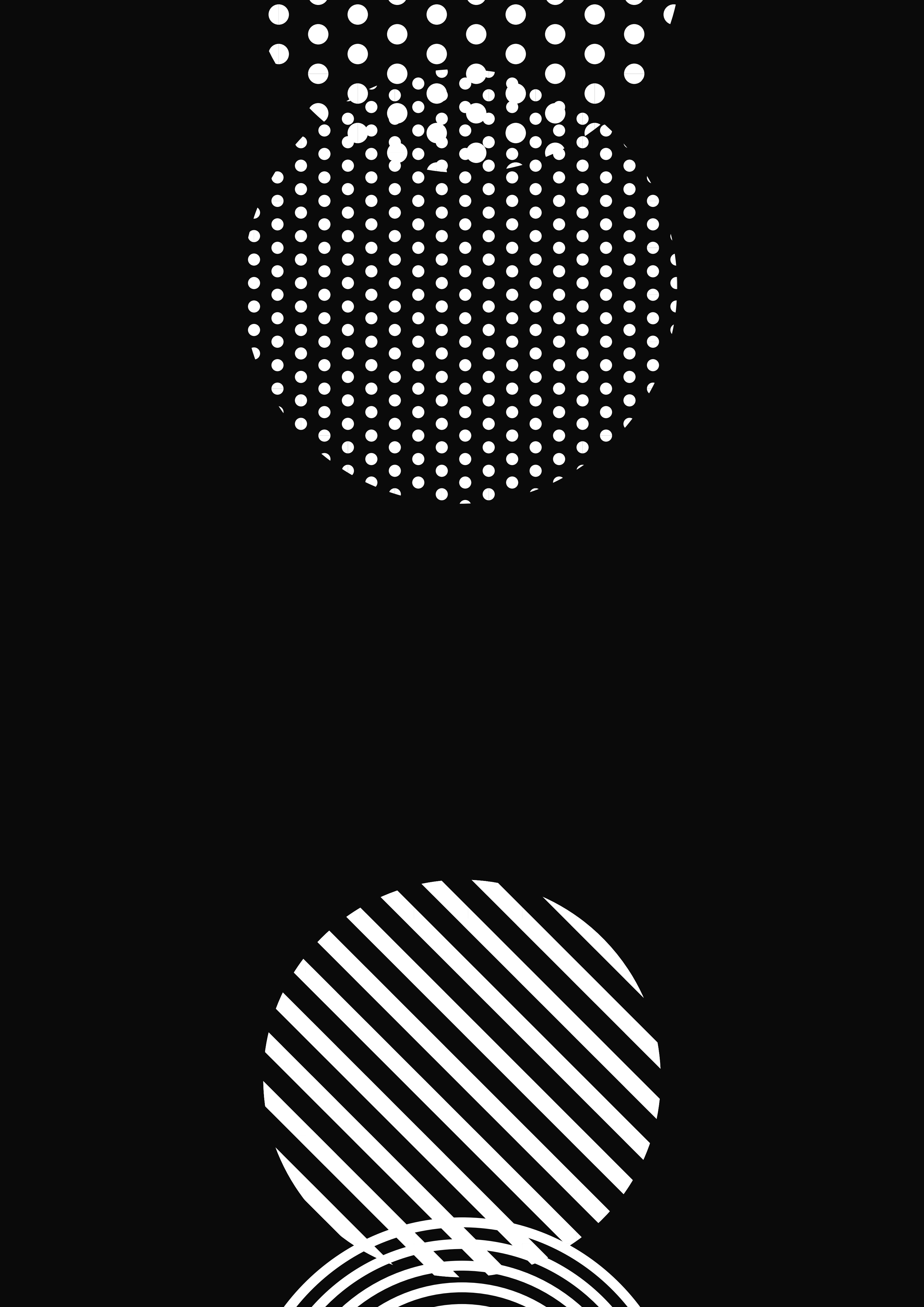


1.0 Modèles discrètes

On désigne par $N(t)$ la population d'individus à l'instant t.

Equation du modèle discrèt

$$\underbrace{N(t+\Delta t)-N(t)}_{\text{variation de la population}} = \underbrace{n}_{\text{nombre de naissances}} - \underbrace{m}_{\text{nombre de décès}} + \underbrace{\overset{\text{immigration}}{i} - \overset{\text{émigration}}{e}}_{\text{sol de migration}}$$

1.1 Modèle de croissance géométrique

<u>Hypothèse</u> :
- solde migration nul : $i - e = 0$
- nombre de croissance proportionnel à la taille de la population $n = \lambda \Delta t N(t)$ (λ : taux de natalité)
- Idem pour le nombre de décès $m = \mu \Delta t N(t)$ (μ : taux de mortalité)

<u>Modèle:</u> On pose $N_n = N(t_n)$ la taille de la population à l'instant t_n

$$N_{n+1} - N_n = \lambda \Delta t N_n - \mu \Delta t N_n$$

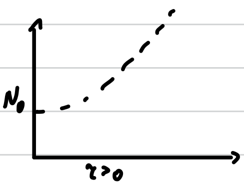
on pose $r = \lambda - \mu$ taux de croissance

(C G) $\quad N_{n+1} = (1 + r\Delta t) N_n, \quad n = 0$

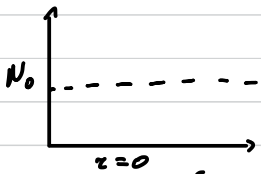
N_0 donné : taille initiale de la population.

<u>Solution:</u> $N_n = (1 + r\Delta t)^n N_0, \; n \in \mathbb{N}$

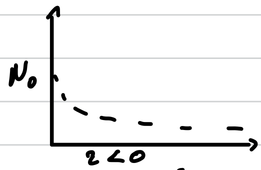
<u>Visualisation:</u> Δt fixé



$r > 0$
natalité supérieure à mortalité



$r = 0$
natalité égale à la mortalité



$r < 0$
natalité inférieure à la mortalité

Propriétées

- Lorsque $r \longrightarrow 0$, la population semble tendre vers une courbe $N(t) = N_0 e^{rt}$, solution de $\begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Si $r > 0$, la population croît indéfiniment.
- Si $r < 0$, il y a extinction de l'espèce.

Inconvenients

i.) Une croissance infinie n'est pas réaliste.

i.i) Pour être rigoureux, on devrait écrire $E(rN_n)$ i.e partie entière.

I.2 Modèles continues

Motivation: L'observation qui prend Δt proche de 0 aura beaucoup plus d'information.

RQ le modèle de croissance géomètrique

$$N(t+\Delta t) - N(t) = \lambda \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t)$$

$$\Rightarrow \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lambda N(t) - \lambda N(t)$$

en faisent $\Delta t \longrightarrow 0$

$$N'(t) = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

D'où l'équation des modèles continues

$$\underbrace{N'(t)}_{\text{vitesse de variation}} = \underbrace{n(t)}_{\text{vitesse de naissance}} - \underbrace{m(t)}_{\text{vitesse de décès}} + \underbrace{i(t)}_{\text{vitesse d'immigration}} - \underbrace{e(t)}_{\text{vitesse d'émigration}}$$

1.1 Modèle Malthus

Hypothèse : · solde migration nul : $i(t) - e(t) = 0$
· vitesse de naissance proportionnel à la population à l'instant t $n(t) = \lambda N(t)$

· Vitesse de décès $m(t) = \mu N(t)$

Modèle: $\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu) N(t), & t > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$

Solution: $N(t) = N_0 e^{(\lambda-\mu)t}$

Propriétés: · il peut être si comme limite le modèle de croissance géométrique.

· Lorsque $r = \lambda - \mu > 0$ croissance est proportionnel

· Lorsque $r = \lambda - \mu = 0$ la population n'évolue pas

· Lorsque $r = \lambda - \mu < 0$ la population tend vers 0.

Inconvenients

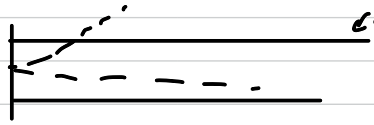
- croissance exponentielle pas réaliste
  Il faut prendre en compte
  · la limitation des ressources
  · l'interaction avec l'environnement.

I.2.2 Modè Verhulst

- Corrige le modèle de Malthus en prenant en compte la limitation de ressources

Idée: limiter la croissance à un seuil K appelé capacité biotique

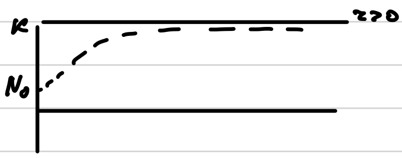
$N'(t) = rN(t)$



prendre cela en compte

Verhulst :

$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$



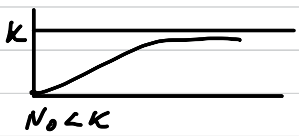
hyp : Solde de migration nul

- taux de natalité fonction affine décroissante de la population $\lambda \approx \lambda\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$
- taux de mortalité fonction affine croissante de la population $\mu = -\mu\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$

Modèle :
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Solutions : $N(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}$ $\quad t > 0$

Visualisation :



$N_0 < K$
$r > 0$

Propriétés

Si $r>0$ on a : • Si • $N_0 = 0$ $N_0 = K$ On a
$N(t) = N_0$ $\forall t > 0$

• Si $0 < N_0 < K$, $N \nearrow$
• Si $N_0 > K$, $N \searrow$
• N possède une limite si $N_0 > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = K$$

I.3 Modèle de croissance logistique
C'est un modèle discret

Hyp: i.e $=0$
• $n-m$ est une f^n affine de la population
i.e $n-m = r\Delta t\, N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$

Modèle: On suppose $\Delta t = 1$; On pose $N_n = N(t_n)$
on a $\begin{cases} N_{n+1} - N_n = r N_n \left(1 - \frac{N_n}{K}\right) \\ N_0 \text{ donné} \end{cases}$

Propriétés: (À vérifier numériquement)

• Si $r < 2$, la suite converge vers K
plus $r \approx 2$ mais la suite converge
• Si $2 < r < 2.449$ la suite converge vers un cycle

• Si $2.449 < r < 2.57$ la suite est encore un cycle mais plus complexe

• Si $r > 2.57$ la suite devient chaotique

RQ: Exercice