1 Rappel de cours

Normes sur $\mathbb{R}^d$

Définition des normes usuelles sur $\mathbb{R}^d$

Soit $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. On définit les normes suivantes :

- Norme euclidienne (ou norme ℓ^2) :

$$\|X\| = \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = \sqrt{X \cdot X}$$

- Norme ℓ^1 :

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$$

- Norme ℓ^∞ (ou norme du maximum) :

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

Propriétés des normes

Définition (Norme)

Definition 1.1. Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$ et pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$ (Homogénéité)
2. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (Inégalité triangulaire)
3. $\|X\| \geq 0$ et $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (Séparation)

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Theorem 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|$$

Distances sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$

Définition de la distance euclidienne

Definition 1.3. La distance euclidienne entre deux points $X, Y \in \mathbb{R}^d$ est définie par :

$$d(X, Y) = \|Y - X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$$

Définition générale d'une distance

Definition 1.4. Plus généralement, une distance d sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) \geq 0$ (Positivité)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symétrie)

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Inégalité triangulaire)
4. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Axiome de séparation)

2 Exercices résolus

2.1 Exercice 1

Énoncé de l'exercice 1 : On pose pour $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|X\|_2 = (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{1/2}, \quad \|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|$$

1) Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^d$, $\forall X \in \mathbb{R}^d$.

2) Montrer que

$$\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \|X\|_1, \quad \forall X \in \mathbb{R}^d.$$

3) Montrer que

$$\|X\|_1 \leq d\|X\|_\infty, \quad \forall X \in \mathbb{R}^d.$$

4) Montrer que

$$\|X\|_2 \leq \sqrt{d}\|X\|_\infty, \quad \forall X \in \mathbb{R}^d.$$

Solution (Solution de l'exercice 1)**.** Soit $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Pour $\|\cdot\|_1$:

- $\|\lambda X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{d} |x_i| = |\lambda|\|X\|_1$
- $\|X+Y\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{d}(|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{d} |x_i| + \sum_{i=1}^{d} |y_i| = \|X\|_1 + \|Y\|_1$
- $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \geq 0$. De plus, $\|X\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{d} |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0$ pour tout $i \Leftrightarrow x_i = 0$ pour tout $i \Leftrightarrow X = 0$.

Donc $\|\cdot\|_1$ est une norme.

Pour $\|\cdot\|_\infty$:

- $\|\lambda X\|_\infty = \max_i |\lambda x_i| = |\lambda| \max_i |x_i| = |\lambda|\|X\|_\infty$
- $\|X+Y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i(|x_i| + |y_i|) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$
- $\|X\|_\infty = \max_i |x_i| \geq 0$. De plus, $\|X\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_i |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0$ pour tout $i \Leftrightarrow x_i = 0$ pour tout $i \Leftrightarrow X = 0$.

Donc $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

Pour $\|\cdot\|_2$:

- $\|\lambda X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{d} x_i^2} = |\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = |\lambda|\|X\|_2$
- Inégalité triangulaire (Minkowski) admise.
- $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \geq 0$. De plus, $\|X\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^2 = 0$ pour tout $i \Leftrightarrow x_i = 0$ pour tout $i \Leftrightarrow X = 0$.

Donc $\|\cdot\|_2$ est une norme.

2) Montrons $\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \|X\|_1$:

- **i)** $\|X\|_\infty \leq \|X\|_2$ **:** Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i| = \|X\|_\infty$.

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{i_0}^2 + \cdots + x_d^2} \geq \sqrt{x_{i_0}^2} = |x_{i_0}| = \|X\|_\infty$$

  Donc $\|X\|_\infty \leq \|X\|_2$.

- **ii)** $\|X\|_2 \leq \|X\|_1$ **:**

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i||x_i| \leq \max_i |x_i| \sum_{i=1}^{d} |x_i| = \|X\|_\infty \|X\|_1$$

  Ceci ne marche pas directement.

  On utilise plutôt que $|x_i| \leq \|X\|_1$ et donc $|x_i|^2 \leq |x_i|\|X\|_1$.

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|\|X\|_1 = \|X\|_1 \sum_{i=1}^{d} |x_i| = \|X\|_1^2$$

  Donc $\|X\|_2^2 \leq \|X\|_1^2$. Comme les normes sont positives, on a $\|X\|_2 \leq \|X\|_1$.

3) Montrons $\|X\|_1 \leq d\|X\|_\infty$ **:**

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| = |x_1| + \cdots + |x_d| \leq \max_i |x_i| + \cdots + \max_i |x_i| = d \max_i |x_i| = d\|X\|_\infty$$

Donc $\|X\|_1 \leq d\|X\|_\infty$.

4) Montrons $\|X\|_2 \leq \sqrt{d}\|X\|_\infty$ **:**

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2 \leq (\max_i |x_i|)^2 + \cdots + (\max_i |x_i|)^2 = d(\max_i |x_i|)^2 = d\|X\|_\infty^2$$

Donc $\|X\|_2^2 \leq d\|X\|_\infty^2$. Comme les normes sont positives, on a $\|X\|_2 \leq \sqrt{d}\|X\|_\infty$. $\square$

2.2 Exercice 2

Énoncé de l'exercice 2 : Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^d.$$

Solution (Solution de l'exercice 2)**.** Soient $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $Y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned}\|X+Y\|^2 &= \sum_{i=1}^{d} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{d} (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{d} x_i y_i + \sum_{i=1}^{d} y_i^2 \\ &= \|X\|^2 + 2\sum_{i=1}^{d} x_i y_i + \|Y\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|X-Y\|^2 &= \sum_{i=1}^{d}(x_i-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{d}(x_i^2-2x_iy_i+y_i^2) = \sum_{i=1}^{d}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{d}x_iy_i + \sum_{i=1}^{d}y_i^2 \\ &= \|X\|^2 - 2\sum_{i=1}^{d}x_iy_i + \|Y\|^2\end{aligned}$$

Donc en sommant :

$$\begin{aligned}\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2 &= (\|X\|^2+2\sum_{i=1}^{d}x_iy_i+\|Y\|^2)+(\|X\|^2-2\sum_{i=1}^{d}x_iy_i+\|Y\|^2) \\ &= 2\|X\|^2+2\|Y\|^2 = 2(\|X\|^2+\|Y\|^2)\end{aligned}$$

D'où l'identité du parallélogramme. □

2.3 Exercice 3

Énoncé de l'exercice 3 : Soit $\delta(X,Y)$ la distance usuelle dans $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\delta(X,Y) = \begin{cases} d(X,Y) & \text{si } 0, X, Y \text{ alignés,} \\ d(0,X)+d(0,Y) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Solution (Solution de l'exercice 3)**.** On vérifie les 4 axiomes d'une distance.

1. **Positivité :** $\delta(X,Y) \geq 0$ car d est une distance donc $d(X,Y) \geq 0$ et $d(0,X)+d(0,Y) \geq 0$. **OK**
2. **Symétrie :** $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$.
   - Si $0, X, Y$ alignés, alors $0, Y, X$ alignés et $\delta(X,Y) = d(X,Y) = d(Y,X) = \delta(Y,X)$.
   - Si $0, X, Y$ non alignés, alors $0, Y, X$ non alignés et $\delta(X,Y) = d(0,X)+d(0,Y) = d(0,Y)+d(0,X) = \delta(Y,X)$.

   OK
3. **Axiome de séparation :** $\delta(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.
   - Si $X = Y$, alors $0, X, Y$ alignés et $\delta(X,Y) = d(X,Y) = d(X,X) = 0$.
   - Si $\delta(X,Y) = 0$.
     - Si $0, X, Y$ alignés, alors $\delta(X,Y) = d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.
     - Si $0, X, Y$ non alignés, alors $\delta(X,Y) = d(0,X)+d(0,Y) = 0 \Rightarrow d(0,X) = 0$ et $d(0,Y) = 0 \Rightarrow X = 0$ et $Y = 0 \Rightarrow X = Y = 0$.

   OK
4. **Inégalité triangulaire :** $\delta(X,Y) \leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y)$.
   - **Remarque utile :** Si $0, U, V$ alignés et $0, V, W$ alignés, et $0, U, W$ non alignés, alors $V = 0$.
   - **i) Si** $0, X, Y$ **alignés :** $\delta(X,Y) = d(X,Y)$. On veut montrer $d(X,Y) \leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y)$.
     - **Cas 1)** $0, X, Z$ **alignés et** $0, Z, Y$ **alignés.** Alors $0, X, Y, Z$ alignés.

       $$\delta(X,Z)+\delta(Z,Y) = d(X,Z)+d(Z,Y) \geq d(X,Y) = \delta(X,Y)$$

       (Inégalité triangulaire pour d). **OK**

- **Cas 2)** $0, X, Z$ **non alignés ou** $0, Z, Y$ **non alignés.** Alors $\delta(X,Z)+\delta(Z,Y) \geq \delta(X,Z)$ ou $\delta(X,Z)+\delta(Z,Y) \geq \delta(Z,Y)$. Comme $\delta(X,Z) = d(0,X)+d(0,Z) \geq d(X,0) = d(0,X)$ et $\delta(Z,Y) = d(0,Z) + d(0,Y) \geq d(0,Y)$.

$$\delta(X,Z)+\delta(Z,Y) \geq \max(\delta(X,Z), \delta(Z,Y)) \geq \max(d(0,X), d(0,Y)) \geq d(X,Y) = \delta(X,Y)$$

Si $X = 0$ ou $Y = 0$, c'est immédiat car $\delta(X,Y) = d(X,Y)$ si $0, X, Y$ alignés.

- **ii) Si** $0, X, Y$ **non alignés :** $\delta(X,Y) = d(0,X) + d(0,Y)$. On veut montrer $d(0,X) + d(0,Y) \leq \delta(X,Z) + \delta(Z,Y)$.

$$\delta(X,Z)+\delta(Z,Y) \geq d(0,Z)+d(0,X)+d(0,Z)+d(0,Y) = d(0,X)+d(0,Y)+2d(0,Z) \geq d(0,X)+d(0,Y) = \delta(X,Y$$

Car $d(0,Z) \geq 0$. **OK**

Donc δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$. □

2.4 Exercice 4

Énoncé de l'exercice 4 : On pose pour $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(\frac{y}{x})| = |\log_{10}(y) - \log_{10}(x)|$$

1) Montrer que $d_{\log}$ est une distance sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Calculer $d_{\log}(10^p, 10^q)$ pour $p, q \in \mathbb{Z}$.

3) Montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que

$$d_{\log}(x,y) \leq C|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Indication : prendre $x = 1$ et $y = y_n$ pour une suite (y_n) bien choisie.

4) Montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que

$$|x-y| \leq C d_{\log}(x,y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Solution (Solution de l'exercice 4)**. 1) Montrons que** $d_{\log}$ **est une distance sur** $\mathbb{R}^{+*}$ **:**

1. **Positivité :** $d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(\frac{y}{x})| \geq 0$. **OK**
2. **Symétrie :** $d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(\frac{y}{x})| = |-\log_{10}(\frac{x}{y})| = |\log_{10}(\frac{x}{y})| = d_{\log}(y,x)$. **OK**
3. **Axiome de séparation :** $d_{\log}(x,y) = 0 \Leftrightarrow |\log_{10}(\frac{y}{x})| = 0 \Leftrightarrow \log_{10}(\frac{y}{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 10^0 = 1 \Leftrightarrow y = x$. **OK**
4. **Inégalité triangulaire :**

$$\begin{aligned} d_{\log}(x,z) = |\log_{10}(\frac{z}{x})| = |\log_{10}(\frac{z}{y}\frac{y}{x})| = |\log_{10}(\frac{z}{y}) + \log_{10}(\frac{y}{x})| \\ \leq |\log_{10}(\frac{z}{y})| + |\log_{10}(\frac{y}{x})| = d_{\log}(y,z) + d_{\log}(x,y) = d_{\log}(x,y) + d_{\log}(y,z) \end{aligned}$$

Donc $d_{\log}(x,z) \leq d_{\log}(x,y) + d_{\log}(y,z)$. **OK**

Donc $d_{\log}$ est une distance sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Calculons $d_{\log}(10^p, 10^q)$ **:**

$$d_{\log}(10^p, 10^q) = |\log_{10}(\frac{10^q}{10^p})| = |\log_{10}(10^{q-p})| = |q-p|$$

Donc $d_{\log}(10^p, 10^q) = |p-q|$.

3) Montrons qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ **telle que** $d_{\log}(x, y) \leq C|x - y|$ **:** On prend $x = 1$ et $y = y_n = \frac{1}{n}$. Alors $y_n \to 0$ et $y_n \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\frac{d_{\log}(1, \frac{1}{n})}{|1 - \frac{1}{n}|} = \frac{|\log_{10}(\frac{1/n}{1})|}{|1 - \frac{1}{n}|} = \frac{|\log_{10}(\frac{1}{n})|}{\frac{n-1}{n}} = \frac{|-\log_{10}(n)|}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\log_{10}(n)}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1}\log_{10}(n)$$

$\frac{n}{n-1} \to 1$ et $\log_{10}(n) \to +\infty$. Donc $\frac{d_{\log}(1, \frac{1}{n})}{|1 - \frac{1}{n}|} \to +\infty$. Donc il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $d_{\log}(x, y) \leq C|x - y|$.

4) Montrons qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ **telle que** $|x - y| \leq C d_{\log}(x, y)$ **:** On prend $x = 1$ et $y = y_n = 1 + 10^n$.

$$\frac{|1 - (1 + 10^n)|}{d_{\log}(1, 1 + 10^n)} = \frac{|-10^n|}{|\log_{10}(\frac{1+10^n}{1})|} = \frac{10^n}{|\log_{10}(1 + 10^n)|} = \frac{10^n}{\log_{10}(10^n(10^{-n} + 1))} = \frac{10^n}{\log_{10}(10^n) + \log_{10}(10^{-n} + 1)}$$

$$= \frac{10^n}{n + \log_{10}(10^{-n} + 1)} \sim \frac{10^n}{n} \to +\infty$$

Donc il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $|x - y| \leq C d_{\log}(x, y)$. $\square$