TD0 – Optimisation et applications Programmation linéaire – Théorèmes fondamentaux

Ce TD a pour objectif de vous faire démontrer les théorèmes importants sur les programmes linéaires. Un programme linéaire peut s'écrire, sous forme **système**, comme :

$$\begin{cases} \text{maximiser } c_1x_1 + \cdots + c_nx_n, \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1, \ldots, x_n \ge 0. \end{cases}$$

Dans ce TD, on adopte la **forme matricielle équivalente** :

$$\max f(x) = c^T x \text{ sous les contraintes } Ax \le b, x \ge 0.$$

Ici :

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables (solution candidate) ;
- $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coefficients de la fonction objectif ;
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice des contraintes ;
- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des seconds membres.

L'ensemble des solutions réalisables est donc :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b, x \ge 0\}.$$

Exercice 1 – Convexité de l'ensemble réalisable

1. Soient x_1 et x_2 deux solutions réalisables. Écrire les inégalités qu'elles vérifient.
2. Soit $\alpha \in [0, 1]$. Montrer que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ vérifie encore $Ax \leq b$.
3. Montrer que $x \geq 0$.
4. Conclure que P est convexe.

Solution.

1. Puisque $x_1, x_2 \in P$, elles vérifient par définition :

$$Ax_1 \leq b, \quad x_1 \geq 0$$

$$Ax_2 \leq b, \quad x_2 \geq 0$$

2. Soit $\alpha \in [0, 1]$. On pose $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$. Calculons Ax :

$$\begin{aligned} Ax &= A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \\ &= \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 \end{aligned}$$

   On utilise les inégalités de la question 1 pour conclure. Comme $\alpha \geq 0$ et $(1 - \alpha) \geq 0$:

$$\alpha Ax_1 \leq \alpha b$$

$$(1 - \alpha)Ax_2 \leq (1 - \alpha)b$$

   En sommant ces deux membres :

$$\alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 \leq \alpha b + (1 - \alpha)b = (\alpha + 1 - \alpha)b = b$$

   D'où $Ax \leq b$.

3. De même, comme $\alpha \geq 0$, $x_1 \geq 0$ et $(1 - \alpha) \geq 0$, $x_2 \geq 0$, on a :

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$

   Donc $x \geq 0$.

4. Les points x obtenus par combinaison convexe de deux points de P appartiennent toujours à P (car ils vérifient les inégalités de définition de P). On vérifie ainsi l'inégalité de convexité, donc P est convexe.

$\square$

Exercice 2 – Optimum et sommets

On suppose que l'ensemble réalisable P est non vide et borné. On admet alors que P est un polyèdre convexe possédant un nombre fini de sommets, que l'on note $x_1, \ldots, x_p$. Soit x_0 une solution réalisable optimale, c'est-à-dire $f(x_0) \geq f(x)\, \forall x \in P$.

1. Supposons que x_0 n'est pas un sommet. Réécrire x_0 en fonction des sommets de P.
2. Soit $f(x_m) = \max\{f(x_1), \ldots, f(x_p)\}$. En utilisant la linéarité de f, montrer que $f(x_m) \geq f(x_0)$.
3. En déduire que la fonction objectif atteint son maximum sur au moins un sommet de P.
4. Supposons que le maximum de f sur P soit atteint pour plusieurs sommets $x_{I_1}, \ldots, x_{I_q}$. Montrer que toute combinaison convexe de ces sommets est également optimale.

Solution. 1. Si x_0 n'est pas un sommet, comme P est un polyèdre borné, x_0 peut s'écrire comme une combinaison convexe des sommets de P. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{et} \quad x_0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$$

On peut estimer les poids par exemple via $\alpha_i' = d(x_0, x_i)$ et $\alpha_i = \frac{\alpha_i'}{\sum_j \alpha_j'}$.

2. Par linéarité de la fonction objectif f :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_p f(x_p) \end{aligned}$$

En posant $f(x_m)$ le maximum des valeurs de f sur les sommets, on a $f(x_i) \leq f(x_m)$ pour tout i. Ainsi :

$$f(x_0) \leq (\alpha_1 + \cdots + \alpha_p) f(x_m) = 1 \cdot f(x_m) = f(x_m)$$

Donc $f(x_m) \geq f(x_0)$.

3. Puisque x_0 est optimal, on a par définition $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in P$, et en particulier $f(x_0) \geq f(x_m)$. Comme on vient de montrer que $f(x_m) \geq f(x_0)$, on en déduit $f(x_0) = f(x_m)$. Ainsi, pour tout point à l'extérieur (ou à l'intérieur du polyèdre), $f(x_0) \leq f(x_m)$ où x_m est un sommet. Tout point sur le bord (sauf les sommets) est aussi sous-optimal comme sur un polytope de dimension $p - 1$ (même preuve par récurrence). L'optimum est donc atteint sur au moins un sommet.

4. Soit $\{x_{I_1}, \dots, x_{I_m}\}$ la famille des sommets qui réalisent l'optimum M. Soit une combinaison convexe de ces sommets avec $\sum \beta_j = 1$ et $\beta_j \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(\beta_1 x_{I_1} + \cdots + \beta_m x_{I_m}) &= \beta_1 f(x_{I_1}) + \cdots + \beta_m f(x_{I_m}) \\ &= (\beta_1 + \cdots + \beta_m) M = M \end{aligned}$$

La valeur de la fonction objectif est égale à l'optimum M, donc la combinaison convexe est également optimale.

□

Exercice 3 – Sommets et colonnes de la matrice A

Le but de cet exercice est de trouver une relation entre les sommets du polyèdre P et les colonnes de A. On note $A^1, \dots, A^n$ les colonnes de la matrice A. On a donc $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A^j$.

Partie A – À partir de vecteurs linéairement indépendants

On suppose qu'il existe des indices $v_1, \dots, v_k$ tels que les colonnes $A^{v_1}, \dots, A^{v_k}$ soient linéairement indépendantes et

$$b = \sum_{i=1}^{k} x_{v_i} A^{v_i}, \quad x_{v_i} \geq 0,$$

les autres composantes de x étant nulles.

1. Donner les coordonnées de x dans ce cas.

2. On suppose que x n'est pas un sommet : écrire x comme combinaison convexe non triviale de deux points distincts y et z de P.

3. Exprimer b comme combinaison linéaire des colonnes A^j à l'aide des coordonnées de y, puis faire de même avec z.

4. En utilisant l'hypothèse sur les colonnes de A, que peut-on en déduire sur y et z ? Et sur x ?

Solution. 1. Les coordonnées de x sont x_{v_i} pour les indices correspondants aux colonnes indépendantes, et 0 sinon.

2. Si x n'est pas un sommet, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ avec $y, z \in P$ et $y \neq z$.

3. Puisque $y \in P$ et $z \in P$, et en considérant que seules les colonnes A^{v_i} interviennent (les autres composantes étant nulles pour simplifier l'identification au système), on a :

$$b = \sum_{i=1}^{k} y_{v_i} A^{v_i} \quad \text{et} \quad b = \sum_{i=1}^{k} z_{v_i} A^{v_i}$$

Comme les colonnes $\{A^{v_1}, \dots, A^{v_k}\}$ forment une famille libre (linéairement indépendante), la décomposition du vecteur b dans cette base est unique.

4. On en déduit donc $y_{v_i} = z_{v_i}$ pour tout i. Par conséquent $y = z$. C'est une contradiction avec l'hypothèse $y \neq z$. Donc x ne peut pas être exprimé comme une combinaison convexe de points distincts de P. En conclusion, x est bien un sommet.

□

Partie B – À partir d'un sommet

Soit x un sommet de P. Quitte à renuméroter les variables, on suppose que les k premières composantes de x sont strictement positives et que les autres sont nulles :

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_k > 0, \quad x_{k+1} = \dots = x_n = 0.$$

On veut montrer que les colonnes $A^1, \dots, A^k$ sont linéairement indépendantes, en raisonnant par l'absurde.

1. Supposons que les colonnes $A^1, \dots, A^k$ soient linéairement dépendantes. Montrer qu'il existe un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$, non nul, tel que $Ad = 0$ et $d_j = 0$ pour tout $j \in \{k+1, \dots, n\}$.

2. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que les deux points $x^+ = x + \epsilon d$ et $x^- = x - \epsilon d$ appartiennent à P.

3. En déduire que x peut s'écrire comme combinaison convexe non triviale de x^+ et x^-, et conclure.

Solution. 1. Par algèbre linéaire, si les colonnes sont liées, l'écriture du vecteur nul comme combinaison linéaire n'est pas unique. Il existe donc une combinaison linéaire non triviale $\sum_{j=1}^{k} d_j A^j = 0$. On définit alors le vecteur $d = (d_1, \dots, d_k, 0, \dots, 0) \neq 0$ tel que $Ad = 0$.

2. Calculons $A(x \pm \epsilon d)$:

$$A(x \pm \epsilon d) = Ax \pm \epsilon Ad = Ax \pm 0 = Ax \leq b$$

Pour que $x \pm \epsilon d \in P$, il faut aussi vérifier la positivité. Comme $x_j > 0$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$, on peut choisir ϵ suffisamment petit pour que $x_j \pm \epsilon d_j > 0$. Pour $j > k$, $x_j = 0$ et $d_j = 0$, donc la condition est respectée. Ainsi, $x^+ \in P$ et $x^- \in P$.

3. On remarque que :

$$x = \frac{x^+ + x^-}{2}$$

C'est-à-dire que x est le milieu du segment $[x^-, x^+]$. Ceci montre que x peut s'écrire comme une combinaison convexe de deux points distincts de P. Cela signifie que x n'est pas un sommet, ce qui est **ABSURDE** au vu de l'hypothèse initiale. Par conséquent, les colonnes $A^1, \ldots, A^k$ sont obligatoirement linéairement indépendantes.

$\square$