Systèmes Linéaires et Décompositions Matricielles

1 Introduction aux Systèmes Linéaires

1.1 Présentation du problème

On s'intéresse à la résolution de systèmes d'équations linéaires de la forme :

$$Ax = b$$

où $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est une matrice carrée de taille N, $x \in \mathbb{C}^N$ est le vecteur des inconnues et $b \in \mathbb{C}^N$ est le vecteur second membre.

1.2 Lien avec la Méthode de Newton

Dans un contexte plus général, pour résoudre une équation non linéaire $F(x) = 0$ avec $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, on utilise la méthode de Newton. La formule de récurrence est donnée par :

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n)$$

Ici, $F'(x_n)$ représente la matrice jacobienne de F évaluée en x_n. À chaque itération, le calcul de x_{n+1} nécessite la résolution d'un système linéaire de la forme $F'(x_n)\delta x = -F(x_n)$.

2 Propriétés de l'inversibilité

2.1 Équivalences pour le cas $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$

Pour une matrice carrée A, l'existence et l'unicité de la solution pour tout second membre ($\exists! Ax = b, \forall b$) sont équivalentes aux propriétés suivantes :

- A est bijective.
- A est injective (par le théorème du rang, cela équivaut à la surjectivité pour une matrice carrée).
- $\det A \neq 0$.
- 0 n'est pas une valeur propre (v.p.) de A.

2.2 Cas de la matrice non-inversible

Si A est carrée mais non-inversible, la solution (si elle existe) n'est pas unique. Une solution existe ($\exists$ sol) si et seulement si b appartient à l'image de A :

$$b \in \text{Im } A = \text{Run } A = \text{Vect}(A_1, \ldots, A_n) \subseteq \text{Span}$$

où A_i sont les colonnes de la matrice A.

Example 2.1. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y = \alpha \\ 4x + 8y = \beta \end{cases}$$

L'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ est l'ensemble des vecteurs $\binom{\alpha}{\beta}$ tels que les deux équations sont compatibles. On remarque que la deuxième ligne est le double de la première $(2L_1 = L_2)$. Pour qu'une solution existe, on doit donc avoir :

$$2\alpha = \beta \iff 2\alpha - \beta = 0$$

Ainsi, $\text{Im } A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ tq } 2\alpha - \beta = 0 \right\}$. On peut également exprimer cela en disant que l'image est l'orthogonal du vecteur $\binom{2}{-1}$:

$$\text{Im } A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^\perp$$

3 Sommes directes et Orthogonalité

Pour une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{C}^{N \times M}$, nous avons les propriétés de décomposition suivantes en somme directe :

Proposition 3.1. 1. $\mathbb{C}^N = \text{Im } A \oplus \text{Ker}(A^*)$

2. $\mathbb{C}^M = \text{Im } A^* \oplus \text{Ker}(A)$
Où A^* désigne la matrice adjointe (transposée conjuguée) de A.

Preuve. Démontrons que $\text{Ker } A = (\text{Im } A^*)^\perp$.
1. Montrons d'abord que $\text{Ker } A \subset (\text{Im } A^*)^\perp$: Soit $x \in \text{Ker } A$ (donc $Ax = 0$) et soit $y \in \text{Im } A^*$. Par définition de l'image, il existe un vecteur z tel que $y = A^* z$. Calculons le produit scalaire $\langle x, y \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, A^* z \rangle \\ &= \langle Ax, z \rangle \\ &= \langle 0, z \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc x est orthogonal à tout élément de l'image de A^*.
2. Montrons ensuite que $(\text{Im } A^*)^\perp \subset \text{Ker } A$: Soit $x \in (\text{Im } A^*)^\perp$. Cela signifie que $\forall y \in \text{Im } A^*$, $\langle x, y \rangle = 0$. En particulier, pour tout vecteur z, on a :

$$\langle x, A^* z \rangle = 0$$
$$\langle Ax, z \rangle = 0, \quad \forall z$$

Si le produit scalaire de Ax avec tout vecteur z est nul, alors nécessairement :

$$Ax = 0$$

Ce qui prouve que $x \in \text{Ker } A$. □

4 Résolution Numérique : Pivot de Gauss

Supposons A inversible. La méthode du pivot de Gauss permet de transformer le système pour le rendre triangulaire.

Example 4.1. Considérons le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 10z = 3 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires sur les lignes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$$

Le système devient :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 0x + \cdots = \dots \\ 0x + \cdots = \dots \end{cases} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 0x + 0y + z = \dots \end{cases}$$

La complexité algorithmique de cette méthode est en $O(N^3)$.

5 Décompositions Matricielles

5.1 Décomposition LU

La décomposition $A = LU$ consiste à écrire A comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure (Lower) L et d'une matrice triangulaire supérieure (Upper) U.

Exemple de progression vers la forme triangulaire :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = U$$

Chaque étape correspond à une multiplication à gauche par une matrice de transfert B_n. Par exemple :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_1$$

On a alors $U = B_n B_{n-1} \dots B_1 A$, ce qui donne $A = B_1^{-1} B_2^{-1} \dots B_n^{-1} U = LU$.

5.2 Aspects Pratiques

En pratique, on utilise souvent une matrice de permutation P pour assurer la stabilité numérique (choix du pivot), ce qui donne la décomposition :

$$PA = LU$$

Le système $Ax = b$ devient $LUx = Pb$. On pose $y = Ux$, on résout $Ly = Pb$ par descente, puis $Ux = y$ par remontée.

5.3 Décomposition QR (Gram-Schmidt)

Pour une matrice $A \in \mathbb{C}^{N\times M}$ avec $M \leq N$, on cherche $A = QR$ où Q est une matrice dont les colonnes sont orthogonales ($Q^*Q = I_M$) et R est triangulaire supérieure. Les vecteurs q_n sont obtenus par combinaison linéaire des colonnes u_n de A :

$$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$
$$q_2 = \frac{u_2 - \langle q_1, u_2\rangle q_1}{\|u_2 - \langle q_1, u_2\rangle q_1\|}$$

On a la relation $Q = AR^{-1}$.

5.4 Décomposition de Cholesky

Si A est une matrice symétrique définie positive, elle admet une décomposition de la forme :

$$A = LL^T$$

où L est une matrice triangulaire inférieure.

6 Problème des Moindres Carrés

6.1 Formulation

On cherche à ajuster un modèle linéaire $y = \alpha X + \beta$ sur un ensemble de points. On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise la somme des carrés des erreurs :

$$\min \sum_{i=1}^{N} |y_i - (\alpha X_i + \beta)|^2$$

En posant l'erreur $e_i = y_i - (\alpha X_i + \beta)$, on cherche à minimiser $\|e\|^2 = \langle e, e\rangle$.

Sous forme matricielle, si on définit $e = y - A\binom{\alpha}{\beta}$ avec $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ X_N & 1 \end{pmatrix}$, on veut minimiser :

$$\left\| y - A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\|^2$$

6.2 Cas général et Formes Normales

De façon générale, pour $A \in \mathbb{R}^{N\times M}$ et $b \in \mathbb{R}^N$ avec $N \gg M$, on cherche $x \in \mathbb{R}^M$ minimisant $\|Ax - b\|^2$.

Développement de la fonction à minimiser :

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \langle Ax - b, Ax - b\rangle \\ &= (Ax)^T(Ax) - b^TAx - (Ax)^Tb + \|b\|^2 \\ &= x^TA^TAx - 2(A^Tb)^Tx + \|b\|^2 \end{aligned}$$

Pour trouver le minimum, on annule la dérivée par rapport à x :

$$\begin{aligned} 2A^TAx - 2(A^Tb) &= 0 \\ 2A^TAx &= 2A^Tb \end{aligned}$$

On obtient ainsi les **formes normales** :

$$A^TAx = A^Tb$$