TD 1 Optimization

Exercice 1.

1. $Ax_1 \leq b \qquad x_1 \geq 0$

   $Ax_2 \leq b \qquad x_2 \geq 0$

2. Soit $\alpha \in [0,1]$.

   On pose $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$

$$Ax = A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) =$$
$$= \alpha A x_1 + (1-\alpha) A x_2$$

On utilise q1 pour conclure

$$\alpha A x_1 \leq \alpha b$$
$$(1-\alpha) A x_2 \leq (1-\alpha) b$$

Donc $\underbrace{\alpha A x_1 + (1-\alpha) A x_2}_{= Ax} \leq b$.

3. De meme comme $\alpha \geq 0$, $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$,

   $\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \geq 0$

4. On verifie l'inégulité de convexité

Exercice 2

1. $\exists\, \alpha_1, \dots \alpha_p$ tq

   $\alpha_1 + \dots \alpha_p = 1$ et $x_0 = \alpha_1 x_1 + \dots \alpha_p x_p$.

On peut estimer que $\alpha'_i = d(X_0, X_i)$

et $\alpha_i = \dfrac{\alpha'_i}{\sum_j \alpha'_j}$

2. $f(X_0) = f(\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_p X_p) = \alpha_1 f(X_1) + \ldots \alpha_p f(X_p)$

$\leqslant (\alpha_1 + \ldots \alpha_p) f(X_m) = f(X_m)$

3. Pour tout point à l'exterieur, $f(X_0) \leq f(X_m)$ où X_m sommet.

Tout point sur le bord (sauf sommets) est aussi sub optimal comme sur polytope de dim $p-1$, même preuve.

4. $f(\beta_1 X_{I_1} + \ldots + \beta_m X_{I_m}) = \beta_1 f(X_{I_1}) + \ldots + \beta_m f(X_{I_m})$

$= (\beta_1 + \ldots + \beta_m) M = M$

où $\{I_1 \ldots I_m\}$ la famille des sommets qui réalisent l'optimum

M l'optimum et $\beta_1, \ldots \beta_m$ les coeffs du somme convexe. $(\beta_1 + \ldots + \beta_m) = 1$.

Exercice 3

PARTIE A

1. $X_{V_i} = \langle b, A^{V_i} \rangle A^{V_i}$,

Sinon 0.

2. $x = \alpha y + (1-\alpha) z$

3. $b = \sum_{i=1}^{k} y_{v_i} A^{v_i}$

$b = \sum_{i=1}^{k} z_{v_i} A^{v_i}$

Donc $\underline{y_{v_i} = z_{v_i}}$

$y = z$

4. $y = z$ donc tout somme convexe

$x = y = z$.

Conclusion y et z ne sont pas distinctes, et x ne peut être exprimé comme comb. convexe des points de P, donc x bien un sommet.

PARTIE 2

1. lin alg, ecriture comme comb lin n'est pas unique, donc $\vec{0}$ = comb lin de $A_1, \dots, A_k$

2. $A(x \pm \varepsilon d) = Ax \pm \varepsilon \underbrace{Ad}_{=\vec{0}} = Ax$

$\leq b \quad \in P$

$$X = \frac{X^+ + X^-}{2}$$

X n'est pas sommet

ABSURDE