Modélisation de la Dynamique des Populations : Modèles Discrets et Continus

1 Modèles Discrets

1.1 Introduction aux modèles discrètes

On désigne par $N(t)$ la population d'individus à l'instant t. L'évolution de la population est régie par l'équation fondamentale du modèle discret :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = n - m + i - e$$

Où :

- $N(t + \Delta t) - N(t)$ représente la **variation de la population**.
- n est le nombre de naissances liées.
- m est le nombre de décès liés.
- i est l'immigration.
- e est l'émigration.
- Le terme $(i - e)$ correspond au **solde de migration**.

1.2 Modèle de croissance géométrique

Definition 1.1 (Hypothèses du modèle). Le modèle de croissance géométrique repose sur les hypothèses suivantes :

- Le solde de migration est nul : $i - e = 0$.
- Le nombre de naissances est proportionnel à la taille de la population : $n = \lambda \Delta t N(t)$, où λ est le **taux de natalité**.
- De même, le nombre de décès est proportionnel à la taille de la population : $m = \mu \Delta t N(t)$, où μ est le **taux de mortalité**.

Modèle : On pose $N_n = N(t_n)$ la taille de la population à l'instant t_n. L'équation devient :

$$N_{n+1} - N_n = \lambda \Delta t N_n - \mu \Delta t N_n$$

En posant $r = \lambda - \mu$ (le **taux de croissance**), nous obtenons :

$$N_{n+1} = (1 + r\Delta t) N_n$$

Avec N_0 donné comme la taille initiale de la population.

Solution. La solution de cette relation de récurrence est :

$$N_n = (1 + r\Delta t)^n N_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

□

1.2.1 Visualisation (pour Δt fixé)

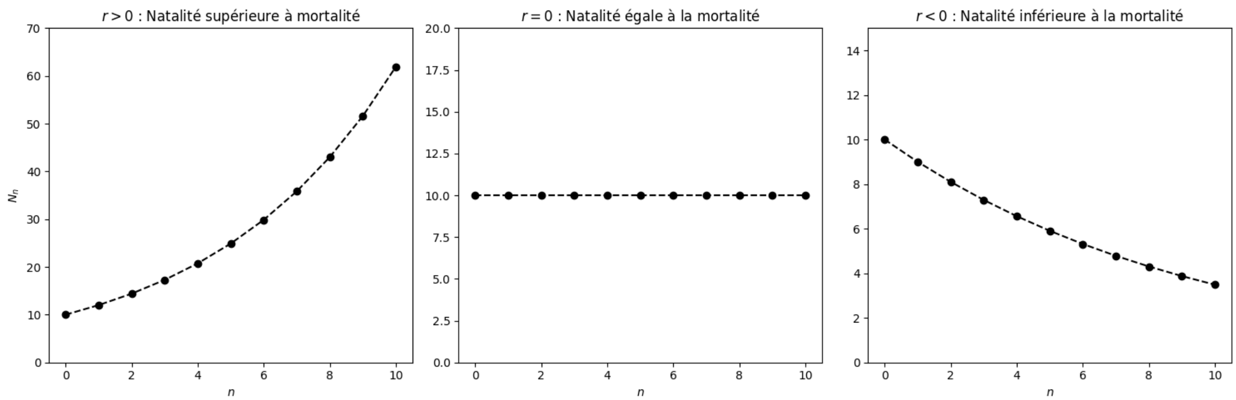

Figure 1: Évolution de la population selon le taux de croissance r

1.2.2 Propriétés et Inconvénients

Propriétés :

- Lorsque $\Delta t \to 0$, la population semble tendre vers une courbe $N(t) = N_0 e^{rt}$, solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

- Si $r > 0$, la population croît indéfiniment.
- Si $r < 0$, il y a extinction de l'espèce.

Inconvénients :

i) Une croissance infinie n'est pas réaliste dans un environnement fini.

ii) Pour être rigoureux, on devrait écrire $E(rN_n)$ (partie entière) car le nombre d'individus doit être entier.

2 Modèles Continus

2.1 Motivation et Passage au Continu

L'observation qui consiste à prendre Δt proche de 0 apporte beaucoup plus d'information. En reprenant le modèle de croissance géométrique :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \lambda \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t)$$

$$\Rightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

En faisant tendre $\Delta t \to 0$, on obtient l'équation différentielle :

$$N'(t) = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

D'où l'équation générale des modèles continus :

$$\underbrace{N'(t)}_{\text{Vitesse de variation}} = \underbrace{n(t)}_{\text{vitesse de naissance}} - \underbrace{m(t)}_{\text{vitesse de décès}} + \underbrace{i(t)}_{\text{vitesse d'immigration}} - \underbrace{e(t)}_{\text{vitesse d'émigration}}$$

2.2 Modèle de Malthus

Definition 2.1 (Modèle de Malthus)**.** Sous les hypothèses suivantes :

- Solde migratoire nul : $i(t) - e(t) = 0$.
- Vitesse de naissance proportionnelle à la population : $n(t) = \lambda N(t)$.
- Vitesse de décès proportionnelle à la population : $m(t) = \mu N(t)$.

Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu)N(t), & t > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Solution. La solution exacte est :

$$N(t) = N_0 e^{(\lambda - \mu)t}$$

□

Propriétés :

- Il peut être vu comme la limite du modèle de croissance géométrique.
- Lorsque $r = \lambda - \mu > 0$, la croissance est proportionnelle.
- Lorsque $r = \lambda - \mu = 0$, la population n'évolue pas.
- Lorsque $r = \lambda - \mu < 0$, la population tend vers 0.

Inconvénients : La croissance exponentielle n'est pas réaliste car elle ne prend pas en compte :

- La limitation des ressources.
- L'interaction avec l'environnement.

2.3 Modèle de Verhulst

Le modèle de Verhulst corrige le modèle de Malthus en prenant en compte la limitation des ressources. L'idée est de limiter la croissance à un seuil K appelé **capacité biotique**.

Definition 2.2 (Hypothèses de Verhulst)**.**

- Solde de migration nul.
- Le taux de natalité est une fonction affine décroissante de la population : $\lambda \approx \lambda_1(1 - \frac{N(t)}{K})$.
- Le taux de mortalité est une fonction affine croissante de la population : $\mu \approx \mu_1(1 - \frac{N(t)}{K})$.

Le modèle complet s'écrit alors :

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Solution. La solution de cette équation logistique est :

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}, \quad t > 0$$

□

2.3.1 Visualisation et Propriétés

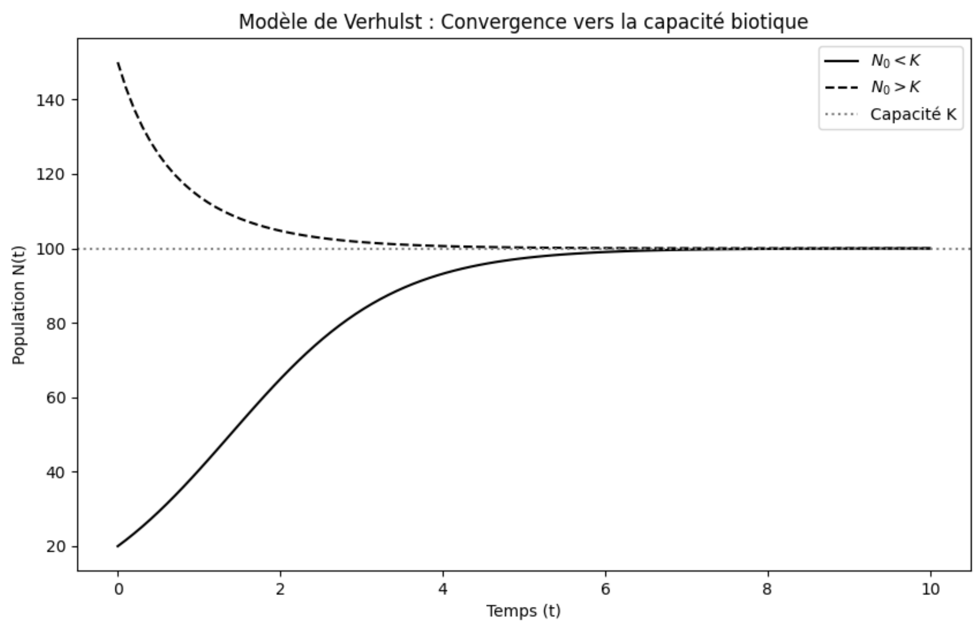

Figure 2: Comportement de la population dans le modèle de Verhulst

Propriétés pour $r > 0$:

- Si $N_0 = 0$ ou $N_0 = K$, alors $N(t) = N_0$ pour tout $t > 0$ (points d'équilibre).
- Si $0 < N_0 < K$, la population N croît ($N \nearrow$).
- Si $N_0 > K$, la population N décroît ($N \searrow$).
- Dans tous les cas où $N_0 > 0$, la population possède une limite :

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K$$

3 Modèle de croissance logistique (Discret)

Il s'agit d'un modèle discret correspondant à la dynamique de Verhulst. On suppose $\Delta t = 1$.

Hypothèses :

- $i - e = 0$
- Le terme $(n - m)$ est une fonction affine de la population : $(n - m) = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K})$.

Modèle : En posant $N_n = N(t_n)$, on a :

$$\begin{cases} N_{n+1} - N_n = rN_n\left(1 - \frac{N_n}{K}\right) \\ N_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Propriétés (À vérifier numériquement) : Le comportement de la suite dépend fortement de la valeur de r :

- Si $r < 2$: la suite converge vers K.
- Si $2 < r < 2.449$: la suite converge vers un cycle (oscillation entre deux valeurs).
- Si $2.449 < r < 2.57$: la suite est encore un cycle, mais plus complexe.
- Si $r > 2.57$: la suite devient chaotique.

Remark 3.1. Exercice à réaliser pour tester ces différents régimes.