Multiplicación de enteros grandes

Meza Rodriguez Fiorella Ivonne

Contenido

01 Problema

El algoritmo tradicional consiste en colocar de forma vertical los números y realizar la multiplicación por cada dígito del número inferior con el número superior empezando desde las unidades , finalmente se obtiene el resultado sumando estos productos.Éste método tiene una complejidad de O(n^2) y se observó que no funcionaba bien para números enteros grandes.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 2 & 4 & 3 \\
 & & \times & 2 & 5 & 6 \\
\hline
 & & 1 & 4 & 5 & 8 \\
 & 1 & 2 & 1 & 5 & \\
+ & 4 & 8 & 6 & & \\
\hline
 & 6 & 2 & 2 & 0 & 8
\end{array}
$$

Orden de complejidad :
O(n^2)

02 Diseño de la solución

En 1960 , el matemático ruso de 23 años llamado Anatoly Karatsuba descubre un algoritmo para multiplicar números enteros muy grandes.

El algoritmo de Karatsuba

Consideramos a 2 números enteros x e y

$$x = a * 10^{n/2} + b$$
$$y = c * 10^{n/2} + d$$

$$x * y = (a * 10^{n/2} + b)*(c * 10^{n/2} + d)$$

$$x * y = \left(a * 10^{\frac{n}{2}}\right)\left(c * 10^{\frac{n}{2}}\right) + ad * 10^{\frac{n}{2}} + bc * 10^{\frac{n}{2}} + bd$$

$$x * y = ac * 10^{2\left(\frac{n}{2}\right)} + (ad + bc) * 10^{\frac{n}{2}} + bd$$

Notamos :

$$(a+b)(c+d) - ac - bd$$

$$(ac + ad + bc + bd) - ac - bd = ad + bc$$

$$x * y = ac * 10^{2\left(\frac{n}{2}\right)} + (ad + bc) * 10^{\frac{n}{2}} + bd$$

```
ac <- multiplicacion(a,c)
bd <- multiplicacion(b,d)
ad_sum_bc <- multiplicacion(a+b, c+d)-ac-bd
mult <- ac * (10 ** (2 * medio)) + (ad_sum_bc * (10 ** medio)) + bd
```

Ejemplo: Consideramos 2 números de 6 dígitos , donde x= 146 123 e y = 352 120

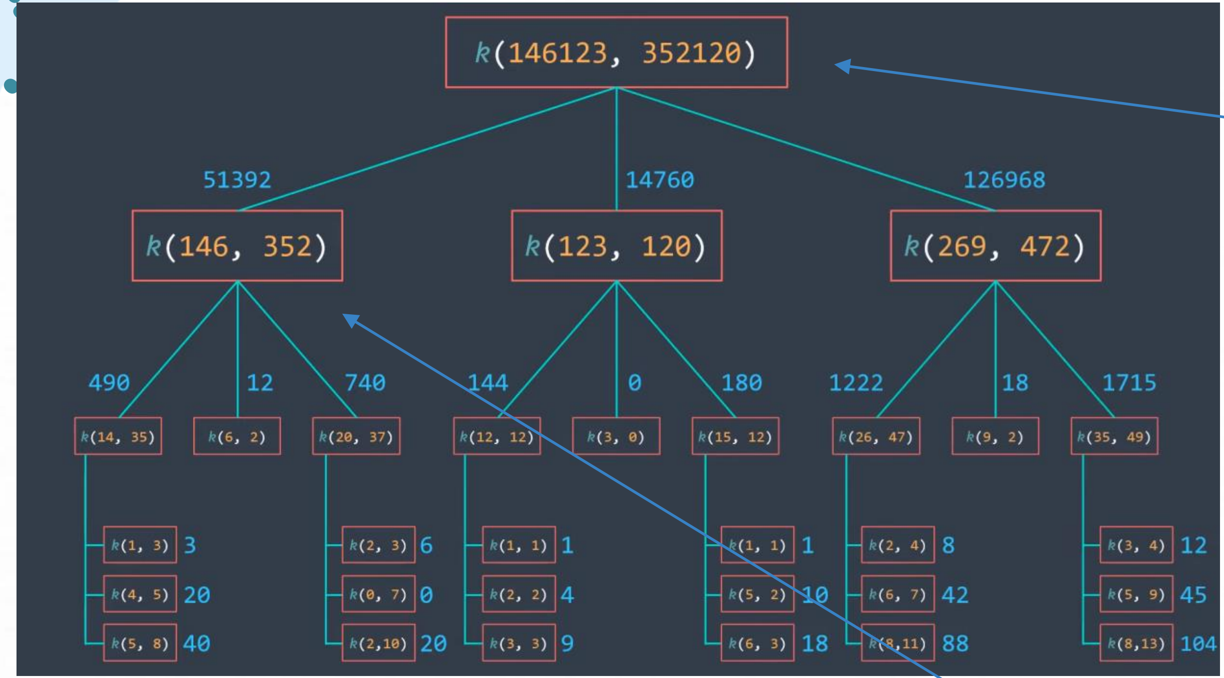
a b

x: 146|123

y: 352|120

c d

$$n = 6$$
$$mitad = \frac{n}{2} = 3$$
$$ac = 51392$$
$$bd = 14760$$
$$(ad + bc) = (a + c)(b + d) - ac - bd = 60816$$
$$ac * 10^{2*mitad} + (ad + bc) * 10^{mitad} + bd$$
$$= 51392 * 10^6 + 60816 * 10^3 + 14760$$
$$= 51\,452\,830\,760$$



$$n = 2$$
$$mitad = \frac{n}{2} = 1$$
$$ac = 3$$
$$bd = 20$$
$$(ad + bc) = (a + c)(b + d) - ac - bd = 40 - 20 - 3 = 17$$
$$ac * 10^{2*mitad} + (ad + bc) * 10^{mitad} + bd$$
$$= 3 * 10^2 + 17 * 10^1 + 20 = 490$$

$$n = 3$$
$$mitad = \frac{n}{2} = 1$$
$$ac = 490$$
$$bd = 12$$
$$(ad + bc) = (a + c)(b + d) - ac - bd = 740 - 490 - 12 = 238$$
$$ac * 10^{2*mitad} + (ad + bc) * 10^{mitad} + bd$$
$$= 490 * 10^2 + 238 * 10^1 + 12 = 51392$$

Pseudocódigo

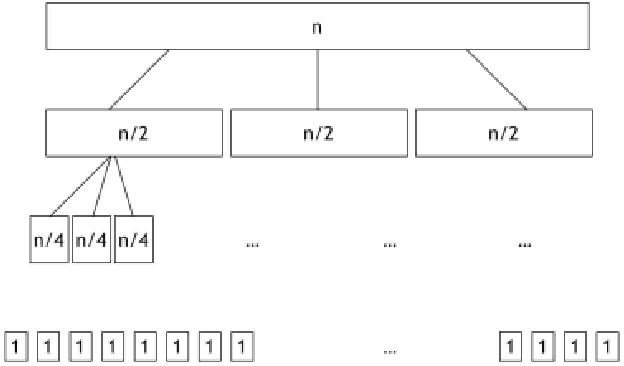
Caso base

```
Funcion mult <- multiplicacion( num1 , num2)
    Si num1 < 10 O num2 < 10 Entonces
        mult <- num1*num2
    SiNo
        n <- maximum (length(string(num1),string(num2)))
        mitad <- ndiv2
        a <- num1 div (10^mitad)
        b <- num1 mod(10^mitad)
        c <- num2 div (10^mitad)
        d <- num2 mod(10^mitad)
        ac <- multiplicacion(a,c)
        bd <- multiplicacion(b,d)
        ad_sum_bc <- multiplicacion(a+b, c+d)-ac-bd
        mult <- ac * (10 ** (2 * mitad)) + (ad_sum_bc * (10 ** mitad)) + bd
    FinSi

FinFuncion
```

03 Complejidad

Costo temporal de la función multiplicar:



$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + c * n$$

$$\rightarrow T(n) = 3 * T\left(\frac{n}{2}\right) + c * n$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = 3 * T\left(\frac{n}{4}\right) + c * \frac{n}{2}$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) = 3 * T\left(\frac{n}{8}\right) + c * \frac{n}{4}$$

$$\ldots$$

Tendremos la siguiente expresión:

$$\mathrm{T}(n) = 3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} cn + \left(\frac{3}{2}\right)^{i-2} cn + \cdots + cn$$

Hacemos :

$$\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow n = 2^i \qquad i = \log_2 n$$

$$\mathrm{T}(n) = 3^{\log_2 n} + cn\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^i - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right]$$

$$\mathrm{T}(n) = 3^{\log_2 n} + 2nc\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 1\right]$$

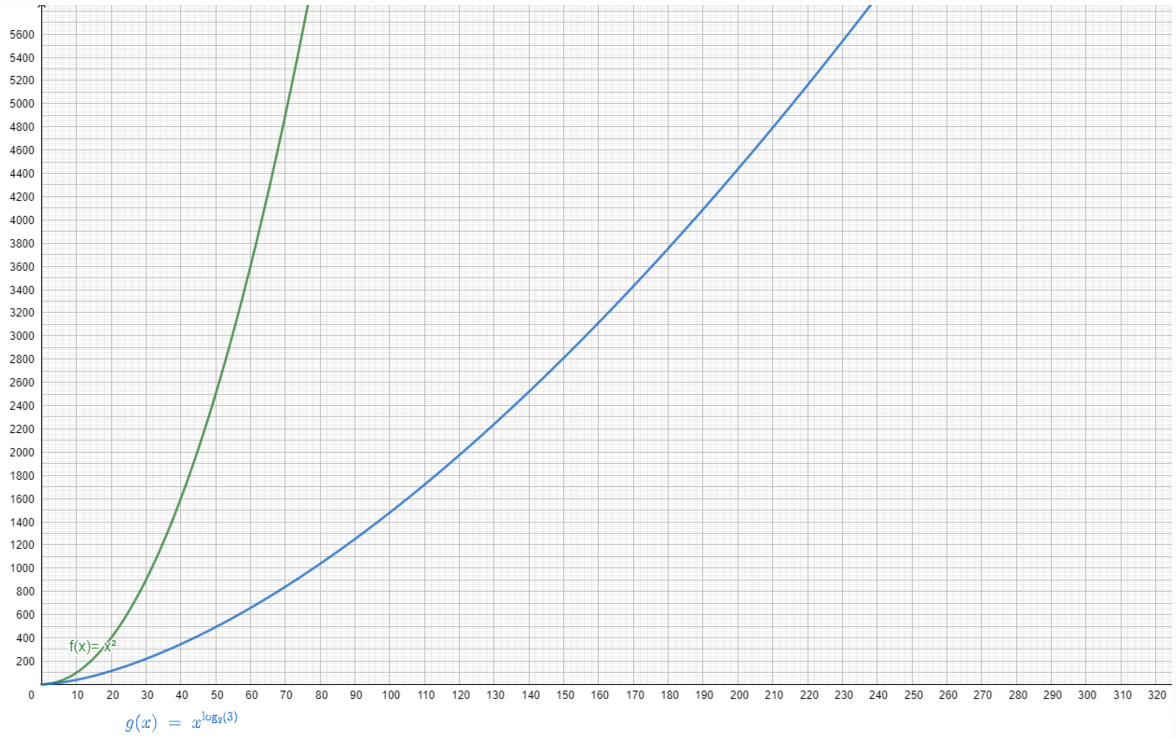
$$T(n) \in O\left(n^{\log_2 3}\right)$$

$$\log_2 3 \approx 1{,}585$$

$$T(n) = 3^{\log_2 n} + 2cn\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 2nc = n^{\log_2 3} + 2c * n * n^{\log_2 3 - 1} - 2nc$$

$$\mathrm{T}(n) = 2cn^{\log_2 3} + n^{\log_2 3} - 2nc$$

Gráficas



04 Código

```python
def multiplicacion(x, y):
    if x < 10 or y < 10:
        return x * y
    else:
        n = max(len(str(x)), len(str(y)))
        mitad = n // 2

        a = x // (10 ** (mitad))
        b = x % (10 ** (mitad))

        c = y // (10 ** (mitad))
        d = y % (10 ** (mitad))

        ac = multiplicacion(a, c)
        bd = multiplicacion(b, d)
        ad_sum_bc = multiplicacion(a+b, c+d)-ac-bd

        return ac * (10 ** (2 * mitad)) + (ad_sum_bc * (10 ** mitad)) + bd

print("Resultado: ")
print(multiplicacion(146123,352120))
```

```
Resultado:
51452830760
```

Avances en los métodos de multiplicación.

Año	$M(n)$	autor
-2000?	$O(n^2)$	desconocido
1960	$O(n^{\log_2 3})$	Karatsuba
1966	$O(n \log n \, e^{\sqrt{2 \log_2 n}})$	Toom-Cook
1971	$O(n \log n \log \log n)$	Schönhage-Strassen
2007	$O(n \log n \, K^{\log^* n})$	Fürer
2018	$O(n \log n \, 4^{\log^* n})$	Harvey-van der Hoeven

Gracias