1 Espaces métriques

Definition 1.1. Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est appelée distance sur E si :

1. $d(x, y) \geq 0$ (positivité)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)
4. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiome de séparation)

(E, d) est appelé espace métrique.

Proposition 1.2 (Inégalité triangulaire)**.** Dans un espace métrique (E, d), on a aussi l'inégalité suivante:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

1.1 Exemples

Example 1.3.

1. $E = \mathbb{R}$. On définit $d(x, y) = |x - y|$.
   Boule $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} =]x_0 - r, x_0 + r[$.
2. $E = \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3, \ldots$. On a différentes normes :
   - Norme euclidienne: $||x||_2 = (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{1/2}$
   - Norme 1: $||x||_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$
   - Norme ∞: $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

   Pour $E = \mathbb{R}^d$, on définit la distance $d_2(x, y) = ||y - x||_2 = ||\overrightarrow{xy}||_2$. De même, on peut définir $d_1(x, y) = ||y - x||_1$ et $d_\infty(x, y) = ||y - x||_\infty$.
   Boule $B_2(0, r)$ pour d_2 dans $\mathbb{R}^2$:

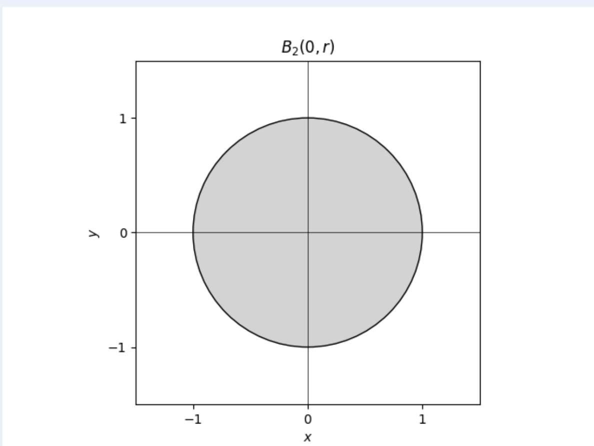

Figure 1: Boule $B_2(0, r)$ dans $\mathbb{R}^2$

   Boule $B_\infty(0, r)$ pour d_∞ dans $\mathbb{R}^2$:

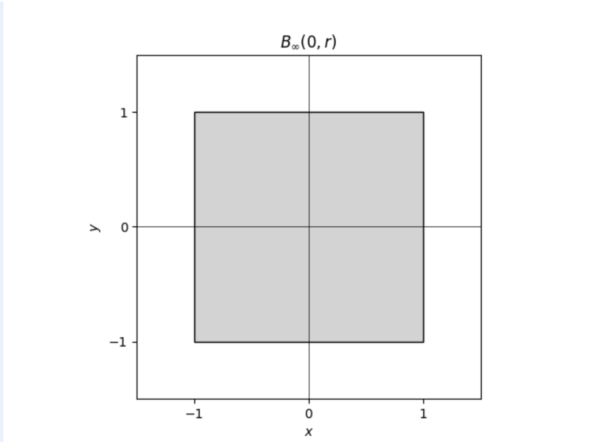

Figure 2: Boule $B_\infty(0,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

Boule $B_1(0,r)$ pour d_1 dans $\mathbb{R}^2$:

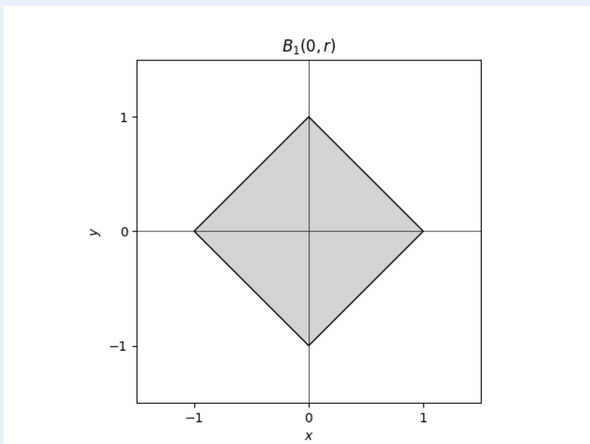

Figure 3: Boule $B_1(0,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

Remark 1.4. **Important:** notion de proximité, pas la forme.

Dans $\mathbb{R}^n$, on a les relations entre les distances:

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y)$$
$$d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x,y)$$

2 Parties bornées

Definition 2.1. Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. A est dite **bornée** si

$$\exists R > 0 \text{ et } \exists x_0 \in E \text{ tel que } A \subset B(x_0, R).$$

Lemma 2.2. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. A est bornée.
2. $\forall x_0 \in E, \exists r > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r)$.
3. $\exists r > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, on a $d(x, y) < r$.

Solution (Démonstration:). **1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1)**

Preuve que 1) $\Rightarrow$ 2)

Hyp: $\exists x_1 \in E, \exists r_1 > 0$ tel que $A \subset B(x_1, r_1)$.
Soit $x_0 \in E$. But: trouver r tel que $A \subset B(x_0, r)$.
Si $x \in A$, alors $x \in B(x_1, r_1)$, on a $d(x, x_1) < r_1$.
On veut $d(x_0, x) < r$.

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &\leq d(x_0, x_1) + r_1 \\ &< r \text{ si } r > d(x_0, x_1) + r_1 \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $r = d(x_0, x_1) + r_1$.

2) $\Rightarrow$ 3)

On fixe $x_0 \in E$. D'après 2), $\exists r_0 > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r_0)$. Alors $\forall x, y \in A$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \\ &< r_0 + r_0 = 2r_0 \end{aligned}$$

On prend $r = 2r_0$.

3) $\Rightarrow$ 1)

On fixe $x_0 \in E$ (n'importe lequel). D'après 3), $\exists r > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, $d(x, y) < r$. Alors $\forall x \in A$, $d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(y, x) < d(x_0, y) + r$. On fixe $y \in A$. Alors $d(x_0, y) < \infty$ est fixe. On prend $R = d(x_0, y) + r$. Alors $\forall x \in A$, $d(x_0, x) < R$, donc $A \subset B(x_0, R)$. □

Proposition 2.3 (Propriétés élémentaires).
1. Toute partie finie est bornée.
2. Si A bornée et $B \subset A$ alors B bornée.
3. L'union d'un nb fini de bornées est bornée.

Solution (Démonstration:). **1) Tout partie finie est bornée**

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie finie de E. On fixe $x_0 \in E$. Pour chaque a_i, $d(x_0, a_i) < \infty$. Soit $r_i = d(x_0, a_i) + 1$. Alors $a_i \in B(x_0, r_i)$. On prend $R = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$. Alors $a_i \in B(x_0, R)$ pour tout i. Donc $A \subset B(x_0, R)$.

2) Si A bornée et $B \subset A$ alors B bornée

Si A est bornée, $\exists x_0, R$ tq $A \subset B(x_0, R)$. Comme $B \subset A$, on a $B \subset B(x_0, R)$. Donc B est bornée.

3) L'union d'un nb fini de bornées est bornée (Partie)

Soient $A_1, \ldots, A_n$ sont bornées. Je fixe $x_0 \in E$. A_i bornée ($1 \leq i \leq n$) donc $\exists r_i > 0$ tel que $A_i \subset B(x_0, r_i)$. Soit $r = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$. Si $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, alors $x \in A_i$ pour un i. Donc $x \in B(x_0, r_i) \subset B(x_0, r)$. Donc $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset B(x_0, r)$. □

3 Fonctions bornées

Definition 3.1. Soit B un ensemble. Une fonction $F : B \to E$ est **bornée** si

$$F(B) = \{F(b) : b \in B\} \subset E$$

est bornée.

4 Distances entre ensembles

Definition 4.1. Soit A, B deux parties de E. On pose

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

Remark 4.2. $\forall x \in A, y \in B$, $d(A, B) \leq d(x, y)$. $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A, y \in B$ tq $d(x, y) \leq d(A, B) + \epsilon$.

Proposition 4.3 (Notation Proposition)**.**

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = d(\{x\}, A).$$

5 Topologie des espaces métriques

Concepts importants: distance $\to$ boules $B(x_0, r)$ $\to$ ensembles ouverts.

Definition 5.1. Soit (E, d) espace métrique.

1. $U \subset E$ est **ouvert** si
$$\forall x_0 \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x_0, r) \subset U.$$
2. $F \subset E$ est **fermé** si $E \setminus F$ est ouvert.

Remark 5.2. Dans $\mathbb{R}$ les intervalles ouverts sont des ouverts.

Comment montrer que l'ensemble est ouvert ou fermé. Dans le poly.

- $\emptyset$ est ouvert (par définition).
- E est ouvert.
- E est fermé, $\emptyset$ est fermé (comme complémentaires d'ouverts).

6 Lemmes et théorèmes

Lemma 6.1. 1)$B(x_0, r)$ est ouvert.
2)$B_f(x_0, r)$ est fermé.

Solution (Démo dans le poly). $\square$

Example 6.2. $E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |y-x|$. $A =]0,1[$ ouvert dans $\mathbb{R}$. $A =]0,1[$ pas fermé dans A. $R \setminus A =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$ fermé dans $\mathbb{R}$.

Je regarde A comme partie de (A, d). A est fermé dans A.

Theorem 6.3.

1. Soit $U_i, i \in I$ une collection d'ouverts. Alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert (l'union quelconque d'ouverts est un ouvert).
2. Si $U_1, \ldots, U_n$ sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est ouvert (l'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouvert).
3. Si $F_i, i \in I$ sont fermés, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé (l'intersection quelconque de fermés est fermé).
4. $F_1, \ldots, F_n$ fermés, alors $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est fermé.

Example 6.4 (Examples et remarques)**.** $U_i =]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[$, $i \geq 0$. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{0\}$ pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

$F_i = [0, 1 - \frac{1}{i}]$ fermé dans $\mathbb{R}$. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i = [0, 1[$ pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Solution (Dem:)**. 1) Soit** $x \in \bigcup_{i \in I} U_i = U$. Il existe un i noté i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} est ouvert donc $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i = U$. Donc U est ouvert.

2) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i = U$. $x \in U_i$ pour $1 \leq i \leq n$. U_i ouvert donc $\exists r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$. Soit $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$. $B(x,r) \subset B(x, r_i) \subset U_i$ $1 \leq i \leq n$. Donc $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i = U$. Donc $B(x,r) \subset U$. □