frac{1}{T} \times 10$ (le facteur 10 vient du fait que le pas de temps est de 0.1). Dans le but de comparer les résultats avec ceux obtenus par les groupes travaillant sur le TP Sillage instationnaire, l'évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds a été examinée. Le nombre de Strouhal est défini par $Str = \frac{f}{f_0}$, où f est la fréquence d'oscillation des tourbillons et f_0 est une fréquence caractéristique du système : $f_0 = \frac{U}{L}$, où U est la vitesse d'écoulement du fluide et L est la taille de l'obstacle. Ainsi, Str est une fréquence adimensionnée. Dans la simulation numérique, la fréquence mesurée est également une fréquence adimensionnée : il s'agit du nombre de Strouhal Str . En utilisant l'outil findpeaks et en assurant la stabilité du régime permanent pour les deux dernières itérations, la différence entre l'abscisse du dernier point et celle de l'avant-dernier point a été calculée pour obtenir la période, puis la fréquence. L'évolution du nombre de Strouhal calculé avec la simulation numérique a été tracée en fonction du nombre de Reynolds (Figure 5). Il a été constaté que la courbe relative à la simulation est croissante mais quasi-constante autour de $Str = 0.1712$. Il y a une variation relative d'environ 5,2 % entre les valeurs extrêmes. De même, l'expérience réelle est également quasi-constante, autour de $Str = 0.1689 \pm 0.0005$. Finalement, dans le cas de la simulation comme dans le cas de l'expérience réelle, le nombre de Strouhal est quasi-constant en fonction du nombre de Reynolds. L'écart relatif entre les valeurs des deux constantes est d'environ 1.3 %. Il est alors facile d'imaginer la conception d'un débitmètre sans aucune partie mobile à partir de ce constat. En effet, connaissant les valeurs de Str et L , il est possible de déduire la vitesse U du fluide arrivant sur l'obstacle, et donc le débit du fluide, en mesurant la fréquence f d'oscillation des tourbillons en amont de l'obstacle. Cela est possible grâce à la relation $U = \frac{fL}{Str}$.

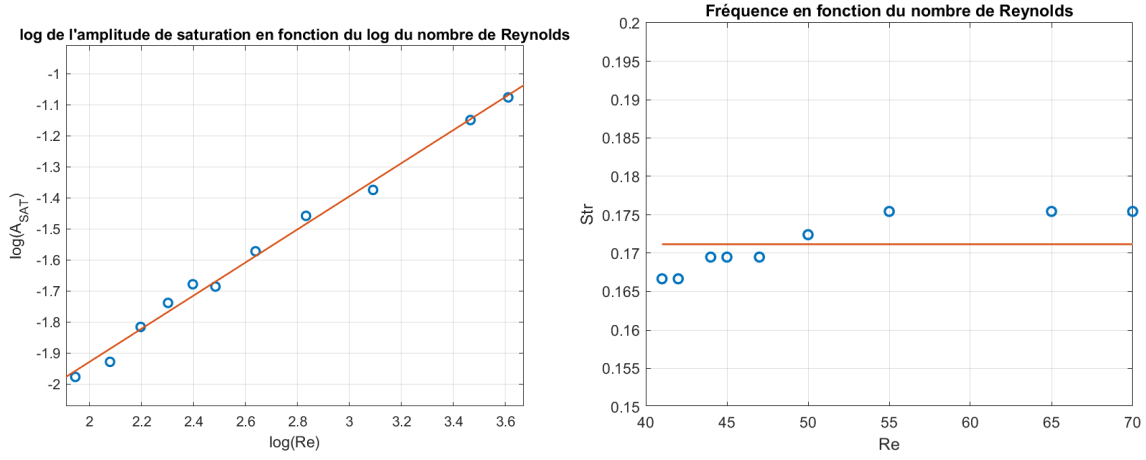


FIGURE 5 – à gauche : $\log(A)$ en fonction de $\log(Re)$; à droite : Str en fonction de Re ($y=0.1712$ en rouge)

3.3 Perturbation sinusoïdale de l'écoulement

Dans cette partie, un des paramètres fixés précédemment est modifié : la perturbation d'écoulement. Une perturbation sinusoïdale d'amplitude 0,4 et de fréquence variable est ajoutée. L'objectif est d'étudier la réponse fréquentielle du système à une perturbation sinusoïdale. Il suffit d'effectuer des simulations à différentes fréquences et de représenter l'amplitude des oscillations de la portance (composante f_y de la force) au-delà du seuil en fonction de la fréquence des oscillations, en gardant le nombre de Reynolds constant.

Le nombre de Reynolds est fixé à 32 (juste avant le seuil d'instabilité). La courbe de l'amplitude en fonction de la fréquence est représentée (Figure 6).

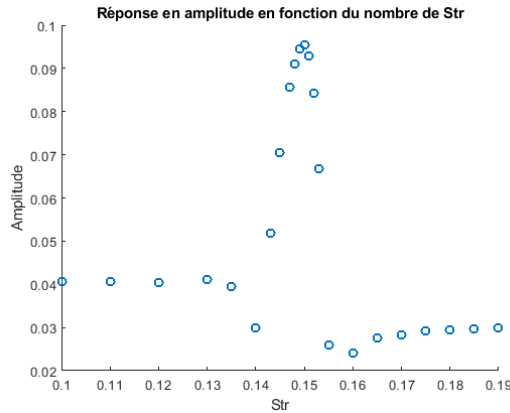


FIGURE 6 – Réponse fréquentielle pour $Re=32$

On observe un pic de résonance à la fréquence adimensionnée de 0.15. Dans la partie précédente, le nombre de Strouhal obtenu était de 0.1712. Cet écart peut s'expliquer par la méthode de détermination des fréquences utilisée précédemment. En effet, nous disposons de seulement quelques points de données et avons effectué une moyenne des ordonnées pour déterminer le nombre de Strouhal. Cette méthode peut introduire des imprécisions, expliquant la légère différence observée entre les valeurs des fréquences de résonance.

Nous avons également essayé de tracer ce pic de résonance pour $Re=30$ (Figure 7). On observe un maximum local autour de 0.15. Cependant, le pic n'est pas significatif.

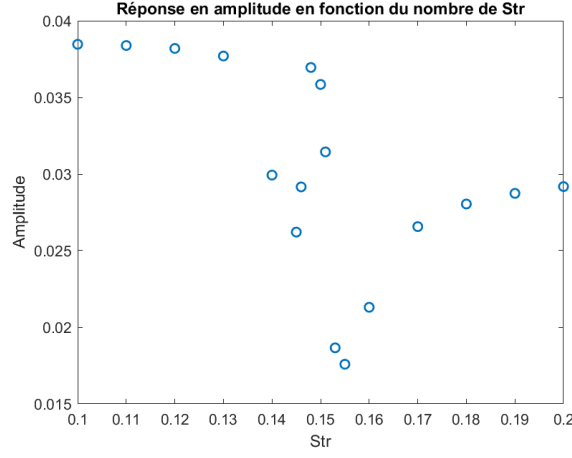


FIGURE 7 – Réponse fréquentielle pour $Re=30$

4 Conclusion

Cette étude numérique de l'instabilité de Bénard-Von Karman a permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes caractéristiques des écoulements fluides autour d'obstacles confinés. En particulier, nous avons pu caractériser le seuil d'instabilité, les comportements au-delà de ce seuil, et l'influence d'une perturbation sinusoïdale sur l'écoulement.

Dans un premier temps, la détermination du seuil d'instabilité a montré que l'instabilité apparaît pour un nombre de Reynolds critique Re_c d'environ 33. Cette valeur a été obtenue par deux méthodes complémentaires : une méthode dichotomique et une régression linéaire sur les données des forces de portance. Les résultats obtenus sont cohérents entre eux, ce qui renforce la validité de notre approche numérique.

Ensuite, au-delà du seuil d'instabilité, nous avons observé que l'amplitude des oscillations des tourbillons suit une relation de la forme $A \propto (Re - Re_c)^{1/2}$. Cette relation a été vérifiée expérimentalement, et l'ajustement logarithmique a montré une pente proche de la valeur théorique attendue. De plus, l'évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds a montré une quasi-constance, en accord avec les résultats expérimentaux connus. Cela a permis de démontrer la possibilité de concevoir des débitmètres basés sur l'observation des fréquences d'oscillation des tourbillons.

Enfin, l'étude de la réponse fréquentielle du système à une perturbation sinusoïdale a révélé un comportement de résonance à une fréquence proche de celle du nombre de Strouhal déterminé précédemment. Cela confirme la sensibilité de l'écoulement aux perturbations externes.

Ces résultats montrent la puissance des simulations numériques pour l'étude des phénomènes complexes en mécanique des fluides. Ils fournissent une base solide pour des recherches futures visant à explorer d'autres configurations géométriques, d'autres régimes d'écoulement, et l'influence d'autres paramètres physiques. Les conclusions tirées de cette étude sont non seulement théoriquement intéressantes mais aussi potentiellement applicables dans des domaines tels que l'aérodynamique par exemple.