① ⓐ

$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k-2]u(n-۳)$ — علی ✓ ⇐ — قبلی وابسته است

ولی — آینده ربط ندارد ✗ ۱: حافظه

$|x[n]| < M_x < \infty \rightarrow$ اگر n به سمت بی نهایت میل کند

$y[n] = \infty \times M_x = \infty$ پایدار نیست

$y[n-n_0] = \sum_{k=0}^{n} x[k-2]u((n-n_0-۳)$

$x_1[n] = x(n-n_0)$

$\hookrightarrow y_1[n] = \sum_{k=0}^{n-n_0} x_1[k-2]u(n-n_0-۶)$

تغییر ناپذیر با زمان

$x_۳ = ax_1 + bx_۲$

$y_۳ = \sum_{k=0}^{n} (ax_1[k-۲] + bx_۲[k-۲])u(n-۲)$

$= \sum_{k=0}^{n} ax_1[k-۲]u(n-۶) + bx_۲[k-۲]u[n-۶]$

$= ay_1 + by_۲$ خطی

پاسخ ضربه: $h[n] = \sum_{k=0}^{n} \delta[k-۲]u(n-۳) = u(n-۲) \rightarrow$ علی ✓

✗ ۱: بی حافظه

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \rightarrow \infty$

BIBO ✗

(b)

برا شیفت زمانی نیاز دارد ⇐ کاملاً ✗

$y(t) = x(t+1)\cos^2(\omega t)$ ✗ علی

$|x(t)| < M_x$

$y(t) = M_x \times [-1, 1] \Rightarrow |y(t)| < M_y$ پایدار ✓

حد دارد حد دارد

$y(t-t_0) = x(t-t_0+1)\cos^2(\omega t - \omega t_0)$

$x_1(t) = x(t-t_0)$ ✗ LTI

$\rightarrow y_1(t) = x(t-t_0+1)\cos^2(\omega t)$

$x_3 = a x_1 + b x_2 \rightarrow y_3 = (a x_1 + b x_2)\cos^2(\omega t)$

$= a x_1(t+1)\cos^2(\omega t) + b x_2(t+1)\cos^2(\omega t)$

$= a y_1 + b y_2$ خطی

$h(t) = \delta(t+1)\cos^2(\omega t) = \begin{cases} \cos^2(\omega) & t = -1 \\ 0 & t \neq -1 \end{cases}$

✗ $h(n) = 0 \quad n < 0$ ✗ علی

$h(n) \neq A\delta(t)$ بی‌حافظه ✗

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \leqslant 1 \rightarrow$ پایدار ✓

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

به آینده ربط دارد ⇐ علی X

بی‌حافظه X

(C)

$$|x[n]| < M_x \rightarrow y[n] = 2n_0 \times M_x < M_y < \infty$$ پایدار

$$y[n-n_0] = \sum_{n-2n_0}^{n} x[k]$$

$$x_1[n] = x[n-n_0] \Rightarrow y_1[n] = \sum_{n-n_0}^{n+n_0} x[k-n_0]$$

TI ✓

$$x_3 = a x_1 + b x_2 \rightarrow y_3 = \sum_{n-n_0}^{n+n_0} a x_1[k] + b x_2[k]$$

$$= a \sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_1[k] + b \sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_2[k] = a y_1 + b y_2$$

$$h[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} \delta[k]$$

$$n - n_0 \leq 0 \leq n + n_0 \rightarrow \boxed{n_0 \geq -n} \quad \boxed{n_0 \geq n}$$

$$h[n] = \begin{cases} u[n] & n_0 \geq |n| \\ 0 & n_0 < |n| \end{cases}$$

پس n وجود دارد که $h[n] \neq 0$ ⇐ علی X

$h[n] \neq A\delta(n)$ ⇐ بی‌حافظه X

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \leq 2n_0$$ → پایدار ✓

(d)

$$y[n] = \sum_{k=n_0}^{n+n_0} x[k]$$ → صورت سوال

اشتباه

$$y[n] = \sum_{k=n}^{n+n_0} x[k]$$

به آینده کار دارد ← علی X

X غیر حافظه

$|x[n]| < M_x \rightarrow y(n) = n_0 M_x \xrightarrow{<\infty}$ پایدار

$$y[n-n_0] = \sum^{n} x[k]$$

$$y_1[n] = \sum_{k=n}^{n+n_0} x[k-n_0] \quad (n-n_0)$$

→ TI ✓

$$y_2 = \sum_{k=n_0}^{n+n_0} x_2[k] = \sum_{k=n}^{n+n_0} ax_1[k] + bx_2[k]$$

$$= \sum ax_1[k] + \sum bx_2[k] = ay_1 + by_2$$

$$h[n] = \sum_{k=n}^{n+n_0} \delta[k] = \begin{cases} -u[n+n_0+1] + u[n] & n > \\ \end{cases}$$

$h[n] \neq 0$ n_0 منفی نیست باشد ⇒ علی X

$h[n] \neq A\delta(n)$ → X بی حافظه

$$\sum_{k=\infty}^{+\infty} h(n) = n_0 \times 1$$ → پایدار

b: $x(t) = e^{-b} u(t)$

$$y(t) = \Pi(t_{/2}) \rightarrow \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & - \end{cases}$$

$$F(t) = y(t)^{*} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) x(t-\tau)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{+1} x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{+1} e^{-t} u(t) = \int_{-1}^{+1} e^{\tau-t} u(t-\tau$$

If

$$F(t) = y(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau)\left(u(t-\tau+1) - u(t-\tau-1)\right) d\tau$$

$$= \int_{0}^{t+1} e^{-\tau} d\tau - \int_{0}^{t-1} e^{-\tau} d\tau$$

$$= -1\left(e^{-t-1} - e^{-t+1}\right) \quad \text{if } t > 0$$

(a) $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{else} \end{cases} = u(t) - u(t-T)$

$h(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 2T \\ 0 & \text{else} \end{cases} = t(u(t) - u(t-2T))$

$y(x) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)$

$= \int_0^T h(t-\tau)\, d\tau$

$0 \le \tau \le T$ → $x(t) = 1$ ①

$0 \le t - \tau \le 2T \rightarrow -t \le -\tau \le 2T - t$

$t \ge \tau \ge t - 2T$ ②

$\begin{cases} 0 \le \tau \le T \\ t \ge \tau \ge t - 2T \end{cases}$ →

$t \le T$

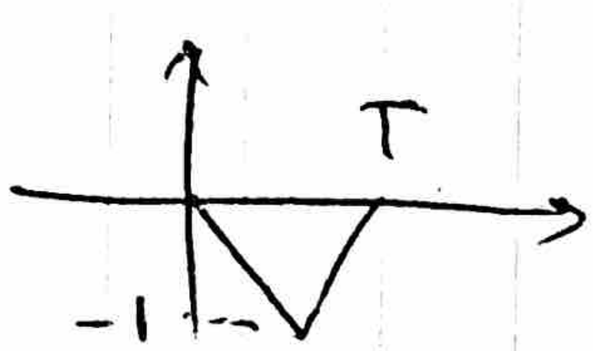
$\tau \le t$

$= \int_0^T h(t-\tau)\, d\tau$

$$x_1(t) = x(-t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = x(-t) * h(t)$$

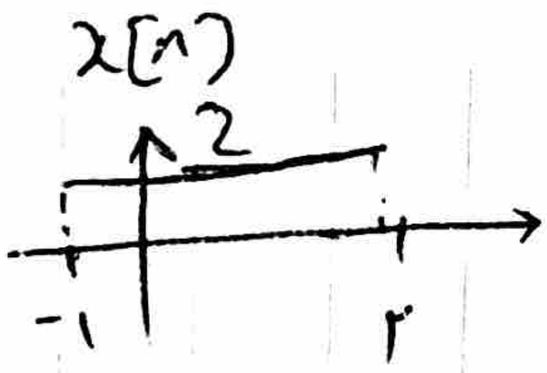
$$y(-t) = x(-t) * h(-t) = x(-t) * -h(+t) = -y_1(t)$$



$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$ (۵)

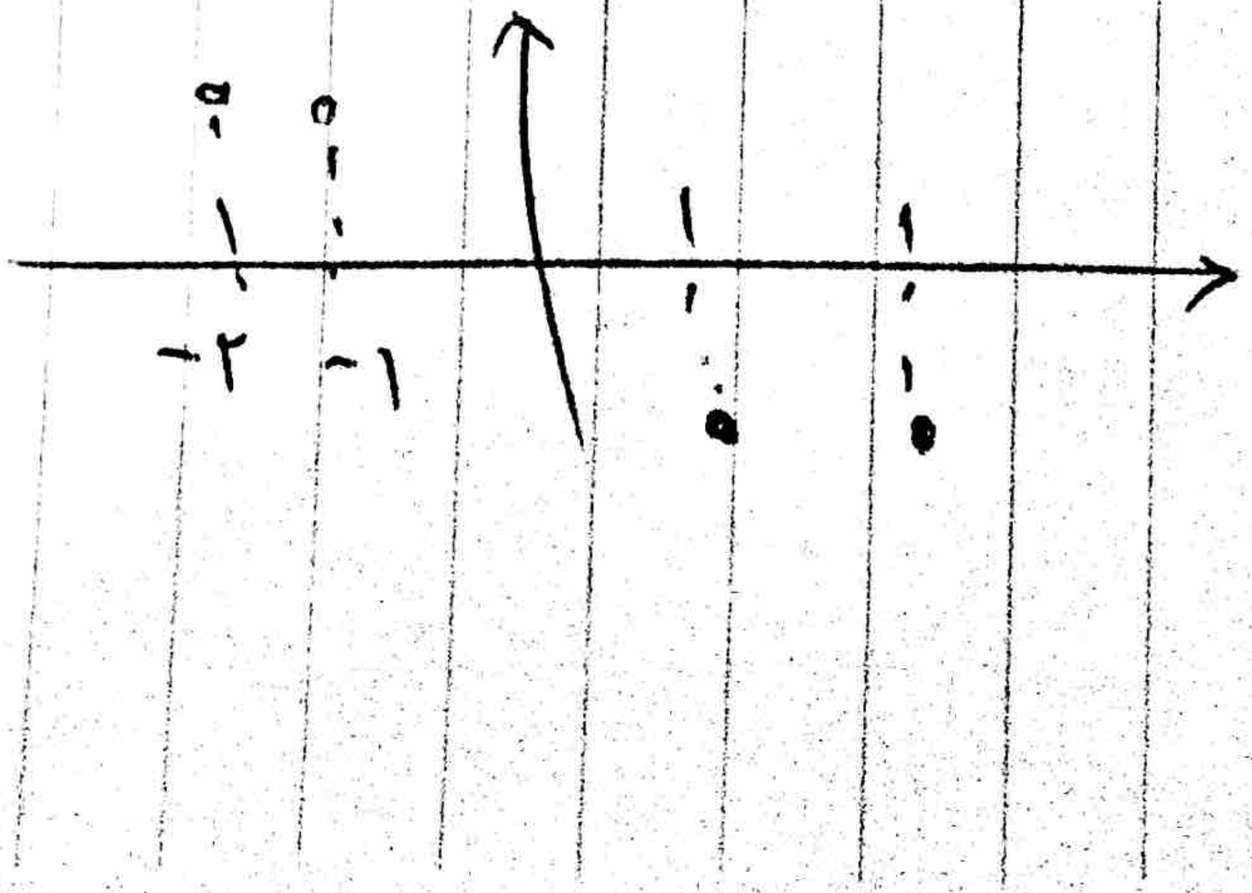
$$x[n] = 2(u[n+1] - u[n-2])$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$



$h[n]$ =

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x[n-K]h[k] = x[n+1] - x[n-1]$$



(4)

(a) $x[n] = n^2 \; , \; y[n] = x[n] * h[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k] = n^2\left(\sum h[k]\right) - ۲n\left(h[k]\ldots\right.$$

$\downarrow$ $An^۲$ ✗

(b) $x[n] = \sin x$

$$y[n] = x[n] * h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$= \frac{e^{(n-k)j} - e^{-(n-k)j}}{۲j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]$$

$$= \frac{e^{nj}\sum h[k]e^{-kj} - e^{-nj}\sum h[k]e^{+kj}}{۲j}$$

قابل تبدیل به $A\,x[n]$ نیست ✗

(c) $x[n] = e^{j\omega n}$

$$y[n] = \sum h[k] e^{j\omega n} \times e^{-j\omega k}$$

$$= e^{j\omega n}\left(\sum h[k] e^{-j\omega k}\right) = \boxed{A e^{j\omega n}}$$