1 Introduction

L'intégration numérique est essentielle pour approximer les intégrales définies, en particulier lorsque le calcul analytique est impossible ou complexe. Les formules de quadrature offrent une approche pour estimer ces intégrales en utilisant une somme pondérée de valeurs de la fonction en des points spécifiques. Ce chapitre introduit les formules de quadrature composites, qui consistent à appliquer des formules de quadrature élémentaires sur des subdivisions de l'intervalle d'intégration pour améliorer la précision de l'approximation. Nous explorerons les concepts de formules de quadrature élémentaires et composites, et nous détaillerons les méthodes classiques telles que les méthodes des rectangles, des trapèzes, du point milieu et de Simpson.

2 Formules de Quadrature Élémentaires

Definition 2.1 (Formule de Quadrature Élémentaire)**.** On appelle formule de quadrature élémentaire sur l'intervalle $I_e = [-1, 1]$, associée aux points $x_i \in [-1, 1]$ et aux poids w_i, la formule :

$$I_e(f) = \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

qui approche l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ pour une fonction $f \in C^0([-1, 1])$.

Plus généralement, pour un intervalle $[a, b]$, on peut définir une formule de quadrature élémentaire.

Definition 2.2. Étant donné un intervalle $[a, b]$, une formule de quadrature élémentaire $I_e(f)$ est une approximation de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ de la forme :

$$I_e(f) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i f(\xi_i)$$

où $\xi_i \in [a, b]$ sont les points de quadrature et ω_i sont les poids associés.

3 Formules de Quadrature Composites

3.1 Principe de construction

Pour améliorer la précision de l'approximation, on utilise des formules de quadrature composites. L'idée est de subdiviser l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ où $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on applique une formule de quadrature élémentaire. La formule de quadrature composite $I_c(f)$ sur $[a, b]$ est la somme des approximations sur chaque sous-intervalle :

$$I_c(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_e(f|_{[x_i, x_{i+1}]})$$

où $I_e(f|_{[x_i, x_{i+1}]})$ est la formule de quadrature élémentaire appliquée à la fonction f sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Dans le cas d'une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles, on pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

3.2 Visualisation

La visualisation des formules de quadrature composites permet de comprendre géométriquement l'approximation de l'intégrale par des sommes d'aires de rectangles ou de trapèzes.

Considérons une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ de longueur $h = \frac{b-a}{n}$. La formule de quadrature composite s'écrit alors comme la somme des contributions sur chaque intervalle.

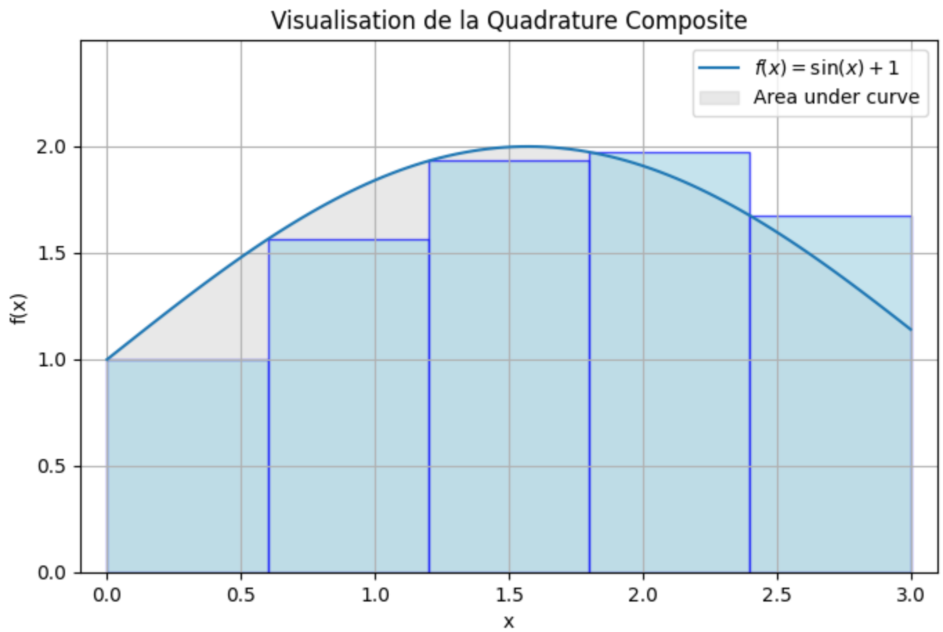

Figure 1: Visualisation d'une formule de quadrature composite (méthode des rectangles gauches).

4 Méthodes de Quadrature Composites Classiques

4.1 Méthode des Rectangles

4.1.1 Définition

La méthode des rectangles approche l'intégrale sur chaque sous-intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ par l'aire du rectangle de hauteur $f(x_j)$ (rectangle gauche) ou $f(x_{j+1})$ (rectangle droit), ou $f(\frac{x_j+x_{j+1}}{2})$ (point milieu). Pour la méthode des rectangles gauches élémentaire sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, on a:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx (\beta - \alpha) f(\alpha)$$

La formule de quadrature composite des rectangles gauches sur $[a, b]$ avec n intervalles est donnée par:

$$I_c(f) = h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) = h \sum_{j=0}^{n-1} f(a + jh)$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_j = a + jh$.

4.1.2 Erreur et Degré d'exactitude

L'erreur de la méthode des rectangles est d'ordre $O(h)$. Pour une fonction $f \in C^1([a,b])$, l'erreur $E_c(f) = \int_a^b f(t)dt - I_c(f)$ de la méthode des rectangles composite est majorée par :

$$|E_c(f)| \leq h \|f'\|_{\infty,[a,b]} (b-a) = \frac{(b-a)^2}{n} \|f'\|_{\infty,[a,b]}$$

Le degré d'exactitude de la méthode des rectangles élémentaire est 0, car elle est exacte pour les polynômes constants (de degré 0).

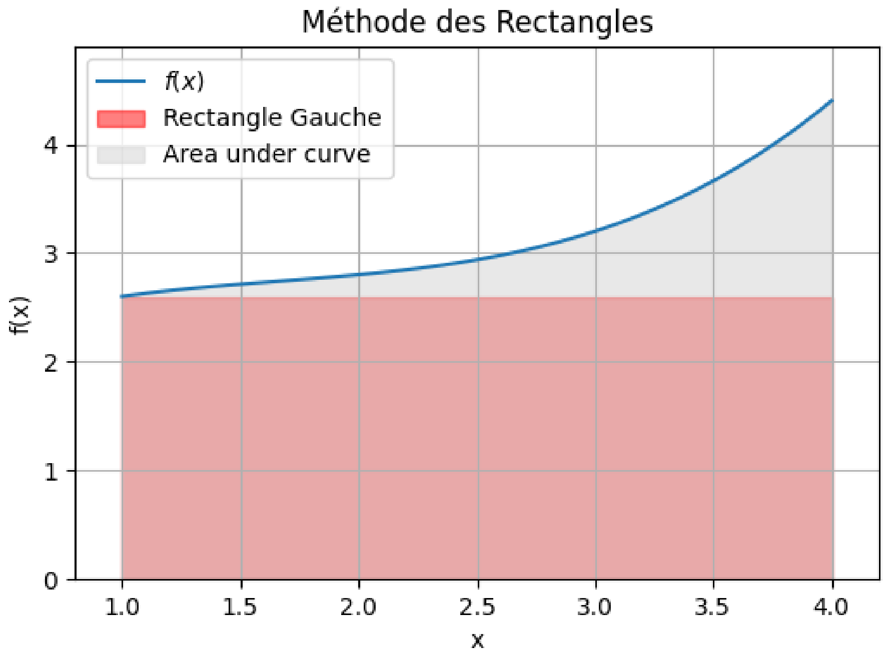

Figure 2: Méthode des Rectangles (gauche).

4.2 Méthode des Trapèzes

4.2.1 Définition

La méthode des trapèzes approche l'intégrale sur chaque sous-intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ par l'aire du trapèze formé par les points $(x_j, 0), (x_{j+1}, 0), (x_{j+1}, f(x_{j+1})), (x_j, f(x_j))$. Pour la méthode des trapèzes élémentaire sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, on a:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx \frac{(\beta - \alpha)}{2}[f(\alpha) + f(\beta)]$$

La formule de quadrature composite des trapèzes sur $[a, b]$ avec n intervalles est donnée par:

$$I_c(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)] = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh) + f(b)]$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_j = a + jh$.

4.2.2 Erreur et Degré d'exactitude

L'erreur de la méthode des trapèzes est d'ordre $O(h^2)$. Pour une fonction $f \in C^2([a, b])$, l'erreur $E_c(f) = \int_a^b f(t)dt - I_c(f)$ de la méthode des trapèzes composite est majorée par :

$$|E_c(f)| \leq \frac{h^2}{12}\|f''\|_{\infty,[a,b]}(b - a) = \frac{(b - a)^3}{12n^2}\|f''\|_{\infty,[a,b]}$$

Le degré d'exactitude de la méthode des trapèzes élémentaire est 1, car elle est exacte pour les polynômes de degré au plus 1.

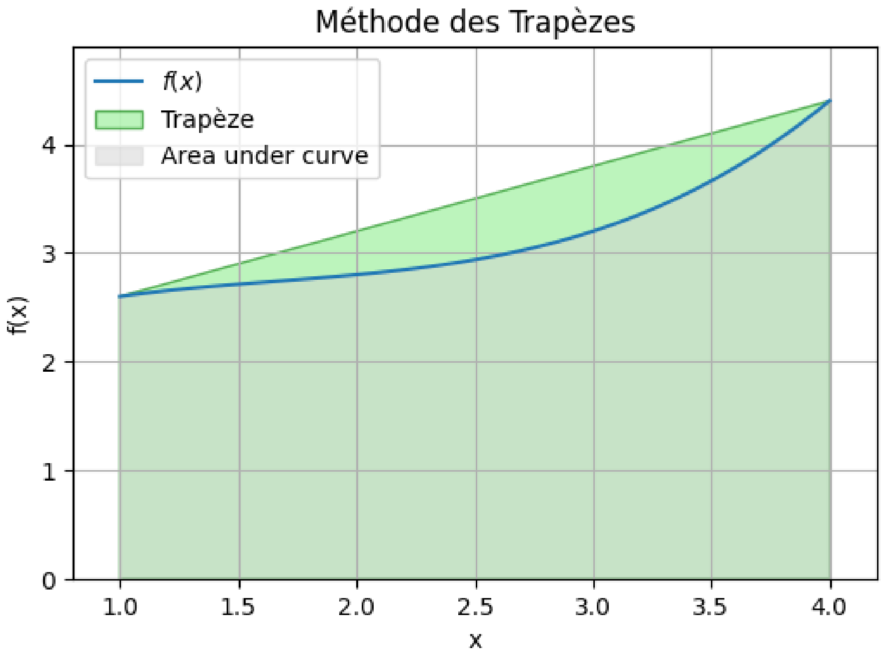

Figure 3: Méthode des Trapèzes.

4.3 Méthode du Point Milieu

4.3.1 Définition

La méthode du point milieu approche l'intégrale sur chaque sous-intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ par l'aire du rectangle de hauteur $f(\frac{x_j+x_{j+1}}{2})$ au milieu de l'intervalle. Pour la méthode du point milieu élémentaire sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, on a:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

La formule de quadrature composite du point milieu sur $[a, b]$ avec n intervalles est donnée par:

$$I_c(f) = h \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) = h \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + (j + \frac{1}{2})h\right)$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_j = a + jh$.

4.3.2 Exercice : Degré d'exactitude

Déterminons le degré d'exactitude de la formule du point milieu élémentaire sur $[-1, 1]$. On teste pour les polynômes $f(x) = 1, x, x^2, \ldots$.

- Pour $f(x) = 1$:

$$\int_{-1}^1 1dx = [x]_{-1}^1 = 2$$

$$I_e(f) = (1 - (-1)) f\left(\frac{-1+1}{2}\right) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$$

Donc, $I_e(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx$.

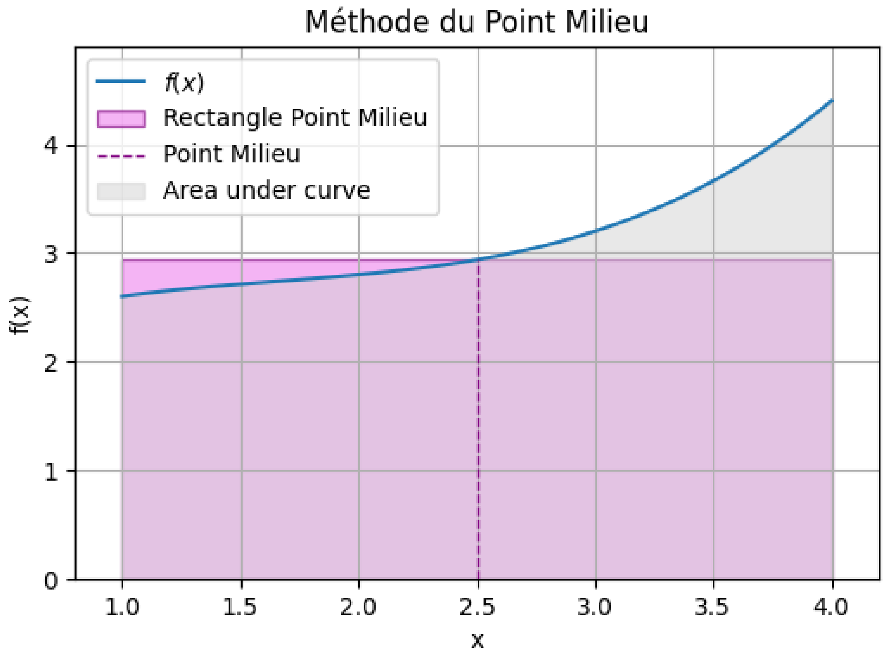

Figure 4: Méthode du Point Milieu.

- Pour $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$I_e(f) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

Donc, $I_e(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

- Pour $f(x) = x^2$:

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$I_e(f) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 0^2 = 0$$

Donc, $I_e(f) \neq \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

- Pour $f(x) = x^3$:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$I_e(f) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 0^3 = 0$$

Donc, $I_e(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

- Pour $f(x) = x^4$:

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$I_e(f) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 0^4 = 0$$

Donc, $I_e(f) \neq \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

La formule élémentaire du point milieu est exacte pour les polynômes de degré au moins 1. En fait, elle est exacte pour les polynômes de degré au plus 1. Testons pour un polynôme de degré 2 pour être sûr. On a vu que pour $f(x) = x^2$, la formule n'est pas exacte. Testons pour $f(x) = s^2$:

$$\int_{-1}^{1} s^2 ds = \frac{2}{3}$$

$$2 \cdot f(0) = 2 \cdot 0^2 = 0 \neq \frac{2}{3}$$

Donc la formule élémentaire n'est pas exacte pour les polynômes de degré 2.

Conclusion : La formule du point milieu élémentaire est exacte pour les polynômes de degré 1. En fait, par un calcul plus précis et en considérant l'erreur, on montre que la formule du point milieu élémentaire est exacte pour les polynômes de degré au plus 1. On dit que le degré d'exactitude est 1. En réalité, le degré d'exactitude de la méthode du point milieu élémentaire est en fait 1, car elle est exacte pour les polynômes de degré au plus 1. La formule est d'ordre 2, donc l'erreur est en $O(h^2)$ pour les fonctions suffisamment régulières.

En réalité, la formule du point milieu élémentaire est exacte pour les polynômes de degré au plus 1. La formule du point milieu élémentaire est en fait exacte pour les polynômes de degré au plus 1. Donc le degré d'exactitude est 1. On dit que la formule du point milieu est d'ordre 2 car l'erreur est en $O(h^2)$.

4.4 Méthode de Simpson

4.4.1 Définition

La méthode de Simpson approche l'intégrale sur chaque intervalle double $[x_j, x_{j+2}]$ en utilisant un polynôme de degré 2 qui interpole les points $(x_j, f(x_j)), (x_{j+1}, f(x_{j+1})), (x_{j+2}, f(x_{j+2}))$. Sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, en posant $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, la formule de Simpson élémentaire est:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx \frac{(\beta-\alpha)}{6}\left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)\right]$$

La formule de quadrature composite de Simpson sur $[a, b]$ avec n intervalles (n pair) est donnée par:

$$I_c(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + f(x_n)\right]$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_j = a + jh$.

4.4.2 Erreur et Degré d'exactitude

L'erreur de la méthode de Simpson est d'ordre $O(h^4)$. Pour une fonction $f \in C^4([a, b])$, l'erreur $E_c(f) = \int_a^b f(t)dt - I_c(f)$ de la méthode de Simpson composite est majorée par :

$$|E_c(f)| \leq \frac{h^4}{2880}\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}(b-a) = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}$$

Le degré d'exactitude de la méthode de Simpson élémentaire est 3, car elle est exacte pour les polynômes de degré au plus 3.

5 Comparaison des Méthodes

Proposition 5.1. Si $f \in C^2([a, b])$, l'erreur de quadrature de la méthode composite associée à une

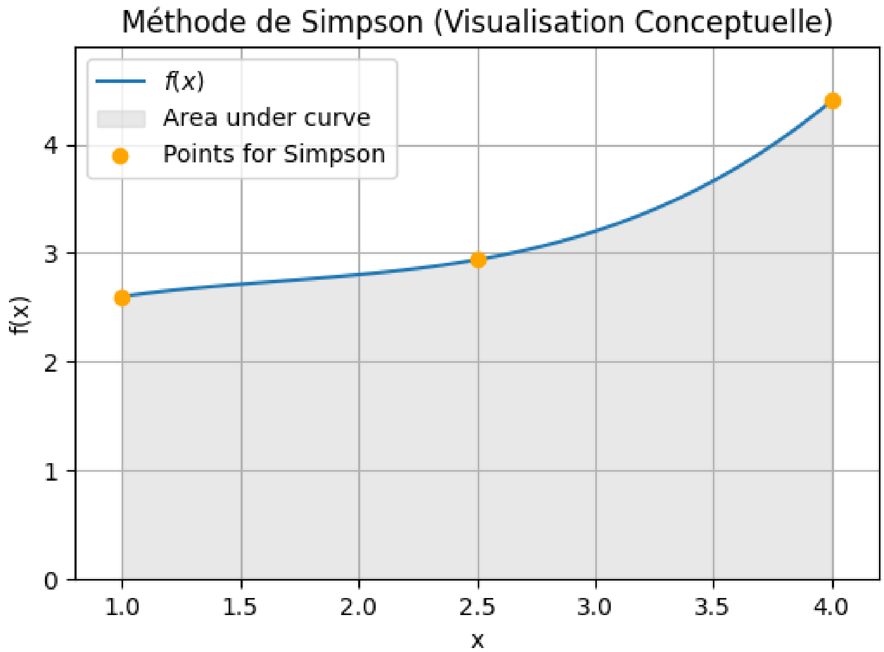

Figure 5: Méthode de Simpson (visualisation conceptuelle montrant l'aire sous la courbe).

subdivision uniforme de pas h est majorée par :

$$|E_c(f)| = |\int_a^b f(t)dt - I_c(f)| \leq h^2 \frac{(b-a)}{12} \|f''\|_{\infty,[a,b]}$$

pour la méthode des trapèzes.

Proposition 5.2. Si $f \in C^4([a,b])$, l'erreur de quadrature de la méthode composite de Simpson associée à une subdivision uniforme de pas h est majorée par :

$$|E_c(f)| = |\int_a^b f(t)dt - I_c(f)| \leq h^4 \frac{(b-a)}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}$$

Méthode	Formule élémentaire (sur $[\alpha, \beta]$)	Ordre de convergence	Degré d'exactitude
Rectangles (gauche)	$(\beta - \alpha)f(\alpha)$	$O(h)$	0
Trapèzes	$\frac{(\beta-\alpha)}{2}[f(\alpha) + f(\beta)]$	$O(h^2)$	1
Point Milieu	$(\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$	$O(h^2)$	1
Simpson	$\frac{(\beta-\alpha)}{6}\left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)\right]$	$O(h^4)$	3

Table 1: Comparaison des méthodes de quadrature composites classiques.

6 Conclusion

Les formules de quadrature composites offrent des outils efficaces pour l'approximation numérique d'intégrales définies. Le choix de la méthode dépend de la régularité de la fonction à intégrer et de la précision souhaitée.

La méthode de Simpson, avec son ordre de convergence élevé, est généralement préférée pour les fonctions régulières lorsque la précision est primordiale. Cependant, les méthodes des rectangles et des trapèzes peuvent être suffisantes dans des contextes où une précision moindre est acceptable ou pour des fonctions moins régulières.

7 Exercices

1. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2 dx$ en utilisant les méthodes des rectangles gauches, des trapèzes et du point milieu avec $n = 4$ sous-intervalles. Comparer les résultats avec la valeur exacte de l'intégrale.

2. Estimer l'erreur pour chaque méthode utilisée dans l'exercice précédent en utilisant les bornes d'erreur théoriques.

3. Déterminer le nombre de sous-intervalles nécessaires pour que la méthode des trapèzes approche l'intégrale $\int_0^2 e^x dx$ avec une précision de 10^{-3}.

4. Calculer le degré d'exactitude de la formule de quadrature élémentaire des trapèzes sur $[-1, 1]$.