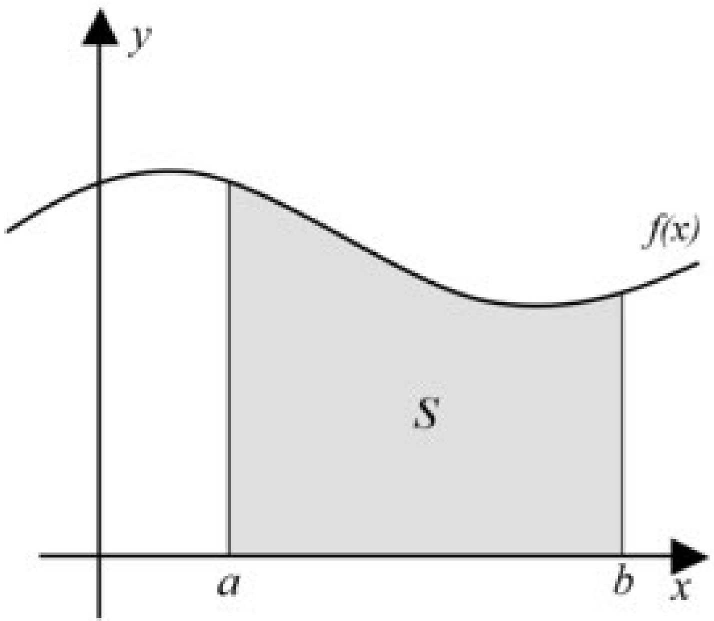
Integração Numérica

A integração numérica consiste em achar a aproximação numérica para o valor de S



Integração numérica é um termo amplo que abrange até a integração de equações diferenciais como é discutido em Métodos Computacionais B. Aqui nos referimos exclusivamente ao cálculo numérico da integral definida:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

O termo definida, quer dizer que a integral se faz entre limites definidos, no caso a e b.

O interesse de fazer esse cálculo numericamente se deve a:

- existência de funções contínuas sem primitiva, o que inviabiliza a conta analítica.
- funções descontinuas ou definidas por trechos
- funções (ou tabelas) provenientes de experimentos
- funções continuas e com primitiva de representação simbólica, porem de difícil avaliação na prática (mais difícil que avaliar a própria função)

Definição

Revisemos o conceito de integral do cálculo: A integral definida de uma função f(x) no intervalo [a, b] se define como:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\Delta x$$

A integral de f(x) pode ser entendida como a soma de pequenos retângulos de base dx e altura f(x), onde o produto f(x) dx é a área deste retângulo.

A soma de todas estas pequenas áreas, ou áreas infinitesimais, fornece a área total abaixo da curva.

Mais precisamente podemos dizer que a integral acima é o valor limite da soma:

$$\sum_{i=0}^{N} f(x_i)\Delta x.$$

onde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

é o comprimento dos pequenos intervalos nos quais dividimos o intervalo (b-a), f(xi) é o valor da função em algum ponto deste intervalo.

Quando $N \to \infty$ o valor da soma acima é igual a área abaixo da curva.

A integral também é conhecida como antiderivada:

$$\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Se resolvermos a integral acima entre os limites a e b, o resultado pode ser escrito como dependendo só dos extremos:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Vamos ver agora como se isso for válido, então F(x) é a primitiva procurada.

Calculando a integral entre x e x + Δx:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x')dx' = F(x+\Delta x) - F(x)$$

Pela definição da integral entre limites definidos podemos escrevê-la como:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(x')dx' = f(x'')\Delta x = F(x+\Delta x) - F(x)$$

onde x'' é um valor de x entre os extremos do intervalo.

Passando o Δx para a direita e tomando o limite quando ele vai para zero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x'') = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \Rightarrow f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

Demonstramos que a derivada de F(x) resulta ser a função f(x) que queremos integrar. Em outras palavras, o **Teorema fundamental do Cálculo** diz que resolver uma integral se resume a achar a primitiva, ou seja uma função cuja derivada seja o integrando.

O problema prático é que não todas as funções tem primitiva..

Cálculo Numérico

O cálculo numérico de uma integral definida se baseia na própria definição acima. Com a diferença que N é finito. Obviamente quanto maior, melhor.

-Temos que pelos retângulos definidos pelo extremo esquerdo de cada subintervalo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_e = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\Delta x$$

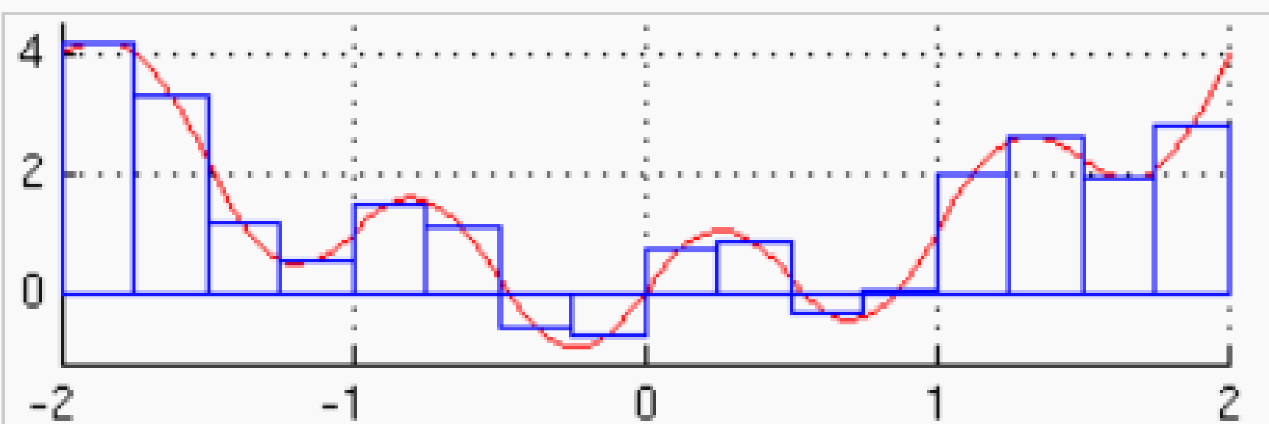


Ilustração da regra do retângulo.

-E pelos retângulos definidos pelo extremo direito de cada subintervalo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_d = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$$

Regra do Trapézio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_t = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{2} \Delta x$$

onde:

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}$$

Esta última pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right) \Delta x$$

O erro de cálculo na Regra do Trapézio é dado por:

$$\text{erro} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi).$$

onde ξ é um número no intervalo entre a e b.

Também pode se verificar que a integral calculada com os trapézios é a média das integrais calculadas com retângulos:

$$S_t = (S_e + S_d) / 2$$

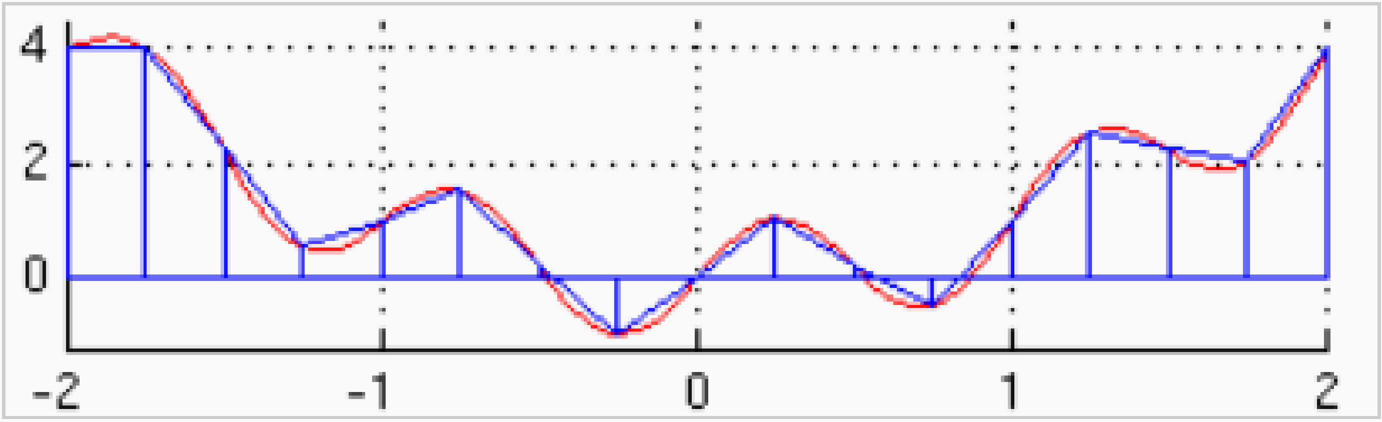


Ilustração da regra do trapézio.

Regra de Simpson:

Notemos que o método do trapézio é baseado na ideia de passar uma reta por 2 pontos e aproximar a área da função f(x) pela área sob a curva definida pelo trapézio.

A regra de Simpson é uma extensão disto: a ideia é passar uma parábola por três pontos consecutivos e calcular a área definida por ela. Se tivermos apenas 3 pontos, a integral da parábola que passa entre x_0, x_2 é dada por:

$$S = \int_{x0}^{x2} f(x)\,dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + f(x_2)\right]$$

No entanto, para integrarmos sobre toda o intervalo $[x_1; x_n]$ com boa precisão, é necessário dividi-lo em N intervalos, com N grande (e par!). Assim, é preciso traçar uma parábola a cada três pontos consecutivos e a expressão final da fórmula de Simpson é então a soma da área sob todas as parábolas do intervalo $[x_0; x_n]$:

$$S = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right],$$

onde h = $(x_n - x_0) / N$.

Erro associado ao método numérico

O método de integração numérico não retorna o valor exato de uma função, visto que não podemos ter no computador $N \to \infty$. O erro aqui discutido estará vinculado ao número de divisões N realizada na função f(x) dentro do intervalo que se quer saber o valor da integral. Assim, o erro é definido como

$$erro = \frac{Int(N) - Int(N-1)}{Int(N)},$$

onde Int(N) é o valor retornado pelo método numérico utilizado utilizando N divisões e Int(N − 1) utilizando N − 1 divisões. Note que um teste simples para verificar quando a resposta está convergindo é aumentar N e calcular o erro a cada incremento no seu valor.

O programa abaixo usa o método do trapézio (visto em aula e também na complex-wiki) para determinar a integral da função *sin(x)*. Copie este programa num arquivo. Primeiramente entenda-o e rode-o com alguns valores de x_{min}, x_{max}. Varie N.

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

float funcaoF( float x ) ;

main() {
int i, N ;
float xmin, xmax, integral;
float xi , deltaX ;

printf("Entre xmin, xmax, N: ");
scanf("%f %f %d",&xmin, &xmax, &N);

deltaX = ( xmax - xmin ) / N ;
integral = 0;
for( i = 0 ; i < N; i++ ) {
xi = xmin + i * deltaX ;
integral += ( funcaoF(xi) + funcaoF(xi+deltaX) ) * deltaX / 2 ;
}
printf("A integral eh: %f \n", integral);


}

float funcaoF( float x )
{
return sin(x);
// return ( 1 / (pow(x,2)-1) ) ;
}
```

No cálculo numérico de uma integral, o erro numérico (a diferença entre o valor real da integral e o valor obtido) é uma função do número de partições introduzidas no intervalo de integração N = (b-a)/h e obviamente também depende da função a ser integrada. Funções mais "suaves" comportam-se melhor na integração, funções que variam rapidamente não.

É mais comum na prática que tenhamos claro qual o erro aceitável para o nosso problema numérico, mas desconhecemos o valor de "h" ou "N" que devemos usar. Por exemplo, pode-se desejar que o erro não ultrapasse 0.1% do valor que estamos calculando. Como se faz isto se não sabemos o valor que estamos calculando?

A resposta é usar um algoritmo adaptativo: Aumenta-se "N" gradativamente com algum critério (adaptação) de forma que o valor da integral para Nk , Int(Nk) , não difira mais do que o percentual desejado do valor anterior Int(Nk-1).

Em outras palavras segue-se o pseudo algoritmo

- Aumenta-se N_k até que (Int(N) - Int(N-1))/ Int(N) < erroPermitido
- Agora retome o programa acima. Faça N variar entre 1 e um certo N_{max} (comece com N_{max}=100 por exemplo). Para cada valor, você deve calcular quanto vale a integral e estocá-la numa matriz Integral[N]. Assim você pode poderá calcular o erro relativo erro[N] = (Integral[N] - Integral[N-1]) / Integral[N].

- Coloque num arquivo os valores de N, Intregral[N], erro[N] e grafique

  Integral[N] vs N e erro[N] vs N.

- O que você pode concluir ao ver estas curvas?

  1) Faça este gráfico para a função *sin(x)* e para a função $1/(x^2-1)$ (cuidado que esta função tem pontos de divergência e portanto o intervalo de integração não pode conter estes pontos).

  2) Entregue uma figura do cálculo da integral numérica de $g(x) = 1/(x^2-1)$ com intervalo de integração entre 2 e 10. Coloque junto na figura o Erro desta integração. Tanto a integral quanto o erro devem ser apresentados em função de N, onde N varia entre 1 e 100.

Faça um programa que calcula a integral da função $f(x) = sin(x)$ entre $x = 2$ e $x = 4$ usando o Método de Simpson.

Trabalho sobre integração numérica: erros usando diferentes métodos numéricos

a) você deve fazer um programa que calcula o erro do método de Simpson em função de N, onde N é o número de partes que o intervalo de integração foi dividido.

Para fazer este programa, integre a função *sin(x)* entre 0 e π.

b) você deve fazer um mesmo programa que calcula a integral de uma função f(x) usando ambos os métodos vistos em aula, trapézio e Simpson. Neste mesmo programa, você deve calcular o erro destes dois métodos, onde erro tem a seguinte definição:

erro[N] = | integral[N] - integral[N-2] | / | integral[N] |

Num primeiro momento, teste o seu programa usando a função *sin(x)* e integre-a entre os pontos $x_0 = 0$ e $x_{max} = \pi$. N deve variar entre $N = 2$ e $N_{max} = 1000$.

A saída do seu programa deve ter 5 colunas:

N, integralSimpon, erroSimpson, IntegralTrapézio, ErroTrapézio

c) Use o programa feito no item 2 para integrar a função $f(x) = e^{-x} / x^3$

entre os intervalos

1) $x_0 = 1$ e $x_{max} = 5$

2) $x_0 = 0.1$ e $x_{max} = 5$

3) $x_0 = 0.01$ e $x_{max} = 5$

d) Faça gráficos de "ErroSimpson vs N" e " ErroTrapézio vs N" para os intervalos pedidos nos itens c.1 e c.3 acima.

e) Coloque estes gráficos num arquivo usando LaTex para gerar um eps. Neste arquivo, você deve interpretar brevemente o que ocorre nestes 2 casos.

Para isto, lembre que vimos em aula que erros aumentam com h depende do método utilizado:

Erro_trap ~ h^3

Erro_simpson ~ h^5

Nem sempre será exatamente este expoente que você vai encontrar. Volte à dedução feita em aula para o erro, pense na proximidade ao ponto de divergência e interprete o que você obteve.