TD 6

Exercice 1

Une suite réelle sera notée $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, son n-ième terme sera noté $u(n)$. Soit $l^\infty(\mathbb{N})$ l' espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme

$$||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u(n)|.$$

On note par $l_0^\infty(\mathbb{N})$ le sous ensemble de $l^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites nulles à partir d' un certain rang et par $l_c^\infty(\mathbb{N})$ le sous ensemble des suites u telles que $\lim_{n\to\infty} u(n) = 0$.

1) Déterminer si les ensembles $l_0^\infty(\mathbb{N})$ et $l_c^\infty(\mathbb{N})$ sont ouverts, resp. fermés. 2) Montrer que $l_0^\infty(\mathbb{N})$ est dense dans $l_c^\infty(\mathbb{N})$ pour la norme $||\cdot||_\infty$. 3) Soit $A \subset l^\infty(\mathbb{N})$ l' ensemble des suites croissantes bornées. Montrer que A est fermé pour la norme $||\cdot||_\infty$. 4) Soit $u_1, u_2 \in l^\infty(\mathbb{N})$ deux suites convergentes, c'est à dire telles que $\lim_{n\to\infty} u_i(n) = l_i \in \mathbb{R}$ existe pour $i = 1, 2$. Montrer que

$$|l_1 - l_2| \leq ||u_1 - u_2||_\infty.$$

Soit C l'ensemble des suites convergentes. Montrer que $C \subset l^\infty(\mathbb{N})$ et que C est un fermé de $l^\infty(\mathbb{N})$. 5) Construire une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d' éléments de $l_0^\infty(\mathbb{N})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite réelle $(u_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ mais la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $l^\infty(\mathbb{N})$.

Solution. 1) $l_0^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas fermé. C'est en effet ce qu'on a montré dans l'ex 12 du TD5, sur cette même page (?) $l_0^\infty(\mathbb{N})$ est-il ouvert ? Soit $u \in l_0^\infty(\mathbb{N})$ tq $u = 0$. Soit $\epsilon > 0$. On définit $v \in l^\infty(\mathbb{N})$ par $\forall n \in \mathbb{N}, v(n) = \frac{\epsilon}{2}$. Alors $||u - v||_\infty = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Donc $v \in B(u, \epsilon)$. Mais $v(n) = \frac{\epsilon}{2} > 0$ donc $v \notin l_0^\infty(\mathbb{N})$. Ainsi, $\forall \epsilon > 0, B(u, \epsilon) \not\subset l_0^\infty(\mathbb{N})$. Donc $l_0^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas ouvert.

On peut procéder de la même façon pour montrer que $l_c^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas ouvert.

$l_c^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas fermé. En effet, en considérant la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = e_k$ (suite nulle sauf au k-ième terme qui vaut 1). Alors $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \in l_0^\infty(\mathbb{N}) \subset l_c^\infty(\mathbb{N})$. $||u_k - u_j||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\delta_{k,n} - \delta_{j,n}| = 1$ si $k \neq j$. Donc (u_k) n'est pas de Cauchy, donc ne converge pas. (Autre argument) Si on considère la suite (v_k) tq $v_k(n) = \frac{1}{n+1}$ si $n \leq k$ et 0 sinon. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, v_k \in l_0^\infty(\mathbb{N}) \subset l_c^\infty(\mathbb{N})$. $\lim_{k\to\infty} v_k = v$ avec $v(n) = \frac{1}{n+1}$. $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$. Donc $v \in l_c^\infty(\mathbb{N})$. On a une suite d'éléments de $l_0^\infty(\mathbb{N})$ convergeante dans $(l^\infty(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ vers $v \in l_c^\infty(\mathbb{N})$.

Est-ce que $l_c^\infty(\mathbb{N})$ est fermé ? Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $l_c^\infty(\mathbb{N})$ qui converge vers $u \in l^\infty(\mathbb{N})$. Montrons que $u \in l_c^\infty(\mathbb{N})$. $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} u^{(k)}(n) = 0$. On a $u^{(k)} \to u$ dans $(l^\infty(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$, i.e. $||u^{(k)} - u||_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Soit $\epsilon > 0$. $\exists K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq K$, $||u^{(k)} - u||_\infty \leq \epsilon/2$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u^{(k)}(n) - u(n)| \leq \epsilon/2$. On fixe $k = K$. $u^{(K)} \in l_c^\infty(\mathbb{N})$, donc $\lim_{n\to\infty} u^{(K)}(n) = 0$. Donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u^{(K)}(n)| \leq \epsilon/2$. Alors $\forall n \geq N$, $|u(n)| \leq |u(n) - u^{(K)}(n)| + |u^{(K)}(n)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Donc $\lim_{n\to\infty} u(n) = 0$. Donc $u \in l_c^\infty(\mathbb{N})$. Ainsi, $l_c^\infty(\mathbb{N})$ est fermé.

2) Il faut montrer que $\mathrm{Adh}(l_0^\infty(\mathbb{N})) \supset l_c^\infty(\mathbb{N})$. Soit $u \in l_c^\infty(\mathbb{N})$. Montrons qu'il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $l_0^\infty(\mathbb{N})$ telle que $||u_k - u||_\infty \to 0$. Soit $u \in l_c^\infty(\mathbb{N})$. On a $\lim_{n\to\infty} u(n) = 0$. Soit $\epsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u(n)| \leq \epsilon$. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}, u_k(n) = u(n)$ si $n \leq k$ et 0 sinon. $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \in l_0^\infty(\mathbb{N})$. Montrons que $u_k \to u$ dans $(l^\infty(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$. $||u_k - u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_k(n) - u(n)| = \sup_{n>k} |u(n)|$. Comme $\lim_{n\to\infty} u(n) = 0$, on a $\lim_{k\to\infty} \sup_{n>k} |u(n)| = 0$. (Soit $\epsilon > 0$. $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $|u(n)| \leq \epsilon$. Alors pour $k \geq N$, $\sup_{n>k} |u(n)| \leq \sup_{n\geq N} |u(n)| \leq \epsilon$). Donc $||u_k - u||_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Donc $l_0^\infty(\mathbb{N})$ est dense dans $l_c^\infty(\mathbb{N})$.

4) Soit $u_1, u_2 \in C$. $\lim_{n\to\infty} u_1(n) = l_1$, $\lim_{n\to\infty} u_2(n) = l_2$. Montrons que $|l_1 - l_2| \leq ||u_1 - u_2||_\infty$. Soit $\epsilon > 0$. $\exists N_1$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|u_1(n) - l_1| \leq \epsilon/2$. $\exists N_2$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|u_2(n) - l_2| \leq \epsilon/2$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n = N$: $|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_1(N)| + |u_1(N) - u_2(N)| + |u_2(N) - l_2|$ $|l_1 - l_2| \leq \epsilon/2 + |u_1(N) - u_2(N)| + \epsilon/2$ $|l_1 - l_2| \leq \epsilon + \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_1(n) - u_2(n)|$ $|l_1 - l_2| \leq \epsilon + ||u_1 - u_2||_\infty$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $|l_1 - l_2| \leq ||u_1 - u_2||_\infty$.

Montrons que $C \subset l^\infty(\mathbb{N})$ et C est fermé. Soit $u \in C$. $\lim_{n\to\infty} u(n) = l$. Toute suite convergente est bornée. Donc $u \in l^\infty(\mathbb{N})$. Donc $C \subset l^\infty(\mathbb{N})$. Montrons que C est fermé. Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C, qui converge vers $u \in l^\infty(\mathbb{N})$. Il faut montrer que $u \in C$. $\forall p \in \mathbb{N}, u_p \in C$, donc $\lim_{n\to\infty} u_p(n) = l_p$. $u_p \to u$ dans $(l^\infty(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$, i.e. $||u_p - u||_\infty \xrightarrow{p\to\infty} 0$. La suite (u_p) converge dans $l^\infty(\mathbb{N})$, donc elle est de Cauchy. $||u_p - u_q||_\infty \xrightarrow{p,q\to\infty} 0$. D'après ce qui précède, $|l_p - l_q| \leq ||u_p - u_q||_\infty$. Donc $(l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc (l_p) converge. Soit l sa limite. Il reste à montrer que $u_n \to l$. Pour cela, on peut utiliser l'inégalité triangulaire : $|u(n) - l| \leq |u(n) - u_p(n)| + |u_p(n) - l_p| + |l_p - l|$. $|u(n) - l| \leq ||u - u_p||_\infty + |u_p(n) - l_p| + |l_p - l|$. Soit $\epsilon > 0$. $||u - u_p||_\infty \xrightarrow{p\to\infty} 0 \implies \exists P_1$ tel que $\forall p \geq P_1, ||u - u_p||_\infty \leq \epsilon/3$. $l_p \to l \implies \exists P_2$ tel que $\forall p \geq P_2, |l_p - l| \leq \epsilon/3$. Soit $p = \max(P_1, P_2)$. On a $u_p \in C$, donc $\lim_{n\to\infty} u_p(n) = l_p$. $\exists N_p$ tel que $\forall n \geq N_p, |u_p(n) - l_p| \leq \epsilon/3$. Alors $\forall n \geq N_p$, $|u(n) - l| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$. Donc $\lim_{n\to\infty} u(n) = l$. Donc $u \in C$. Ainsi, C est fermé.

5) On cherche une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $l_0^\infty(\mathbb{N})$ 'simplement convergente' mais pas convergente dans $l^\infty(\mathbb{N})$. On peut considérer la suite (u_p) définie par $u_p = e_p$ (la suite qui vaut 1 en p et 0 sinon). $\forall p \in \mathbb{N}, u_p \in l_0^\infty(\mathbb{N})$. Pour n fixé, la suite $(u_p(n))_{p\in\mathbb{N}} = (\delta_{p,n})_{p\in\mathbb{N}}$. $\lim_{p\to\infty} u_p(n) = 0$. La suite (u_p) converge simplement vers la suite nulle. Mais $||u_p - 0||_\infty = ||e_p||_\infty = 1$. Donc u_p ne converge pas vers 0 dans $l^\infty(\mathbb{N})$. $||u_p - u_q||_\infty = ||e_p - e_q||_\infty = 1$ si $p \neq q$. La suite (u_p) n'est pas de Cauchy, donc ne converge pas dans $l^\infty(\mathbb{N})$.

Autre exemple (celui des notes): Soit $u_p(n) = \frac{n}{n+p}$ si $n \leq p$ et $\frac{p}{n}$ si $n > p$. (Attention, cette suite n'est pas dans $l_0^\infty(\mathbb{N})$). Considérons $u_p(n) = 1 - \frac{n}{p}$ si $n \leq p$ et 0 si $n > p$. Alors $\forall p, u_p \in l_0^\infty(\mathbb{N})$. Pour n fixé, $\lim_{p\to\infty} u_p(n) = 1$. La suite (u_p) converge simplement vers la suite constante $u(n) = 1$. La suite $u = (1, 1, 1, ...)$ n'est pas dans $l_c^\infty(\mathbb{N})$ et n'est pas la limite de (u_p) dans l^∞. $||u_p - u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_p(n) - 1| = \sup_{n\leq p} |1 - n/p - 1| = \sup_{n\leq p} |n/p| = p/p = 1$. Donc (u_p) ne converge pas vers u dans l^∞. Elle ne converge pas du tout dans l^∞.

Prenons la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ où $u_p(n) = \frac{1}{n}$ si $p \leq n \leq 2p$ et 0 sinon. $\forall p \in \mathbb{N}, u_p \in l_0^\infty(\mathbb{N})$. Pour n fixé, $u_p(n) = 0$ pour $p > n$. Donc $\lim_{p\to\infty} u_p(n) = 0$. La suite (u_p) converge simplement vers 0. $||u_p - 0||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_p(n)| = \sup_{p\leq n\leq 2p} \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$. Donc $||u_p||_\infty \to 0$. Donc (u_p) converge vers 0 dans $l^\infty(\mathbb{N})$.

Essayons $u_p(n) = \frac{n}{p^2}$ si $n \leq p$, 0 si $n > p$. $u_p \in l_0^\infty(\mathbb{N})$. $\lim_{p\to\infty} u_p(n) = 0$ pour tout n. Convergence simple vers 0. $||u_p||_\infty = \sup_{n\leq p} \frac{n}{p^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$. Converge vers 0 dans l^∞.

Il faut une suite (u_p) de $l_0^\infty(\mathbb{N})$ telle que $\forall n, (u_p(n))_p$ converge mais $(u_p)_p$ ne converge pas dans l^∞. On a vu que $u_p = e_p$ fonctionne. $\forall p, u_p \in l_0^\infty(\mathbb{N})$. $\forall n$, $\lim_{p\to\infty} u_p(n) = 0$. (u_p) ne converge pas dans $l^\infty(\mathbb{N})$ car $||u_p||_\infty = 1$. □

Exercice 2

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$ une partie de E. On note par $\mathrm{Vect}(A)$ l' espace vectoriel engendré par A, c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d' éléments de A. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Adh}(A)) \subset \mathrm{Adh}(\mathrm{Vect}(A)).$$

Solution. Soit $x \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Adh}(A))$. Par définition, x peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathrm{Adh}(A)$. $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ (corps de base, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $a_i \in \mathrm{Adh}(A)$ pour $i = 1, ..., n$. Comme $a_i \in \mathrm{Adh}(A)$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe une suite $(a_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i$.

Considérons la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x^{(k)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^{(k)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)}$ est une combinaison linéaire d'éléments de A, donc $x^{(k)} \in \text{Vect}(A)$. Montrons que $x^{(k)}$ converge vers x.

$$\begin{aligned} ||x^{(k)} - x|| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i^{(k)} - a_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| ||a_i^{(k)} - a_i|| \end{aligned}$$

Comme $\lim_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i$, on a $\lim_{k\to\infty} ||a_i^{(k)} - a_i|| = 0$ pour tout i. Donc, $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| ||a_i^{(k)} - a_i|| = 0$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{k\to\infty} ||x^{(k)} - x|| = 0$. Donc $x^{(k)} \to x$.

On a construit une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Vect}(A)$ qui converge vers x. Par définition de l'adhérence, cela signifie que $x \in \text{Adh}(\text{Vect}(A))$. Ainsi, $\text{Vect}(\text{Adh}(A)) \subset \text{Adh}(\text{Vect}(A))$. □

Exercice 3

Soit $A, B, C \subset E$ des parties d' un espace vectoriel normé E. 1) Montrer que si $C \subset B$ alors $d(A, B) \leq d(A, C)$. 2) On note par $\bar{A}$ l' adhérence d' un ensemble A. Montrer que $d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$ pour tous $A, B \subset E$.

Solution. 1) $d(A, C) = \inf\{||a - c||; a \in A, c \in C\}$. $d(A, B) = \inf\{||a - b||; a \in A, b \in B\}$. L'ensemble $\{||a - b||; a \in A, b \in B\}$ contient l'ensemble $\{||a - c||; a \in A, c \in C\}$ car $C \subset B$. Donc $\inf\{||a - b||; a \in A, b \in B\} \leq \inf\{||a - c||; a \in A, c \in C\}$. C'est-à-dire $d(A, B) \leq d(A, C)$.

2) Montrons $d(\bar{A}, \bar{B}) \leq d(A, B)$. On a $A \subset \bar{A}$ et $B \subset \bar{B}$. D'après 1), comme $B \subset \bar{B}$, on a $d(A, \bar{B}) \leq d(A, B)$. D'après 1), comme $A \subset \bar{A}$, on a $d(\bar{A}, \bar{B}) \leq d(A, \bar{B})$. (On applique 1) avec $A' = \bar{B}$, $B' = E$, $C' = A$. On a $d(A', A) \leq d(A', \bar{A})$? Non. La distance est symétrique: $d(X, Y) = d(Y, X)$. $d(\bar{A}, \bar{B}) = \inf\{||\bar{a} - \bar{b}||; \bar{a} \in \bar{A}, \bar{b} \in \bar{B}\}$. $d(A, \bar{B}) = \inf\{||a - \bar{b}||; a \in A, \bar{b} \in \bar{B}\}$. $d(\bar{A}, B) = \inf\{||\bar{a} - b||; \bar{a} \in \bar{A}, b \in B\}$. Comme $A \subset \bar{A}$, l'ensemble $\{||\bar{a} - \bar{b}||; \bar{a} \in \bar{A}, \bar{b} \in \bar{B}\}$ contient $\{||a - \bar{b}||; a \in A, \bar{b} \in \bar{B}\}$. Donc $d(\bar{A}, \bar{B}) \leq d(A, \bar{B})$. Comme $B \subset \bar{B}$, l'ensemble $\{||a - \bar{b}||; a \in A, \bar{b} \in \bar{B}\}$ contient $\{||a - b||; a \in A, b \in B\}$. Donc $d(A, \bar{B}) \leq d(A, B)$. Combinant les deux, $d(\bar{A}, \bar{B}) \leq d(A, B)$.

Montrons $d(A, B) \leq d(\bar{A}, \bar{B})$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de l'infimum, il existe $\bar{a} \in \bar{A}$ et $\bar{b} \in \bar{B}$ tels que $||\bar{a} - \bar{b}|| < d(\bar{A}, \bar{B}) + \epsilon/2$. Comme $\bar{a} \in \bar{A}$, il existe $a \in A$ tel que $||\bar{a} - a|| < \epsilon/4$. Comme $\bar{b} \in \bar{B}$, il existe $b \in B$ tel que $||\bar{b} - b|| < \epsilon/4$. Alors $||a - b|| \leq ||a - \bar{a}|| + ||\bar{a} - \bar{b}|| + ||\bar{b} - b||$ $||a - b|| < \epsilon/4 + d(\bar{A}, \bar{B}) + \epsilon/2 + \epsilon/4$ $||a - b|| < d(\bar{A}, \bar{B}) + \epsilon$. On a trouvé $a \in A, b \in B$ tels que $||a - b|| < d(\bar{A}, \bar{B}) + \epsilon$. Ceci implique que $d(A, B) = \inf\{||a - b||; a \in A, b \in B\} \leq d(\bar{A}, \bar{B}) + \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on conclut que $d(A, B) \leq d(\bar{A}, \bar{B})$.

Ayant montré les deux inégalités, on a $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$. □

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E. 1) Montrer que $\text{Adh}(F)$ est un sous espace vectoriel de E. 2) Montrer que si $\text{Int}(F) \neq \emptyset$ alors $F = E$.

Solution. 1) Soient $x, y \in \text{Adh}(F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (corps de base). Montrons que $x + y \in \text{Adh}(F)$ et $\lambda x \in \text{Adh}(F)$. Comme $x \in \text{Adh}(F)$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$. Comme $y \in \text{Adh}(F)$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $y_n \to y$. Considérons la suite $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme F est un SEV, $x_n + y_n \in F$ pour tout n. De plus, $x_n + y_n \to x + y$ car l'addition est continue. Donc $x + y \in \text{Adh}(F)$. Considérons la suite $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme F est un SEV, $\lambda x_n \in F$ pour tout n. De plus, $\lambda x_n \to \lambda x$ car la multiplication par un scalaire est continue. Donc $\lambda x \in \text{Adh}(F)$. Enfin, $0_E \in F \subset \text{Adh}(F)$, donc $\text{Adh}(F)$ est non vide. Ainsi, $\text{Adh}(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) On suppose que $\text{Int}(F) \neq \emptyset$. Cela signifie qu'il existe $y_0 \in \text{Int}(F)$. Par définition de l'intérieur, il existe $\delta > 0$ tel que $B(y_0, \delta) \subset F$. Soit $x \in E$. On veut montrer que $x \in F$. Si $x = 0_E$, alors $x \in F$ car F est un SEV. Supposons $x \neq 0_E$. Considérons $z = y_0 + \frac{\delta}{2||x||}x$. $||z - y_0|| = ||\frac{\delta}{2||x||}x|| = \frac{\delta}{2||x||}||x|| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Donc $z \in B(y_0, \delta)$. Comme $B(y_0, \delta) \subset F$, on a $z \in F$. Puisque $z = y_0 + \frac{\delta}{2||x||}x$ et $y_0 \in F$, et que F est un SEV, on a: $\frac{\delta}{2||x||}x = z - y_0 \in F$. Comme $\frac{\delta}{2||x||}$ est un scalaire non nul, et que F est un SEV, on peut multiplier par l'inverse du scalaire: $x = \frac{2||x||}{\delta}(\frac{\delta}{2||x||}x) \in F$. Donc, pour tout $x \in E$, on a $x \in F$. Ceci montre que $E \subset F$. Comme $F \subset E$ par définition, on conclut que $F = E$. □

Exercice 5

On note par $E = \mathbb{R}[X]$ l' espace des polynômes à coefficients réels $P(x) = \sum_{n=0}^{d} a_n x^n$. 1) Montrer que

$$N_1(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x\in[1,2]} |P(x)|$$

sont des normes sur E. 2) On considère l' application linéaire : $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$. Montrer que φ est continue pour la norme N_1. 3) On rappelle que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ on a

$$|e^y - \sum_{n=0}^{N} \frac{y^n}{n!}| \leq \frac{|y|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|y|}$$

En déduire que pour tout $C \geq 1$ et $1 \leq x \leq 2$ on a

$$|e^{-Cx} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-Cx)^n}{n!}| \leq \frac{|Cx|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|Cx|} \leq \frac{(2C)^{N+1}}{(N+1)!} e^{2C}$$

4a) Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu' il existe $C > 0$ assez grand tel que $\sup_{x\in[1,2]} e^{-Cx} \leq \epsilon/2$. 4b) On fixe la constante C obtenue au point 4a). Montrer, en utilisant le point 3) et l' inégalité triangulaire pour la valeur absolue, qu' il existe $N \in \mathbb{N}$ assez grand tel que

$$\sup_{x\in[1,2]} |\sum_{n=0}^{N} \frac{(-Cx)^n}{n!}| \leq \epsilon. \quad \text{(Erreur dans l'énoncé scanné, il faut utiliser l'inégalité du 3))}$$

Indication : On admettra que pour tout $C \geq 1$ on a $\lim_{N\to\infty} \frac{C^{N+1}}{(N+1)!} = 0$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme $P(x)$ (dépendant de ϵ) tel que $P(0) = 1, N_2(P) \leq \epsilon$. 5) Montrer que l' application linéaire φ définie au point 2) n' est pas continue pour la norme N_2.

Solution. 1) Vérifions les propriétés de norme pour N_1. - $N_1(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \geq 0$ car $|P(x)| \geq 0$. - $N_1(P) = 0 \implies \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| = 0 \implies P(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Un polynôme non nul a un nombre fini de racines. Si P est nul sur $[0,1]$ (qui est infini), alors P doit être le polynôme nul. Donc $P = 0$. - $N_1(\lambda P) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda P(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda||P(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| = |\lambda| N_1(P)$. - $N_1(P+Q) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)+Q(x)|$. On sait que $|P(x)+Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)|$. $|P(x)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| = N_1(P)$. $|Q(x)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |Q(t)| = N_1(Q)$. Donc $|P(x)+Q(x)| \leq N_1(P) + N_1(Q)$ pour tout $x \in [0,1]$. En prenant le supremum sur $x \in [0,1]$, on obtient $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$. Donc N_1 est une norme sur E. La preuve est identique pour N_2 en remplaçant $[0,1]$ par $[1,2]$. Un polynôme nul sur $[1,2]$ est le polynôme nul.

2) $\varphi : P \mapsto P(0)$. On veut montrer que φ est continue pour N_1. Il suffit de montrer que φ est continue en 0. On cherche $C \geq 0$ tel que $|\varphi(P)| \leq C N_1(P)$ pour tout $P \in E$. $|\varphi(P)| = |P(0)|$. $N_1(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. On a $P(0)$ est une des valeurs de $|P(x)|$ pour $x \in [0,1]$ (en $x = 0$). Donc $|P(0)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| = N_1(P)$. On peut prendre $C = 1$. $|\varphi(P)| \leq 1 \cdot N_1(P)$. Donc φ est continue pour la norme N_1.

3) L'inégalité $|e^y - \sum_{n=0}^{N} \frac{y^n}{n!}| \leq \frac{|y|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|y|}$ est rappelée (c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange ou Taylor avec reste intégral). On l'applique avec $y = -Cx$. Comme $x \in [1,2]$ et $C \geq 1$, on a $Cx \geq 1$. $|y| = |-Cx| = Cx$. $e^{|y|} = e^{Cx}$. Comme $x \in [1,2]$, $Cx \leq 2C$. Donc $e^{Cx} \leq e^{2C}$. $|y|^{N+1} = (Cx)^{N+1} =$

$C^{N+1}x^{N+1}$. Comme $x \leq 2$, $x^{N+1} \leq 2^{N+1}$. Donc $|y|^{N+1} \leq C^{N+1}2^{N+1} = (2C)^{N+1}$. On obtient : $|e^{-Cx} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-Cx)^n}{n!}| \leq \frac{(Cx)^{N+1}}{(N+1)!}e^{Cx} \leq \frac{(2C)^{N+1}}{(N+1)!}e^{2C}$.

4a) Soit $\epsilon > 0$. On cherche $C > 0$ tel que $\sup_{x\in[1,2]} e^{-Cx} \leq \epsilon/2$. La fonction $x \mapsto e^{-Cx}$ est décroissante pour $C > 0$. Le supremum est atteint en $x = 1$. $\sup_{x\in[1,2]} e^{-Cx} = e^{-C}$. On veut $e^{-C} \leq \epsilon/2$. $-\ln(e^{-C}) \geq -\ln(\epsilon/2)$ $C \geq -\ln(\epsilon/2) = \ln(2/\epsilon)$. Il suffit de choisir C assez grand, par exemple $C = \max(1, \ln(2/\epsilon))$.

4b) Fixons $C = \max(1, \ln(2/\epsilon))$. On a $\sup_{x\in[1,2]} e^{-Cx} \leq \epsilon/2$. Soit $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-Cx)^n}{n!}$. C'est un polynôme. On veut montrer qu'il existe N tel que $\sup_{x\in[1,2]} |P_N(x)| \leq \epsilon$. (Ceci semble être l'objectif modifié, pas celui de l'énoncé scanné). Utilisons l'inégalité triangulaire: $|P_N(x)| \leq |P_N(x) - e^{-Cx}| + |e^{-Cx}|$. $|P_N(x)| \leq |e^{-Cx} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-Cx)^n}{n!}| + |e^{-Cx}|$. $|P_N(x)| \leq \frac{(2C)^{N+1}}{(N+1)!}e^{2C} + e^{-Cx}$. On sait que $\sup_{x\in[1,2]} e^{-Cx} \leq \epsilon/2$. On sait que $\lim_{N\to\infty} \frac{(2C)^{N+1}}{(N+1)!} = 0$. Donc, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_0$, $\frac{(2C)^{N+1}}{(N+1)!}e^{2C} \leq \epsilon/2$. Alors, pour $N \geq N_0$, et pour tout $x \in [1,2]$: $|P_N(x)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Donc $N_2(P_N) = \sup_{x\in[1,2]} |P_N(x)| \leq \epsilon$.

Déduction : On veut $P(x)$ tel que $P(0) = 1$ et $N_2(P) \leq \epsilon$. Le polynôme $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-Cx)^n}{n!}$ vérifie $P_N(0) = \frac{(-C\cdot 0)^0}{0!} = 1$. On a trouvé P_N pour N assez grand tel que $P_N(0) = 1$ et $N_2(P_N) \leq \epsilon$.

5) Montrer que $\varphi : P \mapsto P(0)$ n'est pas continue pour N_2. Il faut montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que $|\varphi(P)| \leq CN_2(P)$ pour tout $P \in E$. $|\varphi(P)| = |P(0)|$. $N_2(P) = \sup_{x\in[1,2]} |P(x)|$. On cherche une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\frac{|\varphi(P_k)|}{N_2(P_k)} \to \infty$. C'est-à-dire $P_k(0)$ est "grand" tandis que $\sup_{x\in[1,2]} |P_k(x)|$ est "petit". D'après 4b), pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme P_ϵ tel que $P_\epsilon(0) = 1$ et $N_2(P_\epsilon) \leq \epsilon$. Prenons $\epsilon_k = 1/k$. Il existe P_k tel que $P_k(0) = 1$ et $N_2(P_k) \leq 1/k$. Alors $|\varphi(P_k)| = |P_k(0)| = 1$. $\frac{|\varphi(P_k)|}{N_2(P_k)} \geq \frac{1}{1/k} = k$. Comme $k \to \infty$, le rapport $\frac{|\varphi(P_k)|}{N_2(P_k)}$ n'est pas borné. Donc φ n'est pas continue pour la norme N_2. □

Exercice 6

On considère l'espace vectoriel normé $C([-1,1])$ des fonctions continues à valeurs réelles muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. 1) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$ on définit la fonction $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 \leq x < -1/n \\ 1 - \frac{1}{2n} - \frac{n}{2}x^2 & \text{pour } -1/n \leq x < 1/n \\ 1-x & \text{pour } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[-1,1]$. 1b) Déterminer la fonction $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ dans $C([-1,1])$. Indication : commencer par dessiner les graphes de quelques fonctions f_n. 1c) L' ensemble $C^1([-1,1])$ est-il fermé dans $C([-1,1])$?

Solution. 1a) f_n est définie par morceaux par des polynômes, qui sont C^∞ sur les intervalles ouverts. Il faut vérifier la continuité et la dérivabilité aux points de jonction $x = -1/n$ et $x = 1/n$. Continuité : En $x = -1/n$: $\lim_{x\to(-1/n)^-} f_n(x) = 1 + (-1/n) = 1 - 1/n$. $f_n(-1/n) = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{n}{2}(-1/n)^2 = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{n}{2}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{2}{2n} = 1 - 1/n$. C'est continu en $-1/n$. En $x = 1/n$: $f_n(1/n) = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{n}{2}(1/n)^2 = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = 1 - 1/n$. $\lim_{x\to(1/n)^+} f_n(x) = 1 - (1/n) = 1 - 1/n$. C'est continu en $1/n$. f_n est continue sur $[-1,1]$.

Dérivabilité : Calculons la dérivée par morceaux : $f_n'(x) = 1$ pour $-1 < x < -1/n$. $f_n'(x) = -\frac{n}{2}(2x) = -nx$ pour $-1/n < x < 1/n$. $f_n'(x) = -1$ pour $1/n < x < 1$. Dérivée en $x = -1/n$: $\lim_{x\to(-1/n)^-} f_n'(x) = 1$. $\lim_{x\to(-1/n)^+} f_n'(x) = -n(-1/n) = 1$. La dérivée est continue en $-1/n$, $f_n'(-1/n) = 1$. Dérivée en $x = 1/n$: $\lim_{x\to(1/n)^-} f_n'(x) = -n(1/n) = -1$. $\lim_{x\to(1/n)^+} f_n'(x) = -1$. La dérivée est continue en $1/n$, $f_n'(1/n) = -1$. Donc f_n' est continue sur $[-1,1]$. f_n est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

1b) Dessin: f_n est linéaire croissante de $(-1,0)$ à $(-1/n, 1-1/n)$, puis une parabole concave

$1-\frac{1}{2n}-\frac{n}{2}x^2$ entre $-1/n$ et $1/n$ (sommet en $x=0$ à $1-1/(2n)$), puis linéaire décroissante de $(1/n, 1-1/n)$ à $(1,0)$. Quand $n \to \infty$, $1/n \to 0$. L'intervalle $[-1/n, 1/n]$ se réduit à $\{0\}$. Pour $x \in [-1,0)$ fixé, pour n assez grand, $-1 \leq x < -1/n$, donc $f_n(x) = 1+x$. Pour $x \in (0,1]$ fixé, pour n assez grand, $1/n \leq x \leq 1$, donc $f_n(x) = 1-x$. Pour $x=0$, $f_n(0) = 1-1/(2n) \to 1$. Donc la limite simple est $f(x) = 1+x$ si $x \in [-1,0)$ et $f(x) = 1-x$ si $x \in [0,1]$. C'est-à-dire $f(x) = 1-|x|$. Vérifions la convergence uniforme. $||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)|$. Pour $x \in [-1, -1/n]$, $f_n(x) = 1+x$ et $f(x) = 1+x$, donc $f_n(x) - f(x) = 0$. Pour $x \in [1/n, 1]$, $f_n(x) = 1-x$ et $f(x) = 1-x$, donc $f_n(x) - f(x) = 0$. Pour $x \in [-1/n, 1/n]$, $f(x) = 1-|x|$. $f_n(x) - f(x) = (1-\frac{1}{2n}-\frac{n}{2}x^2) - (1-|x|)$. Le maximum de la différence est probablement en $x=0$. $f_n(0) - f(0) = (1-1/(2n)) - 1 = -1/(2n)$. Le sup de $|f_n(x) - f(x)|$ sur $[-1/n, 1/n]$: On étudie $g(x) = f_n(x) - f(x) = -\frac{1}{2n} - \frac{n}{2}x^2 + |x|$ sur $[-1/n, 1/n]$. Sur $[0, 1/n]$, $g(x) = -\frac{1}{2n} - \frac{n}{2}x^2 + x$. $g'(x) = -nx+1$. $g'(x) = 0$ pour $x = 1/n$. $g(1/n) = -\frac{1}{2n} - \frac{n}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = 0$. $g(0) = -1/(2n)$. La fonction $g(x)$ est croissante sur $[0, 1/n]$. Le max de $|g(x)|$ est $|g(0)| = 1/(2n)$. Sur $[-1/n, 0]$, $g(x) = -\frac{1}{2n} - \frac{n}{2}x^2 - x$. $g'(x) = -nx - 1$. $g'(x) = 0$ pour $x = -1/n$. $g(-1/n) = -\frac{1}{2n} - \frac{n}{2}\frac{1}{n^2} - (-\frac{1}{n}) = 0$. $g(0) = -1/(2n)$. $g(x)$ est décroissante sur $[-1/n, 0]$. Le max de $|g(x)|$ est $|g(0)| = 1/(2n)$. Donc $\sup_{x\in[-1/n,1/n]} |f_n(x) - f(x)| = 1/(2n)$. $||f_n - f||_\infty = 1/(2n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. La limite est $f(x) = 1-|x|$. C'est une fonction continue.

1c) On a une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C^1([-1,1])$ qui converge dans $C([-1,1])$ vers $f(x) = 1-|x|$. La fonction $f(x) = 1-|x|$ n'est pas dérivable en $x=0$. Donc $f \notin C^1([-1,1])$. L'ensemble $C^1([-1,1])$ n'est pas fermé dans $C([-1,1])$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$. □

Exercice 7

Soit E l'ensemble $E = \{u \in C^1([0,1];\mathbb{R}) : u(0) = 0\}$. 1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. 2) On pose

$$N_1(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)|, \quad N_2(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x) + u(x)|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E. 3a) Montrer que $|u(x)| \leq N_1(u)$, $\forall u \in E$. 3b) En déduire que $N_2(u) \leq 2N_1(u)$, $\forall u \in E$. 4a) Montrer que si $u \in E$ alors $u(x) = e^{-x}\int_0^x (u(t) + u'(t))e^t dt$. Indication : calculer la dérivée du membre de droite et utiliser que $u \in E$. 4b) Montrer que $|(u(t) + u'(t))e^t| \leq eN_2(u)$, $\forall t \in [0,1]$. 4c) En déduire que $|u(x)| \leq eN_2(u)$, $\forall x \in [0,1]$. 4d) Montrer qu' il existe une constante $C \geq 0$ telle que $N_1(u) \leq CN_2(u)$, $\forall u \in E$.

Solution. 1) $E = \{u \in C^1([0,1];\mathbb{R}) : u(0) = 0\}$. E est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $C^1([0,1];\mathbb{R})$. - La fonction nulle $u(x) = 0$ est C^1 et $u(0) = 0$, donc $0 \in E$. E est non vide. - Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors u, v sont C^1 et $u(0) = 0, v(0) = 0$. $u+v$ est C^1. $(u+v)(0) = u(0) + v(0) = 0 + 0 = 0$. Donc $u+v \in E$. λu est C^1. $(\lambda u)(0) = \lambda u(0) = \lambda \cdot 0 = 0$. Donc $\lambda u \in E$. E est un sous-espace vectoriel de $C^1([0,1];\mathbb{R})$, donc c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Montrons que N_1 est une norme sur E. - $N_1(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)| \geq 0$. - $N_1(u) = 0 \implies \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)| = 0 \implies u'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Ceci implique que $u(x)$ est une fonction constante sur $[0,1]$. $u(x) = k$. Comme $u \in E$, on a $u(0) = 0$. Donc $k = 0$. $u(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. $u = 0$. - $N_1(\lambda u) = \sup_{x\in[0,1]} |(\lambda u)'(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda u'(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)| = |\lambda| N_1(u)$. - $N_1(u+v) = \sup_{x\in[0,1]} |(u+v)'(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x) + v'(x)|$. $|u'(x) + v'(x)| \leq |u'(x)| + |v'(x)| \leq N_1(u) + N_1(v)$. Donc $N_1(u+v) \leq N_1(u) + N_1(v)$. N_1 est une norme sur E.

Montrons que N_2 est une norme sur E. - $N_2(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x) + u(x)| \geq 0$. - $N_2(u) = 0 \implies \sup_{x\in[0,1]} |u'(x) + u(x)| = 0 \implies u'(x) + u(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' + y = 0$. La solution générale est $u(x) = Ke^{-x}$. Comme $u \in E$, $u(0) = 0$. $Ke^{-0} = 0 \implies K = 0$. Donc $u(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. $u = 0$. - $N_2(\lambda u) = \sup_{x\in[0,1]} |(\lambda u)'(x) + (\lambda u)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda u'(x) + \lambda u(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |u'(x) + u(x)| = |\lambda| N_2(u)$. - $N_2(u+v) = \sup_{x\in[0,1]} |(u+v)'(x) + (u+v)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |(u'(x) + u(x)) + (v'(x) + v(x))|$. $|(u'(x) + u(x)) + (v'(x) + v(x))| \leq |u'(x) + u(x)| + |v'(x) + v(x)| \leq N_2(u) + N_2(v)$. Donc $N_2(u+v) \leq N_2(u) + N_2(v)$. N_2 est une norme sur E.

3a) Pour $u \in E$, on a $u(0) = 0$. Par le théorème fondamental de l'analyse, $u(x) = u(x) - u(0) =$

$\int_0^x u'(t)dt$. $|u(x)| = |\int_0^x u'(t)dt| \leq \int_0^x |u'(t)|dt$. Comme $|u'(t)| \leq \sup_{s\in[0,1]} |u'(s)| = N_1(u)$, on a: $|u(x)| \leq \int_0^x N_1(u)dt = N_1(u) \int_0^x dt = N_1(u) \cdot x$. Comme $x \in [0,1]$, $x \leq 1$. Donc $|u(x)| \leq N_1(u) \cdot x \leq N_1(u)$.

3b) $N_2(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x) + u(x)|$. $|u'(x) + u(x)| \leq |u'(x)| + |u(x)|$. D'après 3a), $|u(x)| \leq N_1(u)$. $|u'(x)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |u'(t)| = N_1(u)$. Donc $|u'(x) + u(x)| \leq N_1(u) + N_1(u) = 2N_1(u)$. Ceci est vrai pour tout $x \in [0,1]$. En prenant le supremum : $N_2(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x) + u(x)| \leq 2N_1(u)$.

4a) Soit $g(x) = e^{-x} \int_0^x (u(t) + u'(t))e^t dt$. Calculons $g'(x)$. Posons $h(x) = \int_0^x (u(t) + u'(t))e^t dt$. $h'(x) = (u(x) + u'(x))e^x$. $g'(x) = (e^{-x})'h(x) + e^{-x}h'(x)$ $g'(x) = -e^{-x}h(x) + e^{-x}(u(x) + u'(x))e^x$ $g'(x) = -e^{-x} \int_0^x (u(t) + u'(t))e^t dt + u(x) + u'(x)$ $g'(x) = -g(x) + u(x) + u'(x)$. Ce n'est pas $u'(x)$. Revoyons l'indication. Calculer la dérivée de $f(x) = e^x u(x)$. $f'(x) = e^x u(x) + e^x u'(x) = e^x(u(x) + u'(x))$. Intégrons de 0 à x: $\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x e^t(u(t) + u'(t))dt$. $f(x) - f(0) = \int_0^x e^t(u(t) + u'(t))dt$. $e^x u(x) - e^0 u(0) = \int_0^x e^t(u(t) + u'(t))dt$. Comme $u \in E$, $u(0) = 0$. $e^x u(x) = \int_0^x e^t(u(t) + u'(t))dt$. En multipliant par e^{-x}: $u(x) = e^{-x} \int_0^x e^t(u(t) + u'(t))dt$.

4b) On veut montrer $|(u(t) + u'(t))e^t| \leq eN_2(u)$ pour $t \in [0,1]$. $N_2(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u(x) + u'(x)|$. Donc pour tout $t \in [0,1]$, $|u(t) + u'(t)| \leq N_2(u)$. Comme $t \in [0,1]$, $e^t \leq e^1 = e$. $|(u(t) + u'(t))e^t| = |u(t) + u'(t)|e^t \leq N_2(u)e^t \leq N_2(u)e = eN_2(u)$.

4c) De 4a), $u(x) = e^{-x} \int_0^x (u(t) + u'(t))e^t dt$. $|u(x)| = |e^{-x} \int_0^x (u(t) + u'(t))e^t dt| = e^{-x}| \int_0^x (u(t) + u'(t))e^t dt|$ car $e^{-x} > 0$. $|u(x)| \leq e^{-x} \int_0^x |(u(t)+u'(t))e^t|dt$. En utilisant 4b): $|u(x)| \leq e^{-x} \int_0^x eN_2(u)dt = e^{-x}eN_2(u) \int_0^x dt = e^{-x}eN_2(u)x$. $|u(x)| \leq xe^{1-x}N_2(u)$. La fonction $f(x) = xe^{1-x}$ sur $[0,1]$. $f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x(-e^{1-x}) = (1-x)e^{1-x}$. $f'(x) \geq 0$ sur $[0,1]$. f est croissante. Le maximum est en $x = 1$. $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$. Donc $|u(x)| \leq N_2(u)$ pour tout $x \in [0,1]$. (L'énoncé demandait $|u(x)| \leq eN_2(u)$, ce qui est aussi vrai car $N_2(u) \leq eN_2(u)$).

4d) On veut $N_1(u) \leq CN_2(u)$. $N_1(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)|$. On sait $u'(x) + u(x) = v(x)$ où $|v(x)| \leq N_2(u)$. $u'(x) = v(x) - u(x)$. $|u'(x)| = |v(x) - u(x)| \leq |v(x)| + |u(x)|$. $|v(x)| \leq N_2(u)$. D'après 4c) (la version améliorée), $|u(x)| \leq N_2(u)$. Donc $|u'(x)| \leq N_2(u) + N_2(u) = 2N_2(u)$. Ceci est vrai pour tout $x \in [0,1]$. En prenant le supremum: $N_1(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)| \leq 2N_2(u)$. Il existe une constante $C = 2$ telle que $N_1(u) \leq CN_2(u)$. (Les normes N_1 et N_2 sont donc équivalentes sur E). $\square$