1 Introduction à la Modélisation 3D

La modélisation 3D est un domaine fondamental de l'informatique graphique qui consiste à créer des représentations mathématiques d'objets ou de scènes tridimensionnelles. Elle trouve ses racines dans la géométrie.

Definition 1.1 (Géométrie)**.** Le terme **géométrie** dérive du grec ancien (geômétrês), composé de "gê" (Terre) et "metron" (mesure). La géométrie peut être définie comme :

1. L'étude des formes, des tailles, des motifs et des positions des objets.
2. L'étude des espaces où l'on peut mesurer certaines quantités, telles que les longueurs, les angles, etc.

En modélisation 3D, nous cherchons à décrire numériquement la géométrie d'objets virtuels. Ces objets peuvent être simples (formes géométriques de base) ou complexes (personnages, terrains, bâtiments, scènes naturelles).

1.1 Comment décrire la géométrie ?

Il existe plusieurs manières de décrire une forme géométrique :

- **Implicite :** Par une équation ou une condition que les points de la forme doivent satisfaire. Par exemple, un cercle unité dans le plan peut être décrit par l'équation $x^2 + y^2 = 1$.
- **Explicite :** Par une paramétrisation, c'est-à-dire une fonction qui génère les points de la forme. Pour le cercle unité, une paramétrisation est $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour θ variant de 0 à 2π.
- **Linguistique :** Par une description textuelle, comme "cercle unitaire".
- **Discrète :** En approximant la forme par un ensemble fini de points ou de segments.
- **Dynamique :** En décrivant le mouvement qui génère la forme, par exemple, un point tournant autour d'un centre $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\mathbf{x}$.
- **Par Symétrie :** En décrivant les opérations de symétrie qui laissent la forme inchangée.

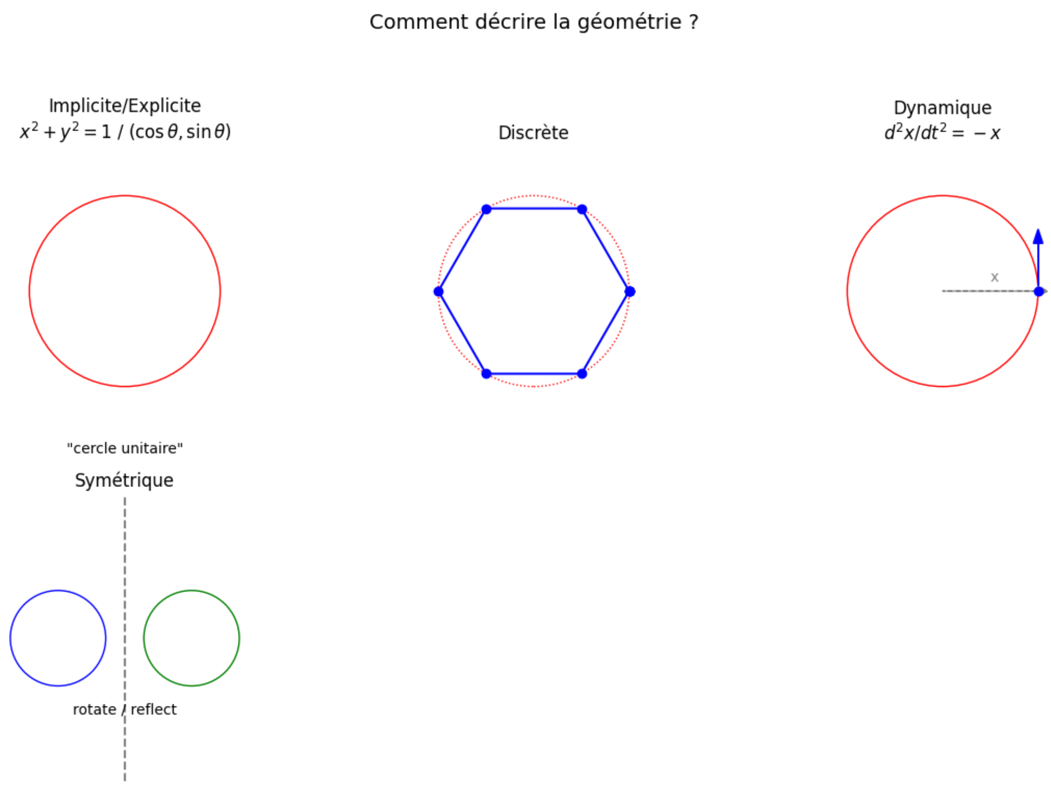

Figure 1: Différentes manières de décrire la géométrie.

2 Représentations de la Géométrie

En informatique graphique, on distingue principalement deux types de représentations pour la géométrie 3D.

2.1 Représentations Implicites

Definition 2.1 (Représentation Implicite)**.** Une surface implicite est définie comme l'ensemble des points (x, y, z) qui satisfont une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$. Les points ne sont pas donnés directement, mais ils doivent vérifier une certaine relation.

Example 2.2 (Sphère Unitaire)**.** La sphère unité est l'ensemble des points (x, y, z) tels que $x^2+y^2+z^2 = 1$. Ici, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Pour un point donné, il est facile de vérifier s'il appartient à la surface (si $f(x, y, z) = 0$), s'il est à l'intérieur ($f(x, y, z) < 0$) ou à l'extérieur ($f(x, y, z) > 0$). Cependant, il est plus difficile de générer directement des points se trouvant sur la surface.

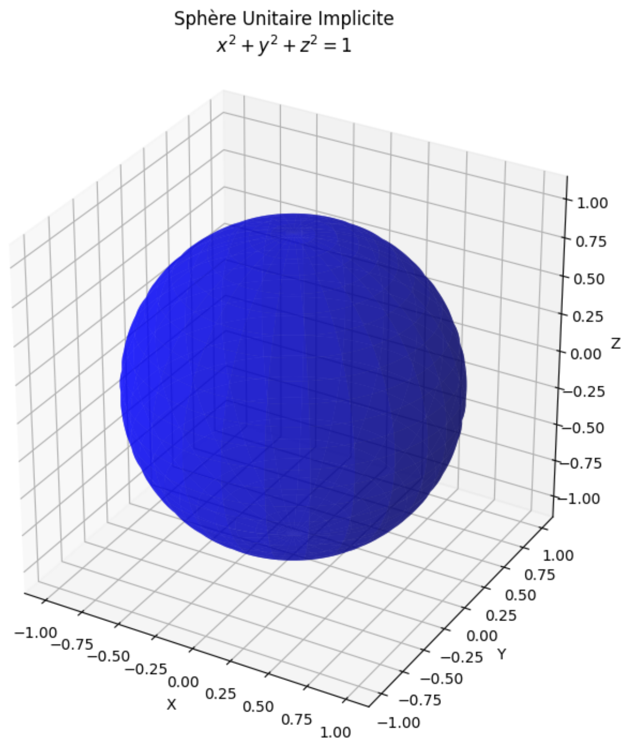

Figure 2: Représentation implicite d'une sphère unité.

2.2 Représentations Explicites

Definition 2.3 (Représentation Explicite)**.** Une surface explicite (ou paramétrique) est définie par une fonction f qui mappe un domaine de paramètres (souvent un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$) vers l'espace 3D ($\mathbb{R}^3$). Tous les points de la surface sont donnés directement par l'évaluation de la fonction $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ pour des valeurs de paramètres (u, v) dans le domaine.

Example 2.4 (Sphère Unitaire)**.** Les points sur la sphère unité peuvent être générés explicitement par la fonction $f(u, v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))$ pour $0 \leq u \leq 2\pi$ et $0 \leq v \leq \pi$. Il est facile de générer des points sur la surface, mais il peut être plus complexe de vérifier si un point donné appartient à la surface ou de déterminer les relations spatiales (intérieur/extérieur).

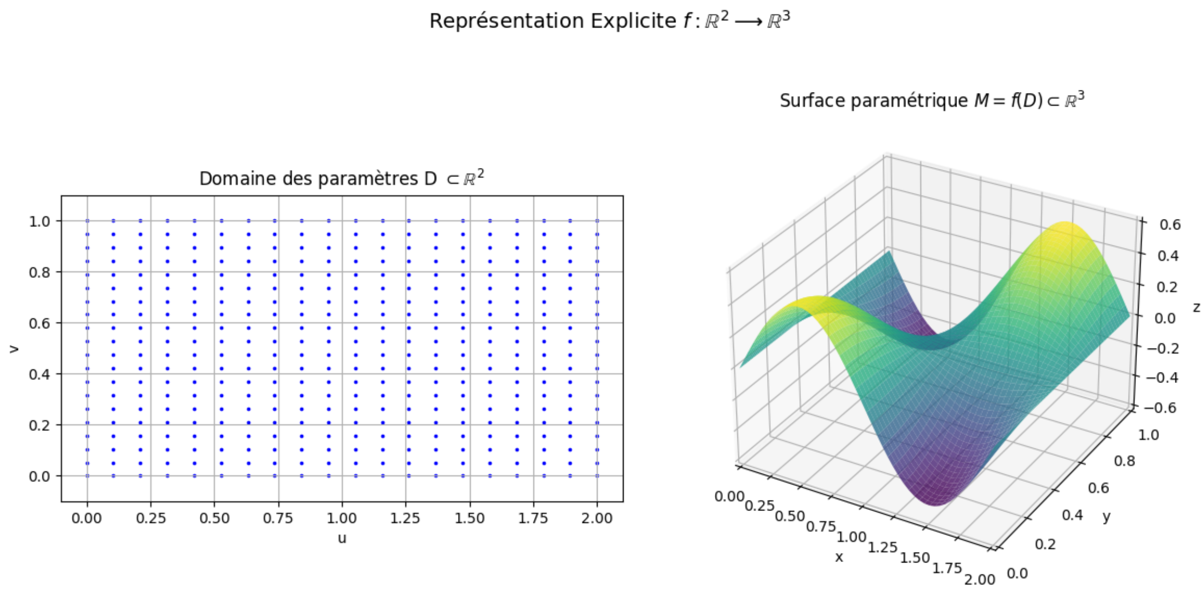

Figure 3: Représentation explicite : mapping d'un domaine 2D vers une surface 3D.

3 Encoder Numériquement la Géométrie

Pour utiliser la géométrie dans un ordinateur, nous devons l'encoder numériquement. Le choix de l'encodage dépend de l'application et du type de géométrie.

Principales méthodes d'encodage :

- **Explicite :**
  - **Nuage de points :** Une collection de points (x, y, z) dans l'espace. Simple mais sans information de connectivité ou de surface.
  - **Maillage polygonal :** Représentation par des sommets connectés pour former des polygones (souvent des triangles ou des quadrilatères) qui approximent la surface. Très courant en infographie.
  - **Subdivision :** Surfaces lisses générées en subdivisant récursivement un maillage de contrôle grossier.
  - **NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) :** Surfaces lisses définies mathématiquement, utilisées en CAO (Conception Assistée par Ordinateur).
- **Implicite :**
  - **Ensemble de niveaux (Level Set) :** La surface est définie comme le niveau zéro d'une fonction de distance signée définie sur une grille. Utile pour les formes complexes et les changements de topologie.
  - **Surface algébrique :** Définie par une équation polynomiale $P(x, y, z) = 0$.
  - **L-systems (Lindenmayer Systems) :** Grammaires formelles utilisées pour générer des structures fractales, souvent employées pour modéliser des plantes.

Chaque choix est mieux adapté à une tâche ou à un type de géométrie différent. Par exemple, les maillages sont polyvalents pour le rendu, tandis que les NURBS sont précis pour la conception industrielle.

4 Techniques de Modélisation 3D

La création de modèles 3D peut se faire selon différentes approches :

- **Reconstruction :** Création d'un modèle 3D à partir d'un objet réel, souvent par scan 3D ou photogrammétrie (utilisation de multiples photos).
- **Modélisation automatique :** Génération algorithmique de modèles, souvent pour des objets naturels complexes comme les arbres, ou des scènes étendues comme les terrains.
- **Modélisation interactive :** Utilisation d'outils logiciels spécialisés (CAO, modeleurs 3D comme Blender, 3ds Max, Maya) où un utilisateur sculpte, assemble ou modifie la géométrie directement.

La plupart des objets virtuels (terrains, personnages, objets manufacturés, etc.) sont représentés par leur surface.

5 Modélisation Surfacique

La modélisation surfacique se concentre sur la représentation de la "peau" extérieure d'un objet.

5.1 Caractéristiques

- Représente l'extérieur visuel d'un objet et ses contours.
- Ne définit intrinsèquement aucune propriété de masse ou d'épaisseur (les objets sont considérés comme creux).
- Les modèles surfaciques ne peuvent pas être directement "découpés" comme des objets solides, car ils n'ont pas d'intérieur défini.

5.2 Approches

Plusieurs techniques sont utilisées en modélisation surfacique :

- **Primitives solides :** Utilisation de formes géométriques de base (sphères, cubes, cylindres...) qui sont ensuite combinées (voir CSG plus loin, bien que CSG soit souvent considérée volumique).
- **Maillage (Mesh) :** L'approche la plus courante, décrite ci-dessous.
- **Surfaces paramétrées :** Utilisation de fonctions mathématiques (comme les NURBS) pour définir des surfaces lisses.
- **Balayage de surface (Sweep) :** Création d'une surface en déplaçant une courbe de profil le long d'une trajectoire.

6 Maillage (Mesh)

> **Definition 6.1** (Maillage). Un maillage (ou "mesh" en anglais) représente une forme 3D comme un ensemble de **sommets** (vertices), d'**arêtes** (edges) connectant ces sommets, et de **facettes** (faces) délimitées par les arêtes. Les facettes sont généralement des triangles ou des quadrilatères.

Plus le nombre de polygones (souvent des triangles) est élevé, plus le réalisme de la surface peut être grand, mais plus le coût en calcul et en mémoire est important.

6.1 Avantages et Inconvénients

- **Avantages :**
  - Permet de représenter des surfaces et des courbes complexes.
  - Très flexible et largement supporté par les logiciels et le matériel graphique.
- **Désavantages :**
  - Peut avoir un aspect angulaire ("facettisé") si la résolution est faible.
  - Une haute résolution (beaucoup de polygones) nécessite des performances de calcul élevées et une grande capacité mémoire.

6.2 Représentation des Données : Énumération de Facettes

Une manière simple de stocker un maillage est d'énumérer toutes les facettes, en listant les coordonnées des sommets pour chaque facette.

Example 6.2 (Énumération simple)**.** Considérons une pyramide simple à base triangulaire (tétraèdre) avec 4 sommets P0, P1, P2, P3. Les 4 facettes triangulaires seraient : F1 = (P0, P1, P2) F2 = (P0, P2, P3) F3 = (P3, P1, P0) F4 = (P3, P2, P1)
Objet = (F1, F2, F3, F4)

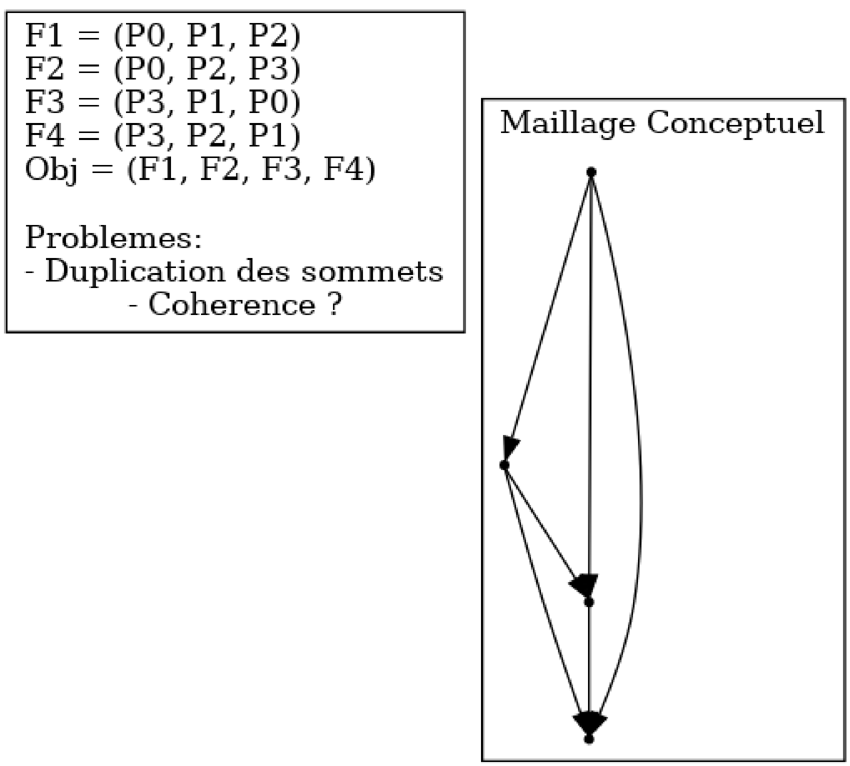

Figure 4: Énumération simple des facettes d'un tétraèdre.

Cette approche simple a des inconvénients majeurs :

- **Duplication de données :** Les coordonnées de chaque sommet sont stockées plusieurs fois (une fois pour chaque facette à laquelle il appartient).

- **Problèmes de cohérence :** Il est difficile de garantir que les différentes copies d'un même sommet ont exactement les mêmes coordonnées, ou que les arêtes partagées sont définies de manière cohérente.

6.3 Représentation avec Partage de Sommets

Une meilleure approche consiste à stocker une seule liste de sommets (avec leurs coordonnées) et à définir ensuite les facettes en utilisant les indices des sommets dans cette liste.

> **Example 6.3** (Partage de Sommets)**.** Liste des Sommets (LS) : LS = {P0, P1, P2, P3} (chaque Pi a des coordonnées x,y,z)
> Facettes (indices dans LS, base 0) : F1 = (0, 1, 2) F2 = (0, 2, 3) F3 = (3, 1, 0) F4 = (3, 2, 1)
> Objet = (LS, F1, F2, F3, F4)

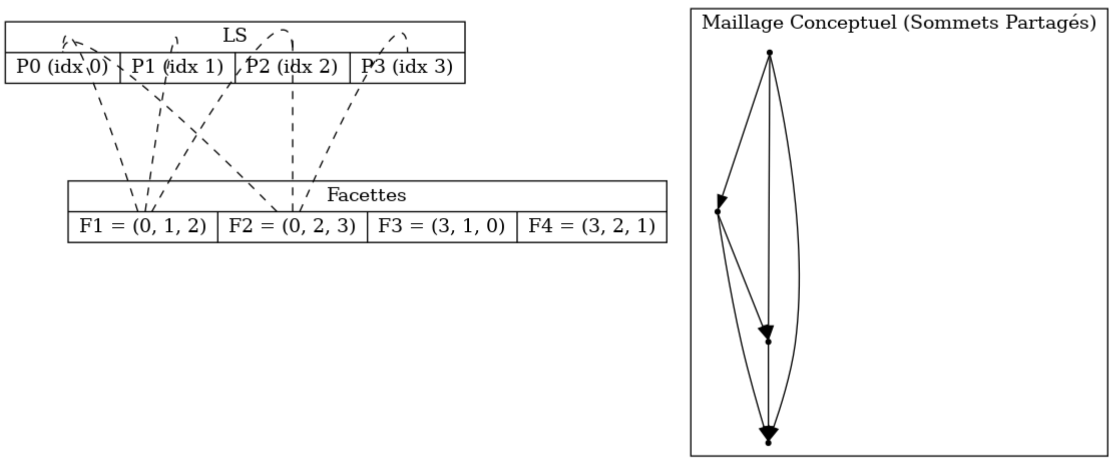

Figure 5: Énumération des facettes avec partage de sommets.

Cette méthode évite la duplication des données de sommets et facilite la manipulation de la topologie du maillage.

6.4 Orientation des Surfaces

La **normale** à une face est un vecteur perpendiculaire à cette face, indiquant son orientation (par exemple, vers l'"extérieur" de l'objet). L'ordre dans lequel les sommets d'une face sont listés détermine la direction de la normale, typiquement via la règle de la main droite.

- **Convention Sens trigonométrique (counter-clockwise) :** Les sommets sont listés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on regarde la face de l'extérieur. La normale est alors "sortante".

- **Convention Sens anti-trigonométrique (clockwise) :** Les sommets sont listés dans le sens des aiguilles d'une montre. La normale est alors "rentrante".

Il est crucial de maintenir une orientation cohérente sur tout le maillage pour des opérations comme l'éclairage et le rendu corrects.

7 Surfaces de Subdivision

Les surfaces de subdivision sont une technique pour créer des surfaces lisses à partir d'un maillage polygonal grossier, souvent appelé "maillage cage" ou "maillage de contrôle". Le principe est de subdiviser récursivement chaque polygone du maillage cage en polygones plus petits, et d'ajuster la position des nouveaux sommets (et éventuellement des anciens) selon des règles précises. Cela produit une surface qui converge vers une limite lisse. La forme finale de la surface est directement contrôlée par la géométrie du maillage cage initial (positions relatives des sommets et des segments). C'est une technique puissante pour combiner le contrôle polygonal avec la création de formes organiques lisses.

8 Surfaces Paramétrées

Comme mentionné précédemment (Représentations Explicites), une surface paramétrée est définie par une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. La surface est calculée directement par l'évaluation de cette fonction $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

- **Avantages :** Permet de définir mathématiquement des surfaces lisses et précises (ex: NURBS).
- **Inconvénients :** Peut être limité dans les types d'objets pouvant être générés facilement. La conversion vers un maillage polygonal est souvent nécessaire pour le rendu temps réel.

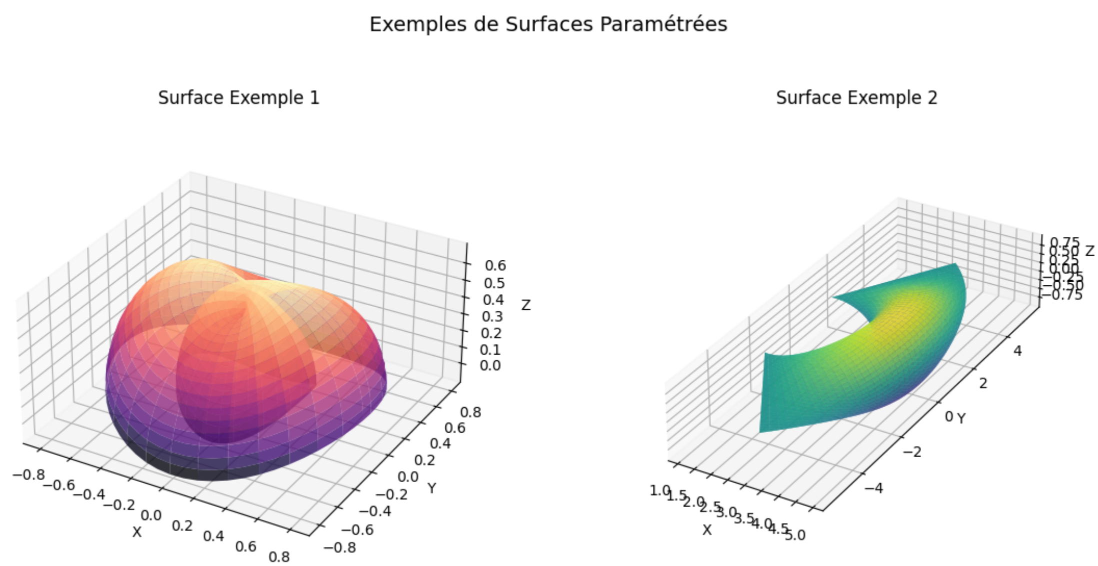

Figure 6: Exemples de surfaces générées par des équations paramétriques.

9 Balayage de Surface (Sweep)

Le balayage (ou extrusion) est une technique de modélisation où une forme 2D (le profil) est déplacée le long d'une trajectoire (le chemin). La surface balayée est l'ensemble des points parcourus par le profil.

- Si le profil est une ligne et le chemin est une ligne, on obtient un quadrilatère.
- Si le profil est un cercle et le chemin est une ligne droite perpendiculaire au plan du cercle, on obtient un cylindre.
- Si le profil est un cercle et le chemin est un cercle, on obtient un tore (donut).
- Si le profil est une courbe et le chemin est une autre courbe, on obtient une surface plus complexe.

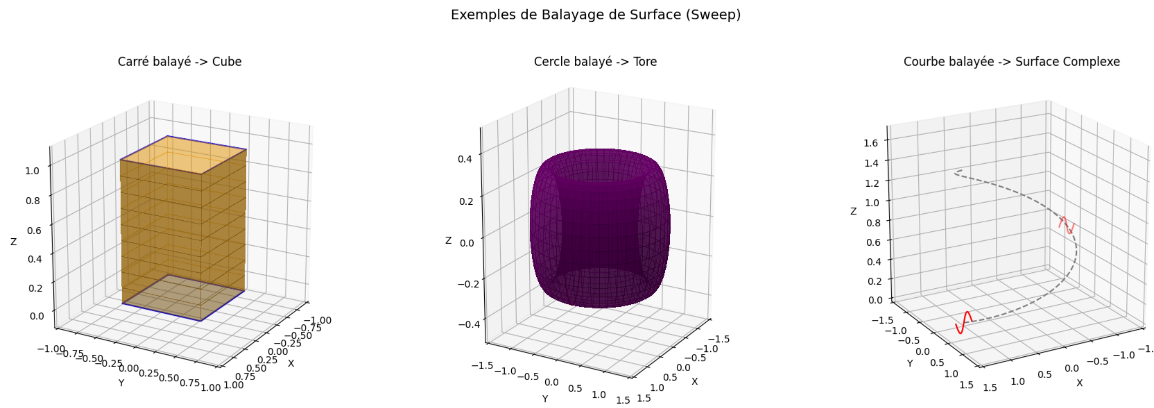

Figure 7: Exemples de surfaces générées par balayage.

10 Modélisation Volumique

Contrairement à la modélisation surfacique qui ne représente que l'extérieur, la modélisation volumique représente l'objet entier, y compris son intérieur.

10.1 Caractéristiques

- Le modèle contient des informations sur chaque point dans l'espace (ou du moins, permet de déterminer si un point est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la frontière de l'objet).
- L'espace (ou l'objet) est souvent décrit en termes mathématiques purs, ou via des opérations booléennes (union, intersection, soustraction) et des mélanges ("blending") entre des formes de base.
- Il n'y a pas nécessairement de géométrie explicite (sommets, faces) tant que le modèle n'a pas besoin d'être visualisé (rendu) ou exporté.

10.2 Approches

10.2.1 Voxélisation

Definition 10.1 (Voxélisation)**.** Représentation d'un objet 3D par une grille régulière de **voxels** (pixels volumiques). Chaque voxel contient une information indiquant s'il fait partie de l'objet (et potentiellement d'autres propriétés comme la couleur, la densité, etc.). C'est un modèle discret.

- **Applications :** Imagerie médicale (IRM, CT scans), simulation de fluides (CFD), sculpture virtuelle.
- **Paramètres :** Intérieur/extérieur, couleur, réfraction/absorption.
- **Avantages :** Topologie abstraite facile à gérer, bon pour les données naturelles (scans), permet le rendu volumétrique direct (visualisation de l'intérieur).
- **Désavantages :** Nécessite de grands ensembles de données (mémoire), peut être difficile de générer des données complexes non scannées, peut souffrir d'anisotropie (artefacts liés à l'orientation de la grille).

10.2.2 Géométrie Solide Constructive (Constructive Solid Geometry – CSG)

Definition 10.2 (CSG)**.** Méthode de modélisation où des formes géométriques simples (**primitives** : sphères, cubes, cylindres, cônes, etc.) sont combinées à l'aide d'opérations booléennes ensemblistes (**union** ∪, **intersection** ∩, **différence** −).

La structure est souvent représentée par un arbre binaire (CSG tree) où les feuilles sont les primitives et les nœuds internes sont les opérations booléennes.

- **Applications :** CAO (SolidWorks, etc.), modélisation pour le rendu (Pov-Ray).

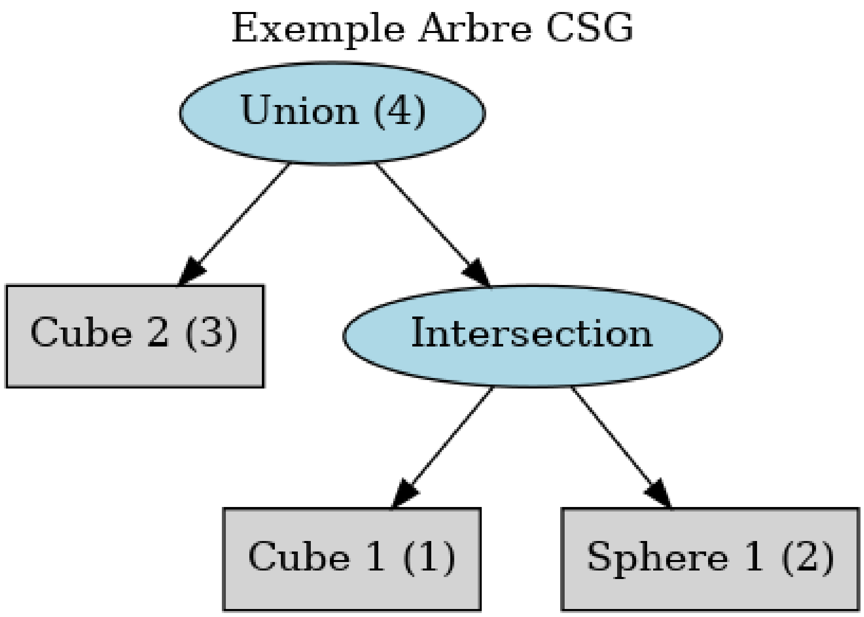

Figure 8: Exemple d'arbre CSG représentant une combinaison d'opérations booléennes sur des primitives.

Example 10.3 (Exercice)**.** Identifier les opérations booléennes correspondant aux numéros 1 à 4 dans la figure CSG pour obtenir la forme finale. *(Solution basée sur l'interprétation visuelle de la diapositive 8)* 1: Cube A 2: Sphère B 3: Cube C (plus petit) Intersection(A, B) -¿ Forme intermédiaire D Union(C, D) -¿ Forme finale (4)

10.2.3 Blobtree

Definition 10.4 (Blobtree)**.** Structure arborescente similaire à l'arbre CSG, mais qui combine des primitives (qui peuvent être implicites ou paramétriques) en utilisant non seulement des opérations booléennes, mais aussi des opérations de **mélange** (blending, smooth union) et des **déformations** globales (torsion, étirement, etc.).

Permet de créer des formes organiques complexes tout en gardant une structure hiérarchique.

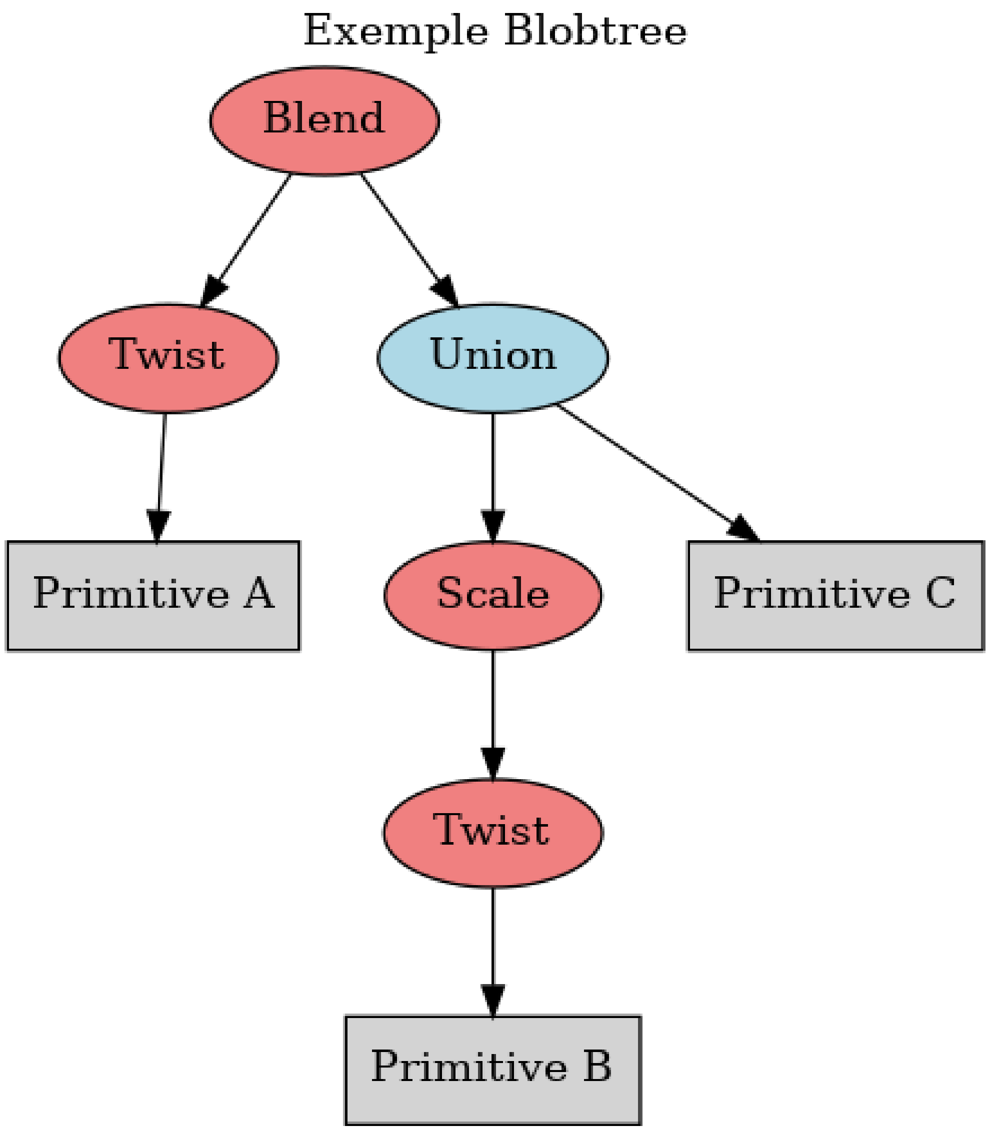

Figure 9: Exemple de structure Blobtree combinant primitives, opérations booléennes et déformations.

11 Nuage de Points 3D

Definition 11.1 (Nuage de Points)**.** Un nuage de points est une collection de points (x, y, z) représentant des positions sur la surface d'objets dans l'espace 3D. Il ne contient généralement pas d'information explicite sur la connectivité entre les points ou sur les surfaces sous-jacentes.

11.1 Sources de Données

Les nuages de points sont souvent générés par :

- **Scanner 3D :** Dispositifs utilisant la lumière structurée ou le laser (LiDAR) pour mesurer la distance à de nombreux points sur la surface d'un objet réel.
- **Reconstruction à partir d'images/vidéos 2D :** Techniques comme la Stéréo Vision ou la Structure from Motion (SfM) qui estiment la géométrie 3D à partir de multiples vues 2D. (Exemple : VisualSFM).

11.2 Traitements Courants sur les Nuages de Points

Une fois acquis, les nuages de points bruts nécessitent souvent des traitements pour être utilisables :

- **Tâche 1 : Simplification :** Réduire le nombre de points tout en préservant la forme globale. Des approches locales (fusion de points proches) ou globales (ajustement de surface) existent.
- **Tâche 2 : Classification / Reconnaissance d'objets :** Assigner une étiquette sémantique (ex: "chaise", "table", "mur") à l'ensemble du nuage ou à des sous-ensembles.
- **Tâche 3 : Segmentation :** Diviser le nuage de points en différentes parties significatives (ex: ailes, fuselage, queue d'un avion).
- **Tâche 4 : Estimation des normales :** Calculer un vecteur normal (perpendiculaire à la surface locale) pour chaque point, information cruciale pour le rendu et l'analyse de forme.

Ces tâches sont essentielles pour passer d'un nuage de points brut à un modèle 3D structuré et interprétable.

12 Transformations Géométriques

Les transformations géométriques sont des fonctions qui modifient la position, l'orientation ou la forme des objets dans l'espace.

Definition 12.1 (Transformation Spatiale)**.** Une transformation spatiale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction qui assigne à chaque point de l'espace un nouvel emplacement.

Nous nous concentrerons sur les transformations de l'espace $\mathbb{R}^3$. Celles-ci peuvent être décomposées en transformations **linéaires** (rotation, mise à l'échelle, cisaillement) et **non-linéaires** (la plus courante étant la translation).

12.1 Pipeline Graphique

Les transformations sont fondamentales dans le pipeline graphique standard, qui décrit les étapes pour afficher une scène 3D à l'écran : Transformations de modélisation $\longrightarrow$ Illumination (Shading) $\longrightarrow$ Transformation d'affichage $\longrightarrow$ Clipping $\longrightarrow$ Transformation écran (Projection) $\longrightarrow$ Pixelisation (Rasterization) $\longrightarrow$ Visibilité / Rendu. Les **transformations de modélisation** permettent de positionner et d'orienter chaque objet dans la scène globale (passage de l'"object space" au "world space").

12.2 Rappel : Transformation Linéaire

Une transformation $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite **linéaire** si elle satisfait deux conditions :

1. Additivité : $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ pour tous vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
2. Homogénéité : $f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u})$ pour tout scalaire c et tout vecteur $\mathbf{u}$.

Géométriquement, une transformation linéaire :

- Fait correspondre des lignes droites à des lignes droites.
- Préserve l'origine ($f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$).

Algébriquement, elle préserve les opérations de l'espace vectoriel (addition de vecteurs et multiplication par un scalaire).

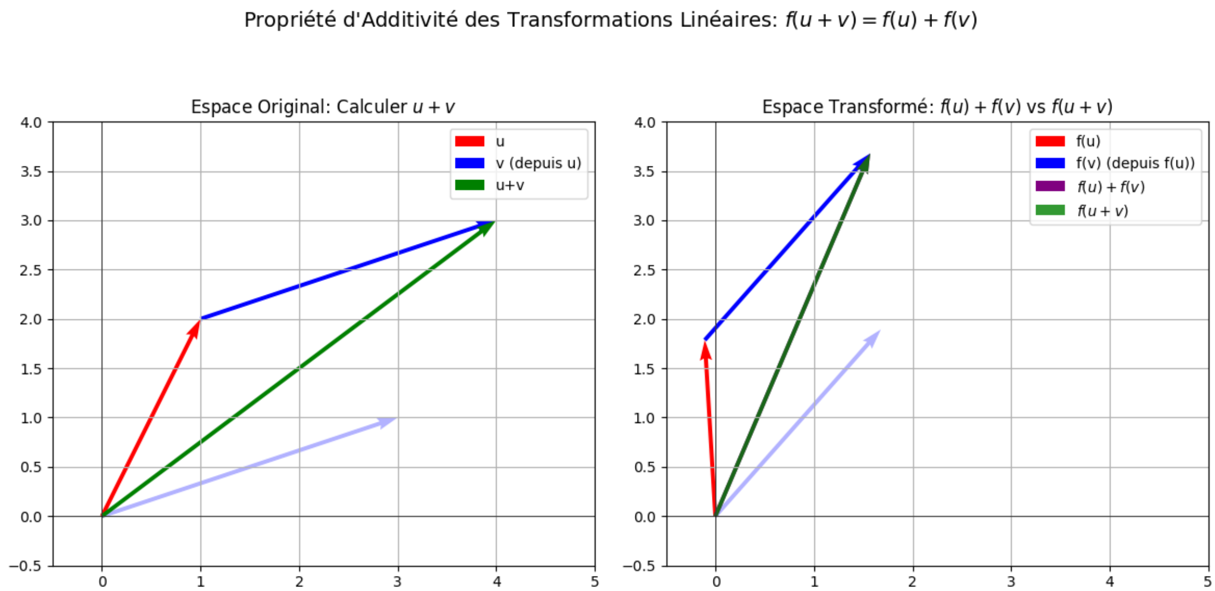

Figure 10: Illustration de la propriété d'additivité $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ pour une transformation linéaire.

12.3 Utilisations des Transformations

Les transformations géométriques sont utilisées pour de nombreuses opérations en modélisation 3D :

- **Déplacement d'un objet** dans une scène (translation, rotation).
- **Déplacement de l'observateur** (caméra) par rapport à une scène (équivalent à transformer la scène inversement).
- **Réplication** d'un motif ou d'un objet (combinaison de translation, rotation, échelle).
- **Déformation** d'un objet (mise à l'échelle non uniforme, cisaillement, ou transformations plus complexes).
- **Projection :** Transformer la scène 3D en une image 2D vue depuis la caméra.

12.4 Représentation des Objets pour la Transformation

Un objet 3D est souvent décrit par un ensemble de sommets (points). Appliquer une transformation à un objet revient à appliquer cette transformation à chacun de ses sommets. On utilise la notation vectorielle pour représenter les sommets : un point P de coordonnées (x, y, z) est représenté par un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

13 Types de Transformations Élémentaires

Les transformations les plus courantes sont :

- **Translation :** Déplacement de tous les points d'une distance et d'une direction constantes. Non linéaire car l'origine n'est pas fixe ($f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$).
- **Rotation :** Pivotement des points autour d'un axe fixe ou d'un point fixe. Linéaire.

- **Homothétie (Scaling) :** Agrandissement ou réduction des distances par rapport à un point fixe (souvent l'origine). Linéaire. Peut être uniforme (même facteur dans toutes les directions) ou non uniforme.
- **Cisaillement (Shear) :** Déformation qui incline les points, comme si on poussait sur le côté d'un livre. Linéaire.

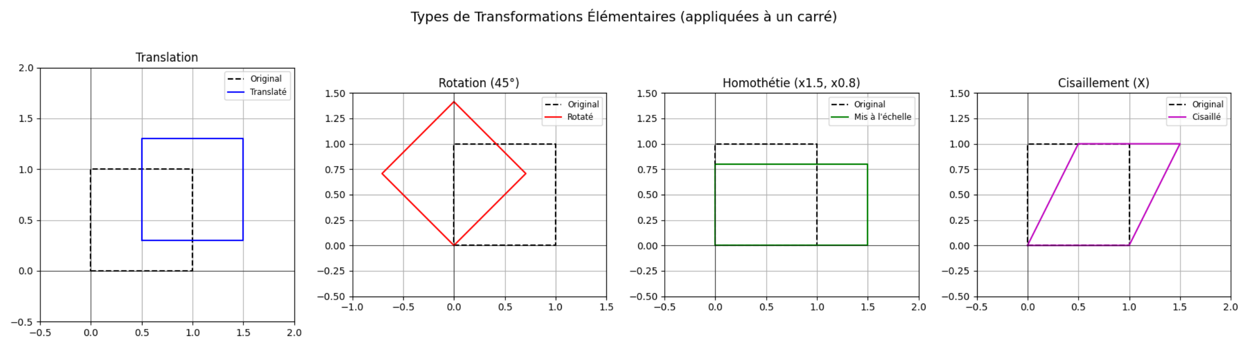

Figure 11: Illustration des transformations élémentaires.

14 Transformations : Représentation Matricielle

Les transformations linéaires (rotation, échelle, cisaillement) peuvent être représentées par des matrices. Si $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un point et M est la matrice de transformation (3x3 pour les transformations linéaires en 3D), le point transformé P' est donné par $P' = M \cdot P$.

14.1 Rotation

Les rotations sont définies par trois propriétés fondamentales :

- L'origine (ou le centre de rotation) reste fixe.
- Les distances entre les points sont conservées.
- L'orientation (ex: règle de la main droite) est conservée.

Les deux premières propriétés impliquent que les rotations sont linéaires.

14.1.1 Rotation autour de l'axe Z

Une rotation d'un angle θ autour de l'axe Z transforme un point (x, y, z) en (x', y', z') selon :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}$$

La matrice de rotation correspondante (en 3D) est :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le point transformé est $P' = R_z(\theta) \cdot P$.

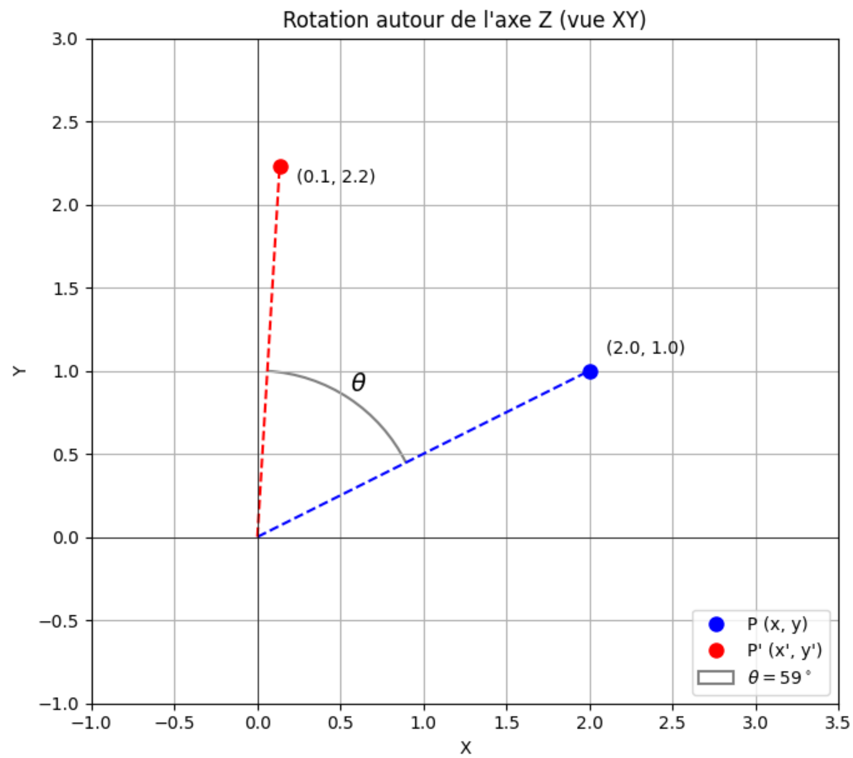

Figure 12: Rotation d'un point P autour de l'origine dans le plan XY (équivalent à une rotation autour de l'axe Z).

14.2 Homothétie (Scaling)

Une homothétie (mise à l'échelle) par des facteurs S_x, S_y, S_z le long des axes transforme un point (x, y, z) en (x', y', z') :

$$
\begin{aligned}
x' &= S_x \cdot x \\
y' &= S_y \cdot y \\
z' &= S_z \cdot z
\end{aligned}
$$

La matrice d'homothétie est :

$$
S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix}
$$

Le point transformé est $P' = S \cdot P$. L'homothétie est une transformation linéaire (elle satisfait $f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u})$ et $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$).

14.3 Translation

Une translation par un vecteur $T = (T_x, T_y, T_z)$ transforme un point (x, y, z) en (x', y', z') :

$$
\begin{aligned}
x' &= x + T_x \\
y' &= y + T_y \\
z' &= z + T_z
\end{aligned}
$$

En notation vectorielle : $P' = P + T$. La translation n'est **pas** une transformation linéaire car l'origine n'est pas préservée ($f(\mathbf{0}) = T \neq \mathbf{0}$ si $T \neq \mathbf{0}$). Elle ne peut donc pas être représentée par une simple multiplication matricielle 3x3.

> **Remark 14.1.** Q: La translation est-elle une transformation linéaire ? R: Non, car elle ne préserve pas l'origine (sauf si le vecteur de translation est nul).

14.4 Coordonnées Homogènes

Pour unifier le traitement des transformations linéaires (rotation, échelle) et non-linéaires (translation) sous une forme matricielle unique, on utilise les **coordonnées homogènes**. Un point 3D (x, y, z) est représenté par un vecteur 4D $(x, y, z, 1)$. Plus généralement, le point (X, Y, Z, W) en coordonnées homogènes correspond au point 3D $(X/W, Y/W, Z/W)$ si $W \neq 0$. On utilise généralement $W = 1$.

Avec les coordonnées homogènes, les transformations 3D (y compris la translation) peuvent être représentées par des matrices 4x4. Si $P_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ est le point en coordonnées homogènes et M_H est la matrice de transformation 4x4, le point transformé $P'_h = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{pmatrix}$ est donné par $P'_h = M_H \cdot P_h$. Le point 3D correspondant est $(X'/W', Y'/W', Z'/W')$.

14.4.1 Structure de la Matrice 4x4

Une matrice de transformation 4x4 M_H peut être décomposée en sous-matrices :

$$M_H = \begin{pmatrix} M_{3x3} & T_{3x1} \\ P_{1x3} & S_{1x1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & T_z \\ P_x & P_y & P_z & S \end{pmatrix}$$

- M_{3x3} (coin supérieur gauche) : Contient les effets linéaires (rotation, échelle, cisaillement).
- T_{3x1} (colonne de droite) : Contient les effets de translation (T_x, T_y, T_z).
- P_{1x3} (ligne du bas) : Utilisée pour les projections perspectives. Souvent $(0, 0, 0)$ pour les transformations affines.
- S_{1x1} (coin inférieur droit) : Facteur d'échelle global homogène. Souvent 1 pour les transformations affines.

15 Manipulations Géométriques avec Matrices Homogènes

Soit un point p en 3D, représenté par $P_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ en coordonnées homogènes. Soit une transformation géométrique M définie par une matrice 4x4 M_H. Le point transformé p' (en coordonnées homogènes P'_h) est obtenu par multiplication matricielle :

$$P'_h = M_H \cdot P_h$$

Cela permet de combiner plusieurs transformations (ex: translation, puis rotation, puis mise à l'échelle) en multipliant leurs matrices respectives. L'ordre des multiplications est important ! $M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot P_h$ signifie appliquer M_1 d'abord, puis M_2, puis M_3.

15.1 Matrice de Translation

La translation par (T_x, T_y, T_z) est représentée par la matrice 4x4 :

$$T(T_x, T_y, T_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant cette matrice à P_h:

$$T \cdot P_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui correspond bien au point translaté.

15.2 Matrice de Rotation (angles d'Euler)

Une rotation 3D quelconque peut être décomposée en une séquence de trois rotations autour des axes principaux (X, Y, Z). Les matrices de rotation 4x4 autour de chaque axe sont :

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une rotation composite R est obtenue en multipliant ces matrices, par exemple $R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha)$. La matrice résultante R (le bloc 3x3 supérieur gauche de la matrice 4x4 totale) contiendra les cosinus directeurs de la rotation combinée.

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.2.1 Règles pour Construire les Matrices de Rotation Axiales

Pour construire la matrice 4x4 de rotation d'angle θ autour d'un axe principal (X, Y, ou Z) :

- La ligne et la colonne correspondant à l'axe de rotation contiennent des 0, sauf un 1 sur la diagonale. (Ex: pour R_z, ligne 3 et colonne 3 sont $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)^T$).
- Le 1 dans le coin inférieur droit (coordonnée homogène) reste 1. Les autres éléments de la 4ème ligne et 4ème colonne sont 0.
- Dans le bloc 2x2 restant correspondant aux deux autres axes, on place $\cos\theta$ sur la diagonale.
- On place $\sin\theta$ et $-\sin\theta$ sur l'anti-diagonale pour "compléter le carré". Le signe '-' est placé sur le $\sin\theta$ de la ligne correspondant à l'axe *suivant* l'axe de rotation dans l'ordre cyclique (X $\to$ Y $\to$ Z $\to$ X).

– Rotation X : affecte Y, Z. L'axe suivant est Y. $-\sin\theta$ en ligne Y, colonne Z.
– Rotation Y : affecte X, Z. L'axe suivant est Z. $-\sin\theta$ en ligne Z, colonne X.
– Rotation Z : affecte X, Y. L'axe suivant est X. $-\sin\theta$ en ligne X, colonne Y.

16 Autres Transformations

16.1 Homothétie Isotrope

C'est une mise à l'échelle uniforme avec le même facteur S dans toutes les directions. La matrice 3x3 est $S \cdot I$, où I est la matrice identité. La matrice 4x4 est :

$$S_{iso}(S) = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.2 Affinités Orthogonales (Homothétie Non-Uniforme)

Ce sont des mises à l'échelle avec des facteurs potentiellement différents le long des axes principaux S_x, S_y, S_z. La matrice 4x4 générale est :

$$S(S_x, S_y, S_z) = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Des cas particuliers sont les affinités par rapport à un plan (mise à l'échelle le long d'un seul axe) :

- Affinité d'axe X par rapport au plan yOz : $S(S_x, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Affinité d'axe Y par rapport au plan xOz : $S(1, S_y, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Affinité d'axe Z par rapport au plan xOy : $S(1, 1, S_z)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$