1 Espaces Vectoriels Normés

1.1 Espaces Vectoriel Normés

Definition 1.1 (Espace Vectoriel Normé). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
2. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).
3. $N(x) = 0 \implies x = 0_E$.

Un espace vectoriel E muni d'une norme N se note (E, N) et s'appelle un espace vectoriel normé.

Remark 1.2. Il est habituel de noter une norme par $\|x\|$ plutôt que par $N(x)$. On rencontre parfois dans la littérature le symbole $|||A|||$ quand A est une application linéaire ou une matrice, qui est à éviter.

Definition 1.3 (Semi-norme). Une fonction $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant seulement les propriétés (1) et (2) de la Définition 1.1 est appelée une **semi-norme**.

Comme pour la valeur absolue, on déduit facilement de la propriété (2) de la Définition 1.1 que

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y), \forall x, y \in E. \tag{1}$$

1.1.1 Norme induite

Si $(E, \|.\|)$ est un evn et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, la restriction de $\|.\|$ à F fait de $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1.1.2 Exemples

Soit $E = \mathbb{K}^n$ dont les éléments sont notés $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$. E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. On pose:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2},$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

et plus généralement

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{2}$$

Les fonctions $\|.\|_p$ pour $1 \leq p \leq \infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. C'est facile à vérifier pour $p = 1, \infty$, et déjà vu pour $p = 2$. Pour p quelconque, l'inégalité triangulaire s'appelle *l'inégalité de Minkowski*.

Soit X un ensemble et soit $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ bornées, c'est à dire telles que $\|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$. $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

$\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ est de dimension finie n si et seulement si X possède exactement n éléments (exercice).

Soit $R([a, b]; \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. $R([a, b]; \mathbb{K})$ est de dimension infinie. En effet si on note par $1_{\{c\}}(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x = c$ et 0 sinon, alors pour toute famille finie $\{c_1, ..., c_N\}$ avec $c_i \in [a, b]$ les vecteurs $1_{\{c_1\}}, ..., 1_{\{c_N\}}$ forment une famille libre de $R([a, b]; \mathbb{K})$ (exercice).

La fonction

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \tag{3}$$

est une semi-norme sur $R([a, b]; \mathbb{K})$. À nouveau l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_p$ s'appelle l'*inégalité de Minkowski (pour les intégrales).* Ce n'est pas une norme car la fonction $f(x) = 1_{\{c\}}(x)$ pour $c \in [a, b]$ est non nulle mais $\|f\|_p = 0$.

1.2 Considérons maintenant l'espace $C([a, b]; \mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a, b]$

$C([a, b]; \mathbb{K})$ est de dimension infinie car les familles $(1, x, x^2, ..., x^n)$ sont libres pour tout $n \in \mathbb{N}$ (exercice).

$\|.\|_p$ est une norme sur $C([a, b]; \mathbb{K})$. En effet si $\int_a^b |u(x)|^p dx = 0$ et u continue, alors $u(x) = 0$ sur $[a, b]$.

Soit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour $1 \leq p < \infty$ on pose

$$l^p(\mathbb{N}; \mathbb{K}) = \left\{ (a_n) : \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p \text{ converge} \right\}. \tag{4}$$

On vérifie que $l^p(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et que

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \tag{5}$$

est une norme sur $l^p(\mathbb{N}; \mathbb{K})$.

De même

$$l^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{K}) = \left\{ (a_n) : \sup_{n \geq 0} |a_n| < \infty \right\}, \tag{6}$$

est un espace vectoriel et

$$\|a\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |a_n| \tag{7}$$

est une norme sur $l^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{K})$. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ainsi que $l^p(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ sont de dimension infinie. En effet en notant par δ_p la suite définie par $\delta_{p,n} = 1$ si $n = p$ et 0 sinon, $(\delta_1, ..., \delta_N)$ est une famille libre pour tout $N \in \mathbb{N}$.

1.3 Topologie des espaces vectoriels normés

1.3.1 Distance induite par une norme

Definition 1.4 (Distance induite par une norme)**.** Soit $(E, \|.\|)$ un evn. La fonction $E \times E \ni (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E, appelée distance induite par la norme $\|.\|$.

On peut alors définir les boules de centre $a \in E$ de rayon r comme

$$B(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\},$$
$$B_f(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\},$$

les ensembles ouverts, fermés, compacts etc. de E.

Definition 1.5 (Espace de Banach)**.** Un espace vectoriel normé complet s'appelle un espace de **Banach**.

Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets (quelque soit la norme dont ils sont équipés).

Par contre un espace vectoriel normé de dimension *infinie* n'est pas nécessairement complet.

Les espaces $(\mathcal{B}(X; \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$, $(C([a, b]; \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$, $(l^p(\mathbb{N}; \mathbb{K}), \|.\|_p)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ sont complets.

L'espace $(C([a,b];\mathbb{K}), \|.\|_p)$ pour $1 \le p < \infty$ n'est pas complet, voir la Proposition 1.6.

Dans un espace de Banach les ensembles fermés et bornés ne sont pas toujours compacts, voir la Proposition 1.7. En fait on peut montrer que la boule unité fermée $B_f(x_0, r)$ est compacte dans $(E, \|.\|)$ si et seulement si E est de dimension finie.

1.3.2 Exemples

Donnons un exemple d'espace vectoriel normé de dimension infinie qui n'est pas complet.

Proposition 1.6. L'espace $E = C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ n'est pas complet.

Preuve. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} - n^{-1}, \\ \frac{n}{2}(x - (\frac{1}{2} - n^{-1})) & \text{si } \frac{1}{2} - n^{-1} \le x \le \frac{1}{2} + n^{-1}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} + n^{-1} \le x \le 1, \end{cases} \tag{8}$$

et

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases} \tag{9}$$

On vérifie directement que $\|f - f_n\|_1 \to 0$ et donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_1 \le \epsilon$ si $n > N$. Si $n, p > N$ on a donc $\|f_n - f_p\|_1 \le \|f_n - f\|_1 + \|f_p - f\|_1 \le 2\epsilon$, donc (f_n) est de Cauchy dans $(C([0,1];\mathbb{R}), \|.\|_1)$.

Supposons qu'il existe $g \in C([0,1];\mathbb{R})$ tel que $\|f_n - g\|_1 \to 0$. On a donc $\|f - g\|_1 = 0$, donc

$$\int_0^1 |f - g|(x)dx = \int_0^{1/2} |f - g|(x)dx + \int_{1/2}^1 |f - g|(x)dx = 0. \tag{10}$$

Puisque $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1/2]$ et $f(x) = 1$ pour $x \in (1/2, 1]$, si g était continue et $\|f - g\|_1 = 0$, alors $g(x) = f(x)$ presque partout. Cependant, f est discontinue en $x = 1/2$, donc g ne peut pas être continue et égale à f partout. Plus précisément, si $\int_0^{1/2} |0 - g(x)|dx = 0$ et g est continue, alors $g(x) = 0$ sur $[0, 1/2]$. De même, si $\int_{1/2}^1 |1 - g(x)|dx = 0$ et g est continue, alors $g(x) = 1$ sur $[1/2, 1]$. C'est une contradiction car une fonction continue ne peut pas être à la fois 0 sur $[0, 1/2]$ et 1 sur $[1/2, 1]$ à moins d'être constante et égale à la fois à 0 et à 1, ce qui est impossible. Ainsi, g ne peut pas être continue. La suite de Cauchy (f_n) ne converge pas dans $(C([0,1];\mathbb{R}), \|.\|_1)$. □

Voici maintenant un exemple d'espace de Banach de dimension infinie dans lequel les ensembles fermés bornés ne sont pas nécessairement compacts.

Proposition 1.7. Dans l'espace $E = (l^1(\mathbb{N};\mathbb{R}), \|.\|_1)$ la boule unité fermée $B_f(0,1)$ n'est pas compacte.

Preuve. Pour éviter des complications de notation, on note un élément de E (c'est à dire une suite réelle) par u, et le n-ième terme de u par $u(n)$. On note que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé on a

$$|u(n)| \le \|u\|_1, \quad u \in E. \tag{11}$$

Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par $u_p(n) = \delta_{np}$. On a $\|u_p\|_1 = 1$, donc $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $B_f(0,1)$ qui est un ensemble fermé et borné dans E. Supposons qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(p)})$ qui converge vers $u \in E$. Par l'inégalité triangulaire (Définition 1.1, propriété 2) on a

$$|\|u\|_1 - \|u_{\varphi(p)}\|_1| \le \|u - u_{\varphi(p)}\|_1, \tag{12}$$

donc en faisant $p \to \infty$ on a $\|u\|_1 = 1$. D'après l'inégalité (**??**) appliqué à $u_{\varphi(p)} - u$ on a

$$|u_{\varphi(p)}(n) - u(n)| \leq \|u_{\varphi(p)} - u\|_1, \tag{13}$$

donc pour n fixé $\lim_{p\to\infty} |u_{\varphi(p)}(n) - u(n)| = 0$. Comme $u_{\varphi(p)}(n) = 0$ dès que $\varphi(p) > n$ et pour p suffisamment grand, $\varphi(p) > n$, donc on déduit que $u(n) = 0$. Comme n est arbitraire, u est la suite nulle ce qui contredit le fait que $\|u\|_1 = 1$. La boule unité fermée dans E est donc fermée et bornée mais non compacte. □

1.4 Normes équivalentes

Un point important à garder à l'esprit est que la notion d'ensembles ouverts, d'applications continues, d'ensembles compacts etc. dans un espace vectoriel E dépend a priori du choix d'une norme sur E. Deux normes différentes sur E conduisent en général à deux topologies différentes.

Definition 1.8 (Normes topologiquement équivalentes et équivalentes)**.** Soit N_1, N_2 deux normes sur un espace vectoriel E.

1. On dit que N_1 et N_2 sont topologiquement équivalentes si (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes ensembles ouverts.

2. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes (on écrit parfois $N_1 \sim N_2$) si il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\begin{aligned} &N_1(x) \leq C_1 N_2(x), \\ &N_2(x) \leq C_2 N_1(x), \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

On peut réécrire la condition (2) de la Définition 1.8 de manière plus élégante comme: il existe $C > 0$ tel que

$$C^{-1} N_2(x) \leq N_1(x) \leq C N_2(x), \forall x \in E, \tag{14}$$

(prendre $C = \max(C_1, C_2)$). La taille des constantes C_1, C_2 ou C n'a que peu d'importance.

Il est facile de voir que si $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$ alors $N_1 \sim N_3$ (la relation $\sim$ comme la relation d'équivalence topologique sont des relations d'équivalence).

Theorem 1.9. Deux normes sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

La démonstration sera faite dans la section 6.6.3.

Remark 1.10. Il est facile de voir que les normes $\|.\|_p$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes entre elles. En effet on vérifie (exercice) que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{15}$$

On verra dans la suite un résultat a priori surprenant qui affirme que toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

Par contre les normes $\|.\|_p$ sur $C([a,b];\mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes entre elles. Par exemple si $[a,b] = [-1,1]$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & \text{si } |x| \leq n^{-1}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{16}$$

(tracer son graphe), on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = n^{-1}$. Ceci entraine qu'il n'existe pas de constante C telle que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ pour tout $f \in C([-1,1];\mathbb{K})$ (prendre $f = f_n$ and let $n \to \infty$).

1.4.1 Équivalence des normes en dimension finie

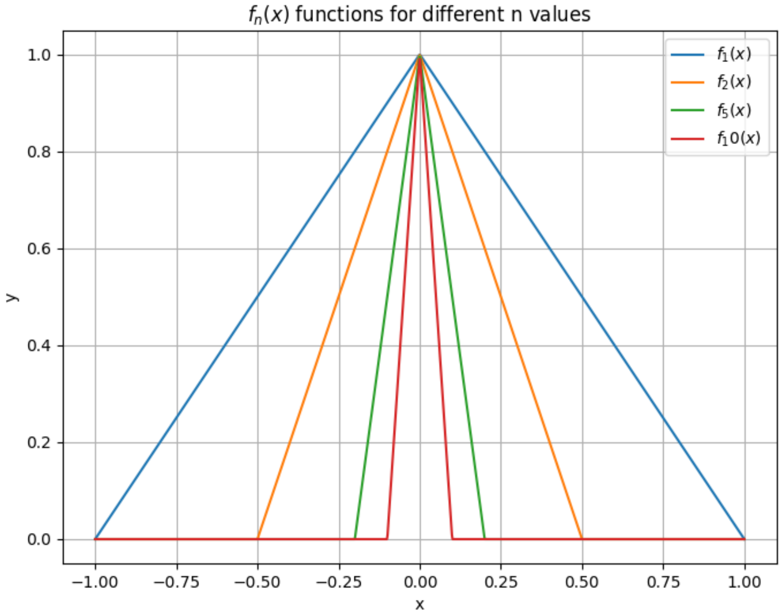

Figure 2: Fonctions $f_n(x)$ pour différentes valeurs de n

Theorem 1.11. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Alors E possède au moins une norme et toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve. On peut supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$). On fixe alors une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E et on identifie E à $\mathbb{R}^n$ à l'aide de B. On peut donc supposer que $E = \mathbb{R}^n$ et que $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La norme $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, équivalente à la norme usuelle, et définissant donc les mêmes ouverts.

Soit $S_\infty(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère de rayon 1 pour $\|.\|_\infty$. $S_\infty(0,1)$ est fermée, car l'application $E \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est continue sur tout evn $(E, \|.\|)$ (exercice). $S_\infty(0,1)$ est évidemment bornée, donc compacte par le Théorème de Borel-Lebesgue.

Soit maintenant $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une norme. On a

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = C\|x\|_\infty, \quad C = \sum_{i=1}^{n} N(e_i). \tag{17}$$

Grâce à l'inégalité triangle pour la norme N (Définition 1.1, propriété 2), on obtient

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq C\|x-y\|_\infty, \tag{18}$$

et donc la fonction $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue sur $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$. Par le Corollaire (4.8) N est bornée et atteint ses bornes sur $S_\infty(0,1)$. Comme $N(x) > 0$ pour tout $x \in S_\infty(0,1)$ il existe donc des constantes $0 < a < b$ telles que

$$a \leq N(x) \leq b, \forall x \in S_\infty(0,1). \tag{19}$$

En appliquant cette inégalité à $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ pour $x \neq 0$, on en déduit que

$$a \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \leq b \implies a\|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = N(x) \leq b\|x\|_\infty, \forall x \neq 0, \tag{20}$$

et l'inégalité est aussi vraie pour $x = 0$. Par conséquent, N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes à $\|.\|_\infty$ et donc équivalentes entre elles. □

1.5 Compléments sur les espaces vectoriels normés

1.5.1 Norme L^∞ et convergence uniforme

Soit X un ensemble (par exemple un intervalle de $\mathbb{R}$) et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$.

On rappelle que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in X$ la suite réelle $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. La convergence simple est la notion la plus faible de convergence pour des suites de fonctions. Exprimée à l'aide de quantificateurs, elle s'écrit:

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall n \geq N, \tag{21}$$

l'entier N dépendant a priori de ϵ et de x.

La suite de fonctions (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall n \geq N, \forall x \in X. \tag{22}$$

L'entier N ne dépend maintenant que de ϵ. On peut réécrire (**??**) comme

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sup_{x\in X} |f_n(x) - f| \leq \epsilon. \tag{23}$$

On voit donc que sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ des fonctions bornées sur X, une suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si (f_n) converge vers f pour la norme $\|.\|_\infty$.

1.5.2 Limites uniformes de fonctions continues

Prenons $X = [a,b]$. L'espace $C([a,b];\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$ des fonctions bornées. On sait que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ est une fonction continue sur $[a,b]$.

Avec le langage que nous avons appris, ceci signifie que $C([a,b];\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

1.5.3 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. On peut former la suite

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n, \tag{24}$$

appelée suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. La définition suivante est exactement la même que pour les séries numériques.

Definition 1.12 (Convergence d'une série dans un EVN)**.** La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge dans $(E,\|.\|)$ si la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E,\|.\|)$. L'élément $\lim_{N\to+\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est noté $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et appelé somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Proposition 1.13. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes à valeurs dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n + v_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda u_n)$ sont convergentes et on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

1.5.4 Convergence normale

Definition 1.14 (Convergence normale)**.** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalement si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ converge.

La convergence normale est un outil important pour montrer la convergence d'une série à valeurs dans un espace de Banach. On peut retenir sa définition en pensant à la 'convergence de la série des normes'.

Theorem 1.15. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Alors toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ normalement convergente est convergente et on a

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|. \tag{25}$$

2 Suites d'éléments de E

2.1 Suite extraite

Exemple: $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. On construit une suite d'éléments de $C([0,1],\mathbb{R})$ qui n'est pas compacte.

Lemma 2.1. Soit $E = (C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. E est complet.

Exemple On construit une suite d'éléments de $B_f(0,1)$ qui n'admet pas de sous-suite convergente.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue affine par morceaux :

- $f_n(0) = 0$
- $f_n(\frac{1}{2n}) = 1$
- $f_n(\frac{1}{n}) = 0$
- $f_n(x) = 0$ pour $x \geq \frac{1}{n}$ ou $x \leq 0$.

On remarque que $\forall n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et que si $n \neq p$, f_n et f_p ont des supports disjoints.
Si $n \neq p$, $\|f_n - f_p\|_\infty = 1$.
Donc $(f_n)_{n\geq1}$ ne peut pas avoir de sous-suite de Cauchy, car si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, $\forall p \neq q$, $\|f_{\varphi(p)} - f_{\varphi(q)}\|_\infty = 1$.
Donc $(f_n)_{n\geq1}$ n'a pas de sous-suite convergente. $B_f(0,1)$ n'est pas compacte.

3 Normes Equivalentes

Definition 3.1 (Normes topologiquement équivalentes et équivalentes)**.** N_1, N_2 sont topologiquement

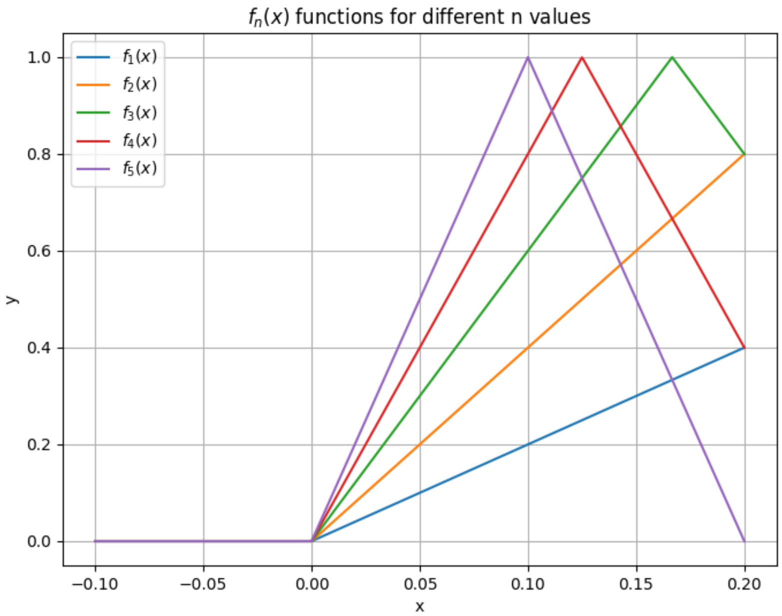

Figure 3: Fonctions $f_n(x)$ pour différentes valeurs de n

équivalentes sur E si

$$Id : (E, N_1) \to (E, N_2) \text{ est continue}$$
$$Id : (E, N_2) \to (E, N_1) \text{ est continue}$$

$\iff \exists C_1, C_2 > 0$ telles que

$$N_2(x) \leq C_1 N_1(x)$$
$$N_1(x) \leq C_2 N_2(x)$$

$\iff \exists C > 0$ telles que

$$\frac{1}{C} N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x). \tag{26}$$

Dans ce cas, on dit que N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.

Theorem 3.2. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Example 3.3. Dans $\mathbb{R}^2$, $N_1(x) = |x_1| + |x_2|$, $N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$.

- $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{2} N_\infty(x)$
- $N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq 2 N_\infty(x)$
- $N_2(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{2} N_2(x)$

Il existe un isomorphisme entre $(\mathbb{R}^2, N_1)$ et $(\mathbb{R}^2, N_2)$.

$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$. On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. $z = x_1 + ix_2 \leftrightarrow (x_1, x_2)$. $\|z\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = N_2((x_1, x_2))$.

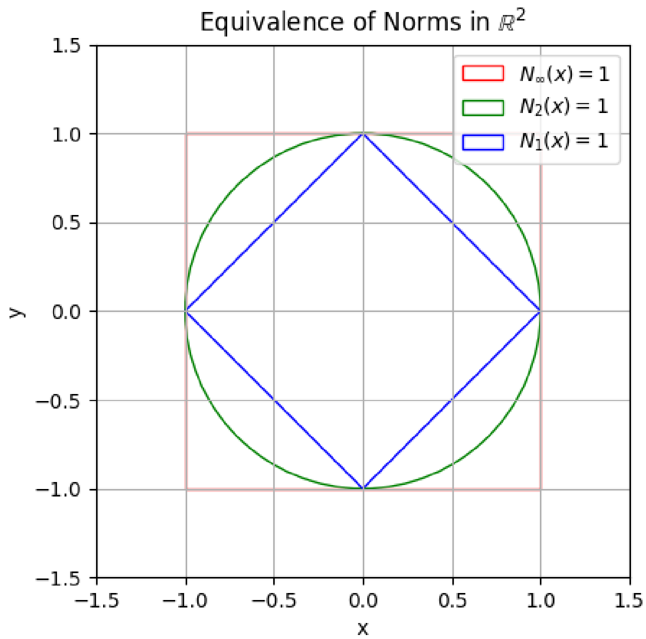

Figure 4: Equivalence des Normes dans $\mathbb{R}^2$

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$. On veut montrer que $\exists a, b > 0$ telles que $aN_\infty(x) \leq N(x) \leq bN_\infty(x)$. On pose $S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^d : N_\infty(x) = 1\}$. S_∞ est compacte. N est continue sur $(\mathbb{R}^d, N_\infty)$. N est continue sur S_∞. N est bornée et atteint ses bornes sur S_∞. $\exists x_0 \in S_\infty$ telle que $N(x_0) = \min_{x \in S_\infty} N(x) = a$. $\exists x_1 \in S_\infty$ telle que $N(x_1) = \max_{x \in S_\infty} N(x) = b$.

$a = \min_{x \in S_\infty} N(x) > 0$ car si $N(x_0) = 0$ avec $N_\infty(x_0) = 1 \implies x_0 = 0$ et $N_\infty(x_0) = 0 \neq 1$. Contradiction. Donc $a > 0$. $b = \max_{x \in S_\infty} N(x) < \infty$ car N continue sur le compact S_∞.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$. On pose $y = \frac{x}{N_\infty(x)}$. $N_\infty(y) = 1 \implies y \in S_\infty$. $a \leq N(y) \leq b$. $a \leq N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \leq b$. $a \leq \frac{N(x)}{N_\infty(x)} \leq b$. $aN_\infty(x) \leq N(x) \leq bN_\infty(x)$.

Theorem 3.4. N_1, N_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si N_1, N_2 sont équivalentes.

Exercice: $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$? Faux.

On prend f_n (triangles). $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = 1/n$. $\|f_n\|_\infty = n\|f_n\|_1$. On ne peut pas majorer $\|f\|_\infty$ par $C\|f\|_1$ avec C constante indépendante de f. Donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.