*Recueil de Solutions d'Exercices de Topologie

1 Rappels de Cours

Definition 1.1 (Distance). Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est appelée distance sur E si :

1. $d(x, y) \geq 0$ (positivité)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)
4. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiome de séparation)

(E, d) est appelé espace métrique.

Definition 1.2 (Boule ouverte). Soit (E, d) un espace métrique, $x_0 \in E$ et $r \geq 0$. La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$$

Definition 1.3 (Ensemble ouvert). Soit (E, d) un espace métrique. $U \subset E$ est ouvert si

$$\forall x_0 \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x_0, r) \subset U.$$

Theorem 1.4 (Propriétés des ouverts).
1. Soit $U_i, i \in I$ une collection d'ouverts. Alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert.
2. Si $U_1, \ldots, U_n$ sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est ouvert.

Definition 1.5 (Ensemble compact). $K \subset E$ est compact si de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Theorem 1.6 (Théorème de Borel-Lebesgue). Dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle, $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si K est fermé et borné.

2 Exercices et Solutions

TD2 Topo 1 - Exercice 1

Énoncé:
Soit (E, d) un espace métrique.

1. Rappel de cours : Un ensemble $U \subset E$ est ouvert si : $\forall x \in U$, $\exists \epsilon > 0$ t.q. $B(x, \epsilon) \subset U$. (Rq : on peut prendre $B(x, \epsilon)$ ou $B_d(x, \epsilon)$).

   Soit $z \in E$. Est-ce que $\{z\}$ est ouvert ? Non. Il faut $\exists \epsilon > 0$ t.q. $B(z, \epsilon) \subset \{z\}$. Faux. $B(z, \epsilon) = \{x \in E : d(x, z) < \epsilon\}$. Si $\epsilon > 0$, $B(z, \epsilon) \neq \{z\}$ si E contient au moins deux points. $\implies$ $\{z\}$ n'est pas ouvert.

Est-ce que E est ouvert ? Oui, évident (pourquoi ?). $\forall x \in E$, $\exists \epsilon > 0$ t.q. $B(x,\epsilon) \subset E$. On prend $\epsilon = 1$. $B(x,1) \subset E$.

Est-ce que $\emptyset$ est ouvert ? Oui (pourquoi ?). $\forall x \in \emptyset$ (faux), $\exists \epsilon > 0$ t.q. $B(x,\epsilon) \subset \emptyset$. Vrai par contraposée. Non($\exists x \in \emptyset$, $\exists \epsilon > 0$ t.q. $B(x,\epsilon) \subset \emptyset$). $\nexists x \in \emptyset$ donc la proposition est fausse. Donc la négation est vraie. $\forall x \in \emptyset$, ... est vrai.

2. Rappel de cours : Définition d'un fermé : F est fermé $\iff$ $E \backslash F$ est ouvert. D'après 1), $\{z\}^c = E\backslash\{z\}$ est-il ouvert ? Si $E = \mathbb{R}$, $E \setminus \{z\} =]-\infty, z[\cup]z, +\infty[$ ouvert. Si E contient au moins deux points, $E \setminus \{z\}$ est ouvert ssi $\{z\}$ n'est pas adhérent à $E \setminus \{z\}$. Si $x \in E \setminus \{z\}$, $x \neq z$. On pose $r = d(x,z) > 0$. $B(x, \frac{r}{2}) \subset E \setminus \{z\}$? Si $y \in B(x, \frac{r}{2})$, $d(y,x) < \frac{r}{2}$. $d(y,z) \geq d(x,z) - d(x,y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0$. $d(y,z) > 0 \implies y \neq z \implies y \in E \setminus \{z\}$. Donc $B(x, \frac{r}{2}) \subset E \setminus \{z\}$. Donc $E \setminus \{z\}$ est ouvert. Donc $\{z\}$ est fermé.

3. Soit $\Omega \subset E$. $U = \bigcup_{x\in\Omega} B(x,\epsilon)$. Est-ce que U est ouvert ? Oui (union d'ouverts). Soit $x \in U = \bigcup_{x\in\Omega} B(x,\epsilon)$. $\implies \exists x_0 \in \Omega$ t.q. $x \in B(x_0,\epsilon)$. $B(x_0,\epsilon)$ est ouvert $\implies \exists r > 0$ t.q. $B(x,r) \subset B(x_0,\epsilon) \subset U$. $\implies U$ est ouvert. (pour r petit, $r < \epsilon - d(x,x_0)$). Soit $x \in B(x_0,\epsilon)$. On cherche $\delta > 0$ t.q. $B(x,\delta) \subset B(x_0,\epsilon)$. Il faut que si $y \in B(x,\delta)$, $y \in B(x_0,\epsilon)$. $d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) < \delta + d(x,x_0) < \epsilon$. Il suffit de prendre $\delta = \epsilon - d(x,x_0)$. Mais δ doit être > 0. Il faut prendre $\delta = \frac{\epsilon - d(x,x_0)}{2}$ si $d(x,x_0) < \epsilon$. On peut prendre $\delta = \epsilon - d(x,x_0)$ si on veut $\delta > 0$? Non, il faut prendre $\delta = \frac{\epsilon - d(x,x_0)}{2}$? Non plus. On prend $\delta = \epsilon - d(x,x_0)$ si $d(x,x_0) < \epsilon$. Oui ! Si $x \in B(x_0,\epsilon)$, $d(x,x_0) < \epsilon$. On pose $\delta = \epsilon - d(x,x_0) > 0$. Si $y \in B(x,\delta)$, $d(y,x) < \delta = \epsilon - d(x,x_0)$. $d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) < \epsilon - d(x,x_0) + d(x,x_0) = \epsilon$. $d(y,x_0) < \epsilon \implies y \in B(x_0,\epsilon)$. Donc $B(x,\delta) \subset B(x_0,\epsilon)$. Donc $B(x_0,\epsilon)$ est ouvert.

Donc $U = \bigcup_{x\in\Omega} B(x,\epsilon)$ est ouvert comme union d'ouverts.

TD2 Topo 1 - Exercice 2
Énoncé:
Soit (X,d) espace métrique. Sur $X \times X$ on définit $\delta(x,y) = \min(1, d(x,y))$.

1. Montrer que (X,δ) est un espace métrique.

2. a) Montrer qu'une suite (u_n) dans X converge pour d si et seulement si elle converge pour δ.

   b) Les espaces (X,δ) et (X,d) ont-ils les mêmes ensembles ouverts ?

3. Montrer que $\delta(x,y) \leq d(x,y)$ pour tous $x, y \in X$. Sous quelles conditions existe-t-il une constante $C > 0$ telle que $d(x,y) \leq C\delta(x,y)$ pour tous $x, y \in X$?

Solution. 1. Pour montrer que (X,δ) est un espace métrique, il faut vérifier les quatre propriétés d'une distance pour δ.

(a) **Positivité:** $\delta(x,y) = \min(1, d(x,y))$. Comme $d(x,y) \geq 0$ et $1 > 0$, $\min(1, d(x,y)) \geq 0$. Donc $\delta(x,y) \geq 0$.

(b) **Symétrie:** $\delta(x,y) = \min(1, d(x,y)) = \min(1, d(y,x)) = \delta(y,x)$ car d est symétrique.

(c) **Séparation:** Si $\delta(x,y) = 0$, alors $\min(1, d(x,y)) = 0$. Comme $\min(a,b) = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$, et $1 \neq 0$, alors $d(x,y) = 0$. Puisque d est une distance, $d(x,y) = 0 \implies x = y$. Réciproquement, si $x = y$, alors $d(x,y) = 0$, donc $\delta(x,y) = \min(1,0) = 0$.

(d) **Inégalité triangulaire:** Il faut montrer que $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$. Posons $a = d(x,z)$ et $b = d(z,y)$. Alors $d(x,y) \leq a + b$. On a $\delta(x,z) = \min(1,a)$ et $\delta(z,y) = \min(1,b)$. On veut montrer que $\min(1, d(x,y)) \leq \min(1,a) + \min(1,b)$. On a $d(x,y) \leq a + b$. Considérons $\min(1, d(x,y))$.

- Si $a \geq 1$ et $b \geq 1$, alors $\min(1,a) = 1$, $\min(1,b) = 1$, $\min(1,a) + \min(1,b) = 2$. $\delta(x,z) + \delta(z,y) = 2 \geq \delta(x,y) = \min(1, d(x,y)) \leq 1$.

- Si $a < 1$ et $b < 1$, alors $\min(1, a) = a$, $\min(1, b) = b$, $\min(1, a) + \min(1, b) = a + b$. $\delta(x, z) + \delta(z, y) = a + b \geq d(x, y) \geq \min(1, d(x, y)) = \delta(x, y)$.
- Si $a < 1$ et $b \geq 1$ (ou $a \geq 1$ et $b < 1$, c'est symétrique), alors $\min(1, a) = a$, $\min(1, b) = 1$, $\min(1, a) + \min(1, b) = a + 1$. $\delta(x, z) + \delta(z, y) = a + 1 \geq 1 \geq \min(1, d(x, y)) = \delta(x, y)$.

Dans tous les cas, l'inégalité triangulaire est vérifiée. Donc δ est une distance sur X.

2. a) Montrer qu'une suite (u_n) dans X converge pour d ssi elle converge pour δ.

   - Supposons que (u_n) converge vers l pour d. Alors $\lim_{n\to\infty} d(u_n, l) = 0$. On veut montrer que $\lim_{n\to\infty} \delta(u_n, l) = 0$. $\delta(u_n, l) = \min(1, d(u_n, l))$. Comme $d(u_n, l) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et $\min(1, t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, alors $\delta(u_n, l) = \min(1, d(u_n, l)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc (u_n) converge vers l pour δ.
   - Supposons que (u_n) converge vers l pour δ. Alors $\lim_{n\to\infty} \delta(u_n, l) = 0$. On veut montrer que $\lim_{n\to\infty} d(u_n, l) = 0$. $\delta(u_n, l) = \min(1, d(u_n, l))$. Si $\lim_{n\to\infty} \min(1, d(u_n, l)) = 0$, alors pour n assez grand, $\min(1, d(u_n, l)) < 1$, donc $\min(1, d(u_n, l)) = d(u_n, l)$. Alors pour n assez grand, $\delta(u_n, l) = d(u_n, l)$. Comme $\lim_{n\to\infty} \delta(u_n, l) = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} d(u_n, l) = 0$. Donc (u_n) converge vers l pour d.

   b) Les espaces (X, δ) et (X, d) ont-ils les mêmes ensembles ouverts ? Oui. Car la convergence des suites est la même, et les ouverts sont caractérisés par les suites. Alternativement, montrons que les boules ouvertes sont les mêmes "topologiquement". Soit $B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ boule ouverte pour d. Soit $B_\delta(x, r) = \{y \in X : \delta(x, y) < r\}$ boule ouverte pour δ.

   - Montrons que $B_\delta(x, r)$ est ouvert pour d. Soit $B_\delta(x, r)$ une boule ouverte pour δ. Est-ce que $B_\delta(x, r)$ est ouvert pour d ? Si $r > 1$, $B_\delta(x, r) = X$ qui est ouvert pour d. Si $r \leq 1$, $B_\delta(x, r) = \{y \in X : \delta(x, y) < r\} = \{y \in X : \min(1, d(x, y)) < r\}$. Si $r \leq 1$, $\min(1, d(x, y)) < r \iff d(x, y) < r$. Donc $B_\delta(x, r) = B_d(x, r)$ si $r \leq 1$. Donc si $r \leq 1$, $B_\delta(x, r) = B_d(x, r)$ est ouvert pour d. Donc $B_\delta(x, r)$ est toujours ouvert pour d.
   - Réciproquement, montrer que $B_d(x, r)$ est ouvert pour δ. Soit $B_d(x, r)$ une boule ouverte pour d. Est-ce que $B_d(x, r)$ est ouvert pour δ ? Soit $y \in B_d(x, r)$. Alors $d(x, y) < r$. On cherche $\epsilon > 0$ t.q. $B_\delta(y, \epsilon) \subset B_d(x, r)$. On prend $\epsilon = \min(1, r - d(x, y)) > 0$. Si $z \in B_\delta(y, \epsilon)$, alors $\delta(y, z) < \epsilon = \min(1, r - d(x, y)) \leq r - d(x, y)$. $\delta(y, z) = \min(1, d(y, z)) < r - d(x, y)$. Donc $d(y, z) < r - d(x, y)$. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r - d(x, y) = r$. $d(x, z) < r \implies z \in B_d(x, r)$. Donc $B_\delta(y, \epsilon) \subset B_d(x, r)$. Donc $B_d(x, r)$ est ouvert pour δ.

   Donc les ouverts sont les mêmes.

3. $\delta(x, y) = \min(1, d(x, y)) \leq d(x, y)$. Donc $\delta(x, y) \leq d(x, y)$. Existe-t-il $C > 0$ t.q. $d(x, y) \leq C\delta(x, y)$? $d(x, y) \leq C \min(1, d(x, y))$. Si $d(x, y) \leq 1$, $\min(1, d(x, y)) = d(x, y)$. Alors $d(x, y) \leq Cd(x, y) \implies C \geq 1$. Si $d(x, y) > 1$, $\min(1, d(x, y)) = 1$. Alors $d(x, y) \leq C \cdot 1 = C$. Donc il faut $d(x, y) \leq C$ pour tout $x, y \in X$. Il existe C ssi d est bornée. Par exemple si X n'est pas borné pour d, non. Si $X = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$. Non, il n'existe pas de constante C car d n'est pas bornée. Si X est borné pour d, oui. Si $\exists M > 0$ t.q. $d(x, y) \leq M$ pour tout $x, y \in X$. On prend $C = M$. Si $d(x, y) \leq 1$, $d(x, y) \leq C\delta(x, y) = M\delta(x, y) = Md(x, y)$. Vrai. Si $d(x, y) > 1$, $d(x, y) \leq M\delta(x, y) = M \cdot 1 = M$. Il faut $d(x, y) \leq M$ qui est vrai. Donc existe C ssi d est bornée. □

TD2 Topo 1 - Exercice 3
Énoncé:
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si vous pensez qu'une affirmation est juste, donnez en une démonstration. Si vous pensez qu'elle est fausse, donnez en un contre-exemple.

1. Si $(u_n) \subset \mathbb{R}^2$ est une suite non bornée, alors $||u_n|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ quand $n \to +\infty$. FAUX.
2. Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}^2$ avec $u_n = (x_n, y_n)$. Si $||u_n|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ quand $n \to +\infty$, alors $|x_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $|y_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. FAUX.

3. Soit (E, d) un espace métrique. $A \subset E$. Si A n'est pas ouvert, alors A est fermé. FAUX.
4. Un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient forcément un intervalle fermé $[a, b]$ avec $a < b$. VRAI.
5. Un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient forcément une infinité dénombrable de points. VRAI.

Solution.

1. **Faux**. Contre-exemple: $u_n = \begin{cases} (n, 0) & \text{si } n \text{ pair} \\ (1, 0) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$. Suite non bornée car la sous-suite $(u_{2k}) = (2k, 0)$ n'est pas bornée. Cependant $||u_n||$ ne tend pas vers $+\infty$. Car $||u_{2k}|| = 2k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$. Mais $||u_{2k+1}|| = 1$ ne tend pas vers $+\infty$. Donc $||u_n||$ ne tend pas vers $+\infty$.
2. **Faux**. Contre-exemple: $u_n = (n, (-1)^n n)$. $||u_n|| = \sqrt{n^2 + ((-1)^n n)^2} = \sqrt{2n^2} = \sqrt{2}n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Cependant $y_n = (-1)^n n$ ne tend pas vers $+\infty$ (en valeur absolue).
3. **Faux**. Contre-exemple: $E = \mathbb{R}$. $A =]0, 1]$. A n'est pas ouvert (car $1 \in A$, $B(1, \epsilon) =]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[\not\subset A$). A n'est pas fermé car $\mathbb{R} \setminus A =] - \infty, 0] \cup]1, +\infty[$ n'est pas ouvert (pb en 0). $A =]0, 1]$ n'est ni ouvert, ni fermé.
4. **Vrai**. Démonstration : Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert non vide. Alors $\exists x_0 \in U$. Comme U est ouvert, $\exists \epsilon > 0$ tel que $B(x_0, \epsilon) =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset U$. On prend $[a, b] = [x_0 - \frac{\epsilon}{2}, x_0 + \frac{\epsilon}{2}]$. Alors $a = x_0 - \frac{\epsilon}{2} < x_0 + \frac{\epsilon}{2} = b$ car $\epsilon > 0$. Et $[a, b] = [x_0 - \frac{\epsilon}{2}, x_0 + \frac{\epsilon}{2}] \subset]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[= B(x_0, \epsilon) \subset U$. Donc $[a, b] \subset U$ et $a < b$.
5. **Vrai**. Démonstration : Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert non vide. D'après 4), U contient un intervalle fermé $[a, b]$ avec $a < b$. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Si $a < b$, $[a, b]$ contient une infinité non dénombrable de points (autant que $\mathbb{R}$). Encore plus fort, montrons que $[a, b]$ contient une infinité dénombrable de points. Par exemple, on prend les rationnels $\mathbb{Q} \cap [a, b]$. $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ est dénombrable infini si $a < b$. Donc $[a, b]$ contient une infinité dénombrable de points. Donc U contient une infinité dénombrable de points.

$\square$

TD2 Topo 2 - Exercice 10
Énoncé:

Soit (X, d) espace métrique. $A, B \subset X$. On rappelle $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. On dit que $d(A, B)$ est atteint s'il existe $a_0 \in A, b_0 \in B$ tels que $d(A, B) = d(a_0, b_0)$. Déterminer si $d(A, B)$ est atteint dans les cas suivants :

1. A et B sont fermés. FAUX.
2. A est fermé, B est compact. VRAI.
3. A et B sont compacts. VRAI.

Solution.

1. **Faux**. Contre-exemple: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{x}, x > 0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0, x > 0\}$. A est fermé (graphe de $y = \frac{1}{x}$ est fermé, et $y \geq \frac{1}{x}$ est fermé). B est fermé (plan $y = 0$ est fermé, et $y \leq 0$ est fermé). $A \cap B = \emptyset$. $d(A, B) = \inf\{d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$. Pour $x > 0$, on prend $a_x = (x, \frac{1}{x}) \in A$ et $b_x = (x, 0) \in B$. $d(a_x, b_x) = \sqrt{(x - x)^2 + (\frac{1}{x} - 0)^2} = \frac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$. Donc $d(A, B) = 0$. Cependant $d(A, B)$ n'est pas atteint. Il n'existe pas $a_0 \in A, b_0 \in B$ tels que $d(a_0, b_0) = 0$. Si $d(a_0, b_0) = 0$, alors $a_0 = b_0$. Mais $A \cap B = \emptyset$. Donc $a_0 \neq b_0$. Contradiction. Donc $d(A, B)$ n'est pas atteint.

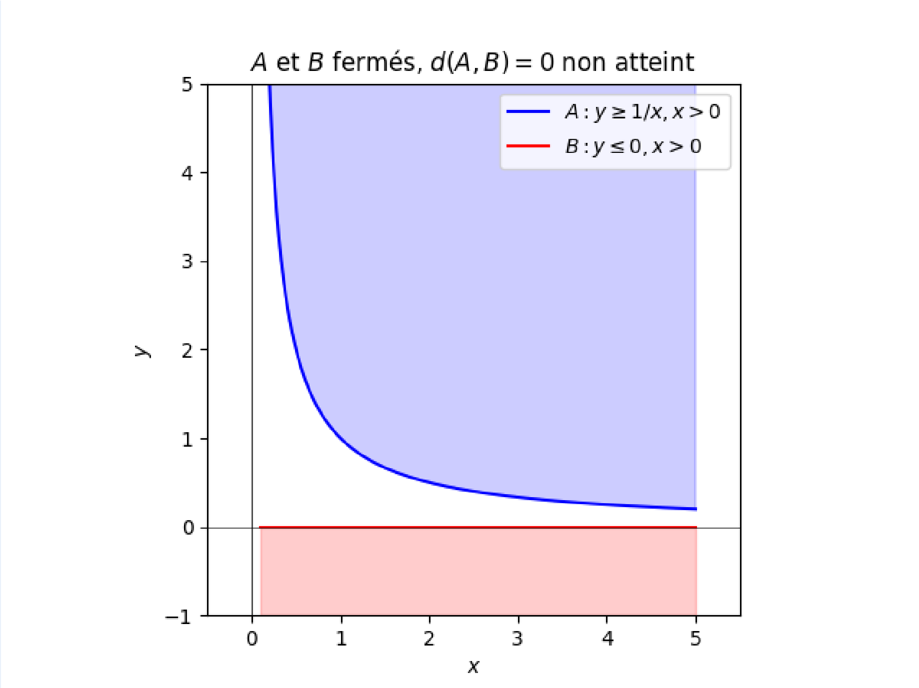

Figure 1: A et B fermés, $d(A, B) = 0$ non atteint

2. **Vrai**. Démonstration : A fermé, B compact. Soit $(a_n, b_n) \subset A \times B$ une suite minimisante de $d(A, B)$. $d(a_n, b_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. $(b_n) \subset B$ compact. On extrait une sous-suite $(b_{\phi(n)})$ qui converge vers $b_0 \in B$. $(d(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)})) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(A, B)$. $d(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)}) \leq C$ bornée car converge. Donc $a_{\phi(n)}$ est bornée ? Non. Il faut montrer que $(a_{\phi(n)})$ est bornée. On fixe $b_0 \in B$. $d(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)}) \geq d(a_{\phi(n)}, B) \geq 0$. $d(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(A, B) < +\infty$. $d(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)}) \leq M < +\infty$ bornée. $d(a_{\phi(n)}, b_0) \leq d(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)}) + d(b_{\phi(n)}, b_0) \leq M + d(b_{\phi(n)}, b_0)$. $d(b_{\phi(n)}, b_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc $d(a_{\phi(n)}, b_0)$ est bornée. Donc $(a_{\phi(n)})$ est bornée (car distance à b_0 est bornée). $(a_{\phi(n)})$ bornée dans $\mathbb{R}^2$. On peut extraire une sous-suite $(a_{\psi \circ \phi(n)})$ qui converge vers a_0. Notons $a'_n = a_{\psi \circ \phi(n)}$ et $b'_n = b_{\psi \circ \phi(n)}$. (a'_n) converge vers a_0. (b'_n) converge vers b_0. $b'_n = b_{\psi \circ \phi(n)}$ est une sous-suite de $(b_{\phi(n)})$ qui converge vers b_0. Donc $b'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b_0$. $a'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_0$. $b'_n \subset B$, B compact donc fermé, donc $b_0 \in B$. $a'_n = a_{\psi \circ \phi(n)} \subset A$. Si A est fermé, $a_0 \in A$. Donc $a_0 \in A$ car A fermé, $b_0 \in B$ car B compact (fermé). $d(a'_n, b'_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(a_0, b_0)$ car d est continue. $d(a'_n, b'_n) = d(a_{\psi \circ \phi(n)}, b_{\psi \circ \phi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(A, B)$. Donc $d(a_0, b_0) = d(A, B)$. Donc $d(A, B)$ est atteint en $(a_0, b_0) \in A \times B$.

3. **Vrai**. Démonstration : A et B compacts $\implies$ A fermé et B compact. D'après 2), $d(A, B)$ est atteint.

□

TD2 Topo 2 - Exercice 11
Énoncé:
Soit $A, B, C \subset E$ des parties d'un espace métrique (E, d). Montrer que :

1. Montrer que si $C \subset B$ alors $d(A, C) \geq d(A, B)$.

2. On note par $\mathrm{Adh}^d(A)$ l'adhérence de l'ensemble A. Montrer que

$$d(A, B) = d(\mathrm{Adh}^d(A), B) = d(\mathrm{Adh}^d(A), \mathrm{Adh}^d(B)).$$

Solution. 1. Montrer que si $C \subset B$ alors $d(A, C) \geq d(A, B)$. Par définition, $d(A, C) = \inf\{d(a, c) : a \in A, c \in C\}$ et $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Comme $C \subset B$, si $c \in C$, alors $c \in B$. Donc $\{d(a, c) : a \in A, c \in C\} \subset \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. L'inf sur un ensemble plus grand est plus petit. Donc $\inf\{d(a, c) : a \in A, c \in C\} \geq \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Donc $d(A, C) \geq d(A, B)$.

2. Montrer que $d(A, B) = d(\mathrm{Adh}^d(A), B) = d(\mathrm{Adh}^d(A), \mathrm{Adh}^d(B))$. On utilise 1) pour montrer les inégalités. $A \subset \mathrm{Adh}^d(A)$. D'après 1), $d(\mathrm{Adh}^d(A), B) \leq d(A, B)$. Il faut montrer l'inégalité inverse $d(\mathrm{Adh}^d(A), B) \geq d(A, B)$. Par définition, $d(\mathrm{Adh}^d(A), B) = \inf\{d(a', b) : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b \in B\}$. Comme $A \subset \mathrm{Adh}^d(A)$, $\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \subset \{d(a', b) : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b \in B\}$. Donc $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \geq \inf\{d(a', b) : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b \in B\}$. Donc $d(A, B) \geq d(\mathrm{Adh}^d(A), B)$. Donc $d(A, B) = d(\mathrm{Adh}^d(A), B)$.

   Montrons que $d(\mathrm{Adh}^d(A), B) = d(\mathrm{Adh}^d(A), \mathrm{Adh}^d(B))$. $B \subset \mathrm{Adh}^d(B)$. D'après 1), $d(\mathrm{Adh}^d(A), \mathrm{Adh}^d(B)) \leq d(\mathrm{Adh}^d(A), B)$. Il faut montrer l'inégalité inverse $d(\mathrm{Adh}^d(A), \mathrm{Adh}^d(B)) \geq d(\mathrm{Adh}^d(A), B)$. $d(\mathrm{Adh}^d(A), \mathrm{Adh}^d(B)) = \inf\{d(a', b') : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b' \in \mathrm{Adh}^d(B)\}$. $d(\mathrm{Adh}^d(A), B) = \inf\{d(a', b) : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b \in B\}$. Comme $B \subset \mathrm{Adh}^d(B)$, $\{d(a', b) : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b \in B\} \subset \{d(a', b') : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b' \in \mathrm{Adh}^d(B)\}$. Donc $\inf\{d(a', b) : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b \in B\} \geq \inf\{d(a', b') : a' \in \mathrm{Adh}^d(A), b' \in \mathrm{Adh}^d(B)\}$. Donc $d(\mathrm{Adh}^d(A), B) \geq d(\mathrm{Adh}^d(A), \mathrm{Adh}^d(B))$.

   Donc $d(A, B) = d(\mathrm{Adh}^d(A), B) = d(\mathrm{Adh}^d(A), \mathrm{Adh}^d(B))$.

$\square$