1 Intérieur, Adhérence, Frontière

1.1 Intérieur

Definition 1.1. Soit $A \subseteq E$.

1. Un point $x_0 \in E$ est **intérieur** à A s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subseteq A$.
2. **Int**(A) (l'intérieur de A) : ensemble de tous les points intérieurs de A.

Autre notation : $\mathring{A}$.

Proposition 1.2. $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A. De manière équivalente, $\text{Int}(A)$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans A.

Preuve.

1. **Int**$(A) \subseteq A$ **: évident**. Par définition, tous les points de $\text{Int}(A)$ sont dans A.
2. **Int**(A) **est ouvert**. Soit $x_0 \in \text{Int}(A)$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x_0, \delta_0) \subseteq A$. Pour montrer que $\text{Int}(A)$ est ouvert, il faut montrer que pour tout $x \in \text{Int}(A)$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq \text{Int}(A)$.

   Soit $x \in \text{Int}(A)$. Puisque $x \in \text{Int}(A)$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x, \delta_0) \subseteq A$. Pour montrer que x est un point intérieur de $\text{Int}(A)$, nous devons trouver un $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq \text{Int}(A)$. Choisissons $\delta = \delta_0/2$. Considérons $y \in B(x, \delta)$. Alors $d(y, x) < \delta_0/2$. Pour montrer que $y \in \text{Int}(A)$, nous devons trouver $\delta' > 0$ tel que $B(y, \delta') \subseteq A$. Prenons $\delta' = \delta_0/2$. Si $z \in B(y, \delta')$, alors $d(z, y) < \delta_0/2$. Par l'inégalité triangulaire, $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta_0/2 + \delta_0/2 = \delta_0$. Donc $z \in B(x, \delta_0) \subseteq A$. Ainsi, $B(y, \delta') \subseteq A$, ce qui signifie que $y \in \text{Int}(A)$. Par conséquent, $B(x, \delta) \subseteq \text{Int}(A)$. Donc $\text{Int}(A)$ est ouvert.
3. Si U est ouvert et $U \subseteq A$ alors $U \subseteq \text{Int}(A)$?

   Soit U un ouvert tel que $U \subseteq A$. Pour tout $x_0 \in U$, puisque U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subseteq U$. Comme $U \subseteq A$, on a $B(x_0, \delta) \subseteq A$. Par définition, cela signifie que x_0 est un point intérieur de A, donc $x_0 \in \text{Int}(A)$. Par conséquent, $U \subseteq \text{Int}(A)$.

$\square$

1.2 Adhérence

Definition 1.3. Soit $A \subseteq E$, $x_0 \in E$. x_0 est **adhérent** à A si $\forall \delta > 0$, $B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$. (Équivalent à $d(x_0, A) = 0$).

Adh(A) (adhérence ou fermeture de A) = ensemble des points adhérents à A.

Notée aussi $\overline{A}$.

$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} d(x_0, x)$.
$d(x_0, A) = 0 \iff x_0 \in \text{Adh}(A)$.
$\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) < \delta$. $\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) \leq \delta$. $\forall \delta > 0$, donc $d(x_0, A) = 0$.

Proposition 1.4. $\text{Adh}(A)$ est le plus petit fermé qui contient A (l'intersection de tous les fermés qui contiennent A).

Preuve.

1. $A \subseteq \text{Adh}(A)$: clair. Si $x \in A$, alors pour tout $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ car $x \in B(x, \delta) \cap A$. Donc $x \in \text{Adh}(A)$.
2. $\text{Adh}(A)$ est fermé. Il faut montrer que $E \setminus \text{Adh}(A)$ est ouvert.

   $x_0 \in \text{Adh}(A) \iff \forall \delta > 0, B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$. $x_0 \notin \text{Adh}(A) \iff \exists \delta_0 > 0$ t.q. $B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset$.

$\iff \exists \delta_0 > 0$ t.q. $B(x_0, \delta_0) \subseteq E \setminus A$. $\implies x_0 \in \text{Int}(E \setminus A)$.

Donc $E \setminus \text{Adh}(A) \subseteq \text{Int}(E \setminus A)$.

Réciproquement, si $x_0 \in \text{Int}(E \setminus A)$, alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x_0, \delta_0) \subseteq E \setminus A$. Donc $B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset$. Ainsi $x_0 \notin \text{Adh}(A)$, et donc $x_0 \in E \setminus \text{Adh}(A)$.

$E \setminus \text{Adh}(A) = \text{Int}(E \setminus A)$.

Comme $\text{Int}(E \setminus A)$ est ouvert, son complémentaire $E \setminus \text{Int}(E \setminus A) = \text{Adh}(A)$ est fermé.

$\text{Adh}(A) = E \setminus \text{Int}(E \setminus A)$.

□

1.3 Frontière

Definition 1.5. Soit $A \subseteq E$, la **frontière** de A (ou bord de A) notée $\text{Fr}(A)$ ou ∂A, c'est $\text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(E \setminus A)$.

$x_0 \in \text{Fr}(A) \iff d(x_0, A) = 0$ et $d(x_0, E \setminus A) = 0$.

$\forall \delta > 0$, $B(x_0, \delta)$ intersecte A et aussi $E \setminus A$.

Example 1.6. Exemples dans $\mathbb{R}$ $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. $\text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$.

$\text{Adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. $\text{Adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

$\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. $\text{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Parfois $B_f(x_0, r)$ notée $\overline{B}(x_0, r)$.

Example 1.7. $E = \{a, b, c\}$. On pose $d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$. $d(a, b) = d(b, a) = d(b, c) = d(c, b) = 1$. $d(a, c) = d(c, a) = 2$.

$B(a, 2) = \{a, b\} = \text{Adh}(B(a, 2))$. No it should be $B(a, 2) = \{y \in E : d(a, y) < 2\} = \{a, b\}$. $\text{Adh}(B(a, 2)) = \text{Adh}(\{a, b\})$. Points adherent to $\{a, b\}$ are points x such that for any $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$. For a, $B(a, \delta) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ for any $\delta > 0$. Same for b. For c, $B(c, 1) = \{c\}$, $B(c, 1) \cap \{a, b\} = \emptyset$. So $\text{Adh}(\{a, b\}) = \{a, b\}$. $B_f(a, 2) = \{y \in E : d(a, y) \leq 2\} = \{a, b, c\} = E$.

Proposition 1.8.

1. $\text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \text{Adh}(A)$.
2. $E = \text{Int}(A) \cup \text{Fr}(A) \cup \text{Int}(E \setminus A)$ (union disjointe).
3. $E \setminus \text{Int}(A) = \text{Adh}(E \setminus A)$.
4. $E \setminus \text{Adh}(A) = \text{Int}(E \setminus A)$.
5. $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$.

Proposition 1.9.

1. A ouvert $\iff A = \text{Int}(A)$.
2. A fermé $\iff A = \text{Adh}(A)$.
3. $x \in \text{Adh}(A) \iff d(x, A) = 0$.
4. $x \in \text{Int}(A) \iff d(x, E \setminus A) > 0$.

2 Ensembles Denses

Definition 2.1. Soit $A \subseteq B \subseteq E$. On dit que A est **dense** dans B si $B \subseteq \mathrm{Adh}(A)$.

Soit $x_0 \in B$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) < \epsilon$.

Example 2.2. $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$ dense dans $\mathbb{R}^2$.

3 Suites dans un Espace Métrique

Definition 3.1. Soit E un ensemble. Une **suite** dans E (notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) c'est une fonction $u : \mathbb{N} \to E$ où $n \mapsto u(n)$. On note u_n le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $E = \mathbb{R}^d$. $X_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$ où $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ suites dans $\mathbb{R}$.

Definition 3.2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $x \in E$. On dit que $\lim_{n\to\infty} X_n = x$ si : $(\forall \epsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N})$ t.q. si $n \geq N \implies d(X_n, x) < \epsilon$.

Suite bornée : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ est un ensemble borné.

Remark 3.3. Dans $\mathbb{R}^d$ muni de d_2. $X_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$. $X = (x_1, \ldots, x_d)$. $\lim_{n\to\infty} X_n = X \iff \lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$, $1 \leq i \leq d$.

Proposition 3.4. La limite d'une suite convergente est unique.

Preuve. Soit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x'$. $d(x, x') \leq d(x, X_n) + d(X_n, x')$. $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
$\implies d(x, x') = 0 \implies x = x'$. □

Proposition 3.5 (Lien avec l'adhérence).
1. $x \in \mathrm{Adh}(A)$ ssi il existe une suite (X_n) d'éléments de A t.q. $\lim_{n\to\infty} X_n = x$.
2. A est fermé ssi pour toute suite (X_n) d'éléments de A qui converge vers $x \in E$, on a $x \in A$.

Preuve.
1. " $\implies$ " : Soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$.

   Avec (X_n), $X_n \in A$ et $\lim_{n\to\infty} X_n = x$.

   J'ai $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ t.q. $d(x, x_\epsilon) < \epsilon$. donc $\inf_{y\in A} d(x, y) = 0 = d(x, A)$. $d(x, A) = 0 \implies x \in \mathrm{Adh}(A)$.

   " $\implies$ " soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$. $\implies d(x, A) = 0$. $\implies \forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ t.q. $d(x, x_\epsilon) < \epsilon$. Prendre $\epsilon = 1/n$. Je pose $u_n = x_{1/n}$. $u_n \in A$. $d(x, u_n) \leq 1/n$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = x$.

2. " $\implies$ " soit A fermé donc $A = \mathrm{Adh}(A)$.

   Soit (X_n) suite dans A qui converge vers x. $x \in \mathrm{Adh}(A) = A$. $x \in \mathrm{Adh}(A) \implies x \in A$.

   "$\impliedby$" Réciproquement. Si toute suite dans A qui converge vers x, $x \in A$ (donc A fermé). $A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$, j'ai $A = \mathrm{Adh}(A)$ (donc A fermé). Suites de Cauchy.

□

3.1 Suites de Cauchy

Definition 3.6. Une suite (X_n) est de **Cauchy** si : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(X_p, X_n) < \epsilon$ pour tous $n, p \geq N$.