Método de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

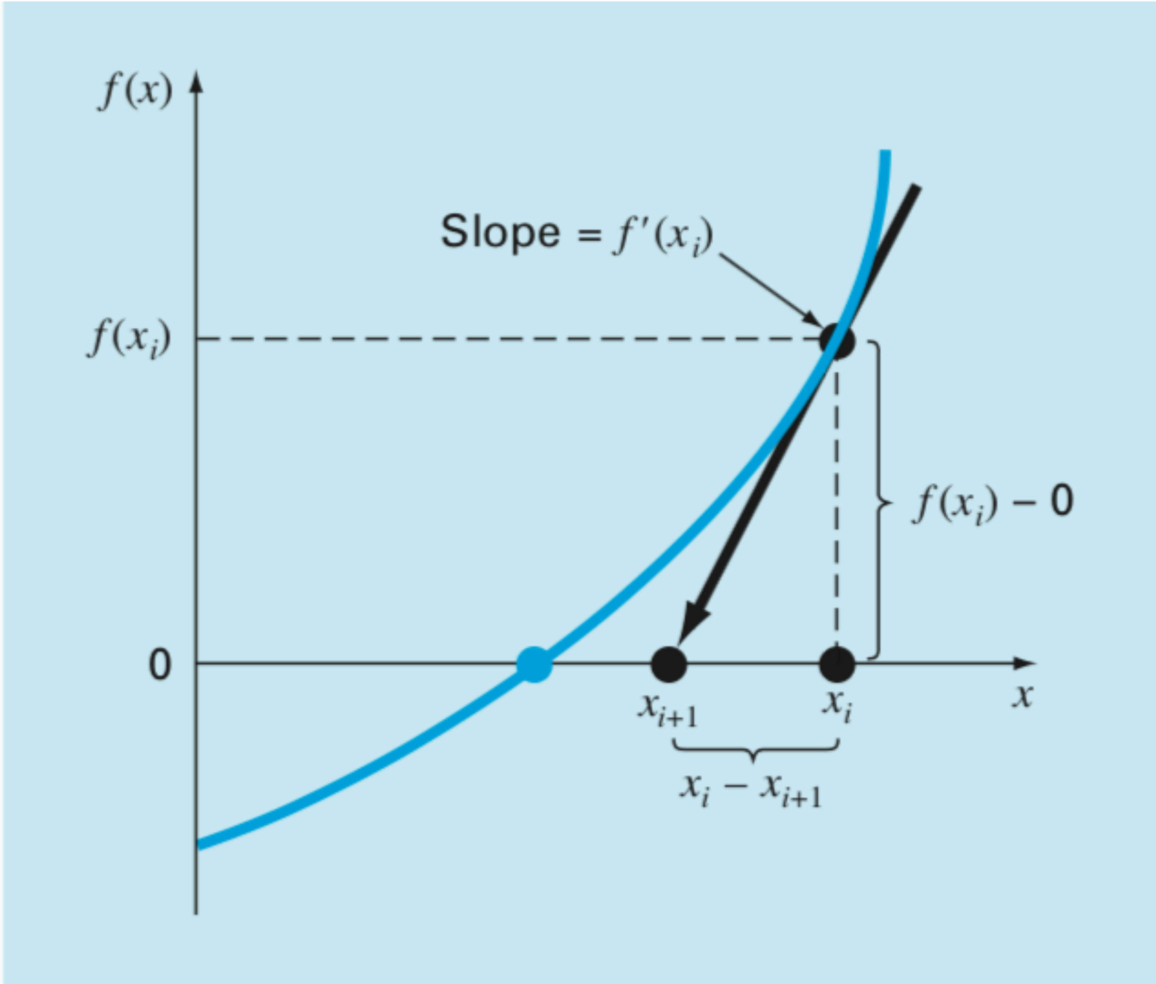
Método de Newton-Raphson

Uma forma de ver o método de Newton-Raphson é como uma estimativa de raiz baseada nos valores de x_n $f(x_n)$ e $f'(x_n)$ e usando uma aproximação linear da função. O valor da raiz é calculado de

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

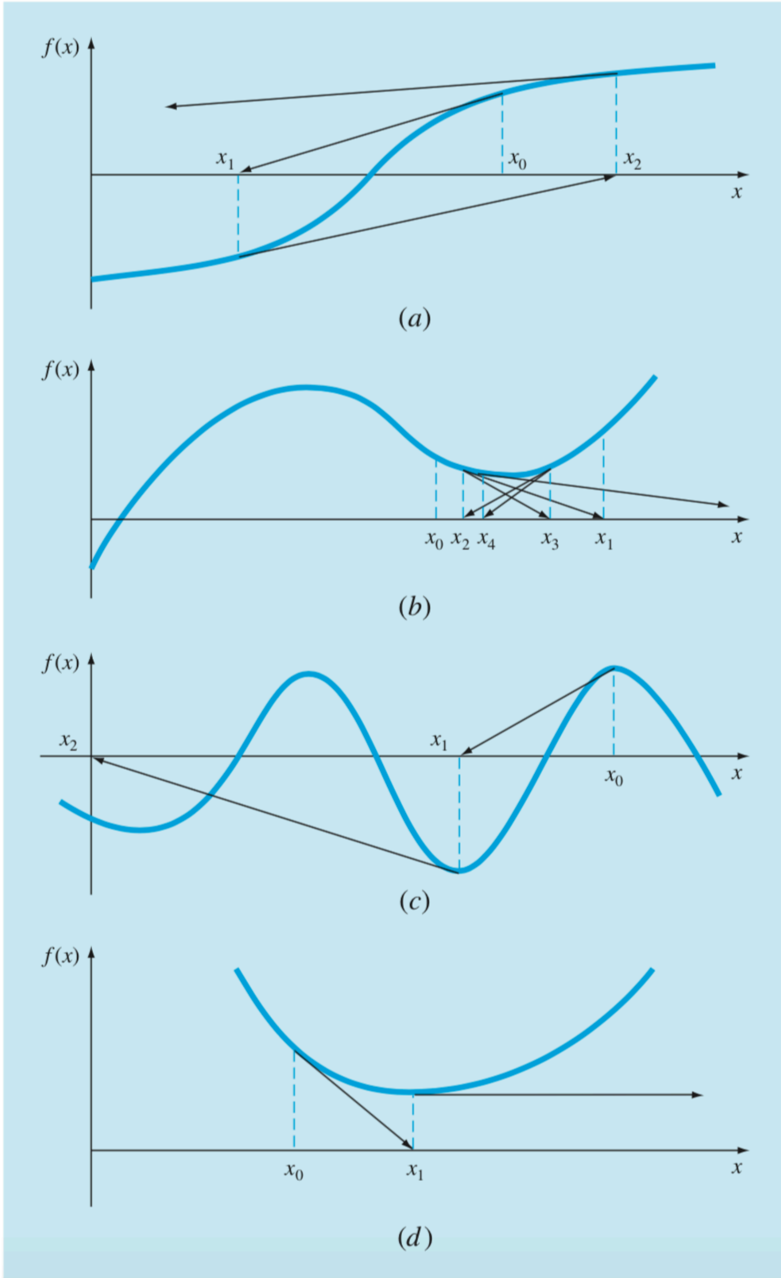
Como x_{n+1} é para ser uma raiz então $f(x_{n+1})=0$ logo

$$f'(x_n) = -\frac{f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$



Problemas

- Se f'(x)=0 ou f''(x)=0 na vizinhança da raiz a interação diverge.
- O método oscila perto de um mínimo local
- Não existe garantia de convergência
- O melhor remédio é ter o valor inicial para x “suficientemente” perto da raiz.



Outra forma de derivação do Método de N-R

Considere que seja possível expandir a função f(x) em torno do último ponto calculado x_n

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x - x_n)^2 + \cdots$$

se $x = x_r$ é uma raiz então

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_r - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x_r - x_n)^2 + \cdots$$

O Método de NR consiste em desprezar os termos de alta ordem e dizer que existe um valor x_{n+1} que é uma boa aproximação de x_r e que satisfaz

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Outra forma de derivação do Método de N-R

Considere que seja possível expandir a função f(x) em torno do último ponto calculado x_n

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x - x_n)^2 + \cdots$$

se $x = x_r$ é uma raiz então

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\underset{\substack{\downarrow \\ x_{n+1}}}{x_r} - x_n) + \cancel{\frac{1}{2}f''(x_n)(x_r - x_n)^2} + \cdots$$

O Método de NR consiste em desprezar os termos de alta ordem e dizer que existe um valor x_{n+1} que é uma boa aproximação de x_r e que satisfaz

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Estimativa de erro

Agora considere que uma aproximação melhor pode ser feita usando um termo extra

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1}^{(2)} - x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n)(x_{n+1}^{(2)} - x_n)^2$$

Subtraindo de $$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Obtemos que $$0 = f'(x_n)(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}) + \frac{1}{2} f''(x_n)(x_{n+1}^{(2)} - x_n)^2$$

$$(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}) = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(x_{n+1}^{(2)} - x_n)^2$$

Se $x_{n+1}^{(2)}$ é suficientemente próximo de x_r então podemos associar

$(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}) \simeq E_{n+1}$ logo $$E_{n+1} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} E_n^2$$

Método da Secante

Aproxima-se a derivada de uma derivada numérica

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

A iteração fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

Atividade

- Faça um programa que implemente o método de Newton (No futuro vc irá usar este programa como base para outros métodos de achar raízes).
- Use funções C para implementar f(x) e f'(x)
- O programa deve pedir para o usuário um valor inicial para a raiz (x_0) e a precisão desejada.
- Use "while" ou "do… while" para implementar a iteração até que $| x_{n+1} - x_n | <$ precisão.
- Use alguns "cintos de segurança" no programa para evitar divergências ou comportamento periódicos.
- O programa deve responder com o valor da raiz encontrado ou com uma mensagem dizendo que algo deu errado.