1 Analyse

2 Introduction aux espaces vectoriels $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$

2.1 Définitions et propriétés fondamentales

Nous allons définir les espaces vectoriels $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$.

Definition 2.1. L'espace $\mathbb{R}^d$, pour $d \geq 1$, est défini comme l'ensemble des d-uplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^d := \{X = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

où $x_1, \ldots, x_d$ sont les coordonnées cartésiennes du point X.

Pour $d = 2$, on note parfois les points de $\mathbb{R}^2$ par (x, y), et pour $d = 3$, par (x, y, z).

Definition 2.2. L'espace $\mathbb{C}^d$, pour $d \geq 1$, est défini de manière analogue comme l'ensemble des d-uplets de nombres complexes :

$$\mathbb{C}^d := \{X = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

où $x_1, \ldots, x_d$ sont des nombres complexes.

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut être écrit sous la forme $z = a + bi$, où $a = Re(z)$ est la partie réelle de z et $b = Im(z)$ est la partie imaginaire de z. On peut écrire pour $X \in \mathbb{C}^d$,

$$X = Re(X) + iIm(X)$$

où $Re(X) = (Re(x_1), \ldots, Re(x_d)) \in \mathbb{R}^d$ et $Im(X) = (Im(x_1), \ldots, Im(x_d)) \in \mathbb{R}^d$.

$\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ sont des espaces vectoriels. L'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire sont définies de la manière suivante dans $\mathbb{R}^d$ (et de même dans $\mathbb{C}^d$) : Pour $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $Y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- **Addition vectorielle** : $X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)$
- **Multiplication par un scalaire** : $\lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_d)$
- **Vecteur nul** : $\overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$

Pour $\mathbb{C}^d$, le corps des scalaires est $\mathbb{C}$.

2.2 Coordonnées polaires et sphériques

Dans $\mathbb{R}^2$, on peut utiliser les coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ définies par :

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \sin\theta \end{aligned}$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser les coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi[$ définies par :

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

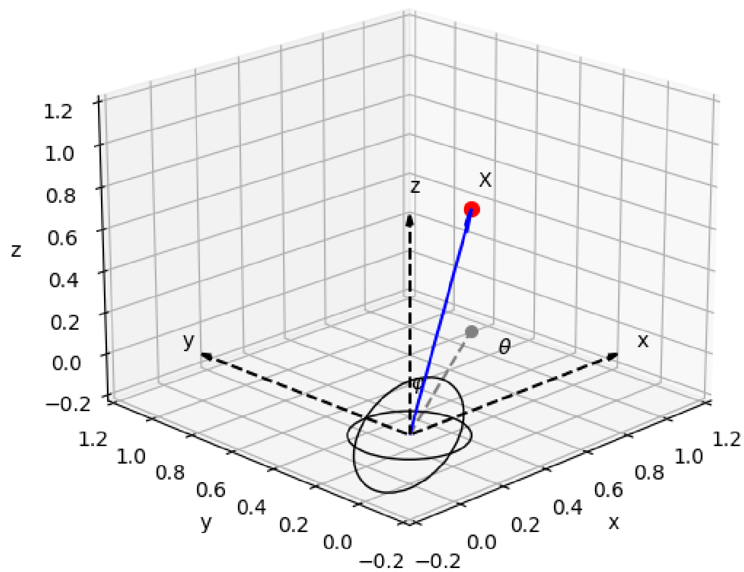

Figure 1: Représentation des coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

2.3 Représentation graphique de $\mathbb{R}^3$

On peut représenter un point $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques. Dans la figure ci-dessous, θ est l'angle entre l'axe z et le vecteur OX, et φ est l'angle entre l'axe x et la projection de OX sur le plan (xOy).

2.4 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Definition 2.3. Le produit scalaire de deux vecteurs $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $Y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ est défini par :

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

2.5 Propriétés du produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ possède les propriétés suivantes :

1. **Bilinéarité** : Pour tous vecteurs $X, Y, Z \in \mathbb{R}^d$ et scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(X + Y) \cdot Z &= X \cdot Z + Y \cdot Z \\ Z \cdot (X + Y) &= Z \cdot X + Z \cdot Y \\ (\lambda X) \cdot Y &= X \cdot (\lambda Y) = \lambda (X \cdot Y)\end{aligned}$$

2. **Symétrie** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$,
$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$,
$$X \cdot X \geq 0 \quad \text{et} \quad (X \cdot X = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

Proposition 2.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|X \cdot Y| \leq \sqrt{(X \cdot X)}\sqrt{(Y \cdot Y)}$$

Preuve. Fixons $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et considérons la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$P(t) = (X + tY) \cdot (X + tY)$$
En développant, on obtient
$$P(t) = t^2(Y \cdot Y) + 2t(X \cdot Y) + (X \cdot X)$$
Comme $P(t) = ||X + tY||^2 \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, le polynôme $P(t)$ de degré 2 est toujours positif ou nul. Son discriminant Δ est donc négatif ou nul :
$$\Delta = (2(X \cdot Y))^2 - 4(Y \cdot Y)(X \cdot X) = 4(X \cdot Y)^2 - 4(X \cdot X)(Y \cdot Y) \leq 0$$
D'où $(X \cdot Y)^2 \leq (X \cdot X)(Y \cdot Y)$, et en prenant la racine carrée, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

3 Normes

3.1 Norme associée au produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Definition 3.1. La norme euclidienne associée au produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ est définie par :
$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$$
pour $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Cette norme représente la longueur du vecteur X. Elle est parfois notée $\|X\|_2$.

3.2 Propriétés des normes

Les normes possèdent les propriétés suivantes :

1. **Homogénéité** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$ et scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|$$

2. **Inégalité triangulaire** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$,
$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$,
$$\|X\| \geq 0 \quad \text{et} \quad (\|X\| = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

3.3 Définition générale d'une norme

Definition 3.2. Une norme sur $\mathbb{R}^d$ est une application $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$
2. $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3. $N(X) \geq 0$ et $(N(X) = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$

3.4 Exemples de normes sur $\mathbb{R}^d$

Outre la norme euclidienne $\|X\| = \|X\|_2$, on peut définir d'autres normes sur $\mathbb{R}^d$:

1. **Norme 1** : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$
2. **Norme infini** : $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

4 Espace $\mathbb{C}^d$

4.1 Définition et produit scalaire hermitien

Nous rappelons la définition de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^d$ sur $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}^d = \{X = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

Definition 4.1. Le produit scalaire hermitien de deux vecteurs $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ et $Y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{C}^d$ est défini par :

$$(X|Y) = \sum_{i=1}^d x_i \overline{y_i}$$

Notez la conjugaison complexe sur les composantes de Y. Certains auteurs utilisent la conjugaison sur les composantes de X.

4.2 Propriétés du produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$

Le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$ possède les propriétés suivantes :

1. **Sesquilinéarité** : Pour tous vecteurs $X, Y, Z \in \mathbb{C}^d$ et scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$(X + Y|Z) = (X|Z) + (Y|Z)$$
$$(\lambda X|Z) = \lambda(X|Z)$$
$$(Z|X + Y) = (Z|X) + (Z|Y)$$
$$(Z|\lambda Y) = \overline{\lambda}(Z|Y)$$

   On dit que le produit scalaire est linéaire par rapport au premier argument (à gauche) et antilinéaire par rapport au deuxième argument (à droite). Certains auteurs choisissent la convention inverse.

2. **Hermiticité (ou symétrie hermitienne)** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{C}^d$,

$$(X|Y) = \overline{(Y|X)}$$

3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{C}^d$,

$$(X|X) = \sum_{i=1}^d |x_i|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad ((X|X) = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

5 Norme Hilbertienne dans $\mathbb{C}^d$

Definition 5.1. La norme Hilbertienne (ou norme euclidienne) associée au produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$ est définie par :

$$\|X\| = \sqrt{(X|X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}$$

pour $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d$.

On a $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 = \|Re(X)\|^2 + \|Im(X)\|^2$.

Lemma 5.2. Pour tout $X \in \mathbb{C}^d$, on a :

$$\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire hermitien (qui est aussi valable dans $\mathbb{C}^d$), on a

$$|(X|Y)| \leq \sqrt{(X|X)}\sqrt{(Y|Y)} = \|X\|\|Y\|$$

Si $\|Y\| \leq 1$, alors $|(X|Y)| \leq \|X\|$. Donc $\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)| \leq \|X\|$.

Inversement, considérons $X \neq \overrightarrow{0}$ (si $X = \overrightarrow{0}$, l'égalité est triviale). Posons $Y = \frac{X}{\|X\|}$. Alors $\|Y\| = 1$ et

$$(X|Y) = \left(X \middle| \frac{X}{\|X\|}\right) = \frac{1}{\|X\|}(X|X) = \frac{\|X\|^2}{\|X\|} = \|X\|$$

Donc, il existe Y avec $\|Y\| \leq 1$ tel que $|(X|Y)| = \|X\|$. D'où $\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)| \geq \|X\|$.

En conclusion, on a bien l'égalité $\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$. $\square$

5.1 Autres normes sur $\mathbb{C}^d$

De même que pour $\mathbb{R}^d$, on peut définir les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^d$:

- Norme 1 : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$
- Norme infini : $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

6 Distances

6.1 Distance induite par une norme

Definition 6.1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$). La distance induite par cette norme entre deux points X, Y est définie par :

$$d(X, Y) = \|Y - X\|$$

6.2 Propriétés d'une distance

Une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ sur un ensemble E doit satisfaire les propriétés suivantes :

Definition 6.2. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur E si elle satisfait pour tous $x, y, z \in E$:

1. **Positivité** : $d(x, y) \geq 0$

2. **Symétrie** : $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Inégalité triangulaire** : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
4. **Séparation** : $d(x, y) = 0 \iff x = y$

6.3 Exemples de distances

1. **Distance euclidienne** (ou distance d_2) : induite par la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

$$d_2(X, Y) = \|X - Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$$

2. **Distance d_1** : induite par la norme $\|\cdot\|_1$.

$$d_1(X, Y) = \|X - Y\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$$

3. **Distance d_∞** : induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

$$d_\infty(X, Y) = \|X - Y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$$

4. **Distance logarithmique** sur $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$:

$$d_{log}(a, b) = |\ln(b/a)| = |\ln(b) - \ln(a)|$$

En base 10 : $d_{log_{10}}(x, y) = |\log_{10}(y/x)|$.

5. **Distance SNCF** sur un ensemble de points. Si on considère trois points $0, X, Y$ non alignés :

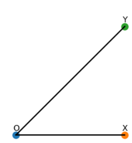

Figure 2: Distance SNCF

La distance SNCF entre X et Y est définie par

$$d_{SNCF}(X, Y) = d(0, X) + d(0, Y)$$

6. **Distance usuelle dans $\mathbb{R}^2$** :

$$\delta(X, Y) = \begin{cases} d(X, Y) & \text{si } 0, X, Y \text{ alignés} \\ d(0, X) + d(0, Y) & \text{sinon} \end{cases}$$

7 Espaces métriques

Definition 7.1. Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur E.

7.1 Inégalité triangulaire inverse

Dans un espace métrique (E, d), on a l'inégalité triangulaire inverse : Pour tous $x, y, z \in E$,

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

7.2 Distance induite sur un sous-ensemble

Si (E, d) est un espace métrique et $U \subset E$ est un sous-ensemble de E, la restriction de d à $U \times U$ fait de (U, d) un espace métrique.

8 Boules dans les espaces métriques

Soit (E, d) un espace métrique, $x_0 \in E$ et $r \geq 0$.

Definition 8.1.

1. La **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$$

2. La **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$$

3. La **sphère** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$S(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) = r\}$$

8.1 Propriétés des boules

Lemma 8.2.

1. $B(x_0, 0) = \emptyset$ et $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$
2. Pour $0 \leq r_1 < r_2$, on a $B(x_0, r_1) \subset B_f(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$
3. Si $d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$, alors $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$

Preuve.

1. Les propriétés (1) et (2) sont évidentes d'après la définition des boules.
2. Pour montrer (3), supposons $x \in B(x_1, r_1)$. Alors $d(x_1, x) < r_1$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$$

Donc $d(x_0, x) < r$, ce qui signifie que $x \in B(x_0, r)$. D'où $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

□