## II. kolo kategorie Z6

## **Z6-II-1**

Káťa chce obdarovat své kamarádky a přemýšlí: kdybych každé koupila sponku za 28 Kč, zbylo by mi ještě 29 Kč, ale kdyby to byl medvídek za 42 Kč, tak by mi 13 Kč chybělo. Kolik má Káťa kamarádek a kolik peněz na dárky? (*M. Volfová*)

**Možné řešení.** Rozdíl v ceně dárku pro jednu kamarádku je 42 - 28 = 14 (Kč). Rozdíl v celkové ceně, kterou by Káťa za dárky pro všechny kamarádky zaplatila, je 29 + 13 = 42 (Kč). Vynásobíme-li rozdíl v ceně dárku pro jednu kamarádku počtem kamarádek, dostaneme rozdíl v celkové ceně. Proto počet kamarádek určíme jako výsledek dělení rozdílu celkové ceny rozdílem ceny obou dárků, tj. 42:14=3. Káťa má 3 kamarádky.

Kdyby všem koupila sponku za 28 Kč, zbylo by jí 29 Kč, měla tedy  $3 \cdot 28 + 29 = 84 + 29 = 113$  (Kč).

**Poznámka.** Závěrečný výpočet lze alternativně provést takto: kdyby všem koupila medvídka za 42 Kč, chybělo by jí 13 Kč a měla by  $3 \cdot 42 - 13 = 126 - 13 = 113$  (Kč).

Úlohu lze řešit též experimentováním nebo rovnicemi.

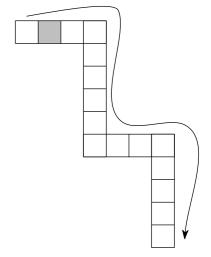
**Hodnocení.** 1 bod za rozdíl cen dárků pro jednu kamarádku (tj. 14 Kč); 2 body za celkový rozdíl pro všechny kamarádky (tj. 42 Kč); 2 body za určení a zdůvodnění počtu kamarádek; 1 bod za stanovení množství peněz, které má Káťa na dárky.

## **Z6**-II-2

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku nejmenším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla. Kterým číslem se kostka dotkla zabarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl

- 1. nejmenší možný,
- 2. největší možný?

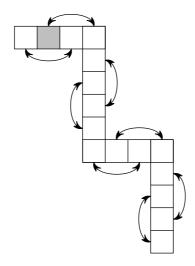
(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky, obr.)



(M. Dillingerová, L. Hozová)

Možné řešení. Prvočísla menší než 20 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Hledáme tři dvojice z těchto prvočísel, které mají stejný součet, což jsou dvojice (11, 13), (7, 17) a (5, 19) se součtem 24. Tyto dvojice představují čísla na protilehlých stěnách kostky. Podle zadání jsme na první políčko plánu napsali číslo 5. Na obrázku jsou vyznačeny dvojice políček, kterých se dotýkaly protilehlé stěny kostky.

Ať převracíme kostku jakkoli, bude součet všech zapsaných čísel na plánu stejný, jmenovitě  $24 \cdot 8 = 192$ . V obou případech se tedy mohla kostka dotknout vybarveného políčka



kterýmkoli z čísel 7, 11, 17 nebo 13, tj. kterýmkoli číslem kromě 19, jež leží na protilehlé stěně k5.

**Hodnocení.** 1 bod za dvojice prvočísel; 3 body za úvahu o součtu zapsaných čísel; 2 body za závěr a odpověď.

## **Z6-II-3**

Tři zahradníci měli velkou úrodu mrkve, a tak zkusili mrkve odšťavovat. Pak šťávu nalili do 9 skleniček. Všechny byly plné, každá však měla jiný objem: 1 dl, 2 dl, 3 dl, . . . , 9 dl. Chtěli se spravedlivě podělit tak, aby každý dostal stejný počet skleniček i stejně šťávy. Najdi dva způsoby, jak to mohli provést. (M. Volfová)

**Možné řešení.** Šťávy bylo celkem  $1+2+\ldots+9=45$  (dl). Každý ze tří zahradníků dostal stejně šťávy, tj. 15 dl (45 : 3=15), a měl ji ve třech sklenicích (9 : 3=3). Pro každého zahradníka musíme vyjádřit číslo 15 jako součet tří přirozených čísel menších nebo rovných 9. Žádné dvě z čísel 9, 8 a 7 nemohou být současně v jedné trojici, protože součet čísel této trojice by byl příliš velký. V každé trojici tedy musí být právě jedno z těchto čísel. Ptáme se postupně, ve kterých trojicích se vyskytuje 9, ve kterých 8 a ve kterých 7:

Šťávu mezi zahradníky lze nyní rozdělit pouze dvojím způsobem:

- dostane-li jeden 9+5+1 (dl), musí dostat druhý 8+4+3 (dl) a třetí 7+6+2 (dl),
- dostane-li jeden 9+4+2 (dl), musí dostat druhý 8+6+1 (dl) a třetí 7+5+3 (dl).

**Poznámka.** Žáci mohou nalézt vhodné trojice neuspořádaným experimentováním, příp. mohou předchozí úvahu začít otázkami: ve kterých trojicích se vyskytuje 1, ve kterých 2 a ve kterých 3?

**Hodnocení.** 1 bod za stanovení celkového množství šťávy; 1 bod za výpočet množství šťávy připadající na jednoho zahradníka; 2 body za vypsání všech přípustných trojic nebo odpovídající zápisy; po 1 bodu za každou vyhovující možnost rozdělení (tj. 2 body za obě možnosti).