1 Compacité

1.1 Définitions clés

Definition 1.1 (Recouvrement ouvert)**.** Soit $F \subset E$. Un recouvrement ouvert de F est une collection $(U_i)_{i\in I}$ où U_i sont des ouverts de E et $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Definition 1.2 (Ensemble compact)**.** $K \subset E$ est compact si de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Theorem 1.3 (Caractérisation séquentielle de la compacité)**.** $K \subset E$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite qui converge vers un élément de K.

1.2 Exemples et contre-exemples

Example 1.4. $F = \mathbb{R}^2$ n'est pas compact. Considérons le recouvrement ouvert $U_x = B(x, 1/2)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^2} U_x$. Cependant, on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.

Example 1.5. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 0 \le -\frac{1}{x} \le y \le \frac{1}{x}\}$. F n'est pas compact. Considérons la suite $u_n = (n, 0) \in F$. Toute sous-suite de (u_n) est non bornée, donc sans sous-suite convergente dans F.

2 Propriétés des ensembles compacts

Proposition 2.1. Tout compact $K \subset E$ est borné et fermé.

Proposition 2.2. Si K est compact et F est fermé, alors $K \cap F$ est compact.

Proposition 2.3. Si K est compact, toute suite de Cauchy dans K converge dans K.

2.1 Preuves des propriétés

Preuve (Preuve qu'un compact est borné)**.** Soit K compact. Pour $x \in K$, considérons $U_x = B(x, 1)$. Alors $(U_x)_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, il existe un sous-recouvrement fini $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Soit $R = \max_{1\le i\le n} \|x_i\| + 1$. Alors pour tout $x \in K$, il existe i tel que $x \in U_{x_i} = B(x_i, 1)$, donc $d(x, x_i) < 1$. Par l'inégalité triangulaire, $\|x\| \le \|x - x_i\| + \|x_i\| < 1 + \|x_i\| \le R$. Ainsi, $K \subset B(0, R)$, et K est borné. □

Preuve (Preuve qu'un compact est fermé)**.** Soit K compact et montrons que K est fermé. Montrons que $E \setminus K$ est ouvert. Soit $x \notin K$. Pour tout $y \in K$, il existe $r_y > 0$ tel que $B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset$. Considérons le recouvrement ouvert de K donné par $(B(y, r_y))_{y\in K}$. Il existe un sous-recouvrement fini $B(y_1, r_{y_1}), \ldots, B(y_n, r_{y_n})$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, r_{y_i})$. Soit $r = \min_{1\le i\le n} r_{y_i} > 0$. Considérons $B(x, r)$. Pour tout $z \in B(x, r)$, et pour tout i, $B(z, r) \cap B(y_i, r_{y_i}) = \emptyset$. Donc $B(x, r) \cap K = \emptyset$, et $B(x, r) \subset E \setminus K$. Ainsi $E \setminus K$ est ouvert, et K est fermé. □

Preuve (Preuve que K compact et F fermé $\implies$ K ∩ F compact)**.** Soit K compact et F fermé. Considérons un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $K \cap F$. Alors $(U_i)_{i\in I} \cup (E \setminus F)$ est un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, il existe un sous-recouvrement fini $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, E \setminus F$ tel que $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup (E \setminus F)$. Alors $K \cap F \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup (E \setminus F)) \cap F = (U_{i_1} \cap F) \cup \dots \cup (U_{i_n} \cap F) \cup ((E \setminus F) \cap F) = (U_{i_1} \cap F) \cup \dots \cup (U_{i_n} \cap F) \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Ainsi, $K \cap F$ est compact. □

Preuve (Preuve que si K est compact, toute suite de Cauchy dans K converge dans K)**.** Soit (u_n) une suite de Cauchy dans K compact. Puisque K est compact, il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers une limite $l \in K$. Puisque (u_n) est de Cauchy et qu'une sous-suite converge vers l, la suite (u_n) converge vers l. Donc toute suite de Cauchy dans K converge dans K. □

Preuve (Preuve par contradiction qu'un compact est borné)**.** Supposons que K n'est pas borné. On fixe $a \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme K n'est pas borné, il existe $x_n \in K$ tel que $d(a, x_n) > n$. La suite (x_n) n'est pas bornée (car $d(a, x_n) \to +\infty$), donc (x_n) ne possède pas de sous-suite convergente. Ceci contredit le fait que K est compact (par caractérisation séquentielle). Donc K est borné. □

3 Compacts de $\mathbb{R}^n$

3.1 Théorème de Borel-Lebesgue

Theorem 3.1 (Théorème de Borel-Lebesgue)**.** Dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle, $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si K est fermé et borné.

3.2 Compacité des boules fermées

Proposition 3.2. Dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle, les boules fermées $B_f(x_0, r)$ sont compactes.

3.3 Preuve de la compacité des boules fermées

Preuve. Pour $n = 1$, montrons que $[a, b]$ est compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$. Soit $E = \{x \in [a, b] \mid [a, x]$ est recouvert par un nombre fini de $U_i\}$. E est non vide car $a \in E$. Montrons que E est borné. Soit $c = \sup E$. Supposons que $c < b$. Puisque $c \in [a, b]$, il existe $U_{i_0} \in \mathcal{U}$ tel que $c \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $]c - \delta, c + \delta[\subset U_{i_0}$. Puisque $c = \sup E$, il existe $x \in E$ tel que $c - \delta < x \leq c$. Par définition de E, $[a, x]$ est recouvert par un nombre fini de U_i. Donc $[a, x] \cup [x, c + \delta/2] = [a, c + \delta/2]$ est recouvert par un nombre fini de U_i (en ajoutant U_{i_0}). Donc $c + \delta/2 \in E$, ce qui contredit $c = \sup E$. Donc $c = b$. Montrons que $b \in E$. On choisit U_{i_1} tel que $b \in U_{i_1}$ et $\delta > 0$ tel que $]b - \delta, b + \delta[\subset U_{i_1}$. On choisit $x \in]b - \delta, b] \cap E$. Alors $[a, x]$ est recouvert par un nombre fini de U_i. Donc $[a, x] \cup [x, b] = [a, b]$ est recouvert par un nombre fini de U_i (en ajoutant U_{i_1}). Donc $[a, b]$ est compact. □

4 Limites et continuité

4.1 Définition des limites dans les espaces métriques

Definition 4.1 (Limite)**.** Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, $x_0 \in E_1$, $l \in E_2$ et $F : E_1 \to$

E_2 une application. On dit que $\lim_{x \to x_0} F(x) = l$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E_1$ tel que $d_1(x, x_0) < \delta$, on a $d_2(F(x), l) < \epsilon$.

4.2 Définition de la continuité

Definition 4.2 (Continuité en un point)**.** On dit que F est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Definition 4.3 (Continuité sur un ensemble)**.** On dit que F est continue (sur E_1) si F est continue en tout point $x_0 \in E_1$.

Proposition 4.4. F est continue sur E_1 si et seulement si elle est continue en tout point de E_1.

5 Propriétés équivalentes de la continuité

Proposition 5.1 (Propriétés équivalentes de la continuité)**.** Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $F : E_1 \to E_2$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F est continue.
2. Pour tout ouvert $U \subset E_2$, $F^{-1}(U)$ est ouvert dans E_1.
3. Pour tout fermé $F \subset E_2$, $F^{-1}(F)$ est fermé dans E_1.
4. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_1 avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E_1$, on a $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$.

5.1 Preuves des équivalences

Preuve.

1. (1) $\implies$ (2) : Soit $U \subset E_2$ ouvert et $x_0 \in F^{-1}(U)$. Alors $y_0 = F(x_0) \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(y_0, \epsilon) \subset U$. Comme F est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que si $d_1(x, x_0) < \delta$, alors $d_2(F(x), y_0) < \epsilon$. Donc si $x \in B(x_0, \delta)$, alors $F(x) \in B(y_0, \epsilon) \subset U$, donc $x \in F^{-1}(U)$. Ainsi $B(x_0, \delta) \subset F^{-1}(U)$, et $F^{-1}(U)$ est ouvert.
2. (2) $\implies$ (3) : Par passage aux complémentaires.
3. (3) $\implies$ (4) : Soit (x_n) une suite dans E_1 avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E_1$. Supposons que $(F(x_n))$ ne converge pas vers $F(x)$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p(n) > n$ avec $d_2(F(x_{p(n)}), F(x)) \geq \epsilon_0$. Soit $y_n = x_{p(n)}$ et $U = E_2 \setminus B(F(x), \epsilon_0)$. U est fermé, $F(y_n) \in U$, donc $y_n \in F^{-1}(U)$, qui est fermé par propriété (3). Comme (y_n) est une sous-suite de (x_n) qui converge vers x, on a $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Puisque $F^{-1}(U)$ est fermé, on a $x \in F^{-1}(U)$. Donc $F(x) \in U = E_2 \setminus B(F(x), \epsilon_0)$, ce qui signifie $d_2(F(x), F(x)) \geq \epsilon_0$, ce qui est faux.
4. (4) $\implies$ (1) : Supposons que F n'est pas continue en $x_0 \in E_1$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x_\delta \in E_1$ avec $d_1(x_\delta, x_0) < \delta$ et $d_2(F(x_\delta), F(x_0)) \geq \epsilon_0$. En prenant $\delta = 1/n$, on obtient une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $d_2(F(x_n), F(x_0)) \geq \epsilon_0$ pour tout n. Ceci contredit (4).

$\square$

5.2 Exemple de fonction continue

Example 5.2. Considérons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x \sin(y) - e^x$. Les fonctions coordonnées x et y, et les fonctions $\sin(y)$ et e^x sont continues. Par composition et opérations algébriques, $F(x,y) = x\sin(y) - e^x$ est continue.

6 Fonctions de plusieurs variables

6.1 Cadre $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Considérons des fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Le cadre est $\mathbb{R}^n$ pour la variable et $\mathbb{R}^p$ pour la valeur.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ le domaine de définition. On considère des applications $F : D \to \mathbb{R}^p$.

6.2 Continuité et composantes

Proposition 6.1. $F : D \to \mathbb{R}^p$ est continue si et seulement si chaque composante $F_i : D \to \mathbb{R}$ est continue, où $F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_p(x_1, \dots, x_n))$.

6.3 Fonctions coordonnées

Les fonctions coordonnées (x_i) sont continues. Ce sont les F_i pour $F(x) = x$ (l'identité).