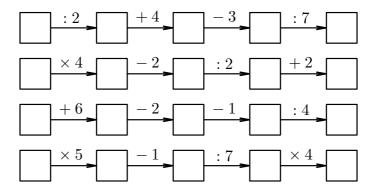
55. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z5

1. Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:



ŘEŠENÍ. Začneme posledním řádkem. Ve třetím čtverečku musí být číslo dělitelné sedmi, tj. 7 nebo 14. Když zkusíme 7, dostaneme:

$$\times 5$$
 8 -1 7 $: 7$ 1 $\times 4$ 4

Do prvního čtverečku nemáme co doplnit. Vyhovuje tedy číslo 14 a poslední řádek bude:

Nyní si všimneme prvního řádku. Ve čtvrtém čtverečku musí být číslo dělitelné sedmi (7 nebo 14), ale 14 je již v posledním řádku, takže doplníme číslo 7. Odtud doplníme celý řádek:

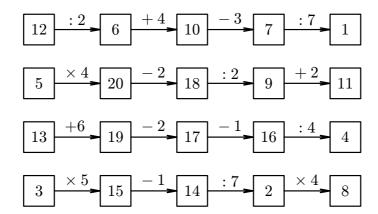
$$12$$
 $: 2$ 6 $+ 4$ 10 $- 3$ 7 $: 7$ 1

Pokračujeme druhým řádkem. V prvním čtverečku nemůže být číslo větší než 5, čísla 1, 2, 3 jsou již použita, takže tam může být 4 nebo 5. Nevyhovuje však 4 (ve třetím čtverečku by se opakovalo číslo 14), takže doplníme číslo 5. Celý řádek bude vypadat takto:

Zbývá nám třetí řádek. Ve čtvrtém čtverečku musí být číslo dělitelné čtyřmi, které není dosud použité, tj. 4 nebo 16. Z nich vyhovuje jen 16 (číslo 4 by vedlo ke sporu v pátém čtverečku, protože číslo 1 je už použité). Použitím čísla 16 doplníme celý řádek:



Celkové řešení:



- 2. Blecha Skákalka skáče po číselné ose. Dokáže však jen dva druhy skoků. Jedním přeskočí o 14 čísel doprava nebo doleva, druhým přeskočí o 18 čísel doprava nebo doleva. Právě stojí na čísle 2.
 - a) Najdi způsob, jak má blecha skákat, aby se dostala právě čtyřmi skoky na desítku.
 - b) Blecha tvrdí, že včera byla na třináctce. Mluví pravdu, nebo lže? Zdůvodni.

ŘEŠENÍ. (a) Skákalka se musí dostat o 8 čísel doleva. To znamená, že bude dělat krátké skoky směrem doprava a dlouhé skoky směrem doleva. Jeden možný způsob je:

$$2 \underbrace{\begin{array}{c} 18 \\ 20 \end{array}}_{6} \underbrace{\begin{array}{c} -14 \\ 6 \end{array}}_{24} \underbrace{\begin{array}{c} -14 \\ 10 \end{array}}_{10}$$

- (b) Protože blecha stojí na sudém čísle a mohla skákat jen o sudý počet čísel na obě strany, byla vždy jenom na sudém čísle. Na třináctce být nemohla.
- 3. Pohádkový nafukovací čtverec, který umí mluvit, měl před 5 minutami délku strany 8 cm. Při každé lži zvětší svůj obvod dvojnásobně, při každé vyslovené pravdě se zmenší délka každé jeho strany o 2 cm. Za posledních 5 minut dvakrát lhal a dvakrát mluvil pravdu.
 - a) Jaký největší obvod může teď mít?
 - b) Jaký nejmenší obvod může teď mít?

Řešení. Zkusíme vypočítat všechny obvody, jichž mohl čtverec dosáhnout:

$$\begin{array}{ll} \text{LLPP} & (8 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2) \cdot 4 \, \text{cm} = 112 \, \text{cm}, \\ \text{LPLP} & [(8 \cdot 2 - 2) \cdot 2 - 2] \cdot 4 \, \text{cm} = 104 \, \text{cm}, \\ \text{LPPL} & (8 \cdot 2 - 2 - 2) \cdot 2 \cdot 4 \, \text{cm} = 96 \, \text{cm}, \\ \text{PLLP} & [(8 - 2) \cdot 2 \cdot 2 - 2] \cdot 4 \, \text{cm} = 88 \, \text{cm}, \\ \text{PLPL} & [(8 - 2) \cdot 2 - 2] \cdot 2 \cdot 4 \, \text{cm} = 80 \, \text{cm}, \\ \text{PPLL} & (8 - 2 - 2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \, \text{cm} = 64 \, \text{cm}. \end{array}$$

- (a) Největší možný obvod je 112 cm. (b) Nejmenší možný obvod je 64 cm.
- **4.** Pepa na pouti koupil čtyři autíčka bílé, červené, zelené a modré. Bílé stálo dvakrát tolik co červené, zelené třikrát tolik co bílé a za modré zaplatil tolik, co za červené a bílé dohromady. Přitom červené stálo o 70 Kč méně než zelené. Kolik stála jednotlivá autíčka?

Řešení. Jestliže bílé stojí dvakrát tolik, kolik červené a zelené třikrát tolik, kolik bílé, pak zelené stojí šestkrát tolik, kolik červené. Současně je zelené o 70 korun dražší nežli červené, takže 5 červených musí stát 70 korun. Odtud jedno červené stojí 14 korun. Zelené pak stojí 84 korun a bílé 28 korun. Za modré zaplatil tolik, kolik za červené a bílé dohromady, to jest 42 korun.

5. Máma stonožka má dvě děti a manžela. Každý z nich má sto nohou a všichni si berou denně čisté ponožky. V sobotu ráno v 6:00 začala máma stonožka dávat špinavé ponožky do pračky. Najednou se jí do pračky vejde 357 ponožek. Tato jedna várka se vypere za dvě a půl hodiny. Zjisti, kdy skončí s praním, pokud víš, že ponožky pere jenom jednou za týden, uložení ponožek do pračky jí trvá 2 minuty a jejich vyndání 3 minuty.

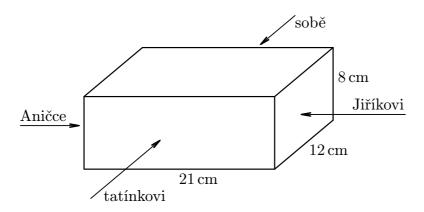
Řešení.

to je $400 \cdot 7 = 2\,800$ ponožek týdně. Musíme zjistit, kolikrát máma pustila pračku. Vyjde $2\,800:357=7$, zbytek 301. Pračku pustí osmkrát, čili samotné praní bude trvat 20 hodin. Vkládání a výběr ponožek jí bude trvat $8 \cdot (3+2) = 40$ minut, takže

$$6:00 + 20:40 = 26:40 = 24:00 + 2:40.$$

Maminka stonožka skončí s praním nejdříve v neděli ráno ve 2:40.

6. Maminka má v lednici cihlu sýra, která je znázorněná na obrázku. Postupně z ní odřezává 1 cm silné plátky na smažení. Nejprve odřízla zepředu plátek s rozměry 21 cm, 8 cm, 1 cm pro tatínka. Pak z boku odřízla pro Jiříka, zezadu pro sebe a nakonec z druhého boku pro Aničku. Napiš, jaké rozměry mají jednotlivé plátky. Urči rozměry zbytku sýra.



Řešení.

Tatínek	$21\mathrm{cm},$	$8\mathrm{cm},$	$1\mathrm{cm}$
Jiřík	$11\mathrm{cm},$	$8\mathrm{cm},$	$1\mathrm{cm}$
Maminka	$20\mathrm{cm},$	$8\mathrm{cm},$	$1\mathrm{cm}$
Anička	$10\mathrm{cm}$	$8\mathrm{cm}$	$1\mathrm{cm}$

Cihla po okrájení měla rozměry $19\,\mathrm{cm},\,10\,\mathrm{cm}$ a $8\,\mathrm{cm}$:

