Extrema, Points Critiques et Espaces Vectoriels Normés

1 Extrema et Points Critiques

1.1 Extrema Locaux

Definition 1.1 (Extremum Local)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine D. On dit que $x_0 \in D$ est un point de :

- **minimum local** si il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) \geq f(x_0)$.
- **maximum local** si il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) \leq f(x_0)$.
- **extremum local** si x_0 est un minimum local ou un maximum local.

1.2 Points Critiques

Definition 1.2 (Point Critique)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert D. On dit que $x_0 \in D$ est un **point critique** de f si le gradient de f en x_0 est nul, c'est-à-dire :

$$\nabla f(x_0) = \vec{0}$$

ou encore, si toutes les dérivées partielles de f en x_0 sont nulles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Theorem 1.3 (Condition Nécessaire d'Extremum Local)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert D. Si $x_0 \in D$ est un extremum local de f, alors x_0 est un point critique de f.

2 Dérivées Partielles d'Ordre Supérieur

2.1 Définitions et Notations

Pour une fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert D, on peut définir les dérivées partielles secondes en dérivant à nouveau les dérivées partielles premières. Par exemple, la dérivée partielle seconde de f par rapport à x_i puis x_j est notée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

De même, on définit les dérivées partielles d'ordre supérieur en dérivant successivement par rapport aux variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}\right)$$

2.2 Théorème de Schwarz

Theorem 2.1 (Théorème de Schwarz (Lemme de Schwarz))**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert D. Alors, pour tout $x \in D$ et pour tous indices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, les dérivées partielles croisées sont égales :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Ce théorème est fondamental car il simplifie le calcul et l'analyse des dérivées secondes. Il stipule que sous condition de régularité (C^2), l'ordre de dérivation n'a pas d'importance.

2.3 Exemple

Considérons la fonction $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$.

Calculons les dérivées partielles premières pour $(x_1, x_2) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{(2x_1x_2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 x_2 - x_2^3)(2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{2x_1x_2^3 + 2x_1x_2^3 + 2x_1^3x_2 - 2x_1^3x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{2x_1x_2^3 + 2x_1x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1x_2(x_2^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{2x_1x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{(x_1^2 - 3x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 x_2 - x_2^3)(2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{x_1^4 + x_1^2x_2^2 - 3x_2^2x_1^2 - 3x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{x_1^4 - x_1^2x_2^2 - x_2^4 - 3x_2^2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} &= \frac{x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

Pour calculer les dérivées partielles à l'origine, nous utilisons la définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{-k^3}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k}{k} = -1$$

Transformation en coordonnées polaires : Soit $x_1 = r\cos\theta$ et $x_2 = r\sin\theta$. Alors $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ et

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2} \\ &= r(\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \\ &= r\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= r\sin\theta\cos(2\theta) \end{aligned}$$

3 Méthode de Calcul de la Dérivée Seconde en un Point

3.1 Méthode Pas à Pas

Pour calculer la dérivée seconde d'une fonction composée, par exemple $g(x_1) = f(x_1, h(x_1))$, où f est une fonction de deux variables et h est une fonction d'une variable, on peut suivre les étapes suivantes :

1. Exprimer $g(x_1)$ en substituant x_2 par $h(x_1)$ dans l'expression de $f(x_1, x_2)$.
2. Calculer la dérivée première de $g(x_1)$, $g'(x_1)$, en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées.
3. Calculer la dérivée seconde de $g(x_1)$, $g''(x_1)$, en dérivant $g'(x_1)$ par rapport à x_1.
4. Évaluer $g''(x_1)$ au point souhaité.

3.2 Exemple

Calculons la dérivée seconde de $g(x_1) = f(x_1, x_1^2)$ au point où c'est possible, avec $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2}{x_1^2 + x_2^2}$.

1. $g(x_1) = f(x_1, x_1^2) = \frac{x_1^2 - x_1^2}{x_1^2 + (x_1^2)^2} = \frac{0}{x_1^2 + x_1^4} = 0$ pour $x_1 \neq 0$. Si $x_1 = 0$, alors $g(0) = f(0,0) = \frac{0-0}{0+0}$, expression indéterminée. Cependant si on prend la limite quand $x_1 \to 0$, $g(x_1) \to 0$. On peut définir $g(0) = 0$ par continuité. Alors $g(x_1) = 0$ pour tout x_1.
2. $g'(x_1) = \frac{d}{dx_1}(0) = 0$.
3. $g''(x_1) = \frac{d}{dx_1}(0) = 0$.
4. $g''(0) = 0$.

Conclusion : $g''(0) = 0$.

Pour vérifier ce résultat en utilisant les dérivées partielles, nous devons utiliser la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{dg}{dx_1}(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_1^2) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_1^2) \cdot 2x_1$$

Pour calculer la dérivée seconde, nous dérivons à nouveau par rapport à x_1:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 g}{dx_1^2}(x_1) &= \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_1^2) + 2x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_1^2)\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_1^2) \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_1^2) \cdot 2x_1 \\
&\quad + 2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_1^2) + 2x_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_1^2) \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_1^2) \cdot 2x_1\right)
\end{aligned}$$

En évaluant en $x_1 = 0$, et en utilisant que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = -1$:

$$\frac{d^2 g}{dx_1^2}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) + 0 + 2\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) + 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) + 2\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$$

Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = -1$ est réalisé comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 - 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

Il y a une erreur dans les notes manuscrites, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) \neq 1$. Refaisons le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 - 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$

. Cette limite n'existe pas. Refaisons le calcul de la dérivée en $x_1 = 0$ pour $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{0-k}{0+k^2} - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k/k^2}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-1}{k^2}$$

Cette limite n'existe pas non plus. Il y a une erreur dans les notes manuscrites.

4 Matrice Hessienne

4.1 Définition de la Matrice Hessienne

Definition 4.1 (Matrice Hessienne)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert D. La **matrice Hessienne** de f au point $x_0 \in D$, notée $H_f(x_0)$, est la matrice carrée d'ordre n des dérivées partielles secondes de f évaluées en x_0 :

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

En utilisant le théorème de Schwarz, la matrice Hessienne est symétrique, c'est-à-dire $H_f(x_0)^T = H_f(x_0)$.

5 Théorème de Taylor d'Ordre 2

5.1 Formule de Taylor d'Ordre 2

Theorem 5.1 (Formule de Taylor d'Ordre 2)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert D. Soit $x_0 \in D$. Alors pour x au voisinage de x_0, on a la formule de Taylor d'ordre 2 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0) h + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

où $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. Ici, h est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\nabla f(x_0) \cdot h$ est le produit scalaire du gradient de f en x_0 avec h, et $h^T H_f(x_0) h$ est la forme quadratique associée à la matrice Hessienne $H_f(x_0)$ évaluée en h.

5.2 Analyse des Points Critiques avec la Formule de Taylor

Si x_0 est un point critique de f, alors $\nabla f(x_0) = \vec{0}$, et la formule de Taylor d'ordre 2 se simplifie :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} h^T H_f(x_0) h + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

Le signe de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est donc déterminé par le signe de la forme quadratique $h^T H_f(x_0) h$ pour h proche de $\vec{0}$. L'étude des valeurs propres de la matrice Hessienne permet de déterminer ce signe et donc la nature du point critique x_0.

6 Nature des Points Critiques

6.1 Théorème sur la Nature des Points Critiques

Theorem 6.1 (Nature des Points Critiques)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert D, et soit $x_0 \in D$ un point critique de f. On considère les valeurs propres de la matrice Hessienne $H_f(x_0)$.

1. Si toutes les valeurs propres de $H_f(x_0)$ sont strictement positives, alors x_0 est un minimum local. Si toutes les valeurs propres sont strictement négatives, alors x_0 est un maximum local.
2. Si la matrice $H_f(x_0)$ a des valeurs propres strictement positives et strictement négatives, alors x_0 n'est pas un extremum local. On dit que x_0 est un point selle (ou point col).
3. Si $H_f(x_0)$ a au moins une valeur propre nulle, on ne peut pas conclure directement sur la nature de x_0 (point critique dégénéré). Une analyse plus poussée est nécessaire.

6.2 Exemple : Point Selle

Considérons la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Calculons ses dérivées partielles premières et secondes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Le gradient est $\nabla f(x,y) = (x, -y)$. Le seul point critique est $(0,0)$. La matrice Hessienne en $(0,0)$ est :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $H_f(0,0)$ sont 1 et -1, qui sont de signes opposés. Donc, $(0,0)$ est un point selle.

Pour visualiser, on peut générer un graphique de la fonction.

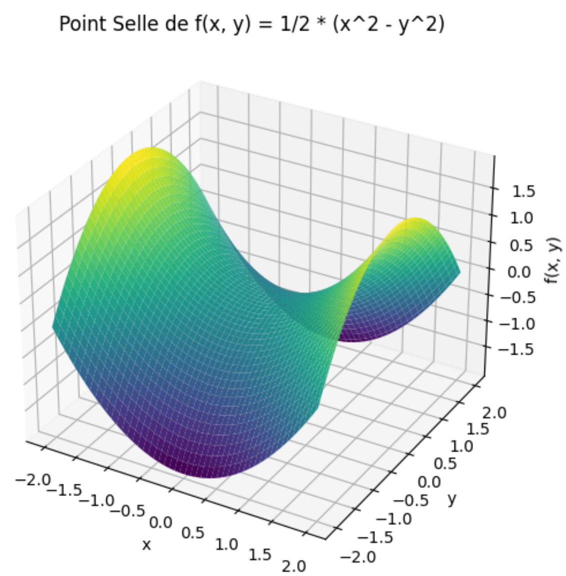

Figure 1: Point Selle de $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

7 Espaces Vectoriels Normés (Rappels)

7.1 Rappels sur les Espaces Vectoriels Normés

Rappels :

- **Espace vectoriel E :** Structure algébrique définie sur un corps $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- **Vecteurs :** Éléments de l'espace vectoriel (notés $x, y, v, \ldots$).
- **Scalaires :** Éléments du corps $\mathbb{K}$ (notés $\lambda, \mu, \alpha, \ldots$).
- **Dimension :** Nombre de vecteurs dans une base de l'espace vectoriel. Dimension finie ou infinie.

- **Vecteur nul :** Élément neutre pour l'addition vectorielle, noté 0 ou $\vec{0}$.
- **Combinaison linéaire :** Expression de la forme $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, où v_i sont des vecteurs et λ_i des scalaires.
- **Famille libre :** Une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
- **Famille génératrice :** Une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_n)$.
- **Base :** Une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.

Dans un espace vectoriel normé, on ajoute la notion de **norme** pour mesurer la "longueur" des vecteurs et définir une topologie.