Résolution des Systèmes Linéaires et Décompositions

1 Introduction aux Systèmes Linéaires

Le problème fondamental de l'algèbre linéaire numérique consiste à résoudre un système de la forme :

$$Ax = b$$

où $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ est une matrice carrée et $b \in \mathbb{C}^N$ est un vecteur donné.

1.1 Méthode de Newton pour les systèmes non-linéaires

Pour un système d'équations non-linéaires de la forme $F(x) = 0$, où $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, la généralisation de la méthode de Newton s'écrit par la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n) \tag{1}$$

Ici, $F'(x_n)$ représente la matrice Jacobienne de F évaluée en x_n.

2 Conditions d'existence et d'unicité

Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. L'existence et l'unicité d'une solution pour tout vecteur b ($\exists! Ax = b, \forall b$) sont garanties par les propriétés équivalentes suivantes :

- A est bijective.
- A est injective (d'après le théorème du rang, ceci implique la bijectivité en dimension finie).
- A est surjective.
- $\det A \neq 0$.
- 0 n'est pas une valeur propre (v.p.) de A.

2.1 Cas des matrices non-inversibles

Si A est une matrice carrée non-inversible, la solution n'est pas unique. Une solution existe si et seulement si b appartient à l'image de A :

$$\exists \text{ sol} \iff b \in \text{Im } A = \text{Vect}(A_1, \ldots, A_n) \tag{2}$$

où $A_1, \ldots, A_n$ sont les colonnes de la matrice A.

Example 2.1. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y = \alpha \\ 4x + 8y = \beta \end{cases}$$

L'image de la matrice est donnée par $\text{Im } A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ tq } 2\alpha = \beta \right\}$. Cela correspond au vecteur orthogonal $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}^{\perp}$.

3 Propriétés des Espaces Fondamentaux

Proposition 3.1. Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{N \times M}$, nous avons les décompositions en sommes directes orthogonales suivantes :

1. $\mathbb{C}^N = \text{Im } A \oplus \text{Ker}(A^*)$
2. $\mathbb{C}^M = \text{Im } A^* \oplus \text{Ker}(A)$

Preuve. Montrons que $\text{Ker } A = (\text{Im } A^*)^{\perp}$.

1. Montrons que Ker $A \subset$ (Im $A^*)^{\perp}$: Soit $x \in \text{Ker } A$, donc $Ax = 0$. Soit $y \in \text{Im } A^*$, il existe alors un vecteur z tel que $y = A^*z$. Calculons le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, A^*z \rangle = \langle Ax, z \rangle = \langle 0, z \rangle = 0$$

Ainsi, x est orthogonal à tout élément de $\text{Im } A^*$.

2. Montrons que (Im $A^*)^{\perp} \subset$ Ker A : Soit $x \in (\text{Im } A^*)^{\perp}$. Par définition, pour tout $y \in \text{Im } A^*$, $\langle x, y \rangle = 0$. Puisque tout y s'écrit A^*z, on a :

$$\forall z, \langle x, A^*z \rangle = 0 \iff \forall z, \langle Ax, z \rangle = 0$$

Cela implique nécessairement que $Ax = 0$, donc $x \in \text{Ker } A$. □

Note : Si $A^T y = 0$, cela est équivalent à $y^T A = 0$.

4 Méthodes de Résolution Directe

4.1 Pivot de Gauss

Le pivot de Gauss permet de transformer un système complexe en un système triangulaire supérieur.

Example 4.1. Soit le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes sont :

- $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$

On obtient une structure de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

La complexité algorithmique de cette méthode est en $O(N^3)$.

4.2 Décomposition LU

L'objectif est d'écrire $A = LU$ où L est triangulaire inférieure (Lower) et U est triangulaire supérieure (Upper). Le passage de A à U se fait par des multiplications à gauche par des matrices élémentaires B_n (matrices de type triangulaire inférieur) :

$$U = B_n B_{n-1} \dots B_1 A$$

En posant $L = B_1^{-1} B_2^{-1} \dots B_n^{-1}$, on obtient $A = LU$. En pratique, pour des raisons de stabilité numérique, on utilise une matrice de permutation P pour obtenir la décomposition $PA = LU$. Le système $Ax = b$ devient $LUx = Pb$. On résout alors :

1. $Ly = Pb$ (descente)
2. $Ux = y$ (remontée)

4.3 Décomposition QR

Toute matrice $A \in \mathbb{C}^{N \times M}$ (avec $M \leq N$) peut se décomposer sous la forme $A = QR$, où Q est une matrice orthogonale ($Q^* Q = I_M$) et R est triangulaire supérieure. Le procédé de Gram-Schmidt permet de construire les colonnes q_i de Q à partir des colonnes u_i de A :

$$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$
$$q_2 = \frac{u_2 - \langle q_1, u_2 \rangle q_1}{\|u_2 - \langle q_1, u_2 \rangle q_1\|}$$

On en déduit que $Q = AR^{-1}$.

4.4 Décomposition de Cholesky

Pour une matrice A symétrique définie positive, il existe une décomposition unique de la forme :

$$A = LL^T$$

où L est une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

5 Problèmes de Moindres Carrés

Dans le contexte d'une régression linéaire $y = \alpha X + \beta$, on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise la somme des carrés des résidus :

$$\min \sum_{i=1}^{N} |y_i - (\alpha x_i + \beta)|^2$$

5.1 Formulation Matricielle

Soit $e_i = y_i - (\alpha x_i + \beta)$ le résidu pour chaque point. On cherche à minimiser $\|e\|^2 = \langle e, e\rangle$. En posant $x = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}$, le problème devient :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^M} \|Ax - b\|^2$$

5.2 Équations Normales

Pour $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$ avec $N \gg M$, développons la norme :

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \langle Ax - b, Ax - b\rangle \\ &= (Ax)^T(Ax) - b^T Ax - (Ax)^T b + \|b\|^2 \\ &= x^T A^T Ax - 2(A^T b)^T x + \|b\|^2 \end{aligned}$$

Pour minimiser cette expression, on annule le gradient par rapport à x :

$$2A^T Ax - 2A^T b = 0$$

Ce qui nous donne les **formes normales** :

$$A^T Ax = A^T b \tag{3}$$