Chapter 1

CM1

1.1 Analyse

1.2 Introduction aux espaces vectoriels $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$

1.2.1 Définitions et propriétés fondamentales

Nous allons définir les espaces vectoriels $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$.

Definition 1.2.1. L'espace $\mathbb{R}^d$, pour $d \geq 1$, est défini comme l'ensemble des d-uplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^d := \{X = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

où $x_1, \dots, x_d$ sont les coordonnées cartésiennes du point X.

Pour $d = 2$, on note parfois les points de $\mathbb{R}^2$ par (x, y), et pour $d = 3$, par (x, y, z).

Definition 1.2.2. L'espace $\mathbb{C}^d$, pour $d \geq 1$, est défini de manière analogue comme l'ensemble des d-uplets de nombres complexes :

$$\mathbb{C}^d := \{X = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

où $x_1, \dots, x_d$ sont des nombres complexes.

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut être écrit sous la forme $z = a + bi$, où $a = Re(z)$ est la partie réelle de z et $b = Im(z)$ est la partie imaginaire de z. On peut écrire pour $X \in \mathbb{C}^d$,

$$X = Re(X) + iIm(X)$$

où $Re(X) = (Re(x_1), \dots, Re(x_d)) \in \mathbb{R}^d$ et $Im(X) = (Im(x_1), \dots, Im(x_d)) \in \mathbb{R}^d$.

$\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ sont des espaces vectoriels. L'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire sont définies de la manière suivante dans $\mathbb{R}^d$ (et de même dans $\mathbb{C}^d$) : Pour $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $Y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- **Addition vectorielle** : $X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$
- **Multiplication par un scalaire** : $\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$
- **Vecteur nul** : $\overrightarrow{0} = (0, \dots, 0)$

Pour $\mathbb{C}^d$, le corps des scalaires est $\mathbb{C}$.

1.2.2 Coordonnées polaires et sphériques

Dans $\mathbb{R}^2$, on peut utiliser les coordonnées polaires $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ définies par :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser les coordonnées sphériques $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi[$ définies par :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.2.3 Représentation graphique de $\mathbb{R}^3$

On peut représenter un point $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques. Dans la figure ci-dessous, θ est l'angle entre l'axe z et le vecteur OX, et φ est l'angle entre l'axe x et la projection de OX sur le plan (xOy).

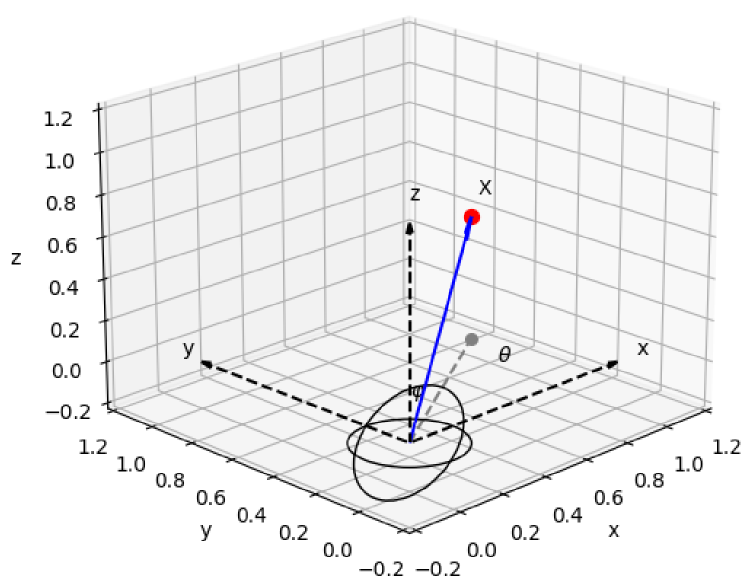

Figure 1.1: Représentation des coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

1.2.4 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Definition 1.2.3. Le produit scalaire de deux vecteurs $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $Y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ est défini par :

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

1.2.5 Propriétés du produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ possède les propriétés suivantes :

1. **Bilinéarité** : Pour tous vecteurs $X, Y, Z \in \mathbb{R}^d$ et scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(X + Y) \cdot Z &= X \cdot Z + Y \cdot Z \\ Z \cdot (X + Y) &= Z \cdot X + Z \cdot Y \\ (\lambda X) \cdot Y &= X \cdot (\lambda Y) = \lambda (X \cdot Y)\end{aligned}$$

2. **Symétrie** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$,

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$,

$$X \cdot X \geq 0 \quad \text{et} \quad (X \cdot X = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

Proposition 1.2.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|X \cdot Y| \leq \sqrt{(X \cdot X)}\sqrt{(Y \cdot Y)}$$

Preuve. Fixons $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et considérons la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$P(t) = (X + tY) \cdot (X + tY)$$

En développant, on obtient

$$P(t) = t^2(Y \cdot Y) + 2t(X \cdot Y) + (X \cdot X)$$

Comme $P(t) = ||X + tY||^2 \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, le polynôme $P(t)$ de degré 2 est toujours positif ou nul. Son discriminant Δ est donc négatif ou nul :

$$\Delta = (2(X \cdot Y))^2 - 4(Y \cdot Y)(X \cdot X) = 4(X \cdot Y)^2 - 4(X \cdot X)(Y \cdot Y) \leq 0$$

D'où $(X \cdot Y)^2 \leq (X \cdot X)(Y \cdot Y)$, et en prenant la racine carrée, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

1.3 Normes

1.3.1 Norme associée au produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Definition 1.3.1. La norme euclidienne associée au produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ est définie par :

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$$

pour $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Cette norme représente la longueur du vecteur X. Elle est parfois notée $\|X\|_2$.

1.3.2 Propriétés des normes

Les normes possèdent les propriétés suivantes :

1. **Homogénéité** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$ et scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$$

2. **Inégalité triangulaire** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$,

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$,

$$\|X\| \geq 0 \quad \text{et} \quad (\|X\| = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

1.3.3 Définition générale d'une norme

Definition 1.3.2. Une norme sur $\mathbb{R}^d$ est une application $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$
2. $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3. $N(X) \geq 0$ et $(N(X) = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$

1.3.4 Exemples de normes sur $\mathbb{R}^d$

Outre la norme euclidienne $\|X\| = \|X\|_2$, on peut définir d'autres normes sur $\mathbb{R}^d$:

1. **Norme 1** : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$
2. **Norme infini** : $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

1.4 Espace $\mathbb{C}^d$

1.4.1 Définition et produit scalaire hermitien

Nous rappelons la définition de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^d$ sur $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}^d = \{X = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

Definition 1.4.1. Le produit scalaire hermitien de deux vecteurs $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ et $Y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{C}^d$ est défini par :

$$(X|Y) = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$$

Notez la conjugaison complexe sur les composantes de Y. Certains auteurs utilisent la conjugaison sur les composantes de X.

1.4.2 Propriétés du produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$

Le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$ possède les propriétés suivantes :

1. **Sesquilinéarité** : Pour tous vecteurs $X, Y, Z \in \mathbb{C}^d$ et scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(X + Y|Z) &= (X|Z) + (Y|Z)\\ (\lambda X|Z) &= \lambda(X|Z)\\ (Z|X + Y) &= (Z|X) + (Z|Y)\\ (Z|\lambda Y) &= \overline{\lambda}(Z|Y)\end{aligned}$$

   On dit que le produit scalaire est linéaire par rapport au premier argument (à gauche) et antilinéaire par rapport au deuxième argument (à droite). Certains auteurs choisissent la convention inverse.

2. **Hermiticité (ou symétrie hermitienne)** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{C}^d$,

$$(X|Y) = \overline{(Y|X)}$$

3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{C}^d$,

$$(X|X) = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad ((X|X) = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

1.5 Norme Hilbertienne dans $\mathbb{C}^d$

Definition 1.5.1. La norme Hilbertienne (ou norme euclidienne) associée au produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$ est définie par :

$$\|X\| = \sqrt{(X|X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}$$

pour $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$.

On a $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 = \|Re(X)\|^2 + \|Im(X)\|^2$.

Lemma 1.5.2. Pour tout $X \in \mathbb{C}^d$, on a :

$$\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire hermitien (qui est aussi valable dans $\mathbb{C}^d$), on a

$$|(X|Y)| \leq \sqrt{(X|X)}\sqrt{(Y|Y)} = \|X\|\|Y\|$$

Si $\|Y\| \leq 1$, alors $|(X|Y)| \leq \|X\|$. Donc $\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)| \leq \|X\|$.

Inversement, considérons $X \neq \overrightarrow{0}$ (si $X = \overrightarrow{0}$, l'égalité est triviale). Posons $Y = \frac{X}{\|X\|}$. Alors $\|Y\| = 1$ et

$$(X|Y) = \left(X \middle| \frac{X}{\|X\|}\right) = \frac{1}{\|X\|}(X|X) = \frac{\|X\|^2}{\|X\|} = \|X\|$$

Donc, il existe Y avec $\|Y\| \leq 1$ tel que $|(X|Y)| = \|X\|$. D'où $\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)| \geq \|X\|$.

En conclusion, on a bien l'égalité $\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$. □

1.5.1 Autres normes sur $\mathbb{C}^d$

De même que pour $\mathbb{R}^d$, on peut définir les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^d$:

- Norme 1 : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$
- Norme infini : $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

1.6 Distances

1.6.1 Distance induite par une norme

Definition 1.6.1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$). La distance induite par cette norme entre deux points X, Y est définie par :

$$d(X,Y) = \|Y - X\|$$

1.6.2 Propriétés d'une distance

Une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ sur un ensemble E doit satisfaire les propriétés suivantes :

Definition 1.6.2. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur E si elle satisfait pour tous $x, y, z \in E$:

1. **Positivité** : $d(x,y) \geq 0$
2. **Symétrie** : $d(x,y) = d(y,x)$
3. **Inégalité triangulaire** : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
4. **Séparation** : $d(x,y) = 0 \iff x = y$

1.6.3 Exemples de distances

1. **Distance euclidienne** (ou distance d_2) : induite par la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

$$d_2(X,Y) = \|X - Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$$

2. **Distance** d_1 : induite par la norme $\|\cdot\|_1$.

$$d_1(X,Y) = \|X - Y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$$

3. **Distance** d_∞ : induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

$$d_\infty(X,Y) = \|X - Y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$$

4. **Distance logarithmique** sur $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$:

$$d_{log}(a, b) = |\ln(b/a)| = |\ln(b) - \ln(a)|$$

En base 10 : $d_{log_{10}}(x, y) = |\log_{10}(y/x)|$.

5. **Distance SNCF** sur un ensemble de points. Si on considère trois points $0, X, Y$ non alignés :

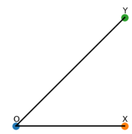

Figure 1.2: Distance SNCF

La distance SNCF entre X et Y est définie par

$$d_{SNCF}(X, Y) = d(0, X) + d(0, Y)$$

6. **Distance usuelle dans** $\mathbb{R}^2$:

$$\delta(X, Y) = \begin{cases} d(X, Y) & \text{si } 0, X, Y \text{ alignés} \\ d(0, X) + d(0, Y) & \text{sinon} \end{cases}$$

1.7 Espaces métriques

Definition 1.7.1. Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur E.

1.7.1 Inégalité triangulaire inverse

Dans un espace métrique (E, d), on a l'inégalité triangulaire inverse : Pour tous $x, y, z \in E$,

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

1.7.2 Distance induite sur un sous-ensemble

Si (E, d) est un espace métrique et $U \subset E$ est un sous-ensemble de E, la restriction de d à $U \times U$ fait de (U, d) un espace métrique.

1.8 Boules dans les espaces métriques

Soit (E, d) un espace métrique, $x_0 \in E$ et $r \geq 0$.

Definition 1.8.1. 1. La **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$$

2. La **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$$

3. La **sphère** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$S(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) = r\}$$

1.8.1 Propriétés des boules

Lemma 1.8.2.
1. $B(x_0, 0) = \emptyset$ et $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$
2. Pour $0 \leq r_1 < r_2$, on a $B(x_0, r_1) \subset B_f(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$
3. Si $d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$, alors $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$

Preuve.
1. Les propriétés (1) et (2) sont évidentes d'après la définition des boules.
2. Pour montrer (3), supposons $x \in B(x_1, r_1)$. Alors $d(x_1, x) < r_1$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$$

Donc $d(x_0, x) < r$, ce qui signifie que $x \in B(x_0, r)$. D'où $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

$\square$

Chapter 2

CM2

2.1 Espaces métriques

Definition 2.1.1. Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est appelée distance sur E si :

1. $d(x, y) \geq 0$ (positivité)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)
4. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiome de séparation)

(E, d) est appelé espace métrique.

Proposition 2.1.2 (Inégalité triangulaire)**.** Dans un espace métrique (E, d), on a aussi l'inégalité suivante:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

2.1.1 Exemples

Example 2.1.3.
1. $E = \mathbb{R}$. On définit $d(x, y) = |x - y|$.
   Boule $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} =]x_0 - r, x_0 + r[$.
2. $E = \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3, \ldots$. On a différentes normes :
   - Norme euclidienne: $||x||_2 = (\sum_{i=1}^d x_i^2)^{1/2}$
   - Norme 1: $||x||_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$
   - Norme ∞: $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

   Pour $E = \mathbb{R}^d$, on définit la distance $d_2(x, y) = ||y - x||_2 = ||\overrightarrow{xy}||_2$. De même, on peut définir $d_1(x, y) = ||y - x||_1$ et $d_\infty(x, y) = ||y - x||_\infty$.
   Boule $B_2(0, r)$ pour d_2 dans $\mathbb{R}^2$:

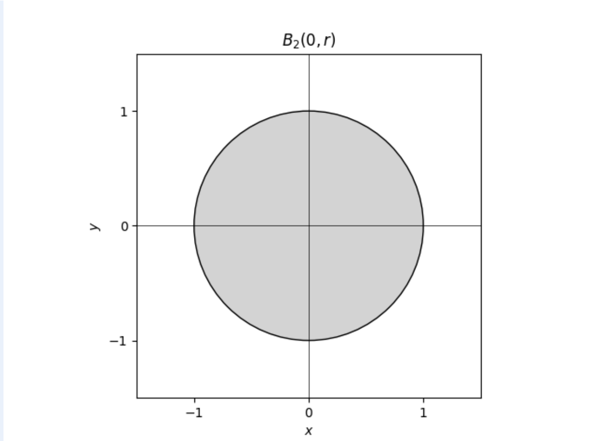

Figure 2.1: Boule $B_2(0, r)$ dans $\mathbb{R}^2$

Boule $B_\infty(0, r)$ pour d_∞ dans $\mathbb{R}^2$:

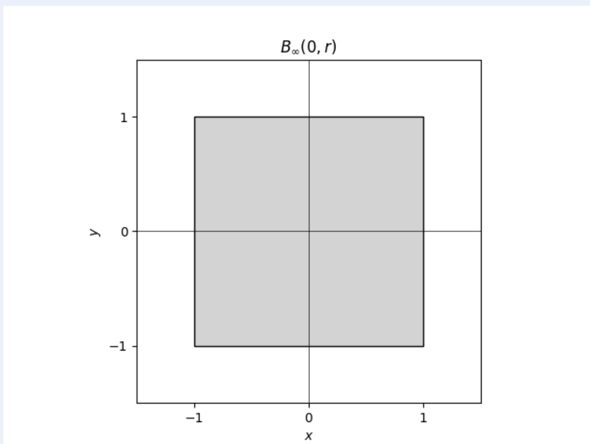

Figure 2.2: Boule $B_\infty(0, r)$ dans $\mathbb{R}^2$

Boule $B_1(0, r)$ pour d_1 dans $\mathbb{R}^2$:

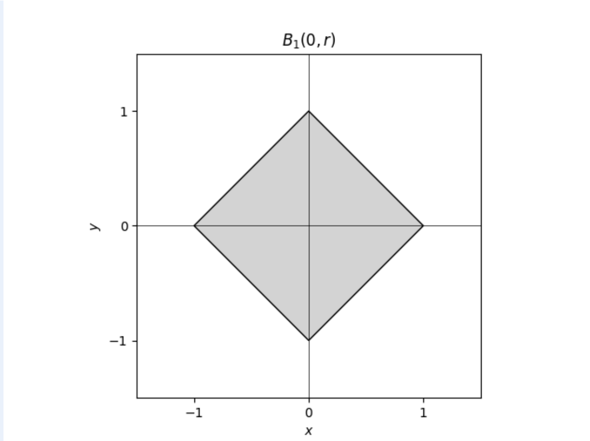

Figure 2.3: Boule $B_1(0,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

Remark 2.1.4. **Important:** notion de proximité, pas la forme.

Dans $\mathbb{R}^n$, on a les relations entre les distances:

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y)$$
$$d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x,y)$$

2.2 Parties bornées

Definition 2.2.1. Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. A est dite **bornée** si

$$\exists R > 0 \text{ et } \exists x_0 \in E \text{ tel que } A \subset B(x_0, R).$$

Lemma 2.2.2. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. A est bornée.
2. $\forall x_0 \in E, \exists r > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r)$.
3. $\exists r > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, on a $d(x,y) < r$.

Solution (Démonstration:). **1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1)**

Preuve que 1) ⇒ 2)

Hyp: $\exists x_1 \in E, \exists r_1 > 0$ tel que $A \subset B(x_1, r_1)$.
Soit $x_0 \in E$. But: trouver r tel que $A \subset B(x_0, r)$.
Si $x \in A$, alors $x \in B(x_1, r_1)$, on a $d(x, x_1) < r_1$.
On veut $d(x_0, x) < r$.

$$\begin{aligned} d(x_0,x) &\leq d(x_0,x_1) + d(x_1,x) \\ &\leq d(x_0,x_1) + r_1 \\ &< r \text{ si } r > d(x_0,x_1) + r_1 \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $r = d(x_0, x_1) + r_1$.

2) $\Rightarrow$ 3)

On fixe $x_0 \in E$. D'après 2), $\exists r_0 > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r_0)$. Alors $\forall x, y \in A$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(x,x_0) + d(x_0,y) \\ &< r_0 + r_0 = 2r_0 \end{aligned}$$

On prend $r = 2r_0$.

3) $\Rightarrow$ 1)

On fixe $x_0 \in E$ (n'importe lequel). D'après 3), $\exists r > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, $d(x,y) < r$. Alors $\forall x \in A$, $d(x_0,x) \le d(x_0,y) + d(y,x) < d(x_0,y) + r$. On fixe $y \in A$. Alors $d(x_0,y) < \infty$ est fixe. On prend $R = d(x_0,y) + r$. Alors $\forall x \in A$, $d(x_0,x) < R$, donc $A \subset B(x_0,R)$. □

Proposition 2.2.3 (Propriétés élémentaires).

1. Toute partie finie est bornée.
2. Si A bornée et $B \subset A$ alors B bornée.
3. L'union d'un nb fini de bornées est bornée.

Solution (Démonstration:). **1) Tout partie finie est bornée**

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie finie de E. On fixe $x_0 \in E$. Pour chaque a_i, $d(x_0,a_i) < \infty$. Soit $r_i = d(x_0,a_i) + 1$. Alors $a_i \in B(x_0,r_i)$. On prend $R = \max_{1 \le i \le n} r_i$. Alors $a_i \in B(x_0,R)$ pour tout i. Donc $A \subset B(x_0,R)$.

2) Si A bornée et $B \subset A$ alors B bornée

Si A est bornée, $\exists x_0, R$ tq $A \subset B(x_0,R)$. Comme $B \subset A$, on a $B \subset B(x_0,R)$. Donc B est bornée.

3) L'union d'un nb fini de bornées est bornée (Partie)

Soient $A_1, \ldots, A_n$ sont bornées. Je fixe $x_0 \in E$. A_i bornée ($1 \le i \le n$) donc $\exists r_i > 0$ tel que $A_i \subset B(x_0,r_i)$. Soit $r = \max_{1 \le i \le n} r_i$. Si $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, alors $x \in A_i$ pour un i. Donc $x \in B(x_0,r_i) \subset B(x_0,r)$. Donc $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset B(x_0,r)$. □

2.3 Fonctions bornées

Definition 2.3.1. Soit B un ensemble. Une fonction $F : B \to E$ est **bornée** si

$$F(B) = \{F(b) : b \in B\} \subset E$$

est bornée.

2.4 Distances entre ensembles

Definition 2.4.1. Soit A, B deux parties de E. On pose

$$d(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y).$$

Remark 2.4.2. $\forall x \in A, y \in B$, $d(A,B) \le d(x,y)$. $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A, y \in B$ tq $d(x,y) \le d(A,B) + \epsilon$.

Proposition 2.4.3 (Notation Proposition).

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = d(\{x\}, A).$$

2.5 Topologie des espaces métriques

Concepts importants: distance $\to$ boules $B(x_0, r)$ $\to$ ensembles ouverts.

Definition 2.5.1. Soit (E, d) espace métrique.

1. $U \subset E$ est **ouvert** si
$$\forall x_0 \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x_0, r) \subset U.$$

2. $F \subset E$ est **fermé** si $E \setminus F$ est ouvert.

Remark 2.5.2. Dans $\mathbb{R}$ les intervalles ouverts sont des ouverts.

Comment montrer que l'ensemble est ouvert ou fermé. Dans le poly.

- $\emptyset$ est ouvert (par définition).
- E est ouvert.
- E est fermé, $\emptyset$ est fermé (comme complémentaires d'ouverts).

2.6 Lemmes et théorèmes

Lemma 2.6.1. 1)$B(x_0, r)$ est ouvert.
2)$B_f(x_0, r)$ est fermé.

Solution (Démo dans le poly). □

Example 2.6.2. $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |y - x|$. $A =]0, 1[$ ouvert dans $\mathbb{R}$. $A =]0, 1[$ pas fermé dans A. $R \setminus A =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$ fermé dans $\mathbb{R}$.
Je regarde A comme partie de (A, d). A est fermé dans A.

Theorem 2.6.3.

1. Soit $U_i, i \in I$ une collection d'ouverts. Alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert (l'union quelconque d'ouverts est un ouvert).
2. Si $U_1, \ldots, U_n$ sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est ouvert (l'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouvert).
3. Si $F_i, i \in I$ sont fermés, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé (l'intersection quelconque de fermés est fermé).
4. $F_1, \ldots, F_n$ fermés, alors $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est fermé.

Example 2.6.4 (Examples et remarques). $U_i =]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[$, $i \geq 0$. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{0\}$ pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
$F_i = [0, 1 - \frac{1}{i}]$ fermé dans $\mathbb{R}$. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i = [0, 1[$ pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Solution (Dem:). **1) Soit** $x \in \bigcup_{i \in I} U_i = U$. Il existe un i noté i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} est ouvert donc $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i = U$. Donc U est ouvert.

2) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$. $x \in U_i$ pour $1 \leq i \leq n$. U_i ouvert donc $\exists r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$. Soit $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$. $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i$ $1 \leq i \leq n$. Donc $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$. Donc $B(x,r) \subset U$. $\square$

Chapter 3

CM3

3.1 Intérieur, Adhérence, Frontière

3.1.1 Intérieur

Definition 3.1.1. Soit $A \subseteq E$.

1. Un point $x_0 \in E$ est **intérieur** à A s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subseteq A$.
2. **Int**(A) (l'intérieur de A) : ensemble de tous les points intérieurs de A.

Autre notation : $\overset{\circ}{A}$.

Proposition 3.1.2. $\mathrm{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A. De manière équivalente, $\mathrm{Int}(A)$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans A.

Preuve.

1. **Int**$(A) \subseteq A$ **: évident**. Par définition, tous les points de $\mathrm{Int}(A)$ sont dans A.
2. **Int**(A) **est ouvert**. Soit $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x_0, \delta_0) \subseteq A$. Pour montrer que $\mathrm{Int}(A)$ est ouvert, il faut montrer que pour tout $x \in \mathrm{Int}(A)$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq \mathrm{Int}(A)$.

   Soit $x \in \mathrm{Int}(A)$. Puisque $x \in \mathrm{Int}(A)$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x, \delta_0) \subseteq A$. Pour montrer que x est un point intérieur de $\mathrm{Int}(A)$, nous devons trouver un $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq \mathrm{Int}(A)$. Choisissons $\delta = \delta_0/2$. Considérons $y \in B(x, \delta)$. Alors $d(y, x) < \delta_0/2$. Pour montrer que $y \in \mathrm{Int}(A)$, nous devons trouver $\delta' > 0$ tel que $B(y, \delta') \subseteq A$. Prenons $\delta' = \delta_0/2$. Si $z \in B(y, \delta')$, alors $d(z, y) < \delta_0/2$. Par l'inégalité triangulaire, $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta_0/2 + \delta_0/2 = \delta_0$. Donc $z \in B(x, \delta_0) \subseteq A$. Ainsi, $B(y, \delta') \subseteq A$, ce qui signifie que $y \in \mathrm{Int}(A)$. Par conséquent, $B(x, \delta) \subseteq \mathrm{Int}(A)$. Donc $\mathrm{Int}(A)$ est ouvert.
3. Si U est ouvert et $U \subseteq A$ alors $U \subseteq \mathrm{Int}(A)$?

   Soit U un ouvert tel que $U \subseteq A$. Pour tout $x_0 \in U$, puisque U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subseteq U$. Comme $U \subseteq A$, on a $B(x_0, \delta) \subseteq A$. Par définition, cela signifie que x_0 est un point intérieur de A, donc $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$. Par conséquent, $U \subseteq \mathrm{Int}(A)$.

$\square$

3.1.2 Adhérence

Definition 3.1.3. Soit $A \subseteq E$, $x_0 \in E$. x_0 est **adhérent** à A si $\forall \delta > 0$, $B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$. (Équivalent à $d(x_0, A) = 0$).

Adh(A) (adhérence ou fermeture de A) = ensemble des points adhérents à A.
Notée aussi $\overline{A}$.

$d(x_0, A) = \inf_{x\in A} d(x_0, x)$.
$d(x_0, A) = 0 \iff x_0 \in \mathrm{Adh}(A)$.
$\forall\delta > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) < \delta$. $\forall\delta > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) \leq \delta$. $\forall\delta > 0$, donc $d(x_0, A) = 0$.

Proposition 3.1.4. $\mathrm{Adh}(A)$ est le plus petit fermé qui contient A (l'intersection de tous les fermés qui contiennent A).

Preuve.
1. $A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$: clair. Si $x \in A$, alors pour tout $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ car $x \in B(x, \delta) \cap A$. Donc $x \in \mathrm{Adh}(A)$.
2. $\mathrm{Adh}(A)$ est fermé. Il faut montrer que $E \setminus \mathrm{Adh}(A)$ est ouvert.

   $x_0 \in \mathrm{Adh}(A) \iff \forall\delta > 0$, $B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$. $x_0 \notin \mathrm{Adh}(A) \iff \exists\delta_0 > 0$ t.q. $B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset$. $\iff \exists\delta_0 > 0$ t.q. $B(x_0, \delta_0) \subseteq E \setminus A$. $\implies x_0 \in \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

   Donc $E \setminus \mathrm{Adh}(A) \subseteq \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

   Réciproquement, si $x_0 \in \mathrm{Int}(E \setminus A)$, alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x_0, \delta_0) \subseteq E \setminus A$. Donc $B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset$. Ainsi $x_0 \notin \mathrm{Adh}(A)$, et donc $x_0 \in E \setminus \mathrm{Adh}(A)$.

   $E \setminus \mathrm{Adh}(A) = \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

   Comme $\mathrm{Int}(E \setminus A)$ est ouvert, son complémentaire $E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus A) = \mathrm{Adh}(A)$ est fermé.

   $\mathrm{Adh}(A) = E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

$\square$

3.1.3 Frontière

Definition 3.1.5. Soit $A \subseteq E$, la **frontière** de A (ou bord de A) notée $\mathrm{Fr}(A)$ ou ∂A, c'est $\mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(E \setminus A)$.
$x_0 \in \mathrm{Fr}(A) \iff d(x_0, A) = 0$ et $d(x_0, E \setminus A) = 0$.
$\forall\delta > 0$, $B(x_0, \delta)$ intersecte A et aussi $E \setminus A$.

Example 3.1.6. Exemples dans $\mathbb{R}$ $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. $\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$.
$\mathrm{Adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. $\mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
$\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. $\mathrm{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Parfois $B_f(x_0, r)$ notée $\overline{B}(x_0, r)$.

Example 3.1.7. $E = \{a, b, c\}$. On pose $d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$. $d(a, b) = d(b, a) = d(b, c) = d(c, b) = 1$. $d(a, c) = d(c, a) = 2$.
$B(a, 2) = \{a, b\} = \mathrm{Adh}(B(a, 2))$. No it should be $B(a, 2) = \{y \in E : d(a, y) < 2\} = \{a, b\}$. $\mathrm{Adh}(B(a, 2)) = \mathrm{Adh}(\{a, b\})$. Points adherent to $\{a, b\}$ are points x such that for any $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$. For a, $B(a, \delta) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ for any $\delta > 0$. Same for b. For c, $B(c, 1) = \{c\}$, $B(c, 1) \cap \{a, b\} = \emptyset$. So $\mathrm{Adh}(\{a, b\}) = \{a, b\}$. $B_f(a, 2) = \{y \in E : d(a, y) \leq 2\} = \{a, b, c\} = E$.

Proposition 3.1.8.
1. $\mathrm{Int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$.
2. $E = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(E \setminus A)$ (union disjointe).
3. $E \setminus \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Adh}(E \setminus A)$.
4. $E \setminus \mathrm{Adh}(A) = \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

5. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Adh}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Proposition 3.1.9.
1. A ouvert $\iff A = \mathrm{Int}(A)$.
2. A fermé $\iff A = \mathrm{Adh}(A)$.
3. $x \in \mathrm{Adh}(A) \iff d(x, A) = 0$.
4. $x \in \mathrm{Int}(A) \iff d(x, E \setminus A) > 0$.

3.2 Ensembles Denses

Definition 3.2.1. Soit $A \subseteq B \subseteq E$. On dit que A est **dense** dans B si $B \subseteq \mathrm{Adh}(A)$.

Soit $x_0 \in B$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) < \epsilon$.

Example 3.2.2. $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$ dense dans $\mathbb{R}^2$.

3.3 Suites dans un Espace Métrique

Definition 3.3.1. Soit E un ensemble. Une **suite** dans E (notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) c'est une fonction $u : \mathbb{N} \to E$ où $n \mapsto u(n)$. On note u_n le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $E = \mathbb{R}^d$. $X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$ où $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ suites dans $\mathbb{R}$.

Definition 3.3.2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $x \in E$. On dit que $\lim_{n\to\infty} X_n = x$ si : $(\forall \epsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N})$ t.q. si $n \geq N \implies d(X_n, x) < \epsilon$.

Suite bornée : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ est un ensemble borné.

Remark 3.3.3. Dans $\mathbb{R}^d$ muni de d_2. $X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$. $X = (x_1, \dots, x_d)$. $\lim_{n\to\infty} X_n = X \iff \lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$, $1 \leq i \leq d$.

Proposition 3.3.4. La limite d'une suite convergente est unique.

Preuve. Soit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x'$. $d(x, x') \leq d(x, X_n) + d(X_n, x')$. $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
$\implies d(x, x') = 0 \implies x = x'$. □

Proposition 3.3.5 (Lien avec l'adhérence).
1. $x \in \mathrm{Adh}(A)$ ssi il existe une suite (X_n) d'éléments de A t.q. $\lim_{n\to\infty} X_n = x$.
2. A est fermé ssi pour toute suite (X_n) d'éléments de A qui converge vers $x \in E$, on a $x \in A$.

Preuve.
1. " $\implies$ " : Soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$.

   Avec (X_n), $X_n \in A$ et $\lim_{n\to\infty} X_n = x$.

   J'ai $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ t.q. $d(x, x_\epsilon) < \epsilon$. donc $\inf_{y\in A} d(x, y) = 0 = d(x, A)$. $d(x, A) = 0 \implies x \in \mathrm{Adh}(A)$.

   " $\implies$ " soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$. $\implies d(x, A) = 0$. $\implies \forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ t.q. $d(x, x_\epsilon) < \epsilon$. Prendre

$\epsilon = 1/n$. Je pose $u_n = x_{1/n}$. $u_n \in A$. $d(x, u_n) \leq 1/n$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = x$.

2. " $\implies$ " soit A fermé donc $A = \text{Adh}(A)$.

   Soit (X_n) suite dans A qui converge vers x. $x \in \text{Adh}(A) = A$. $x \in \text{Adh}(A) \implies x \in A$.

   "$\impliedby$" Réciproquement. Si toute suite dans A qui converge vers x, $x \in A$ (donc A fermé). $A \subseteq \text{Adh}(A)$, j'ai $A = \text{Adh}(A)$ (donc A fermé). Suites de Cauchy.

$\square$

3.3.1 Suites de Cauchy

Definition 3.3.6. Une suite (X_n) est de **Cauchy** si : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(X_p, X_n) < \epsilon$ pour tous $n, p \geq N$.

Chapter 4

CM4

4.1 Suites de Cauchy et Complétude

Definition 4.1.1 (Suite de Cauchy)**.** Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique E est dite suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geq N$, on a $d(x_p, x_n) \leq \varepsilon$.

Proposition 4.1.2. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve. Supposons que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Alors pour tous $n, p \geq N$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leq d(x_n, x) + d(x, x_p) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. □

Proposition 4.1.3. Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par définition (en prenant $\varepsilon = 1$), il existe N tel que $d(x_n, x_p) \leq 1$ pour $n, p \geq N$. En particulier $d(x_n, x_N) \leq 1$ pour $n \geq N$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_N) \leq \max(\{d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\} \cup \{1\}) =: r_0.$$

Ainsi $x_n \in B(x_N, r_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Definition 4.1.4 (Espace complet)**.** Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Theorem 4.1.5. $\mathbb{R}^d$ muni de la distance canonique est complet.

4.2 Intérieur et Adhérence

Definition 4.2.1 (Intérieur). Soit $A \subset E$. Un point $x \in E$ est intérieur à A s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A se note $\text{Int}(A)$ et s'appelle l'intérieur de A.

Proposition 4.2.2. $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A, ou de manière équivalente la réunion de tous les ouverts inclus dans A.

Definition 4.2.3 (Adhérence). Soit $A \subset E$. Un point $x \in E$ est adhérent à A si $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$. L'ensemble des points adhérents à A se note $\text{Adh}(A)$ et s'appelle l'adhérence ou la fermeture de A.

Proposition 4.2.4. $\text{Adh}(A)$ est le plus petit fermé contenant A, ou de manière équivalente l'intersection de tous les fermés contenant A.

Proposition 4.2.5. $x \in \text{Adh}(A)$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Example 4.2.6. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y < 4\}$. Déterminer $\text{Int}(A)$ et $\text{Adh}(A)$.

- $\text{Int}(A) = A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y < 4\}$. A est ouvert.
- $\text{Adh}(A) = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \leq 4\}$. C est fermé et contient A.

Example 4.2.7. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$. Déterminer $\text{Adh}(A)$ et $\text{Int}(A)$.

- $\text{Int}(A) = \emptyset$. Car $\text{Int}(A)$ est un ouvert inclus dans A. Or A ne contient aucune boule ouverte.
- $\text{Adh}(A) = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$.

4.3 Exercices Résolus

Example 4.3.1. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$. Déterminer $\text{Int}(A)$ et $\text{Adh}(A)$.

Solution.

1. On dessine A, c'est un carré ouvert.
2. On pense que $\text{Int}(A) = B = A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$ et $\text{Adh}(A) = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
3. Montrons que $B = \text{Int}(A)$.
   - B est ouvert et $B \subset A$. Vrai par définition de B.
   - Soit $X \in A \setminus B = \emptyset$. Donc il n'y a pas de points de A qui ne sont pas dans B. Ainsi $B = \text{Int}(A)$.
4. Montrons que $C = \text{Adh}(A)$.
   - C est fermé et $A \subset C$. Vrai par définition de C.
   - Montrons que $C \subset \text{Adh}(A)$. Pour chaque $X \in C$, on cherche une suite (X_n) avec $X_n \in A$ et $\lim X_n = X$. Soit $X = (x, y) \in C$, i.e., $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. On prend $X_n = (x - 1/n, y - 1/n)$ (si $x = 1$, on prend $x - 1/n$, similarly for y). Plus précisément, soit $X_n = (x_n, y_n)$ avec

$x_n = x - \frac{1}{n}\mathrm{sign}(x)$ si $x \neq 0$ et $x_n = -1/n$ si $x = 0$, et $y_n = y - \frac{1}{n}\mathrm{sign}(y)$ si $y \neq 0$ et $y_n = -1/n$ si $y = 0$. Alors $X_n \in A$ et $\lim X_n = X$.

□

Example 4.3.2. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$. Déterminer $\mathrm{Adh}(A)$ et $\mathrm{Int}(A)$.

Solution.

1. On dessine A. C'est le graphe de $\sin(1/x)$ pour $x > 0$.
2. On pense que $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Adh}(A) = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$. Soit $C = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$.
3. Montrons que $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$. Si $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Int}(A)$ est un ouvert non vide inclus dans A. Donc $\mathrm{Int}(A)$ contient une boule $B(X_0, r) \subset A$. Mais A est le graphe d'une fonction, il n'y a pas de boule dans A. Donc $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.
4. Montrons que $\mathrm{Adh}(A) = C = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$.
   - C est fermé et $A \subset C$. A n'est pas fermé. C est fermé, car si $(X_n) \in C$ et $X_n \to X$, alors $X \in C$. Si $X_n = (x_n, y_n) \in A$, alors $x_n > 0, y_n = \sin(1/x_n)$. Si $X_n \to X = (x, y)$, alors $x_n \to x, y_n \to y$. Si $x > 0$, alors $X \in A \subset C$. Si $x = 0$, on ne peut pas dire que $y = \sin(1/x)$. Mais on sait que $-1 \leq \sin(1/x_n) \leq 1$, donc $-1 \leq y_n \leq 1$, donc $-1 \leq y \leq 1$. Donc si $x = 0$, $X = (0, y)$ avec $y \in [-1, 1]$, donc $X \in C$.
   - Montrons que $C \subset \mathrm{Adh}(A)$. Pour $X \in C$, si $X \in A$, alors $X \in \mathrm{Adh}(A)$. Si $X \in C \setminus A = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$, i.e., $X = (0, y)$ avec $y \in [-1, 1]$. On doit montrer que $X \in \mathrm{Adh}(A)$. On cherche une suite $X_n \in A$ avec $X_n \to X$. On prend $X_n = (\frac{1}{n\pi + \arcsin(y)}, \sin(n\pi + \arcsin(y))) = (\frac{1}{n\pi + \arcsin(y)}, y)$. Alors $X_n \in A$ et $X_n \to (0, y) = X$. Donc $X \in \mathrm{Adh}(A)$.

□

Chapter 5

CM5

5.1 Compacité

5.1.1 Définitions clés

Definition 5.1.1 (Recouvrement ouvert)**.** Soit $F \subset E$. Un recouvrement ouvert de F est une collection $(U_i)_{i \in I}$ où U_i sont des ouverts de E et $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definition 5.1.2 (Ensemble compact)**.** $K \subset E$ est compact si de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Theorem 5.1.3 (Caractérisation séquentielle de la compacité)**.** $K \subset E$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite qui converge vers un élément de K.

5.1.2 Exemples et contre-exemples

Example 5.1.4. $F = \mathbb{R}^2$ n'est pas compact. Considérons le recouvrement ouvert $U_x = B(x, 1/2)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^2} U_x$. Cependant, on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.

Example 5.1.5. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 0 \leq -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}\}$. F n'est pas compact. Considérons la suite $u_n = (n, 0) \in F$. Toute sous-suite de (u_n) est non bornée, donc sans sous-suite convergente dans F.

5.2 Propriétés des ensembles compacts

Proposition 5.2.1. Tout compact $K \subset E$ est borné et fermé.

Proposition 5.2.2. Si K est compact et F est fermé, alors $K \cap F$ est compact.

Proposition 5.2.3. Si K est compact, toute suite de Cauchy dans K converge dans K.

5.2.1 Preuves des propriétés

Preuve (Preuve qu'un compact est borné)**.** Soit K compact. Pour $x \in K$, considérons $U_x = B(x, 1)$. Alors $(U_x)_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, il existe un sous-recouvrement fini $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Soit $R = \max_{1\le i\le n} \|x_i\| + 1$. Alors pour tout $x \in K$, il existe i tel que $x \in U_{x_i} = B(x_i, 1)$, donc $d(x, x_i) < 1$. Par l'inégalité triangulaire, $\|x\| \le \|x - x_i\| + \|x_i\| < 1 + \|x_i\| \le R$. Ainsi, $K \subset B(0, R)$, et K est borné. $\square$

Preuve (Preuve qu'un compact est fermé)**.** Soit K compact et montrons que K est fermé. Montrons que $E \setminus K$ est ouvert. Soit $x \notin K$. Pour tout $y \in K$, il existe $r_y > 0$ tel que $B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset$. Considérons le recouvrement ouvert de K donné par $(B(y, r_y))_{y\in K}$. Il existe un sous-recouvrement fini $B(y_1, r_{y_1}), \dots, B(y_n, r_{y_n})$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, r_{y_i})$. Soit $r = \min_{1\le i\le n} r_{y_i} > 0$. Considérons $B(x, r)$. Pour tout $z \in B(x, r)$, et pour tout i, $B(z, r) \cap B(y_i, r_{y_i}) = \emptyset$. Donc $B(x, r) \cap K = \emptyset$, et $B(x, r) \subset E \setminus K$. Ainsi $E \setminus K$ est ouvert, et K est fermé. $\square$

Preuve (Preuve que K compact et F fermé $\implies$ K $\cap$ F compact)**.** Soit K compact et F fermé. Considérons un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $K \cap F$. Alors $(U_i)_{i\in I} \cup (E \setminus F)$ est un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, il existe un sous-recouvrement fini $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, E \setminus F$ tel que $K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup (E \setminus F)$. Alors $K \cap F \subset (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup (E \setminus F)) \cap F = (U_{i_1} \cap F) \cup \cdots \cup (U_{i_n} \cap F) \cup ((E \setminus F) \cap F) = (U_{i_1} \cap F) \cup \cdots \cup (U_{i_n} \cap F) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Ainsi, $K \cap F$ est compact. $\square$

Preuve (Preuve que si K est compact, toute suite de Cauchy dans K converge dans K)**.** Soit (u_n) une suite de Cauchy dans K compact. Puisque K est compact, il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers une limite $l \in K$. Puisque (u_n) est de Cauchy et qu'une sous-suite converge vers l, la suite (u_n) converge vers l. Donc toute suite de Cauchy dans K converge dans K. $\square$

Preuve (Preuve par contradiction qu'un compact est borné)**.** Supposons que K n'est pas borné. On fixe $a \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme K n'est pas borné, il existe $x_n \in K$ tel que $d(a, x_n) > n$. La suite (x_n) n'est pas bornée (car $d(a, x_n) \to +\infty$), donc (x_n) ne possède pas de sous-suite convergente. Ceci contredit le fait que K est compact (par caractérisation séquentielle). Donc K est borné. $\square$

5.3 Compacts de $\mathbb{R}^n$

5.3.1 Théorème de Borel-Lebesgue

Theorem 5.3.1 (Théorème de Borel-Lebesgue)**.** Dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle, $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si K est fermé et borné.

5.3.2 Compacité des boules fermées

Proposition 5.3.2. Dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle, les boules fermées $B_f(x_0, r)$ sont compactes.

5.3.3 Preuve de la compacité des boules fermées

Preuve. Pour $n = 1$, montrons que $[a, b]$ est compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$. Soit $E = \{x \in [a, b] \mid [a, x]$ est recouvert par un nombre fini de $U_i\}$. E est non vide car $a \in E$. Montrons que E est borné. Soit $c = \sup E$. Supposons que $c < b$. Puisque $c \in [a, b]$, il existe $U_{i_0} \in \mathcal{U}$ tel que $c \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $]c - \delta, c + \delta[\subset U_{i_0}$. Puisque $c = \sup E$, il existe $x \in E$ tel que $c - \delta < x \le c$. Par définition de E, $[a, x]$ est recouvert par un nombre fini de U_i. Donc $[a,x] \cup [x, c+\delta/2] = [a, c+\delta/2]$ est recouvert par un nombre fini de U_i (en ajoutant U_{i_0}). Donc $c + \delta/2 \in E$, ce qui contredit $c = \sup E$. Donc $c = b$. Montrons que $b \in E$. On choisit U_{i_1} tel que $b \in U_{i_1}$ et $\delta > 0$ tel que $]b-\delta, b+\delta[\subset U_{i_1}$. On choisit $x \in]b-\delta, b] \cap E$. Alors $[a,x]$ est recouvert par un nombre fini de U_i. Donc $[a,x] \cup [x,b] = [a,b]$ est recouvert par un nombre fini de U_i (en ajoutant U_{i_1}). Donc $[a,b]$ est compact. □

5.4 Limites et continuité

5.4.1 Définition des limites dans les espaces métriques

Definition 5.4.1 (Limite)**.** Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, $x_0 \in E_1$, $l \in E_2$ et $F : E_1 \to E_2$ une application. On dit que $\lim_{x \to x_0} F(x) = l$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E_1$ tel que $d_1(x, x_0) < \delta$, on a $d_2(F(x), l) < \epsilon$.

5.4.2 Définition de la continuité

Definition 5.4.2 (Continuité en un point)**.** On dit que F est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Definition 5.4.3 (Continuité sur un ensemble)**.** On dit que F est continue (sur E_1) si F est continue en tout point $x_0 \in E_1$.

Proposition 5.4.4. F est continue sur E_1 si et seulement si elle est continue en tout point de E_1.

5.5 Propriétés équivalentes de la continuité

Proposition 5.5.1 (Propriétés équivalentes de la continuité)**.** Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $F : E_1 \to E_2$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F est continue.
2. Pour tout ouvert $U \subset E_2$, $F^{-1}(U)$ est ouvert dans E_1.
3. Pour tout fermé $F \subset E_2$, $F^{-1}(F)$ est fermé dans E_1.
4. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_1 avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E_1$, on a $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$.

5.5.1 Preuves des équivalences

Preuve.

1. (1) $\implies$ (2) : Soit $U \subset E_2$ ouvert et $x_0 \in F^{-1}(U)$. Alors $y_0 = F(x_0) \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(y_0, \epsilon) \subset U$. Comme F est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que si $d_1(x, x_0) < \delta$, alors $d_2(F(x), y_0) < \epsilon$. Donc si $x \in B(x_0, \delta)$, alors $F(x) \in B(y_0, \epsilon) \subset U$, donc $x \in F^{-1}(U)$. Ainsi $B(x_0, \delta) \subset F^{-1}(U)$, et $F^{-1}(U)$ est ouvert.

2. (2) $\implies$ (3) : Par passage aux complémentaires.

3. (3) $\implies$ (4) : Soit (x_n) une suite dans E_1 avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E_1$. Supposons que $(F(x_n))$ ne converge pas vers $F(x)$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p(n) > n$ avec $d_2(F(x_{p(n)}), F(x)) \geq \epsilon_0$. Soit $y_n = x_{p(n)}$ et $U = E_2 \setminus B(F(x), \epsilon_0)$. U est fermé, $F(y_n) \in U$, donc $y_n \in F^{-1}(U)$, qui est fermé par propriété (3). Comme (y_n) est une sous-suite de (x_n) qui converge vers x, on a $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Puisque $F^{-1}(U)$ est fermé, on a $x \in F^{-1}(U)$. Donc $F(x) \in U = E_2 \setminus B(F(x), \epsilon_0)$, ce qui signifie $d_2(F(x), F(x)) \geq \epsilon_0$, ce qui est faux.

4. (4) $\implies$ (1) : Supposons que F n'est pas continue en $x_0 \in E_1$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x_\delta \in E_1$ avec $d_1(x_\delta, x_0) < \delta$ et $d_2(F(x_\delta), F(x_0)) \geq \epsilon_0$. En prenant $\delta = 1/n$, on obtient une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $d_2(F(x_n), F(x_0)) \geq \epsilon_0$ pour tout n. Ceci contredit (4).

□

5.5.2 Exemple de fonction continue

Example 5.5.2. Considérons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x \sin(y) - e^x$. Les fonctions coordonnées x et y, et les fonctions $\sin(y)$ et e^x sont continues. Par composition et opérations algébriques, $F(x, y) = x \sin(y) - e^x$ est continue.

5.6 Fonctions de plusieurs variables

5.6.1 Cadre $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Considérons des fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Le cadre est $\mathbb{R}^n$ pour la variable et $\mathbb{R}^p$ pour la valeur.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ le domaine de définition. On considère des applications $F : D \to \mathbb{R}^p$.

5.6.2 Continuité et composantes

Proposition 5.6.1. $F : D \to \mathbb{R}^p$ est continue si et seulement si chaque composante $F_i : D \to \mathbb{R}$ est continue, où $F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n))$.

5.6.3 Fonctions coordonnées

Les fonctions coordonnées (x_i) sont continues. Ce sont les F_i pour $F(x) = x$ (l'identité).

Chapter 6

CM6

6.1 Continuité

6.1.1 Définition de la continuité

Definition 6.1.1. Soit $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$. On dit que f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D$ avec $\|x - x_0\| \leq \alpha$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

6.1.2 Opérations sur les fonctions continues

Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont continues sur D, alors:

- $f + g$ est continue sur D.
- $f \cdot g$ est continue sur D.
- Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur D.
- Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et $f(D) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ est continue sur D.

6.1.3 Continuité et compacité

Theorem 6.1.2. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}^p$ une application continue. Alors $f(K)$ est compact dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 6.1.3. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue et $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.

6.1.4 Continuité uniforme

Definition 6.1.4. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}^p$ est uniformément continue sur D si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in D$ avec $\|x - y\| \leq \alpha$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$.

6.1.5 Lien avec la compacité

Theorem 6.1.5. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue et $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Alors $F(K)$ est compact dans $\mathbb{R}^p$.

Remark 6.1.6. Alors $F(K)$ compact dans $\mathbb{R}^p$ donc borné et atteint ses bornes.

6.1.6 Continuité partielle

Definition 6.1.7. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est partiellement continue en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ si les fonctions partielles $f_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ sont continues en a_i pour tout $1 \leq i \leq n$. On dit que f est partiellement continue sur D si f est partiellement continue en tout point de D.

Non continuité et continuité partielle: Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

- f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- f est partiellement continue en $(0,0)$. En effet, les fonctions partielles sont
  - $f(x_1, 0) = \frac{x_1 \cdot 0}{x_1^2 + 0^2} = 0$ si $x_1 \neq 0$ et $f(0,0) = 0$. Donc $f(x_1, 0) = 0$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$.
  - $f(0, x_2) = \frac{0 \cdot x_2}{0^2 + x_2^2} = 0$ si $x_2 \neq 0$ et $f(0,0) = 0$. Donc $f(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$.

  Les fonctions partielles sont constantes nulles, donc continues en 0.
- f n'est pas continue en $(0,0)$. En coordonnées polaires $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, pour $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, on a
  $$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta.$$
  Si θ est constant, alors $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$ dépend de θ. Par exemple:
  - si $\theta = 0$, $\lim_{r\to 0} f(r\cos 0, r\sin 0) = 0$.
  - si $\theta = \pi/4$, $\lim_{r\to 0} f(r\cos(\pi/4), r\sin(\pi/4)) = \cos(\pi/4)\sin(\pi/4) = \frac{1}{2}$.

  La limite $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2)$ n'existe pas.

Remark 6.1.8. La continuité implique la continuité partielle. La réciproque est fausse.

6.2 Dérivation des fonctions de plusieurs variables

6.2.1 Dérivabilité selon une direction

Definition 6.2.1. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$, $u \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est dérivable au point x_0 dans la direction u si la fonction $g(t) = f(x_0 + tu)$ est dérivable en $t = 0$.

6.2.2 Dérivées partielles

Definition 6.2.2. On dit que f admet des dérivées partielles en x_0 si f est dérivable en x_0 dans les

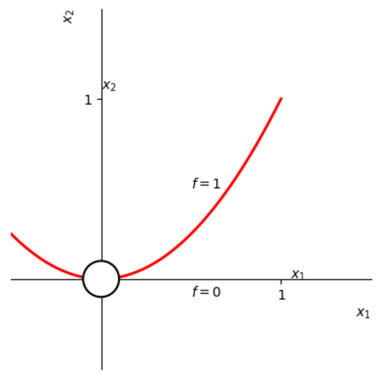

Figure 6.1: Discontinuité en $(0, 0)$

directions de la base canonique $e_1, \ldots, e_n$. On pose

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + te_i)\Big|_{t=0}.$$

Notation:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \partial_i f(x_0) = D_i f(x_0).$$

6.2.3 Différentiabilité

Definition 6.2.3. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable en $x_0 \in D$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. On note $L = df(x_0) = Df(x_0)$.

Remark 6.2.4. L'application linéaire L est unique.

Gradient: L'application linéaire L est de la forme $L(h) = \nabla f(x_0) \cdot h$ où $\nabla f(x_0)$ est le gradient de f en x_0.

Lemma 6.2.5. Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0 et f est dérivable dans toutes les directions en x_0 et

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

6.2.4 Plan tangent

Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ une surface dans $\mathbb{R}^3$ et $x_0 \in S$. Le plan tangent à S en x_0 est donné par l'équation

$$\nabla F(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

si $\nabla F(x_0) \neq 0$.

6.2.5 Fonctions de classe C^1

Definition 6.2.6. On dit que f est de classe C^1 sur D si f est différentiable en tout point de D et les fonctions $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sont continues sur D pour tout $1 \leq i \leq n$.

Theorem 6.2.7. Si f est de classe C^1 sur D, alors f est différentiable sur D.

Remark 6.2.8. La réciproque est fausse. Une fonction peut être différentiable sans être C^1.

Chapter 7

CM7

Extrema, Points Critiques et Espaces Vectoriels Normés

7.1 Extrema et Points Critiques

7.1.1 Extrema Locaux

Definition 7.1.1 (Extremum Local)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine D. On dit que $x_0 \in D$ est un point de :

- **minimum local** si il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) \geq f(x_0)$.
- **maximum local** si il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) \leq f(x_0)$.
- **extremum local** si x_0 est un minimum local ou un maximum local.

7.1.2 Points Critiques

Definition 7.1.2 (Point Critique)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert D. On dit que $x_0 \in D$ est un **point critique** de f si le gradient de f en x_0 est nul, c'est-à-dire :

$$\nabla f(x_0) = \vec{0}$$

ou encore, si toutes les dérivées partielles de f en x_0 sont nulles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Theorem 7.1.3 (Condition Nécessaire d'Extremum Local)**.** Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert D. Si $x_0 \in D$ est un extremum local de f, alors x_0 est un point critique de f.

7.2 Dérivées Partielles d'Ordre Supérieur

7.2.1 Définitions et Notations

Pour une fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert D, on peut définir les dérivées partielles secondes en dérivant à nouveau les dérivées partielles premières. Par exemple, la dérivée partielle seconde de f par rapport à x_i puis x_j est notée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

De même, on définit les dérivées partielles d'ordre supérieur en dérivant successivement par rapport aux variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}\right)$$

7.2.2 Théorème de Schwarz

Theorem 7.2.1 (Théorème de Schwarz (Lemme de Schwarz)). Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert D. Alors, pour tout $x \in D$ et pour tous indices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, les dérivées partielles croisées sont égales :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Ce théorème est fondamental car il simplifie le calcul et l'analyse des dérivées secondes. Il stipule que sous condition de régularité (C^2), l'ordre de dérivation n'a pas d'importance.

7.2.3 Exemple

Considérons la fonction $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$.

Calculons les dérivées partielles premières pour $(x_1, x_2) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{(2x_1x_2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 x_2 - x_2^3)(2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
&= \frac{2x_1x_2^3 + 2x_1x_2^3 + 2x_1^3x_2 - 2x_1^3x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
&= \frac{2x_1x_2^3 + 2x_1x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1x_2(x_2^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
&= \frac{2x_1x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{(x_1^2 - 3x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 x_2 - x_2^3)(2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
&= \frac{x_1^4 + x_1^2x_2^2 - 3x_2^2x_1^2 - 3x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
&= \frac{x_1^4 - x_1^2x_2^2 - x_2^4 - 3x_2^2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \qquad = \frac{x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2}
\end{aligned}$$

Pour calculer les dérivées partielles à l'origine, nous utilisons la définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{-k^3}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k}{k} = -1$$

Transformation en coordonnées polaires : Soit $x_1 = r\cos\theta$ et $x_2 = r\sin\theta$. Alors $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ et

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2} \\ &= r(\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \\ &= r\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= r\sin\theta\cos(2\theta) \end{aligned}$$

7.3 Méthode de Calcul de la Dérivée Seconde en un Point

7.3.1 Méthode Pas à Pas

Pour calculer la dérivée seconde d'une fonction composée, par exemple $g(x_1) = f(x_1, h(x_1))$, où f est une fonction de deux variables et h est une fonction d'une variable, on peut suivre les étapes suivantes :

1. Exprimer $g(x_1)$ en substituant x_2 par $h(x_1)$ dans l'expression de $f(x_1, x_2)$.
2. Calculer la dérivée première de $g(x_1)$, $g'(x_1)$, en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées.
3. Calculer la dérivée seconde de $g(x_1)$, $g''(x_1)$, en dérivant $g'(x_1)$ par rapport à x_1.
4. Évaluer $g''(x_1)$ au point souhaité.

7.3.2 Exemple

Calculons la dérivée seconde de $g(x_1) = f(x_1, x_1^2)$ au point où c'est possible, avec $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2}{x_1^2 + x_2^2}$.

1. $g(x_1) = f(x_1, x_1^2) = \frac{x_1^2 - x_1^2}{x_1^2 + (x_1^2)^2} = \frac{0}{x_1^2 + x_1^4} = 0$ pour $x_1 \neq 0$. Si $x_1 = 0$, alors $g(0) = f(0,0) = \frac{0-0}{0+0}$, expression indéterminée. Cependant si on prend la limite quand $x_1 \to 0$, $g(x_1) \to 0$. On peut définir $g(0) = 0$ par continuité. Alors $g(x_1) = 0$ pour tout x_1.
2. $g'(x_1) = \frac{d}{dx_1}(0) = 0$.
3. $g''(x_1) = \frac{d}{dx_1}(0) = 0$.
4. $g''(0) = 0$.

Conclusion : $g''(0) = 0$.

Pour vérifier ce résultat en utilisant les dérivées partielles, nous devons utiliser la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{dg}{dx_1}(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_1^2) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_1^2) \cdot 2x_1$$

Pour calculer la dérivée seconde, nous dérivons à nouveau par rapport à x_1:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{dx_1^2}(x_1) &= \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_1^2) + 2x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_1^2)\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_1^2) \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_1^2) \cdot 2x_1 \\ &\quad + 2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_1^2) + 2x_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_1^2) \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_1^2) \cdot 2x_1\right) \end{aligned}$$

En évaluant en $x_1 = 0$, et en utilisant que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = -1$:

$$\frac{d^2 g}{dx_1^2}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) + 0 + 2\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) + 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) + 2\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$$

Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = -1$ est réalisé comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2-0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

Il y a une erreur dans les notes manuscrites, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) \neq 1$. Refaisons le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2-0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}$$

. Cette limite n'existe pas. Refaisons le calcul de la dérivée en $x_1 = 0$ pour $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0-k}{0+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k/k^2}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-1}{k^2}$$

Cette limite n'existe pas non plus. Il y a une erreur dans les notes manuscrites.

7.4 Matrice Hessienne

7.4.1 Définition de la Matrice Hessienne

Definition 7.4.1 (Matrice Hessienne). Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert D. La **matrice Hessienne** de f au point $x_0 \in D$, notée $H_f(x_0)$, est la matrice carrée d'ordre n des dérivées partielles secondes de f évaluées en x_0 :

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

En utilisant le théorème de Schwarz, la matrice Hessienne est symétrique, c'est-à-dire $H_f(x_0)^T = H_f(x_0)$.

7.5 Théorème de Taylor d'Ordre 2

7.5.1 Formule de Taylor d'Ordre 2

Theorem 7.5.1 (Formule de Taylor d'Ordre 2). Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert D. Soit $x_0 \in D$. Alors pour x au voisinage de x_0, on a la formule de Taylor d'ordre 2 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0) h + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

où $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. Ici, h est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\nabla f(x_0) \cdot h$ est le produit scalaire du gradient de f en x_0 avec h, et $h^T H_f(x_0) h$ est la forme quadratique associée à la matrice Hessienne $H_f(x_0)$ évaluée en h.

7.5.2 Analyse des Points Critiques avec la Formule de Taylor

Si x_0 est un point critique de f, alors $\nabla f(x_0) = \vec{0}$, et la formule de Taylor d'ordre 2 se simplifie :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} h^T H_f(x_0) h + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

Le signe de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est donc déterminé par le signe de la forme quadratique $h^T H_f(x_0)h$ pour h proche de $\vec{0}$. L'étude des valeurs propres de la matrice Hessienne permet de déterminer ce signe et donc la nature du point critique x_0.

7.6 Nature des Points Critiques

7.6.1 Théorème sur la Nature des Points Critiques

Theorem 7.6.1 (Nature des Points Critiques). Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert D, et soit $x_0 \in D$ un point critique de f. On considère les valeurs propres de la matrice Hessienne $H_f(x_0)$.

1. Si toutes les valeurs propres de $H_f(x_0)$ sont strictement positives, alors x_0 est un minimum local. Si toutes les valeurs propres sont strictement négatives, alors x_0 est un maximum local.
2. Si la matrice $H_f(x_0)$ a des valeurs propres strictement positives et strictement négatives, alors x_0 n'est pas un extremum local. On dit que x_0 est un point selle (ou point col).
3. Si $H_f(x_0)$ a au moins une valeur propre nulle, on ne peut pas conclure directement sur la nature de x_0 (point critique dégénéré). Une analyse plus poussée est nécessaire.

7.6.2 Exemple : Point Selle

Considérons la fonction $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Calculons ses dérivées partielles premières et secondes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Le gradient est $\nabla f(x, y) = (x, -y)$. Le seul point critique est $(0, 0)$. La matrice Hessienne en $(0, 0)$ est :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $H_f(0, 0)$ sont 1 et -1, qui sont de signes opposés. Donc, $(0, 0)$ est un point selle.

Pour visualiser, on peut générer un graphique de la fonction.

7.7 Espaces Vectoriels Normés (Rappels)

7.7.1 Rappels sur les Espaces Vectoriels Normés

Rappels :

- **Espace vectoriel E :** Structure algébrique définie sur un corps $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- **Vecteurs :** Éléments de l'espace vectoriel (notés $x, y, v, \ldots$).
- **Scalaires :** Éléments du corps $\mathbb{K}$ (notés $\lambda, \mu, \alpha, \ldots$).
- **Dimension :** Nombre de vecteurs dans une base de l'espace vectoriel. Dimension finie ou infinie.
- **Vecteur nul :** Élément neutre pour l'addition vectorielle, noté 0 ou $\vec{0}$.
- **Combinaison linéaire :** Expression de la forme $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, où v_i sont des vecteurs et λ_i des scalaires.

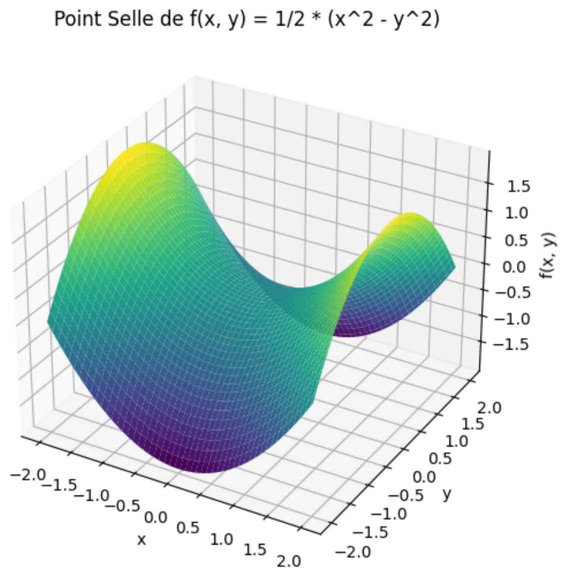

Figure 7.1: Point Selle de $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

- **Famille libre :** Une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
- **Famille génératrice :** Une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_n)$.
- **Base :** Une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.

Dans un espace vectoriel normé, on ajoute la notion de **norme** pour mesurer la "longueur" des vecteurs et définir une topologie.

Chapter 8

CM8

8.1 Espaces Vectoriels Normés

8.1.1 Espaces Vectoriel Normés

Definition 8.1.1 (Espace Vectoriel Normé)**.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
2. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).
3. $N(x) = 0 \implies x = 0_E$.

Un espace vectoriel E muni d'une norme N se note (E, N) et s'appelle un espace vectoriel normé.

Remark 8.1.2. Il est habituel de noter une norme par $\|x\|$ plutôt que par $N(x)$. On rencontre parfois dans la littérature le symbole $|||A|||$ quand A est une application linéaire ou une matrice, qui est à éviter.

Definition 8.1.3 (Semi-norme)**.** Une fonction $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant seulement les propriétés (1) et (2) de la Définition 8.1.1 est appelée une **semi-norme**.

Comme pour la valeur absolue, on déduit facilement de la propriété (2) de la Définition 8.1.1 que

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y), \forall x, y \in E. \tag{8.1}$$

Norme induite

Si $(E, \|.\|)$ est un evn et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, la restriction de $\|.\|$ à F fait de $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

Exemples

Soit $E = \mathbb{K}^n$ dont les éléments sont notés $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$. E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. On pose:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|,$$

et plus généralement

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty. \tag{8.2}$$

Les fonctions $\|.\|_p$ pour $1 \le p \le \infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. C'est facile à vérifier pour $p = 1, \infty$, et déjà vu pour $p = 2$. Pour p quelconque, l'inégalité triangulaire s'appelle *l'inégalité de Minkowski*.

Soit X un ensemble et soit $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ bornées, c'est à dire telles que $\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$. $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

$\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ est de dimension finie n si et seulement si X possède exactement n éléments (exercice).

Soit $R([a, b]; \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. $R([a, b]; \mathbb{K})$ est de dimension infinie. En effet si on note par $1_{\{c\}}(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x = c$ et 0 sinon, alors pour toute famille finie $\{c_1, ..., c_N\}$ avec $c_i \in [a, b]$ les vecteurs $1_{\{c_1\}}, ..., 1_{\{c_N\}}$ forment une famille libre de $R([a, b]; \mathbb{K})$ (exercice).

La fonction

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty \tag{8.3}$$

est une semi-norme sur $R([a, b]; \mathbb{K})$. À nouveau l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_p$ s'appelle l'*inégalité de Minkowski (pour les intégrales)*. Ce n'est pas une norme car la fonction $f(x) = 1_{\{c\}}(x)$ pour $c \in [a, b]$ est non nulle mais $\|f\|_p = 0$.

8.1.2 Considérons maintenant l'espace $C([a, b]; \mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a, b]$

$C([a, b]; \mathbb{K})$ est de dimension infinie car les familles $(1, x, x^2, ..., x^n)$ sont libres pour tout $n \in \mathbb{N}$ (exercice).

$\|.\|_p$ est une norme sur $C([a, b]; \mathbb{K})$. En effet si $\int_a^b |u(x)|^p dx = 0$ et u continue, alors $u(x) = 0$ sur $[a, b]$.

Soit $\mathbb{K}^\mathbb{N} = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour $1 \le p < \infty$ on pose

$$l^p(\mathbb{N}; \mathbb{K}) = \left\{(a_n) : \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p \text{ converge}\right\}. \tag{8.4}$$

On vérifie que $l^p(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et que

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \tag{8.5}$$

est une norme sur $l^p(\mathbb{N}; \mathbb{K})$.

De même

$$l^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{K}) = \left\{(a_n) : \sup_{n\ge 0} |a_n| < \infty\right\}, \tag{8.6}$$

est un espace vectoriel et

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |a_n| \tag{8.7}$$

est une norme sur $l^\infty(\mathbb{N};\mathbb{K})$. $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ ainsi que $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ sont de dimension infinie. En effet en notant par δ_p la suite définie par $\delta_{p,n} = 1$ si $n = p$ et 0 sinon, $(\delta_1, ..., \delta_N)$ est une famille libre pour tout $N \in \mathbb{N}$.

8.1.3 Topologie des espaces vectoriels normés

Distance induite par une norme

Definition 8.1.4 (Distance induite par une norme)**.** Soit $(E, \|.\|)$ un evn. La fonction $E \times E \ni (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E, appelée distance induite par la norme $\|.\|$.

On peut alors définir les boules de centre $a \in E$ de rayon r comme

$$B(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\},$$
$$B_f(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\},$$

les ensembles ouverts, fermés, compacts etc. de E.

Definition 8.1.5 (Espace de Banach)**.** Un espace vectoriel normé complet s'appelle un espace de **Banach**.

Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets (quelque soit la norme dont ils sont équipés).

Par contre un espace vectoriel normé de dimension *infinie* n'est pas nécessairement complet.

Les espaces $(\mathcal{B}(X;\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$, $(C([a, b];\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$, $(l^p(\mathbb{N};\mathbb{K}), \|.\|_p)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ sont complets.

L'espace $(C([a, b];\mathbb{K}), \|.\|_p)$ pour $1 \leq p < \infty$ n'est pas complet, voir la Proposition 8.1.6.

Dans un espace de Banach les ensembles fermés et bornés ne sont pas toujours compacts, voir la Proposition 8.1.7. En fait on peut montrer que la boule unité fermée $B_f(x_0, r)$ est compacte dans $(E, \|.\|)$ si et seulement si E est de dimension finie.

Exemples

Donnons un exemple d'espace vectoriel normé de dimension infinie qui n'est pas complet.

Proposition 8.1.6. L'espace $E = C([0, 1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ n'est pas complet.

Preuve. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - n^{-1}, \\ \frac{n}{2}(x - (\frac{1}{2} - n^{-1})) & \text{si } \frac{1}{2} - n^{-1} \leq x \leq \frac{1}{2} + n^{-1}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} + n^{-1} \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{8.8}$$

et

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \tag{8.9}$$

On vérifie directement que $\|f - f_n\|_1 \to 0$ et donc $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_1 \leq \epsilon$ si $n > N$. Si $n, p > N$ on a donc $\|f_n - f_p\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|f_p - f\|_1 \leq 2\epsilon$, donc (f_n) est de Cauchy dans $(C([0, 1];\mathbb{R}), \|.\|_1)$.

Supposons qu'il existe $g \in C([0, 1];\mathbb{R})$ tel que $\|f_n - g\|_1 \to 0$. On a donc $\|f - g\|_1 = 0$, donc

$$\int_0^1 |f - g|(x)dx = \int_0^{1/2} |f - g|(x)dx + \int_{1/2}^1 |f - g|(x)dx = 0. \tag{8.10}$$

Puisque $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1/2]$ et $f(x) = 1$ pour $x \in (1/2, 1]$, si g était continue et $\|f - g\|_1 = 0$, alors $g(x) = f(x)$ presque partout. Cependant, f est discontinue en $x = 1/2$, donc g ne peut pas être continue et égale à f partout. Plus précisément, si $\int_0^{1/2} |0 - g(x)| dx = 0$ et g est continue, alors $g(x) = 0$ sur $[0, 1/2]$. De même, si $\int_{1/2}^1 |1 - g(x)| dx = 0$ et g est continue, alors $g(x) = 1$ sur $[1/2, 1]$. C'est une contradiction car une fonction continue ne peut pas être à la fois 0 sur $[0, 1/2]$ et 1 sur $[1/2, 1]$ à moins d'être constante et égale à la fois à 0 et à 1, ce qui est impossible. Ainsi, g ne peut pas être continue. La suite de Cauchy (f_n) ne converge pas dans $(C([0, 1]; \mathbb{R}), \|.\|_1)$. □

Voici maintenant un exemple d'espace de Banach de dimension infinie dans lequel les ensembles fermés bornés ne sont pas nécessairement compacts.

Proposition 8.1.7. Dans l'espace $E = (l^1(\mathbb{N}; \mathbb{R}), \|.\|_1)$ la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ n'est pas compacte.

Preuve. Pour éviter des complications de notation, on note un élément de E (c'est à dire une suite réelle) par u, et le n-ième terme de u par $u(n)$. On note que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé on a

$$|u(n)| \leq \|u\|_1, \quad u \in E. \tag{8.11}$$

Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par $u_p(n) = \delta_{np}$. On a $\|u_p\|_1 = 1$, donc $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $B_f(0, 1)$ qui est un ensemble fermé et borné dans E. Supposons qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(p)})$ qui converge vers $u \in E$. Par l'inégalité triangulaire (Définition 8.1.1, propriété 2) on a

$$|\|u\|_1 - \|u_{\varphi(p)}\|_1| \leq \|u - u_{\varphi(p)}\|_1, \tag{8.12}$$

donc en faisant $p \to \infty$ on a $\|u\|_1 = 1$. D'après l'inégalité (**??**) appliqué à $u_{\varphi(p)} - u$ on a

$$|u_{\varphi(p)}(n) - u(n)| \leq \|u_{\varphi(p)} - u\|_1, \tag{8.13}$$

donc pour n fixé $\lim_{p\to\infty} |u_{\varphi(p)}(n) - u(n)| = 0$. Comme $u_{\varphi(p)}(n) = 0$ dès que $\varphi(p) > n$ et pour p suffisamment grand, $\varphi(p) > n$, donc on déduit que $u(n) = 0$. Comme n est arbitraire, u est la suite nulle ce qui contredit le fait que $\|u\|_1 = 1$. La boule unité fermée dans E est donc fermée et bornée mais non compacte. □

8.1.4 Normes équivalentes

Un point important à garder à l'esprit est que la notion d'ensembles ouverts, d'applications continues, d'ensembles compacts etc. dans un espace vectoriel E dépend a priori du choix d'une norme sur E. Deux normes différentes sur E conduisent en général à deux topologies différentes.

Definition 8.1.8 (Normes topologiquement équivalentes et équivalentes)**.** Soit N_1, N_2 deux normes sur un espace vectoriel E.

1. On dit que N_1 et N_2 sont topologiquement équivalentes si (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes ensembles ouverts.

2. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes (on écrit parfois $N_1 \sim N_2$) si il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\begin{aligned} &N_1(x) \leq C_1 N_2(x), \\ &N_2(x) \leq C_2 N_1(x), \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

On peut réécrire la condition (2) de la Définition 8.1.8 de manière plus élégante comme: il existe $C > 0$ tel que

$$C^{-1} N_2(x) \leq N_1(x) \leq C N_2(x), \forall x \in E, \tag{8.14}$$

(prendre $C = \max(C_1, C_2)$). La taille des constantes C_1, C_2 ou C n'a que peu d'importance.

Il est facile de voir que si $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$ alors $N_1 \sim N_3$ (la relation $\sim$ comme la relation d'équivalence topologique sont des relations d'équivalence).

Theorem 8.1.9. Deux normes sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

La démonstration sera faite dans la section 6.6.3.

Remark 8.1.10. Il est facile de voir que les normes $\|.\|_p$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes entre elles. En effet on vérifie (exercice) que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{8.15}$$

On verra dans la suite un résultat a priori surprenant qui affirme que toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

Par contre les normes $\|.\|_p$ sur $C([a,b];\mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes entre elles. Par exemple si $[a,b] = [-1,1]$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & \text{si } |x| \leq n^{-1}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{8.16}$$

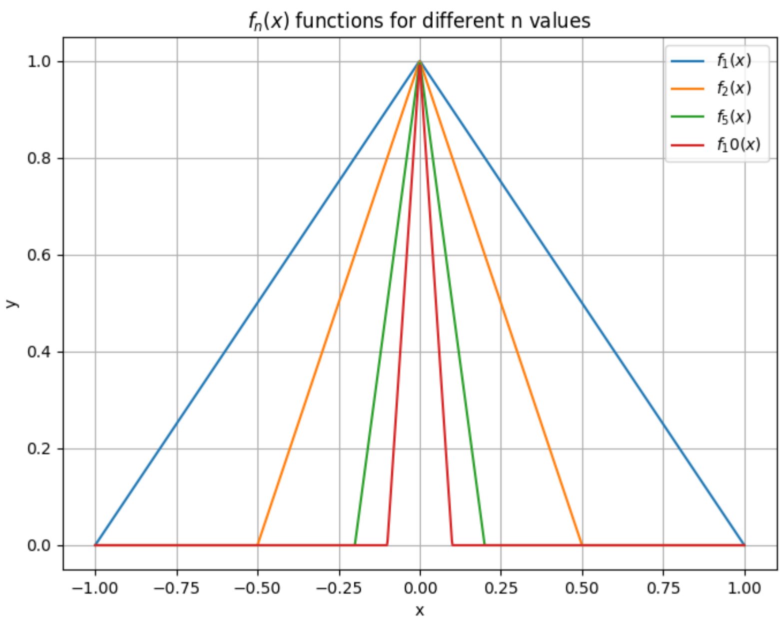

Figure 8.2: Fonctions $f_n(x)$ pour différentes valeurs de n

(tracer son graphe), on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = n^{-1}$. Ceci entraine qu'il n'existe pas de constante C telle que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ pour tout $f \in C([-1,1];\mathbb{K})$ (prendre $f = f_n$ and let $n \to \infty$).

Équivalence des normes en dimension finie

Theorem 8.1.11. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Alors E possède au moins une norme et toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve. On peut supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$). On fixe alors une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E et on identifie E à $\mathbb{R}^n$ à l'aide de B. On peut donc supposer que $E = \mathbb{R}^n$ et que $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La norme $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, équivalente à la norme usuelle, et définissant donc les mêmes ouverts.

Soit $S_\infty(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère de rayon 1 pour $\|.\|_\infty$. $S_\infty(0, 1)$ est fermée, car l'application $E \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est continue sur tout evn $(E, \|.\|)$ (exercice). $S_\infty(0, 1)$ est évidemment bornée, donc compacte par le Théorème de Borel-Lebesgue.

Soit maintenant $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une norme. On a

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^n N(e_i)\right) \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = C\|x\|_\infty, \quad C = \sum_{i=1}^n N(e_i). \tag{8.17}$$

Grâce à l'inégalité triangle pour la norme N (Définition 8.1.1, propriété 2), on obtient

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq C\|x - y\|_\infty, \tag{8.18}$$

et donc la fonction $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue sur $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$. Par le Corollaire (4.8) N est bornée et atteint ses bornes sur $S_\infty(0, 1)$. Comme $N(x) > 0$ pour tout $x \in S_\infty(0, 1)$ il existe donc des constantes $0 < a < b$ telles que

$$a \leq N(x) \leq b, \forall x \in S_\infty(0, 1). \tag{8.19}$$

En appliquant cette inégalité à $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ pour $x \neq 0$, on en déduit que

$$a \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \leq b \implies a\|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = N(x) \leq b\|x\|_\infty, \forall x \neq 0, \tag{8.20}$$

et l'inégalité est aussi vraie pour $x = 0$. Par conséquent, N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes à $\|.\|_\infty$ et donc équivalentes entre elles. □

8.1.5 Compléments sur les espaces vectoriels normés

Norme L^∞ et convergence uniforme

Soit X un ensemble (par exemple un intervalle de $\mathbb{R}$) et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$.

On rappelle que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in X$ la suite réelle $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. La convergence simple est la notion la plus faible de convergence pour des suites de fonctions. Exprimée à l'aide de quantificateurs, elle s'écrit:

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall n \geq N, \tag{8.21}$$

l'entier N dépendant a priori de ϵ et de x.

La suite de fonctions (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall n \geq N, \forall x \in X. \tag{8.22}$$

L'entier N ne dépend maintenant que de ϵ. On peut réécrire (**??**) comme

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sup_{x\in X} |f_n(x) - f| \leq \epsilon. \tag{8.23}$$

On voit donc que sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ des fonctions bornées sur X, une suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si (f_n) converge vers f pour la norme $\|.\|_\infty$.

Limites uniformes de fonctions continues

Prenons $X = [a, b]$. L'espace $C([a, b]; \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}([a, b]; \mathbb{R})$ des fonctions bornées. On sait que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$.

Avec le langage que nous avons appris, ceci signifie que $C([a,b];\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. On peut former la suite

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n, \tag{8.24}$$

appelée suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. La définition suivante est exactement la même que pour les séries numériques.

Definition 8.1.12 (Convergence d'une série dans un EVN)**.** La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge dans $(E, \|.\|)$ si la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|.\|)$. L'élément $\lim_{N\to+\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est noté $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et appelé somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Proposition 8.1.13. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes à valeurs dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n + v_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda u_n)$ sont convergentes et on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Convergence normale

Definition 8.1.14 (Convergence normale)**.** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalement si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ converge.

La convergence normale est un outil important pour montrer la convergence d'une série à valeurs dans un espace de Banach. On peut retenir sa définition en pensant à la 'convergence de la série des normes'.

Theorem 8.1.15. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Alors toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ normalement convergente est convergente et on a

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|. \tag{8.25}$$

8.2 Suites d'éléments de E

8.2.1 Suite extraite

Exemple: $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. On construit une suite d'éléments de $C([0,1],\mathbb{R})$ qui n'est pas compacte.

Lemma 8.2.1. Soit $E = (C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. E est complet.

Exemple On construit une suite d'éléments de $B_f(0,1)$ qui n'admet pas de sous-suite convergente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue affine par morceaux :

- $f_n(0) = 0$

- $f_n(\frac{1}{2n}) = 1$
- $f_n(\frac{1}{n}) = 0$
- $f_n(x) = 0$ pour $x \geq \frac{1}{n}$ ou $x \leq 0$.

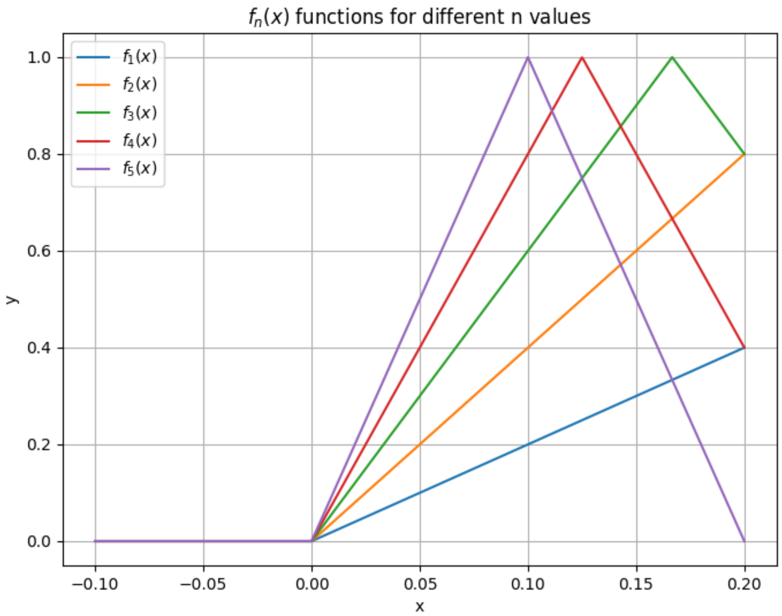

Figure 8.3: Fonctions $f_n(x)$ pour différentes valeurs de n

On remarque que $\forall n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et que si $n \neq p$, f_n et f_p ont des supports disjoints.

Si $n \neq p$, $\|f_n - f_p\|_\infty = 1$.

Donc $(f_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas avoir de sous-suite de Cauchy, car si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, $\forall p \neq q$, $\|f_{\varphi(p)} - f_{\varphi(q)}\|_\infty = 1$.

Donc $(f_n)_{n\geq 1}$ n'a pas de sous-suite convergente. $B_f(0,1)$ n'est pas compacte.

8.3 Normes Equivalentes

Definition 8.3.1 (Normes topologiquement équivalentes et équivalentes). N_1, N_2 sont topologiquement équivalentes sur E si

$$Id : (E, N_1) \to (E, N_2) \text{ est continue}$$
$$Id : (E, N_2) \to (E, N_1) \text{ est continue}$$

$\iff$ $\exists C_1, C_2 > 0$ telles que

$$N_2(x) \leq C_1 N_1(x)$$
$$N_1(x) \leq C_2 N_2(x)$$

$\iff$ $\exists C > 0$ telles que

$$\frac{1}{C} N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x). \tag{8.26}$$

Dans ce cas, on dit que N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.

Theorem 8.3.2. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Example 8.3.3. Dans $\mathbb{R}^2$, $N_1(x) = |x_1| + |x_2|$, $N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$.

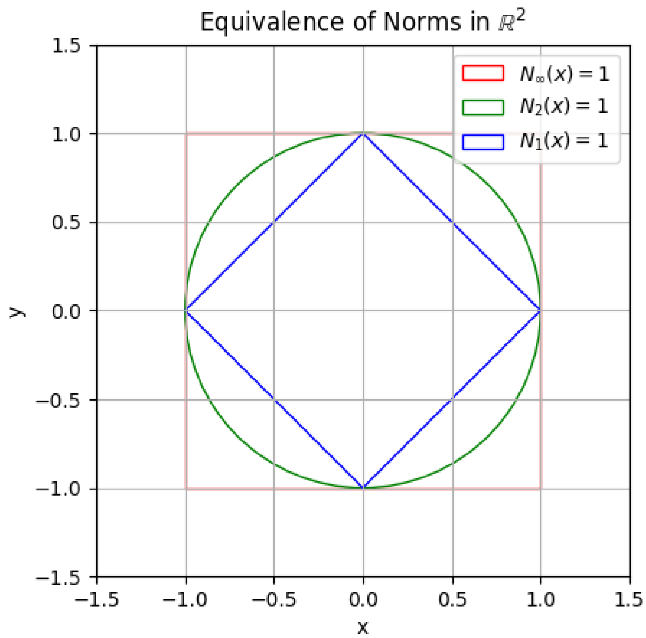

Figure 8.4: Equivalence des Normes dans $\mathbb{R}^2$

- $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{2} N_\infty(x)$
- $N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq 2N_\infty(x)$
- $N_2(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{2} N_2(x)$

Il existe un isomorphisme entre $(\mathbb{R}^2, N_1)$ et $(\mathbb{R}^2, N_2)$.

$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$. On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. $z = x_1 + ix_2 \leftrightarrow (x_1, x_2)$. $\|z\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = N_2((x_1, x_2))$.

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$. On veut montrer que $\exists a, b > 0$ telles que $aN_\infty(x) \leq N(x) \leq bN_\infty(x)$. On pose $S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^d : N_\infty(x) = 1\}$. S_∞ est compacte. N est continue sur $(\mathbb{R}^d, N_\infty)$. N est continue sur S_∞. N est bornée et atteint ses bornes sur S_∞. $\exists x_0 \in S_\infty$ telle que $N(x_0) = \min_{x \in S_\infty} N(x) = a$. $\exists x_1 \in S_\infty$ telle que $N(x_1) = \max_{x \in S_\infty} N(x) = b$.

$a = \min_{x \in S_\infty} N(x) > 0$ car si $N(x_0) = 0$ avec $N_\infty(x_0) = 1 \implies x_0 = 0$ et $N_\infty(x_0) = 0 \neq 1$. Contradiction. Donc $a > 0$. $b = \max_{x \in S_\infty} N(x) < \infty$ car N continue sur le compact S_∞.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$. On pose $y = \frac{x}{N_\infty(x)}$. $N_\infty(y) = 1 \implies y \in S_\infty$. $a \leq N(y) \leq b$. $a \leq N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \leq b$. $a \leq \frac{N(x)}{N_\infty(x)} \leq b$. $aN_\infty(x) \leq N(x) \leq bN_\infty(x)$.

Theorem 8.3.4. N_1, N_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si N_1, N_2 sont équivalentes.

Exercice: $E = C([0,1],\mathbb{R})$. Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$? Faux.

On prend f_n (triangles). $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = 1/n$. $\|f_n\|_\infty = n\|f_n\|_1$. On ne peut pas majorer $\|f\|_\infty$ par $C\|f\|_1$ avec C constante indépendante de f. Donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.