

1 Introduction: Notion de Champ de Vecteurs et EDO

1.1 Généralités et Définitions

Nous allons étudier la notion de champ de vecteurs associé à une équation différentielle ordinaire (EDO).

Les modèles continus de la dynamique des populations sont des exemples de problèmes de Cauchy pour les EDOs.

Considérons une EDO du type :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in]t_0, T[, \quad (1)$$

avec la condition initiale :

$$y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

où $y :]t_0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ et $f :]t_0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, et $(t, x) \mapsto f(t, x)$.

2 Analyse Qualitative des Solutions d'EDO

Si l'on veut résoudre analytiquement une EDO, c'est-à-dire donner l'expression de $t \mapsto y(t)$, alors c'est terminé. Dans de nombreux cas, il suffit d'étudier la fonction $t \mapsto y(t)$.

Si l'on ne sait pas déterminer la solution analytique, on peut suivre une approche en deux étapes pour comprendre les solutions :

1. S'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution, et de sa stabilité vis-à-vis des données du problème.
2. Puis analyser les propriétés qualitatives de cette solution par une simple analyse de $f(t, x)$. C'est ici qu'interviennent les champs de vecteurs.

3 Champ de Vecteurs: Définitions et Propriétés

3.1 Vecteur Tangent à une Courbe Paramétrée

Considérons une courbe paramétrée $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$. Le vecteur tangent \vec{v} à cette courbe est donné par :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dx}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{dt}{dx}} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\dot{x}(t)} \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\dot{x}(t)} \\ \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $x(t) = t$, alors $\dot{x}(t) = 1$, et le vecteur tangent devient $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$.

3.2 Lien entre Solution d'EDO et Vecteurs Vitesse

Proposition 3.1. y est solution de l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$ si et seulement si les vecteurs vitesses de la courbe paramétrée $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}$ au point t sont donnés par $u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, y(t)) \end{pmatrix}$.

3.3 Définition d'un Champ de Vecteurs

Definition 3.2. Soit $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs, défini par $(t, y) \mapsto V(t, y)$. Si ce champ de vecteurs est associé à l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$, alors $V(t, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{pmatrix}$.

4 Visualisation des Champs de Vecteurs (Implémentation Python)

4.1 Principe

Pour dessiner un champ de vecteurs, à chaque point $P = (P_x, P_y)$, on trace le vecteur $V \in V(P) = (V_x, V_y)$. On choisit une constante positive pour représenter les vecteurs trop longs.

Figure 1: Schéma de principe pour le dessin d'un champ de vecteurs.

4.2 Utilisation de quiver de Python

Pour implémenter le dessin de champs de vecteurs en Python, on utilise la fonction `quiver` de `matplotlib.pyplot`. Les arguments principaux sont : `plt.quiver(Px, Py, Vx, Vy, angles='xy', scale)`.

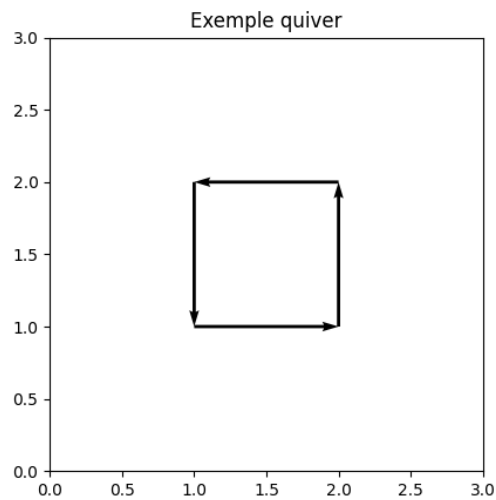


Figure 2: Exemple d'utilisation de quiver

4.3 Contrôle de la Longueur des Vecteurs

On peut ajouter un paramètre pour contrôler la longueur des vecteurs. Il est souvent nécessaire de normaliser les vecteurs pour une visualisation claire du champ de vecteurs.

Pour normaliser les vecteurs (V_x, V_y) , on calcule d'abord la norme :

$$\text{norm} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (3)$$

Puis on normalise chaque composante :

$$\begin{aligned} V_x &= V_x / \text{norm} \\ V_y &= V_y / \text{norm} \end{aligned}$$

