1 Suites de Cauchy et Complétude

Definition 1.1 (Suite de Cauchy)**.** Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique E est dite suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geq N$, on a $d(x_p, x_n) \leq \varepsilon$.

Proposition 1.2. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve. Supposons que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Alors pour tous $n, p \geq N$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leq d(x_n, x) + d(x, x_p) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. □

Proposition 1.3. Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par définition (en prenant $\varepsilon = 1$), il existe N tel que $d(x_n, x_p) \leq 1$ pour $n, p \geq N$. En particulier $d(x_n, x_N) \leq 1$ pour $n \geq N$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_N) \leq \max(\{d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\} \cup \{1\}) =: r_0.$$

Ainsi $x_n \in B(x_N, r_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Definition 1.4 (Espace complet)**.** Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Theorem 1.5. $\mathbb{R}^d$ muni de la distance canonique est complet.

2 Intérieur et Adhérence

Definition 2.1 (Intérieur)**.** Soit $A \subset E$. Un point $x \in E$ est intérieur à A s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A se note $\mathrm{Int}(A)$ et s'appelle l'intérieur de A.

Proposition 2.2. $\mathrm{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A, ou de manière équivalente la réunion de tous les ouverts inclus dans A.

Definition 2.3 (Adhérence)**.** Soit $A \subset E$. Un point $x \in E$ est adhérent à A si $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$. L'ensemble des points adhérents à A se note $\mathrm{Adh}(A)$ et s'appelle l'adhérence ou la fermeture de A.

Proposition 2.4. $\text{Adh}(A)$ est le plus petit fermé contenant A, ou de manière équivalente l'intersection de tous les fermés contenant A.

Proposition 2.5. $x \in \text{Adh}(A)$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Example 2.6. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y < 4\}$. Déterminer $\text{Int}(A)$ et $\text{Adh}(A)$.

- $\text{Int}(A) = A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y < 4\}$. A est ouvert.
- $\text{Adh}(A) = C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \leq 4\}$. C est fermé et contient A.

Example 2.7. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$. Déterminer $\text{Adh}(A)$ et $\text{Int}(A)$.

- $\text{Int}(A) = \emptyset$. Car $\text{Int}(A)$ est un ouvert inclus dans A. Or A ne contient aucune boule ouverte.
- $\text{Adh}(A) = A \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$.

3 Exercices Résolus

Example 3.1. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$. Déterminer $\text{Int}(A)$ et $\text{Adh}(A)$.

Solution.

1. On dessine A, c'est un carré ouvert.
2. On pense que $\text{Int}(A) = B = A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$ et $\text{Adh}(A) = C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
3. Montrons que $B = \text{Int}(A)$.
   - B est ouvert et $B \subset A$. Vrai par définition de B.
   - Soit $X \in A \setminus B = \emptyset$. Donc il n'y a pas de points de A qui ne sont pas dans B. Ainsi $B = \text{Int}(A)$.
4. Montrons que $C = \text{Adh}(A)$.
   - C est fermé et $A \subset C$. Vrai par définition de C.
   - Montrons que $C \subset \text{Adh}(A)$. Pour chaque $X \in C$, on cherche une suite (X_n) avec $X_n \in A$ et $\lim X_n = X$. Soit $X = (x,y) \in C$, i.e., $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. On prend $X_n = (x - 1/n, y - 1/n)$ (si $x = 1$, on prend $x - 1/n$, similarly for y). Plus précisément, soit $X_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n = x - \frac{1}{n}\text{sign}(x)$ si $x \neq 0$ et $x_n = -1/n$ si $x = 0$, et $y_n = y - \frac{1}{n}\text{sign}(y)$ si $y \neq 0$ et $y_n = -1/n$ si $y = 0$. Alors $X_n \in A$ et $\lim X_n = X$.

$\square$

Example 3.2. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$. Déterminer $\text{Adh}(A)$ et $\text{Int}(A)$.

Solution.

1. On dessine A. C'est le graphe de $\sin(1/x)$ pour $x > 0$.
2. On pense que $\text{Int}(A) = \emptyset$ et $\text{Adh}(A) = A \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$. Soit $C = A \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$.
3. Montrons que $\text{Int}(A) = \emptyset$. Si $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, alors $\text{Int}(A)$ est un ouvert non vide inclus dans A. Donc

Int(A) contient une boule $B(X_0, r) \subset A$. Mais A est le graphe d'une fonction, il n'y a pas de boule dans A. Donc Int$(A) = \emptyset$.

4. Montrons que Adh$(A) = C = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$.

   - C est fermé et $A \subset C$. A n'est pas fermé. C est fermé, car si $(X_n) \in C$ et $X_n \to X$, alors $X \in C$. Si $X_n = (x_n, y_n) \in A$, alors $x_n > 0, y_n = \sin(1/x_n)$. Si $X_n \to X = (x, y)$, alors $x_n \to x, y_n \to y$. Si $x > 0$, alors $X \in A \subset C$. Si $x = 0$, on ne peut pas dire que $y = \sin(1/x)$. Mais on sait que $-1 \leq \sin(1/x_n) \leq 1$, donc $-1 \leq y_n \leq 1$, donc $-1 \leq y \leq 1$. Donc si $x = 0$, $X = (0, y)$ avec $y \in [-1, 1]$, donc $X \in C$.
   - Montrons que $C \subset$ Adh(A). Pour $X \in C$, si $X \in A$, alors $X \in$ Adh(A). Si $X \in C \setminus A = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$, i.e., $X = (0, y)$ avec $y \in [-1, 1]$. On doit montrer que $X \in$ Adh(A). On cherche une suite $X_n \in A$ avec $X_n \to X$. On prend $X_n = (\frac{1}{n\pi + \arcsin(y)}, \sin(n\pi + \arcsin(y))) = (\frac{1}{n\pi + \arcsin(y)}, y)$. Alors $X_n \in A$ et $X_n \to (0, y) = X$. Donc $X \in$ Adh(A).

$\square$