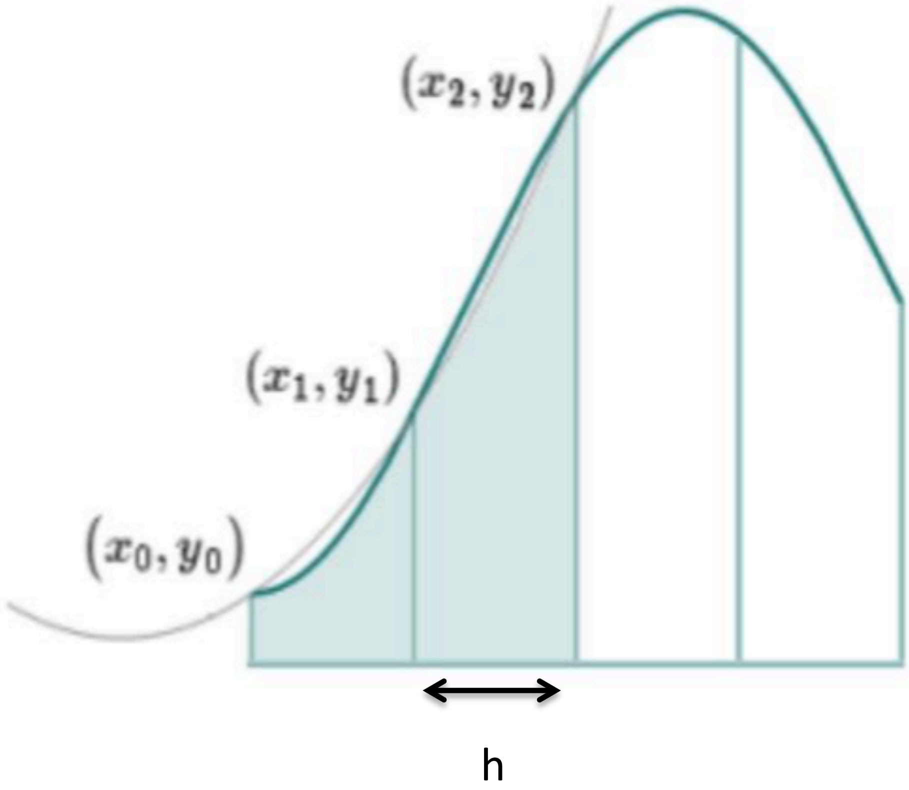
Dedução de Simpson
e dos erros de Trapézio e Simpson

Marco Idiart 2019



Considerando que uma parábola passa pelos 3 pontos temos que a área sob a curva é

$$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)dx = \frac{ax^3}{3}+\frac{ax^2}{2}+cx\Big|_{-h}^{h} = \frac{2ah^3}{3}+2ch = \frac{h}{3}[2ah^2+6c]$$

Os coeficientes da parábola são dados pela substituição dos pontos na fórmula, o que resulta em:

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$y_1 = c$$

$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

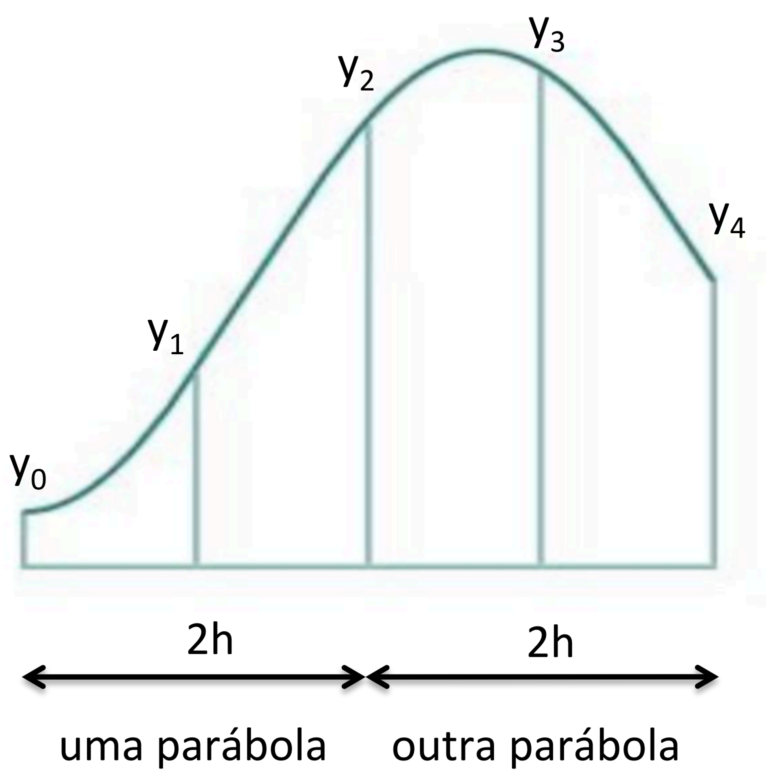
somando o primeiro com o terceiro e substituindo o segundo

$$\longrightarrow \quad y_0 - 2y_1 + y_2 = 2ah^2$$

Logo

$$A = \frac{h}{3}[2ah^2 + 6c]$$

$$A = \frac{h}{3}[y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1] = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$



$$A_1 = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] \qquad A_2 = \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$A_{1+2} = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4]$$

Algoritmo de Simpson

A fórmula de Simpson exige que o intervalo de integração seja dividido em um número n **par** de pequenos intervalos h, o que leva ao cálculo de n+1 valores da função nos pontos que chamaremos x_0 , x_1 , ... , x_n . Observe que os ponto extremos do intervalo são x_0 e x_n. E podemos escrever como fórmula geral para um ponto qualquer

$$x_i = x_0 + i * h \qquad \text{onde} \qquad h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

A fórmula geral fica

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right],$$

extremos

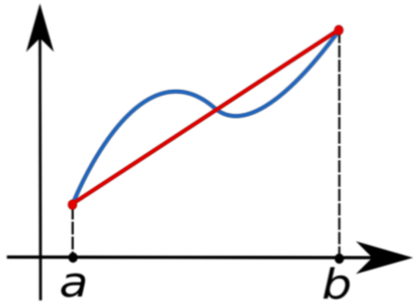
termos pares
peso é 2

Termos ímpares
peso é 4

extremos

Erro da fórmula do Trapézio

A área aproximada da figura quando a curva é substituída inteiramente pela reta é



$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] \; - \; \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

onde "h = b − a" e "ξ" é um valor entre "a" e "b".

Quando o intervalo é dividido em N subintervalos está expressão se torna

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \; - \; \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{N}$$

Se escolhemos $\xi_i = \xi^*$ tal que $|f''(\xi_i)| < |f''(\xi^*)|$

$$\boxed{|\mathrm{erro}_{trapezio}| \; < \; \frac{(b-a)^3}{12N^2} |f''(\xi^*)|}$$

Erro da fórmula de Simpson

Da mesma forma que antes, podemos calcular o erro associado da área resultante em dividir o intervalo a e b em 2 e usar uma parábola que passa por 3 pontos

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) \boxed{- \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)}$$

Manipulando este resultado como antes para N (par) divisões resulta

$$\boxed{|\mathrm{erro}_{simpson}| \; < \; \frac{(b-a)^5}{12N^4} |f^{(4)}(\xi^*)|}$$

Integral de 0 a 3.141593
da função f(x) = sin(x)

	Trapézio	Err_t	Simpson	Err_s
2	1.5707962279	1.0000000000	2.0943951520	1.0000000000
4	1.8961188748	0.1715729173	2.0045597571	0.0448155235
6	1.9540972231	0.0296701452	2.0008631901	0.0018474861
8	1.9742315962	0.0101985872	2.0002691701	0.0002969700
10	1.9835235339	0.0046845613	2.0001095174	0.0000798220
12	1.9885637741	0.0025346133	2.0000526244	0.0000284458
14	1.9916004255	0.0015247293	2.0000283436	0.0000121402
16	1.9935703424	0.0009881351	2.0000165911	0.0000058762
18	1.9949204625	0.0006767789	2.0000103477	0.0000031217
20	1.9958859718	0.0004837497	2.0000067844	0.0000017816
22	1.9966002195	0.0003577320	2.0000046315	0.0000010765
24	1.9971433952	0.0002719763	2.0000032689	0.0000006813
26	1.9975660727	0.0002115963	2.0000023726	0.0000004482
28	1.9979014290	0.0001678543	2.0000017635	0.0000003045
30	1.9981719609	0.0001353897	2.0000013379	0.0000002128
32	1.9983933606	0.0001107888	2.0000010334	0.0000001523
34	1.9985768438	0.0000918069	2.0000008107	0.0000001113
36	1.9987305993	0.0000769266	2.0000006450	0.0000000829
38	1.9988607189	0.0000650969	2.0000005195	0.0000000627
40	1.9989718103	0.0000555742	2.0000004231	0.0000000482
42	1.9990674105	0.0000478224	2.0000003481	0.0000000375
44	1.9991502716	0.0000414481	2.0000002889	0.0000000296
46	1.9992225603	0.0000361584	2.0000002419	0.0000000235
48	1.9992860018	0.0000317321	2.0000002040	0.0000000189
50	1.9993419829	0.0000279998	2.0000001733	0.0000000154
52	1.9993916293	0.0000248307	2.0000001481	0.0000000126
54	1.9994358617	0.0000221225	2.0000001273	0.0000000104
56	1.9994754398	0.0000197942	2.0000001101	0.0000000086
58	1.9995109944	0.0000177816	2.0000000957	0.0000000072
60	1.9995430529	0.0000160329	2.0000000835	0.0000000061
62	1.9995720591	0.0000145062	2.0000000733	0.0000000051
64	1.9995983886	0.0000131674	2.0000000645	0.0000000044
66	1.9996223608	0.0000119884	2.0000000571	0.0000000037
68	1.9996442489	0.0000109460	2.0000000506	0.0000000032
70	1.9996642878	0.0000100211	2.0000000451	0.0000000028
72	1.9996826800	0.0000091976	2.0000000403	0.0000000024
74	1.9996996012	0.0000084618	2.0000000361	0.0000000021
76	1.9997152041	0.0000078025	2.0000000324	0.0000000018
78	1.9997296221	0.0000072100	2.0000000292	0.0000000016
80	1.9997429724	0.0000066760	2.0000000264	0.0000000014
82	1.9997553577	0.0000061934	2.0000000239	0.0000000012
84	1.9997668689	0.0000057563	2.0000000217	0.0000000011
86	1.9997775864	0.0000053593	2.0000000198	0.0000000010
88	1.9997875814	0.0000049981	2.0000000181	0.0000000009
90	1.9997969176	0.0000046685	2.0000000165	0.0000000008
92	1.9998056514	0.0000043674	2.0000000151	0.0000000007
94	1.9998138337	0.0000040915	2.0000000139	0.0000000006
96	1.9998215100	0.0000038385	2.0000000127	0.0000000006
98	1.9998287211	0.0000036059	2.0000000117	0.0000000005
100	1.9998355039	0.0000033917	2.0000000108	0.0000000005

Precisão de uma fórmula de quadratura

Definicão: O **grau de precisão** de uma fórmula de quadratura é o maior Inteiro positivo n tal que a fórmula é exata para x^k com k = 0,1,2,…, n

A regra dos Trapézios tem grau de precisão igual a um.

$$\int_a^b x^0 dx = b - a; \qquad \int_a^b x^0 dx = \frac{b-a}{2}[1+1] = b - a.$$

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}. \qquad \int_a^b x dx = \frac{b-a}{2}[a+b] = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}. \qquad \int_a^b x^2 dx = \frac{b-a}{2}[a^2+b^2] \neq \frac{b^3-a^3}{3}$$

A regra dos Trapézios não é exata para x^2

A regra de Simpson tem grau de precisão igual a 2.

$$\int_a^b x^0 dx = b - a \qquad \int_a^b x^0 dx = \frac{b-a}{6}\left[1+4+1\right] = b - a$$

$$\int_a^b x^1 dx = \frac{b^2-a^2}{2} \qquad \int_a^b x^1 dx = \frac{b-a}{6}\left[b + 4 * \frac{a+b}{2} + a\right] = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3} \qquad \int_a^b x^2 dx = \frac{b-a}{6}\left[b^2 + 4 * \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a^2\right] = \frac{b^3-a^3}{3}$$