

## نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

### فصل دوم [بخش اول]

#### اجزاء مدار

گروه مهندسی کامپیوتر

مدرس: مصطفی کشاورز معظم

ویرایش نیمسال دوم ۱۴۰۱ - ۰۲

- مطالب عنوان شده در جلسه قبل:

- ✓ مقاومتها

- ✓ حالت‌های ویژه - Short circuit و Open circuit

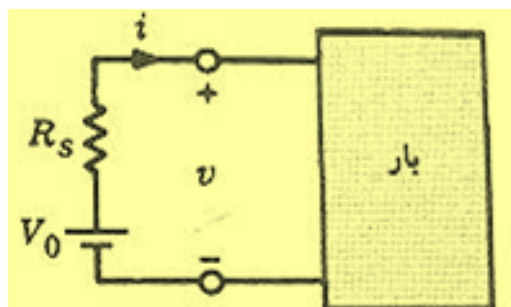
- ✓ منابع ولتاژ و جریان مستقل

- ✓ معادله‌های تونن و نورتن

- ....

## مدارهای معادل تونن و نورتن

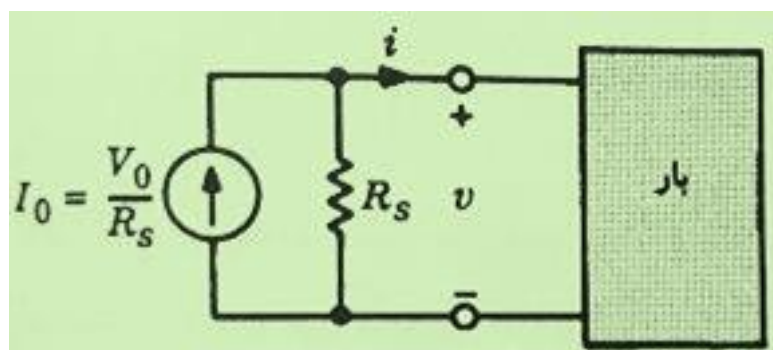
- فرض کنید بخواهیم جریان یا ولتاژ یک بار مقاومتی را **توسط دنباله مدار** معین کنیم؛ اگر دنباله مدار از مقاومت‌ها و منابع تشکیل شده باشد:



- قضیه **تونن** می‌گوید:

می‌توان کل دنباله مدار را با یک منبع ولتاژ  $V_0$  سری شده با یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان  $R_s$  جایگزین کرد.

- قضیه **نورتن** می‌گوید:



می‌توان کل دنباله مدار را با یک منبع جریان ثابت  $I_0 \triangleq \frac{V_0}{R_s}$  موازی شده با یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان  $R_s$  جایگزین کرد.

- چون دو مدار نشان داده شده دارای یک مشخصه می‌باشند، آنها را معادل همدیگر گویند.

- برای تشریح کامل یک منبع ولتاژ  $v_s$  و یا یک منبع جریان  $i_s$  مشخصات کامل تابع زمانی آنها، یعنی  $v_s(t)$  برای همه مقادیر  $t$  و یا  $i_s(t)$  برای همه مقادیر  $t$  لازم است.
- بنابراین مشخصات منبع ولتاژ  $v_s$  یا باید شامل جدول‌بندی کامل تابع  $v_s$  بوده و یا شامل قاعده‌ای باشد که به کمک آن بتوان ولتاژ  $v_s(t)$  را برای هر زمان  $t$  که ممکن است بعداً مورد توجه قرار گیرد محاسبه نمود.
- بعضی مواقع «همه تابع  $v_s$ » مورد نظر است، مانند شکل موجی که روی اسیلوسکوپ مشاهده می‌شود، و برخی اوقات فقط به یک مقدار به‌خصوص مانند  $v_s(t)$  در زمان  $t$  مورد نیاز است.

## بعضی شکل موج‌های نمونه

- **مقدار ثابت:** این ساده‌ترین شکل موج است و بصورت:

$$f(t) = K$$

برای تمام مقادیر  $t$

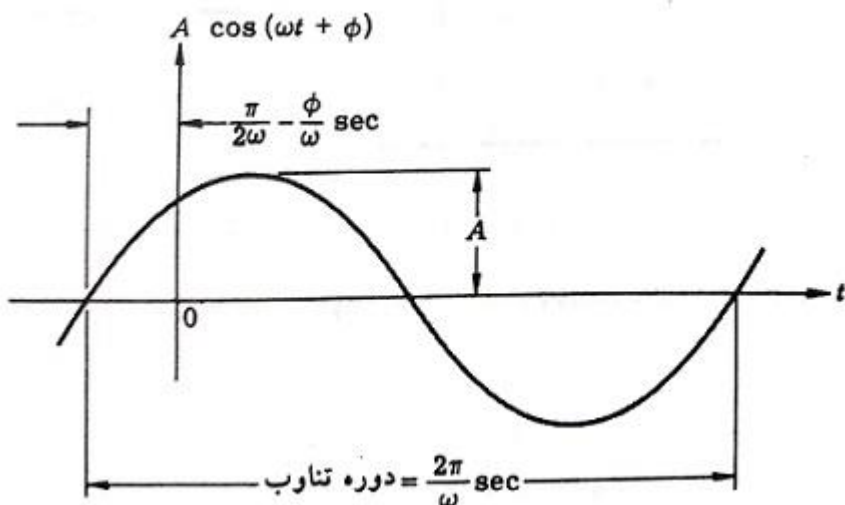
تعریف می‌شود، که در آن  $K$  یک مقدار ثابت است.

- **سینوسی:** برای نمایش یک شکل موج سینوسی به کار می‌رود.

$$f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

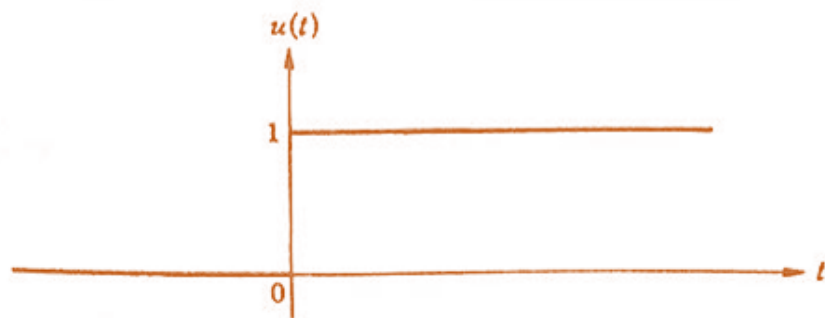
که در آن ثابت  $A$  دامنه سینوسوئید،

ثابت  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای و ثابت  $\phi$  فاز نامیده می‌شود.



## بعضی شکل موج‌های نمونه

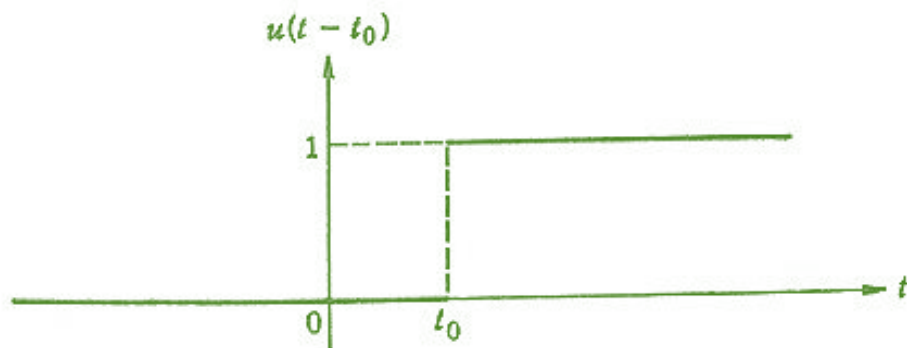
- **پله واحد:** تابع پله واحد همانطوری که در شکل نشان داده شده با  $u(t)$  نمایش داده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌گردد:



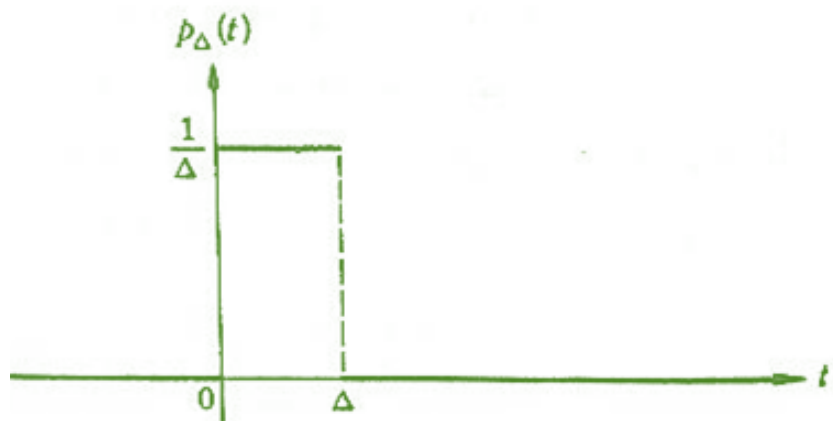
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

در لحظه  $t = 0$  مقدار آن را می‌توان  $1$  یا  $\frac{1}{2}$  صفر در نظر گرفت.

- فرض کنید یک پله واحد به اندازه  $t_0$  ثانیه به تاخیر افتد. شکل موج حاصل در لحظه  $t$  دارای عرض  $u(t - t_0)$  خواهد بود.



- **پالس:** چون غالباً لازم است از یک پالس چهارگوش استفاده شود، تابع پالس  $p_{\Delta}(t)$  را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & \Delta < t \end{cases}$$

- به عبارت دیگر،  $p_{\Delta}$  پالسی به ارتفاع  $\frac{1}{\Delta}$  و عرض  $\Delta$  است که در لحظه  $t = 0$  شروع می‌شود.

- توجه کنید به ازای تمام مقادیر مثبت  $\Delta$ ، سطح زیر  $p_{\Delta}(t)$  برابر ۱ است.  
در نظر داشته باشید که:

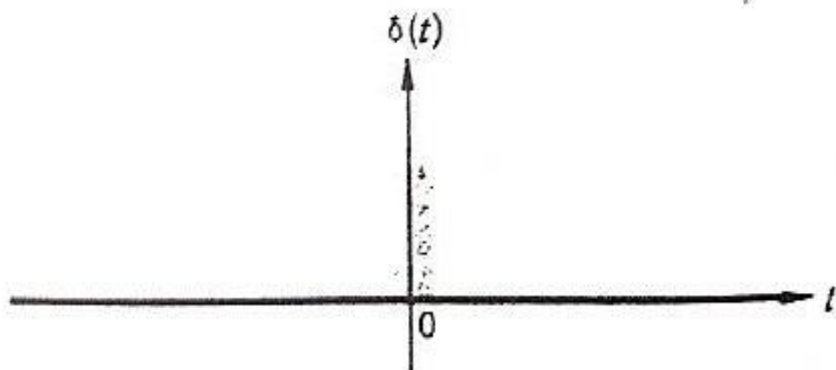
$$p_{\Delta}(t) = \frac{u(t) - u(t - \Delta)}{\Delta} \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

- **ضربه واحد:** ضربه واحد  $\delta(t)$  که **تابع دلتای دیراک** نیز نامیده می‌شود، به مفهوم دقیق ریاضی، یک تابع نیست.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t = 0 \end{cases}$$

- ویژگی در مبدأ چنان است که برای هر مقدار  $\xi > 0$  داریم:

$$\int_{-\xi}^{\xi} \delta(t) dt = 1$$



- به طور حسی، می‌توان تابع ضربه  $\delta$  را حد پالس  $p_{\Delta}$  وقتی  $\Delta \rightarrow 0$  تصور نمود.



$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

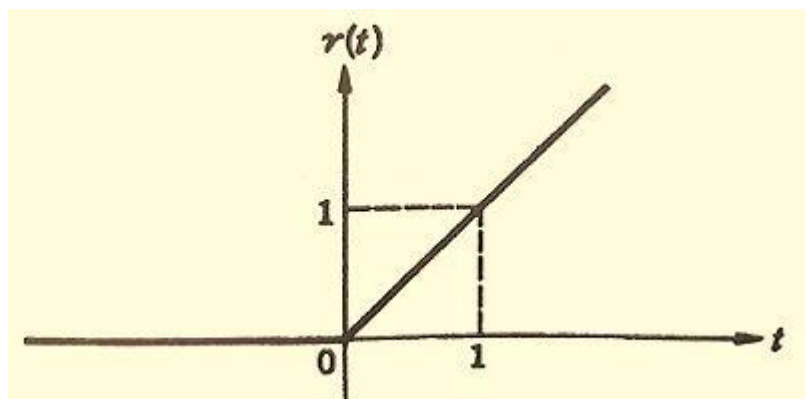
❖ خاصیت غربالی ضربه واحد: فرض کنید  $f$  یک تابع پیوسته باشد، دراینصورت:

$$\int_{-\xi}^{\xi} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

برای هر مقدار مثبت  $\xi$ .

❖ تابعی که به تابع پله واحد مربوط است، **تابع شیب واحد**  $r(t)$  که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$r(t) = tu(t)$$



❖ شکل موج  $r(t)$  در شکل مقابل نشان داده شده است.

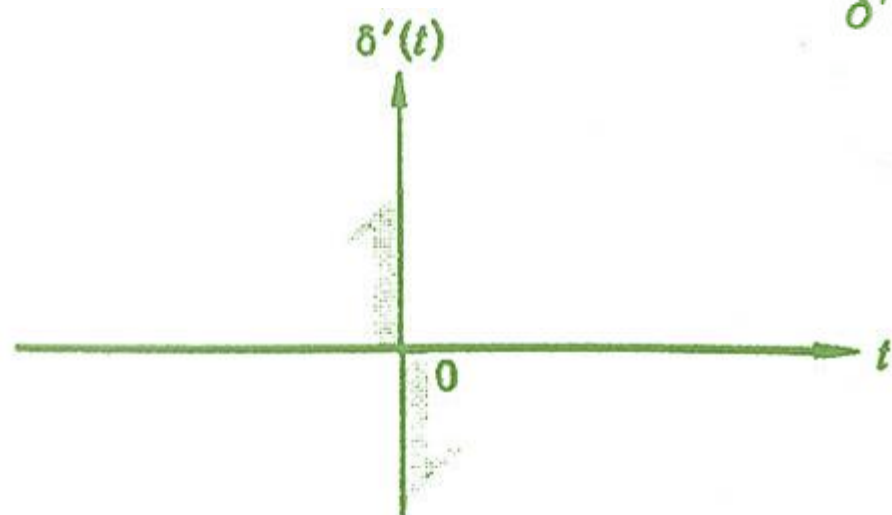
❖ همچنین

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(t') dt'$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

❖ تابعی که با تابع ضربه واحد ارتباط نزدیکی دارد تابع دوبلت واحد  $\delta(t)$  است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta'(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{برای} \\ \text{در} \end{matrix}$$



❖ ویژگی در  $t = 0$  چنان است که:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta'(t') dt'$$

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta'(t)$$

❖ و

تمرین ۱: شکل موج‌های مشخص شده با روابط زیر را رسم کنید:

الف-  $3u(t) - 3u(t - 2)$

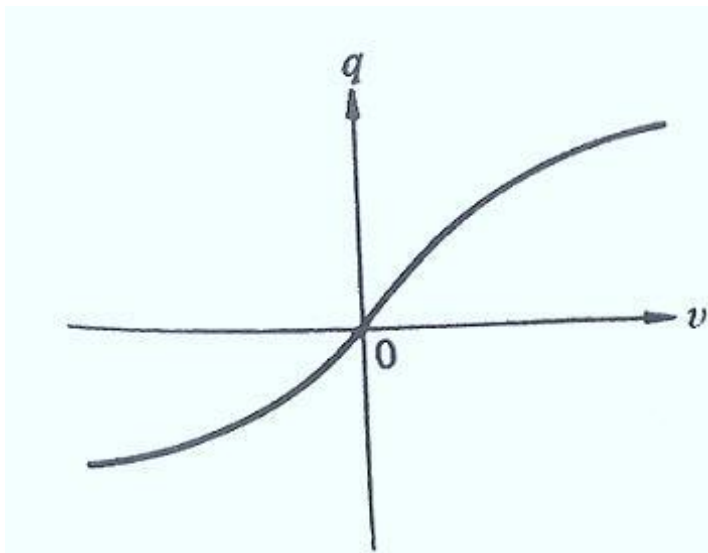
ب-  $5p_{0.1}(t) - 3p_{0.1}(t - 0.1) + 2p_{0.1}(t - 3)$

ت-  $r(t) - u(t - 1) - r(t - 1)$

تمرین ۲:  $\sin t$  و  $3\sin(2t + 1)$  را به شکل سینوسوئید استاندارد بیان کنید

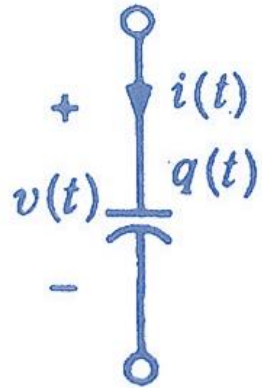
( در اینجا فاز بر حسب رادیان است).

- خازن‌ها به علت اینکه بار الکتریکی ذخیره می‌کنند در مدارهای الکتریکی بکار می‌روند.
- عنصری که خازن نامیده می‌شود مدل ایده‌آل شده یک خازن فیزیکی است مانند خازن با صفحات موازی.
- عنصر دوسری که در هر لحظه  $t$  از زمان، بار الکتریکی ذخیره شده  $q(t)$  و ولتاژ  $v(t)$  آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه  $vq$  تعریف می‌شود صدق کند، **خازن** نامیده می‌شود.
- این منحنی را **مشخصه خازن** در لحظه  $t$  می‌نامند.
- مشخصه خازن می‌تواند با زمان تغییر کند.



- وقتی  $i(t)$  مثبت باشد بارهای مثبت ( در لحظه  $t$  ) به صفحه فوقانی که بار آن  $q(t)$  نامیده شده وارد می‌شوند و بنابراین شدت تغییر  $q$  (یعنی جریان  $i(t)$ ) نیز مثبت است و بنابراین:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$



- در این معادله جریان بر حسب آمپر و بار بر حسب کولمب بیان می‌شوند.

- از تعریف خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان، مشخصه یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت زیر بیان می شود:

$$q(t) = Cv(t)$$

$C$  ثابتی است (مستقل از  $t$  و  $v$ ) که شیب مشخصه را تعیین نموده و ظرفیت خازن نامیده می شود.

- معادله‌ای که ولتاژ دو سر خازن را به جریان آن ارتباط می دهد: (\*)
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dv}{dt}$$

که در آن  $S = C^{-1}$  بوده و الاستانس گفته می شود.

- اگر (\*) را بین صفر و  $t$  انتگرالگیری کنیم بدست می آوریم:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

$$v(t) = v(0) + S \int_0^t i(t') dt'$$

- و بر حسب الاستانس  $S$ :

- فرض کنید منبع جریان  $i_s(t)$  به یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت  $C$  و  $v(0) = 0$  وصل شده باشد. شکل موج ولتاژ  $v(0)$  دو سر خازن را برای حالت‌های زیر تعیین نمایید:

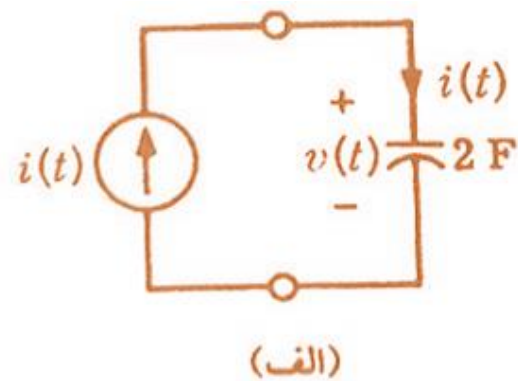
الف-  $i_s(t) = u(t)$

ب-  $i_s(t) = \delta(t)$

پ-  $i_s(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

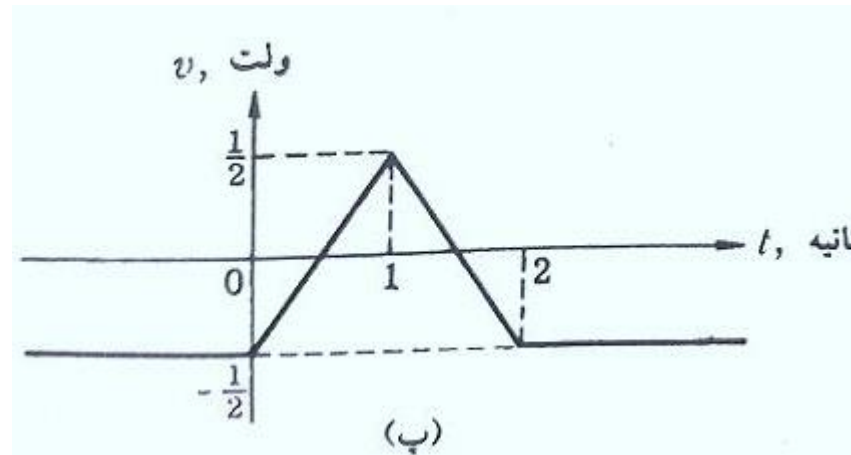
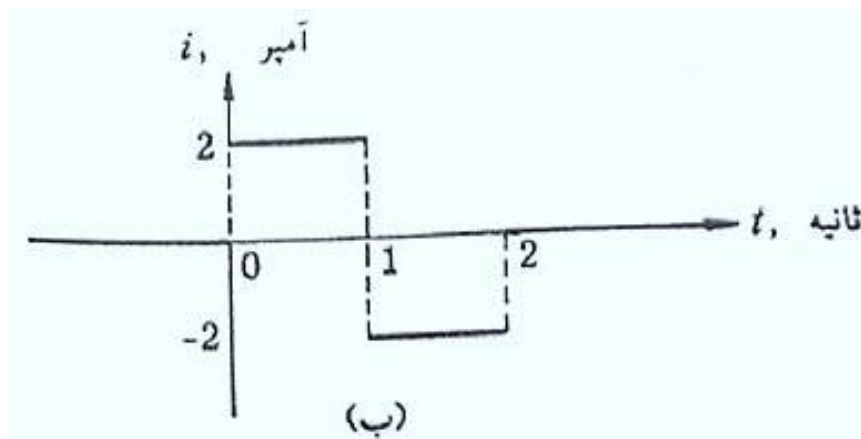


**مثال:** منبع جریانی به دو سر یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت ۲ فاراد و ولتاژ اولیه  $v(0) = -\frac{1}{2}$  مطابق شکل، وصل شده است.



ولتاژ شاخه دو سر خازن را می‌توان از معادله  $v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$  بصورت زیر محاسبه کرد:

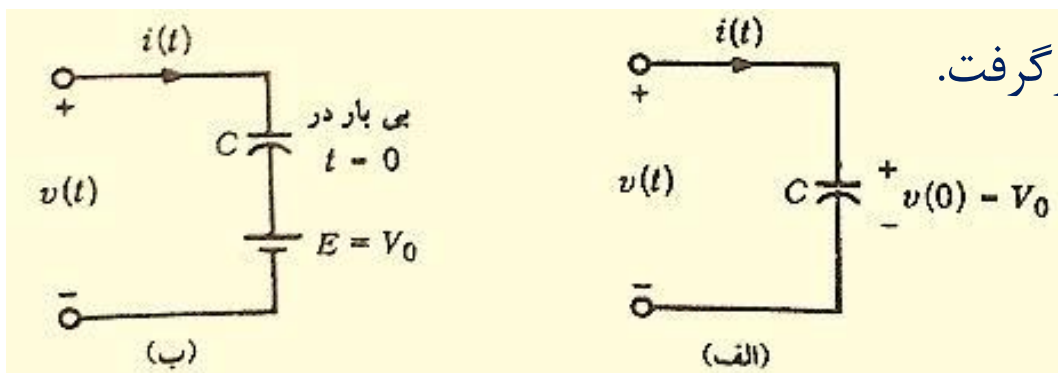
$$v(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t i(t') dt'$$



## خازن خطی تغییرناپذیر با زمان

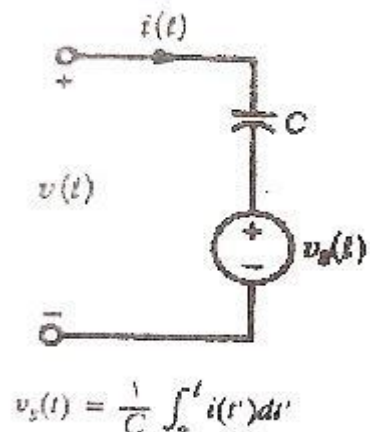
- معادله  $v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$  بیان می‌کند که برای  $t \geq 0$  ولتاژ شاخه  $v(t)$  در لحظه  $t$  در دو سر یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان از مجموع دو جمله تشکیل می‌شود.
- جمله اول ولتاژ  $v(0)$  در لحظه  $t=0$  یعنی ولتاژ اولیه دو سر خازن بوده و
- جمله دوم ولتاژ دو سر خازن با ظرفیت  $C$  فاراد در لحظه  $t$  است به شرط این که در لحظه  $t=0$  این خازن بار اولیه نداشته باشد.

- بنابراین هر خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه  $v(0)$  را می‌توان بصورت اتصال سری یک منبع ولتاژ dc با

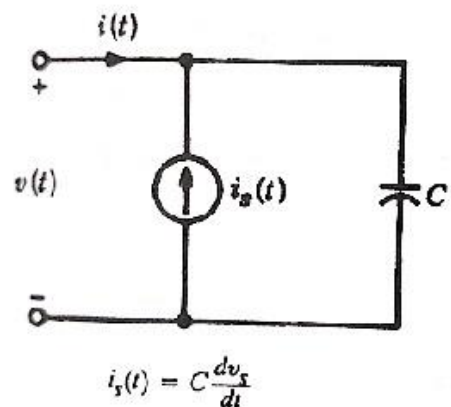


$E = v(0)$  و همان خازن با ولتاژ اولیه صفر مطابق شکل زیر در نظر گرفت.

## خازن خطی تغییرناپذیر با زمان



(الف)



(ب)

- خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه صفر یعنی  $v(0) = 0$  را در نظر بگیرید.
- اگر خازن بطور سری با منبع ولتاژ نابسته  $v_s(t)$  متصل شده باشد، این اتصال را مدار معادل تونن گویند.

$$v_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_s(t') dt'$$

- اتصال فوق معادل مداری است که در آن همان خازن بطور موازی با یک منبع جریان وصل شده و در آن:

$$i_s(t) = C \frac{dv_s}{dt}$$

این اتصال را مدار معادل نورتن می نامند.

یک خاصیت مهم خازن خطی تغییرناپذیر با زمان را می‌توان چنین بیان نمود:

- اگر برای همه زمان  $t$  در فاصله بسته  $[0, T]$  جریان  $i(t)$  در یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان کراندار بماند، ولتاژ  $v$  دو سر خازن در فاصله باز  $(0, T)$  یک تابع پیوسته می‌باشد، یعنی برای چنین خازنی مادامی که جریان آن کراندار بماند ولتاژ شاخه نمی‌تواند به طور لحظه‌ای از یک مقدار به مقدار متفاوت دیگری بجهد (مانند تابع پله).
- این خاصیت در حل مسائلی که در آن پالس یا تابع پله ولتاژ یا جریان به مداری اعمال می‌شود بسیار مفید است.

- اگر خازنی خطی ولی تغییرپذیر با زمان باشد مشخصه آن در هر لحظه، خط مستقیمی است که از مبدأ می‌گذرد ولی شیب آن به زمان بستگی دارد. بنابراین:

$$q(t) = C(t)v(t)$$

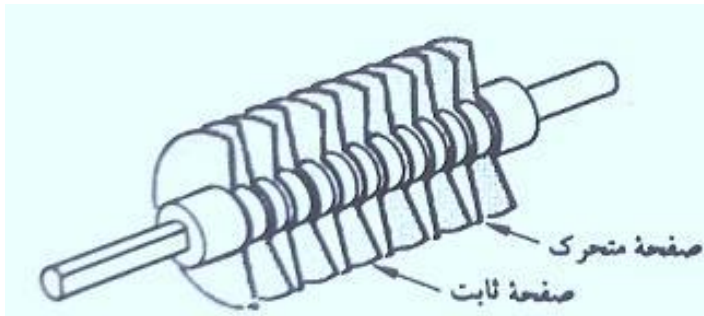
**مثال ساده** از خازنی خطی تغییرپذیر با زمان در شکل زیر نشان داده شده است.

که در آن یک خازن با صفحات موازی شامل یک صفحه ثابت و یک صفحه متحرک است.

می‌توان ظرفیت این خازن را که به طور متناوب تغییر می‌کند بصورت یک سری فوریه بیان نمود:

$$C(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

که در آن  $f$  فرکانس دوران صفحه متحرک است.



- مدار نشان داده شده در شکل زیر را در نظر گرفته

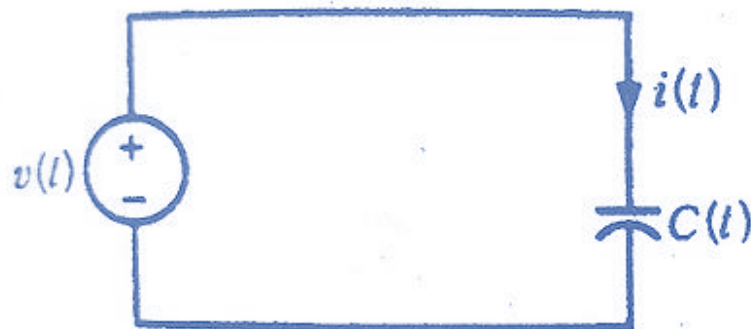
و فرض کنید ولتاژ ورودی منبع سینوسوئید،  $v(t) = A \cos \omega_1 t$  می باشد که در آن

ثابت  $\omega_1 = 2\pi f_1$  فرکانس زاویه ای است.

فرض می کنیم خازن خطی تغییرپذیر با زمان بصورت زیر مشخص شده باشد:

$$C(t) = C_0 + C_1 \cos 3\omega_1 t$$

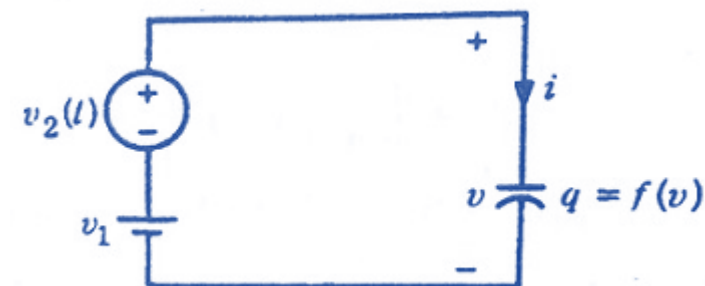
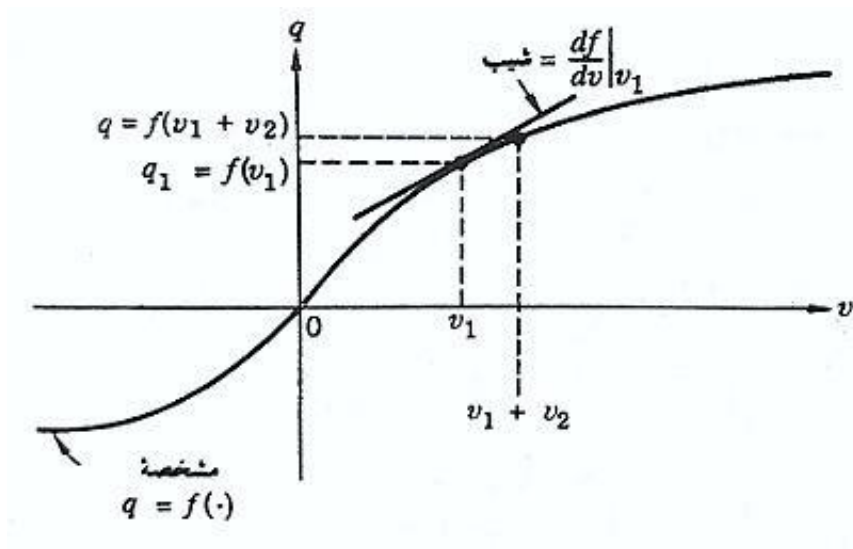
که در آن  $C_0$  و  $C_1$  مقادیر ثابت هستند. جریان  $i(t)$  را برای همه مقادیر  $t$  تعیین کنید.



- دیود و اراکتور دستگاهی است که در بیشتر سیستم های ارتباطی مدرن به عنوان یک عنصر خیلی مهم مدار در قسمتهای تقویت کننده پارامتری، نوسان کننده ها و مبدل های سیگنال به کار می رود.
- یک دیود و اراکتور را می توان اساساً بوسیله یک خازن غیرخطی مدل سازی نمود.
- مدل دقیق ترانزیستور نیز یک خازن غیرخطی در بردارد. در کاربردهای قطع و وصل خیلی سریع اغلب اثر خازن غیرخطی حائز اهمیت است.
- در تجزیه و تحلیل های غیرخطی، تکنیک های مختلفی که هریک مناسب حالت خاصی می باشند وجود دارد که در میان آنها و شاید مفیدترین آنها روش تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک است.

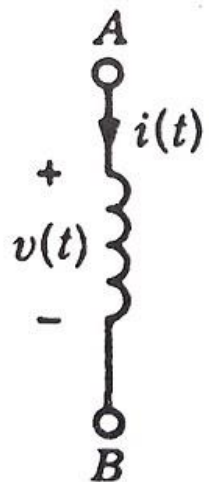
## مثال:

یک خازن غیر خطی را می توان توسط مشخصه اش  $q = f(v)$  ، که یک تابع غیر خطی معین در صفحه  $(q, v)$  است، مشخص نمود.





- سلف‌ها به علت اینکه در **میدان مغناطیسی خود انرژی ذخیره** می‌نمایند در مدارهای الکتریکی به کار می‌روند.
- یک عنصر دوسر را **سلف** خواهیم گفت اگر در هر لحظه  $t$  از زمان، شار  $\phi(t)$  و جریان  $i(t)$  آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه  $i\phi$  تعریف می‌شود صدق کند. این منحنی را **مشخصه سلف در زمان  $t$**  نامند.
- **ولتاژ دوسر یک سلف** مطابق قانون القای فاراده به صورت زیر بیان می‌شود:



$$v(t) = \frac{d\phi}{dt}$$

که در آن  $v$  بر حسب ولت و  $\phi$  بر حسب وبر است.

- بنا به تعریف، مشخصه یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان دارای معادله‌ای بصورت زیر می‌باشد:

$$\phi(t) = Li(t)$$

که در آن  $L$  مقدار ثابتی بوده (نابسته از  $t$  و  $i$ ) و **اندوکتانس** گفته می‌شود.

- مشخصه آن خط مستقیمی به شیب  $L$  است که از مبدأ می‌گذرد. واحدهای این معادله بترتیب وبر، هانری و آمپر است.

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt' \quad \text{و}$$

- فرض کنید  $\Gamma \triangleq \frac{1}{L}$  باشد.  $\Gamma$  را **اندوکتانس معکوس** گویند و داریم:

$$i(t) = i(0) + \Gamma \int_0^t v(t') dt'$$

- فرض می‌کنیم منبع جریان  $i_s(t)$  به یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس  $L$  و  $i(0) = 0$  وصل شود. شکل موج ولتاژ  $v(0)$  دو سر سلف را برای حالت‌های زیر تعیین کنید:

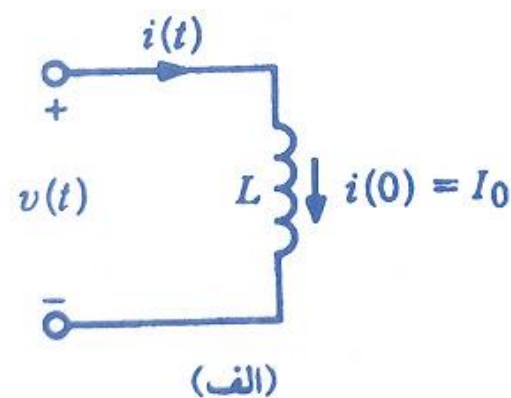
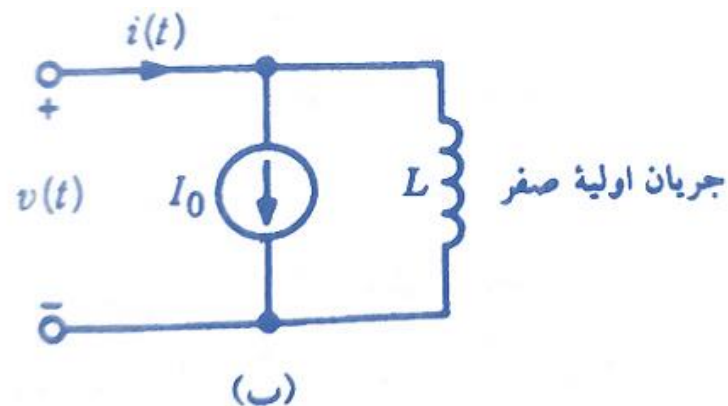
الف-  $i_s(t) = u(t)$

ب-  $i_s(t) = \delta(t)$

• معادله  $i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$  بیان می کند که

در لحظه  $t$ ، جریان شاخه  $i(t)$  ( $t \geq 0$ ) در یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان از دو جمله تشکیل می شود.

• بنابراین هر سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه  $i(0)$  را می توان بصورت اتصال موازی یک منبع جریان داریم  $I_0 = i(0)$  و همان سلف با جریان اولیه صفر در نظر گرفت.



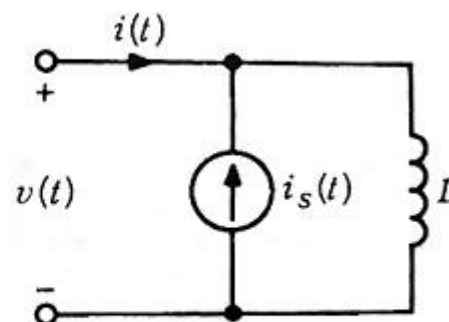
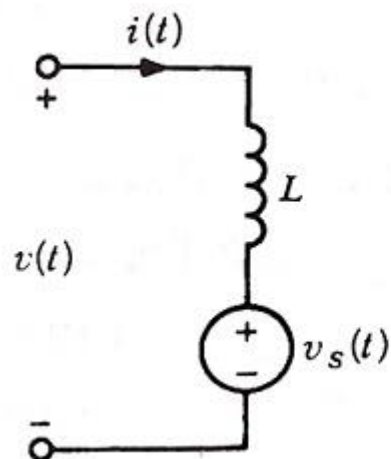
• یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه صفر، یعنی  $i(0) = 0$  را در نظر بگیرید.

این سلف به طور موازی با یک منبع جریان دلخواه  $i_s(t)$  مطابق شکل وصل شده است (مدار معادل نورتن).

این اتصال موازی، معادل مدار نشان داده شده در سمت چپ می‌باشد که در آن همان سلف به طور سری با منبع ولتاژ

$v_s(t)$  وصل شده و داریم:

$$v_s(t) = L \frac{di_s}{dt}$$



$$i_s(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_s(t') dt'$$

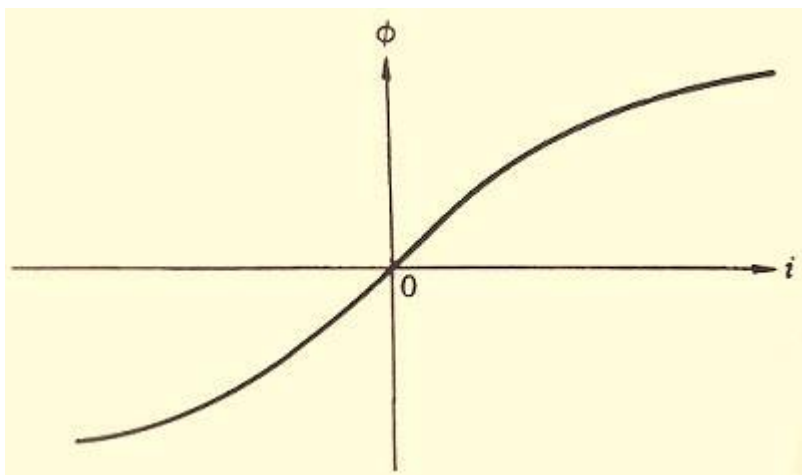
- با تکرار استدلالی مشابه آنچه که در مورد خازنها به کار رفت می توان در مورد سلف ها هم، خاصیت مهم زیر را نتیجه گیری کرد:
- اگر برای همه زمانها در فاصله بسته  $[0, t]$ ، ولتاژ  $v$  دو سر یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان کراندار بماند، جریان  $i$  در فاصله زمانی باز  $(0, t)$  یک تابع پیوسته می باشد، یعنی مادامی که ولتاژ دو سر یک سلف کراندار بماند جریان داخل آن سلف نمی تواند به طور لحظه ای از یک مقدار به مقدار متفاوت دیگری بجهد.

- اگر سلف خطی ولی تغییرپذیر با زمان باشد، مشخصه آن در هر لحظه، خط مستقیمی است که از مبدأ گذشته و شیب آن تابعی از زمان است.
- شار بر حسب جریان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\phi(t) = L(t)i(t)$$

$$v(t) = L(t) \frac{di}{dt} + \frac{dL}{dt} i(t)$$

- اغلب سلف‌های فیزیکی دارای مشخصه‌های **غیرخطی** هستند و فقط برای دامنه تغییرات خاصی از جریان، می‌توان از مدل خطی تغییرناپذیر با زمان برای آنها استفاده کرد.
- برای جریان‌های زیاد، شار به حالت اشباع می‌رسد، یعنی وقتی که جریان خیلی زیاد می‌شود شار به مقدار خیلی کم افزایش می‌یابد.





**مثال:** فرض کنید مشخصه یک سلف غیر خطی تغییرناپذیر با زمان را بتوان بصورت زیر نمایش داد:

$$\phi = \tanh i$$

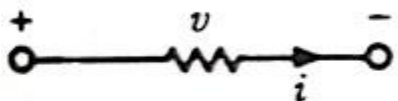
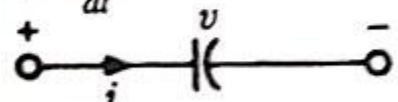
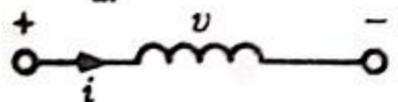
جریان داخل سلف، یک جریان سینوسی  $i(t) = A \cos \omega t$  می باشد. ولتاژ دو سر سلف را حساب کنید.

شار سلف عبارتست از:  $\phi(t) = \tanh(A \cos \omega t)$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} \phi(i(t)) = \left. \frac{d\phi}{di} \right|_{i(t)} \frac{di}{dt} \\ &= \left. \frac{d \tanh i}{di} \right|_{i(t)} \frac{d A \cos \omega t}{dt} = \frac{1}{\cosh^2(A \cos \omega t)} (-A \omega \sin \omega t) \end{aligned}$$

و نتیجه می گیریم:

$$v(t) = -A \omega \frac{\sin \omega t}{\cosh^2(A \cos \omega t)}$$

	خطی		غیر خطی	
	تغییرناپذیر با زمان	تغییرپذیر با زمان	تغییرناپذیر با زمان	تغییرپذیر با زمان
<p>مقاومتها</p> 	$v(t) = Ri(t)$ $i(t) = Gv(t)$ $R = 1/G$	$v(t) = R(t)i(t)$ $i(t) = G(t)v(t)$ $R(t) = 1/G(t)$	$v(t) = f(i(t))$ کنترل شده با جریان $i(t) = g(v(t))$ کنترل شده با ولتاژ	$v(t) = f(i(t), t)$ کنترل شده با جریان $i(t) = g(v(t), t)$ کنترل شده با ولتاژ
<p>خازنها</p> $i = \frac{dq}{dt}$ 	$q(t) = Cv(t)$ $i(t) = C \frac{dv}{dt}$ $v(t) = v(\circ) + \frac{1}{C} \int_{\circ}^t i(t') dt'$	$q(t) = C(t)v(t)$ $i(t) = \frac{dC}{dt} v(t) + C(t) \frac{dv}{dt}$	$q(t) = f(v(t))$ $i(t) = \left. \frac{df}{dv} \right _{v(t)} \frac{dv}{dt}$	$q(t) = f(v(t), t)$ $i(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right _{v(t)} \frac{dv}{dt}$
<p>سلف‌ها</p> $v = \frac{d\phi}{dt}$ 	$\phi(t) = Li(t)$ $v(t) = L \frac{di}{dt}$ $i(t) = i(\circ) + \frac{1}{L} \int_{\circ}^t v(t') dt'$	$\phi(t) = L(t)i(t)$ $v(t) = \frac{dL}{dt} i(t) + L(t) \frac{di}{dt}$	$\phi(t) = f(i(t))$ $v(t) = \left. \frac{df}{di} \right _{i(t)} \frac{di}{dt}$	$\phi(t) = f(i(t), t)$ $v(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right _{i(t)} \frac{di}{dt}$

## [فصل دوم - بخش دوم]

■ تمرین های تحویلی : تمرین شماره ..... ( تمرین )

[از کتاب نظریه اساسی مدارها و شبکه ها - جبه دار (جلد اول)]

تاریخ نهایی تحویل : یک هفته پس از ارائه این اسلاید

■ تمرین های تکمیلی (\*) - تمرین شماره ..... .