1 Espaces Vectoriels Normés

1.1 Norme Uniforme (Sup)

Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. La norme uniforme (ou norme sup) est définie par :

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |u(x)|$$

Cette norme est aussi appelée $\|.\|_U$ dans les notes.

Considérons l'intégrale $I(u) = \int_a^b u(x)dx$. Montrons que I est une application linéaire continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

Proposition 1.1. L'application $I : (E, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $I(u) = \int_a^b u(x)dx$ est linéaire et continue.

Preuve. Linéarité : Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$,

$$\begin{aligned} I(\lambda u + \mu v) &= \int_a^b (\lambda u(x) + \mu v(x))dx \\ &= \lambda \int_a^b u(x)dx + \mu \int_a^b v(x)dx \\ &= \lambda I(u) + \mu I(v) \end{aligned}$$

Continuité (Bornée) :

$$\begin{aligned} |I(u)| &= \left| \int_a^b u(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |u(x)|dx \\ &\leq \int_a^b \sup_{t \in [a,b]} |u(t)|dx \\ &= \int_a^b \|u\|_\infty dx \\ &= (b-a)\|u\|_\infty \end{aligned}$$

Donc $|I(u)| \leq C\|u\|_\infty$ avec $C = (b - a)$. L'application I est donc continue (bornée). □

Calcul de la norme de I.

Proposition 1.2. La norme de l'application linéaire I est $\|I\| = (b - a)$.

Preuve. On sait que $\|I\| = \sup_{\|u\|_\infty = 1} |I(u)|$. On a montré $|I(u)| \leq (b - a)\|u\|_\infty$, donc $\|I\| \leq (b - a)$. Prenons la fonction constante $u_0(x) = 1$. Alors $\|u_0\|_\infty = 1$. $I(u_0) = \int_a^b 1dx = (b - a)$. Donc $|I(u_0)| = (b - a) = (b - a)\|u_0\|_\infty$. Ainsi, le sup est atteint et $\|I\| = (b - a)$. □

1.2 Convergence Uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

Definition 1.3. On dit que (f_n) converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Ceci est équivalent à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in [a,b], |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Lemma 1.4. Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et si chaque f_n est continue, alors f est continue. L'espace $(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach (complet).

Lemma 1.5. Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve. On veut montrer que $\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \to 0$.

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\leq \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|dx \\ &= \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx \\ &= (b-a)\|f_n - f\|_\infty \end{aligned}$$

Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ par convergence uniforme, on a $(b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0$. $\square$

1.3 Exemple de Calcul de Norme

Considérons $E = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $A : E \to E$ définie par $(Au)(x) = \int_0^x u(t)dt$. A est linéaire.

Proposition 1.6. L'opérateur $A : E \to E$ défini par $(Au)(x) = \int_0^x u(t)dt$ est borné et sa norme $\|A\| = 1$ (pour la norme $\|.\|_\infty$).

Preuve. Montrons que A est bornée et calculons sa norme $\|A\|$.

$$\begin{aligned} |(Au)(x)| &= \left|\int_0^x u(t)dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^x |u(t)|dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^x \|u\|_\infty dt\right| \\ &= \|u\|_\infty |x| \end{aligned}$$

Donc $\|Au\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |(Au)(x)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} \|u\|_\infty |x| = \|u\|_\infty \sup_{x\in[-1,1]} |x| = \|u\|_\infty \times 1$. On a $\|Au\|_\infty \leq 1 \times \|u\|_\infty$. Donc A est bornée et $\|A\| \leq 1$.

Pour montrer que $\|A\| = 1$, cherchons une fonction u telle que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|Au\|_\infty$ est proche de 1.

Prenons $u_0(x) = 1$. Alors $\|u_0\|_\infty = 1$. $(Au_0)(x) = \int_0^x 1dt = x$. $\|Au_0\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |x| = 1$. Comme $\|Au_0\|_\infty = 1 \times \|u_0\|_\infty$, le sup est atteint et $\|A\| = 1$. $\square$

Proposition 1.7. Soit $\|A\|_1 = \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \int_{-1}^1 |(Au)(x)|dx$. Alors $\|A\|_1 = 1$.

Preuve. Soit $\|A\|_1 = \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \int_{-1}^1 |(Au)(x)|dx$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 |(Au)(x)|dx &\leq \int_{-1}^1 \|u\|_\infty |x|dx \\
&= \|u\|_\infty \int_{-1}^1 |x|dx \\
&= \|u\|_\infty \left(\int_{-1}^0 -xdx + \int_0^1 xdx\right) \\
&= \|u\|_\infty \left(\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right) \\
&= \|u\|_\infty \left((0 - (-\frac{1}{2})) + (\frac{1}{2} - 0)\right) = \|u\|_\infty \times 1
\end{aligned}$$

Donc $\|A\|_1 \leq 1$. Prenons $u_0(x) = 1$. $\int_{-1}^1 |(Au_0)(x)|dx = \int_{-1}^1 |x|dx = 1$. Donc $\|A\|_1 = 1$. $\square$

Considérons la fonction $u(x) = 1 - |x|$ sur $[-1, 1]$.

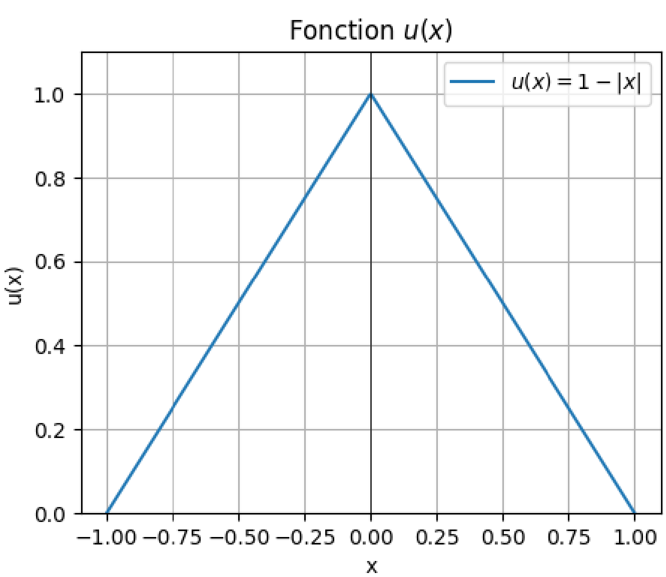

Figure 1: Fonction $u(x) = 1 - |x|$.

Considérons une suite de fonctions (f_n) dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$. Soit $f_n(x)$ la fonction "chapeau" centrée en x_0, de hauteur C_n et de largeur $2/n$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_0 - 1/n \\ C_n(1 - n|x - x_0|) & \text{si } x_0 - 1/n \leq x \leq x_0 + 1/n \\ 0 & \text{si } x \geq x_0 + 1/n \end{cases}$$

Supposons $a < x_0 - 1/n$ et $x_0 + 1/n < b$. L'intégrale de f_n est l'aire du triangle :

$$\int_a^b f_n(x)dx = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \times C_n = \frac{C_n}{n}$$

Si on veut $\|f_n\|_1 = \int_a^b |f_n(x)|dx = 1$, il faut choisir $C_n = n$. Dans ce cas, $f_n(x) = n(1 - n|x - x_0|)$ sur $[x_0 - 1/n, x_0 + 1/n]$. La norme sup est $\|f_n\|_\infty = \max f_n(x) = f_n(x_0) = C_n = n$. Donc on a $\|f_n\|_1 = 1$ mais $\|f_n\|_\infty = n \to \infty$. Les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $C^0([a, b])$.

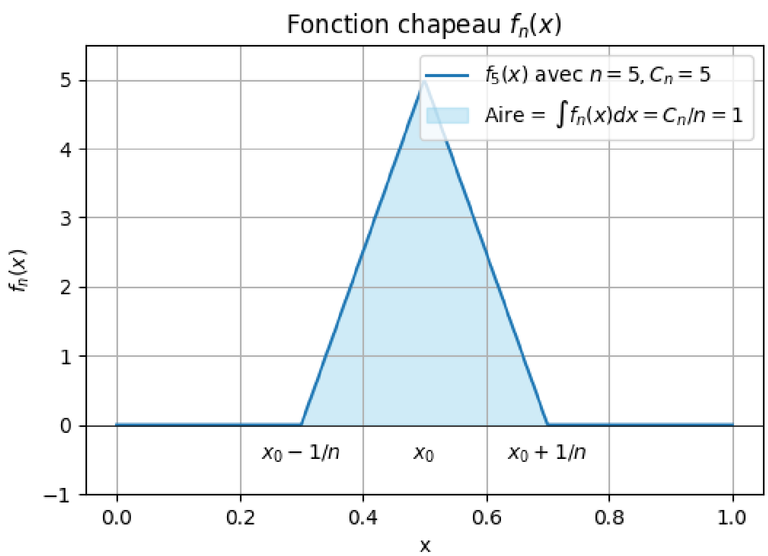

Figure 2: Fonction chapeau $f_n(x)$ avec $C_n = n$ pour que $\|f_n\|_1 = 1$.

Considérons la preuve que si $\|f_n\|_1 \to 0$, alors $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas forcément vers 0. Soit $f_n(x)$ comme ci-dessus avec $C_n = \sqrt{n}$. $\|f_n\|_1 = C_n/n = \sqrt{n}/n = 1/\sqrt{n} \to 0$. $\|f_n\|_\infty = C_n = \sqrt{n} \to \infty$.

Considérons l'opérateur $m : C^0([a, b]) \to C^0([a, b])$ défini par $(mf)(x) = m(x)f(x)$ où $m(x)$ est une fonction continue donnée. Soit $A = m$. A est linéaire. $\|(Af)(x)\| = |m(x)f(x)| = |m(x)||f(x)|$. $\|Af\|_\infty = \sup_x |m(x)f(x)| \leq (\sup_x |m(x)|)(\sup_x |f(x)|) = \|m\|_\infty \|f\|_\infty$. Donc $\|A\| \leq \|m\|_\infty$. Pour montrer l'égalité, supposons m non nulle. Soit x_0 tel que $|m(x_0)| = \|m\|_\infty$. Considérons une suite de fonctions (f_n) "pic" centrées en x_0 telles que $f_n(x_0) = 1$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et le support de f_n se contracte vers x_0. Par exemple, $f_n(x) = \max(0, 1 - n|x - x_0|)$.

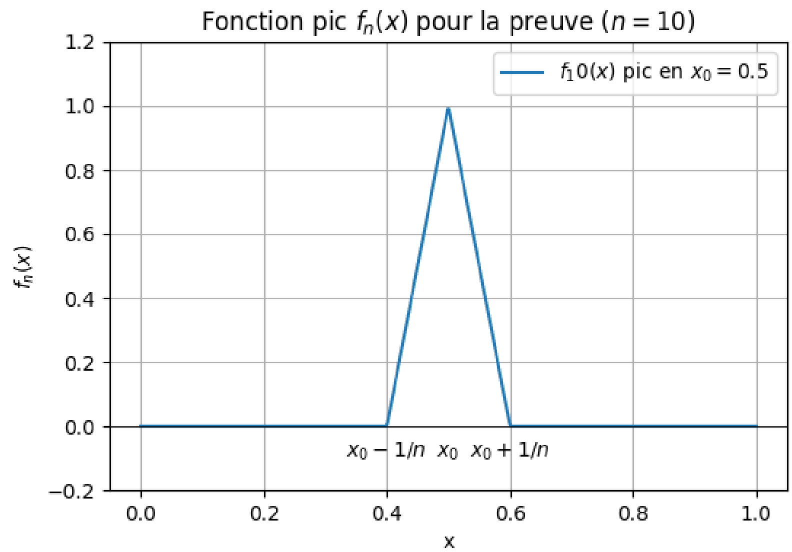

Figure 3: Fonction pic $f_n(x)$ utilisée dans la preuve.

$|(Af_n)(x)| = |m(x)f_n(x)|$. $\|Af_n\|_\infty = \sup_x |m(x)f_n(x)|$. Comme f_n est concentrée autour de x_0, et $f_n(x_0) = 1$, $\|Af_n\|_\infty$ sera proche de $|m(x_0)|\|f_n\|_\infty = \|m\|_\infty$. Plus formellement : Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de m, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$, alors $|m(x) - m(x_0)| < \epsilon$. Choisissons n assez grand pour que $1/n < \delta$. Alors le support de f_n est dans $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Pour x dans le support de f_n, on a $|m(x)| \geq |m(x_0)| - |m(x) - m(x_0)| > \|m\|_\infty - \epsilon$. $\|Af_n\|_\infty = \sup_{|x-x_0|\leq 1/n} |m(x)f_n(x)|$. Puisque $f_n(x_0) = 1$, $\|Af_n\|_\infty \geq |m(x_0)f_n(x_0)| = |m(x_0)| = \|m\|_\infty$. D'autre part, $\|Af_n\|_\infty = \sup_{|x-x_0|\leq 1/n} |m(x)f_n(x)| \leq \sup_{|x-x_0|\leq 1/n} |m(x)| \times \|f_n\|_\infty$. Comme $\|f_n\|_\infty = 1$, $\|Af_n\|_\infty \leq \sup_{|x-x_0|\leq 1/n} |m(x)|$. Par continuité, $\lim_{n\to\infty} \sup_{|x-x_0|\leq 1/n} |m(x)| = |m(x_0)| = \|m\|_\infty$. Donc $\lim_{n\to\infty} \|Af_n\|_\infty = \|m\|_\infty$. Puisque $\|Af_n\|_\infty \leq \|A\|\|f_n\|_\infty = \|A\|$, en passant à la limite, on obtient $\|m\|_\infty \leq \|A\|$. Comme on avait déjà $\|A\| \leq \|m\|_\infty$, on conclut que $\|A\| = \|m\|_\infty$.

1.4 Normes équivalentes

Definition 1.8 (Normes topologiquement équivalentes)**.** Soit E un espace vectoriel. Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont topologiquement équivalentes si (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes ensembles ouverts.

Definition 1.9 (Normes équivalentes)**.** Soit E un espace vectoriel. Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes (on écrit $N_1 \sim N_2$) s'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall X \in E, \quad N_1(X) \leq C_1 N_2(X) \quad \text{et} \quad N_2(X) \leq C_2 N_1(X)$$

Ceci peut se réécrire : il existe $C > 0$ tel que

$$\forall X \in E, \quad C^{-1} N_2(X) \leq N_1(X) \leq C N_2(X)$$

Theorem 1.10 (Equivalence topologique et équivalence des normes)**.** Deux normes sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

Preuve. (Esquisse basée sur 6.6.3 du textbook) Soit $Id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $Id : (E, N_2) \to (E, N_1)$. Les deux topologies sont les mêmes si et seulement si ces deux applications identité sont continues. Une application linéaire est continue si et seulement si elle est bornée (Théorème 6.14). $Id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est continue $\iff$ elle est bornée $\iff$ $\exists C_1 > 0$ tel que $\|Id(x)\|_{N_2} \leq C_1 \|x\|_{N_1}$, i.e., $N_2(x) \leq C_1 N_1(x)$. $Id : (E, N_2) \to (E, N_1)$ est continue $\iff$ elle est bornée $\iff$ $\exists C_2 > 0$ tel que $\|Id(x)\|_{N_1} \leq C_2 \|x\|_{N_2}$, i.e., $N_1(x) \leq C_2 N_2(x)$. Ces deux conditions réunies correspondent à la définition de normes équivalentes. □

Theorem 1.11 (Admission - Equivalence des normes en dimension finie). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve. (Esquisse basée sur Thm 6.9 du textbook) On peut supposer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$). Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On identifie E à $\mathbb{R}^n$. La norme $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Montrons que N est équivalente à $\|.\|_\infty$. Pour $x = \sum x_i e_i$, on a $N(x) = N(\sum x_i e_i) \leq \sum |x_i| N(e_i) \leq (\sum N(e_i)) \max |x_i| = C\|x\|_\infty$ avec $C = \sum N(e_i)$. Montrons qu'il existe $a > 0$ tel que $a\|x\|_\infty \leq N(x)$. La fonction $N : (\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue. En effet, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq C\|x - y\|_\infty$. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. S est la sphère unité pour $\|.\|_\infty$. S est fermée (car l'application $x \mapsto \|x\|_\infty$ est continue) et bornée. Par le théorème de Borel-Lebesgue (Thm 3.36), S est compacte. La fonction continue N atteint ses bornes sur le compact S. Comme $N(x) > 0$ pour $x \neq 0$ (donc pour $x \in S$), le minimum de N sur S est $a > 0$. Donc $\forall x \in S$, $N(x) \geq a$. Pour tout $x \neq 0$, le vecteur $y = x/\|x\|_\infty$ est dans S. Donc $N(y) \geq a$. $N(x/\|x\|_\infty) \geq a \implies \frac{1}{\|x\|_\infty} N(x) \geq a \implies N(x) \geq a\|x\|_\infty$. On a donc montré $a\|x\|_\infty \leq N(x) \leq C\|x\|_\infty$. N est équivalente à $\|.\|_\infty$. Comme l'équivalence est une relation d'équivalence, toutes les normes sont équivalentes entre elles. □

2 Applications Linéaires et Bornées

Definition 2.1 (Application linéaire bornée)**.** Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $A : E \to F$ est dite **bornée** (ou continue) s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$$

Proposition 2.2. Pour une application linéaire $A : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est continue.
2. A est continue en 0_E.
3. A est bornée.

Definition 2.3 (Norme d'opérateur)**.** Si $A : E \to F$ est une application linéaire bornée, on définit sa **norme** (appelée norme d'opérateur ou norme uniforme) par :

$$\|A\| = \sup_{x \in E, x \neq 0_E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|Ax\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F$$

C'est la plus petite constante C telle que $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Proposition 2.4. Soit $A \in B(E,F)$ (l'espace des applications linéaires bornées de E dans F).

1. $\|.\|$ est une norme sur $B(E,F)$.
2. On a $\|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.
3. $\|A\|$ est la plus petite constante C telle que $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$.

Proposition 2.5. Si $A \in B(E,F)$ et $B \in B(F,G)$, alors $B \circ A \in B(E,G)$ et

$$\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|$$

Si $E = F = G$, on note $B(E) = B(E,E)$, alors pour $A, B \in B(E)$,

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Preuve. $\|(B \circ A)x\|_G = \|B(Ax)\|_G \leq \|B\|\|Ax\|_F \leq \|B\|(\|A\|\|x\|_E) = (\|B\|\|A\|)\|x\|_E$. Donc $\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|$. □

3 Le cas des matrices

On identifie une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ (ou $M_n(\mathbb{R})$) avec l'application linéaire associée $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie n^2. Toutes les normes y sont donc équivalentes. La norme la plus utile est la norme uniforme (norme d'opérateur) obtenue à partir de la norme euclidienne $\|.\|_2$ sur $\mathbb{K}^n$.

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

Definition 3.1 (Matrice adjointe)**.** Soit $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$. La matrice **adjointe** de A, notée A^*, est la matrice $B = [b_{ij}]$ telle que $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. (Transposée conjuguée). On a la propriété : $\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad (Ax|y) = (x|A^*y)$, où $(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$ est le produit scalaire hermitien standard.

Definition 3.2 (Matrice autoadjointe)**.** A est dite **autoadjointe** (ou hermitienne) si $A = A^*$.

Lemma 3.3. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$:

$$\|A^*\| = \|A\| \quad \text{et} \quad \|A^*A\| = \|A\|^2$$

Preuve. On utilise $\|A\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(Ax|y)|$. $|(Ax|y)| = |(x|A^*y)|$. Donc $\|A\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(x|A^*y)| = \|A^*\|$. Pour la seconde égalité : $\|Ax\|_2^2 = (Ax|Ax) = (x|A^*Ax)$. Donc $\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_2^2 = \sup_{\|x\|=1}(x|A^*Ax)$. La matrice $B = A^*A$ est autoadjointe. Pour une matrice autoadjointe B, on sait que $\sup_{\|x\|=1}(x|Bx)$ est égal à la plus grande valeur propre de B. (Ceci est lié au quotient de Rayleigh). D'autre part, $\|A^*A\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A^*A)x\|_2$. Comme A^*A est autoadjointe, $\|A^*A\|$ est égal au maximum du module de ses valeurs propres. Les valeurs propres de A^*A sont réelles et positives ou nulles. Soit $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre. Alors $\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1}(x|A^*Ax) = \lambda_{\max}(A^*A)$. Et $\|A^*A\| = \max |\lambda_i(A^*A)| = \lambda_{\max}(A^*A)$ car $\lambda_i \geq 0$. Donc $\|A\|^2 = \|A^*A\|$. □

Theorem 3.4 (Calcul de la norme matricielle). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice autoadjointe positive A^*A. Alors

$$\|A\| = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}$$

Les racines carrées des valeurs propres de A^*A sont appelées les valeurs singulières de A. Donc $\|A\|$ est la plus grande valeur singulière de A.

Preuve. Comme $\|A\|^2 = \|A^*A\|$ et A^*A est autoadjointe, sa norme $\|A^*A\|$ est égale au maximum du module de ses valeurs propres (qui sont réelles et ≥ 0). Donc $\|A\|^2 = \max \lambda_i(A^*A)$. D'où $\|A\| = \sqrt{\max \lambda_i}$. ProofDémonstration $\square$

Lemma 3.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la norme matricielle). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. $\|Ax\|_2^2 = (x|A^*Ax)$. Comme A^*A est autoadjointe, elle admet une base orthonormée $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs propres avec les valeurs propres réelles $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$. Soit $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$. Alors $\|x\|_2^2 = \sum |c_i|^2$. $A^*Ax = A^*A(\sum c_i v_i) = \sum c_i(A^*Av_i) = \sum c_i \lambda_i v_i$. $(x|A^*Ax) = (\sum c_j v_j | \sum c_i \lambda_i v_i) = \sum_{i,j} \overline{c_j} c_i \lambda_i (v_j|v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |c_i|^2$. Donc $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i |c_i|^2$. On a $\|Ax\|_2^2 = \sum \lambda_i |c_i|^2 \leq (\max \lambda_j) \sum |c_i|^2 = (\max \lambda_j)\|x\|_2^2$. $\max \lambda_j = \|A\|^2$. Donc $\|Ax\|_2^2 \leq \|A\|^2 \|x\|_2^2$, ce qui redonne $\|Ax\|_2 \leq \|A\| \|x\|_2$.

Definition 3.6 (Norme de Hilbert-Schmidt).

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{Tr(A^*A)}$$

où Tr est la trace de la matrice.

Proposition 3.7. On a $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$.

Preuve. Par Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{K}^n$: $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)$ $\|Ax\|_2^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \|x\|_2^2 = \|A\|_{HS}^2 \|x\|_2^2$. Donc $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_2 \leq \|A\|_{HS}$. $\square$