1 Polynômes de Tchebychev

1.1 Définition

On définit les polynômes de Tchebychev par récurrence :

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1$

Les premiers polynômes de Tchebychev sont donc :

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$
- $T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$

1.2 Expression trigonométrique

On a aussi l'expression trigonométrique suivante pour les polynômes de Tchebychev :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1]$$

On vérifie pour $n = 0, 1, 2$:

- $T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = \cos(0) = 1$
- $T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = x$
- $T_2(x) = \cos(2 \arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$

Pour vérifier la relation de récurrence, posons $\theta = \arccos(x)$, donc $x = \cos(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}
2xT_n(x) - T_{n-1}(x) &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) - \cos((n-1)\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta) \\
&= T_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule trigonométrique : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

1.3 Propriétés

1. **Racines de** $T_n(x)$: $T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \arccos(x)) = 0$. Posons $x = \cos(\theta)$. Alors $\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$. Pour avoir n racines distinctes dans $[-1, 1]$, on prend $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$
sont les n racines de $T_n(x)$ dans $[-1, 1]$.

2. $|T_n(x)| \leq 1$ pour $x \in [-1, 1]$. En effet, pour $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, et $|\cos(\cdot)| \leq 1$. De plus, $T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. Donc $\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$ atteint en $x'_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$, $k = 0, \ldots, n$.

3. **Orthogonalité**: Les polynômes de Tchebychev sont orthogonaux pour le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

En effet, posons $x = \cos(\theta)$, $dx = -\sin(\theta)d\theta$, $\sqrt{1-x^2} = \sin(\theta)$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{\sin(\theta)}(-\sin(\theta))d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

On sait que $\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = 0$ si $n \neq m$, et $\int_0^\pi \cos^2(n\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}$ si $n \neq 0$, et $\int_0^\pi \cos^2(0)d\theta = \pi$. Donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

1.4 Application : Polynôme de meilleure approximation uniforme

Proposition 1.1. Soit P un polynôme de degré n avec coefficient dominant égal à 1, alors

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $P(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$. On dit que $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ est le polynôme de Tchebychev normalisé.

Soient $x_0, \ldots, x_n$ des points 2 à 2 distincts de $[-1, 1]$. On a :

$$\max_{x\in[-1,1]} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \geq \max_{x\in[-1,1]} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i^*|$$

avec x_i^* les racines de $T_{n+1}(x)$ translatées et dilatées sur $[-1, 1]$ (racines de Tchebychev).

$$x_k^* = \cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 0, \ldots, n$$

sont les racines de T_{n+1}.

1.5 Application à l'interpolation polynomiale

Soient $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ points 2 à 2 distincts, f une fonction $n+1$ fois continûment dérivable. Soit $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_i. Alors l'erreur d'interpolation est donnée par :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi_x \in [\min(x, x_i), \max(x, x_i)]$$

Donc

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{\xi\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

Pour minimiser l'erreur d'interpolation, il faut minimiser $\max_{x\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$. D'après le corollaire précédent, les points de Tchebychev minimisent ce terme (à translation et dilatation près pour adapter l'intervalle $[-1, 1]$ à $[a, b]$).

2 Intégration numérique

2.1 Motivation et concept général

On cherche à approcher numériquement l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

On approche $I(f)$ par une somme pondérée de valeurs de f en certains points $x_i \in [a, b]$:

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

où x_i sont les **nœuds** de quadrature et ω_i sont les **poids** de quadrature. On cherche à construire des formules de quadrature $Q_n(f)$ qui soient exactes pour les polynômes de degré le plus élevé possible.

Definition 2.1. On dit qu'une formule de quadrature $Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$ est de degré de précision r si elle est exacte pour tous les polynômes de degré $\leq r$, et n'est pas exacte pour au moins un polynôme de degré $r+1$. C'est-à-dire :

- $\forall P \in \mathbb{P}_r, \quad Q_n(P) = I(P) = \int_a^b P(x)dx$
- $\exists P \in \mathbb{P}_{r+1}, \quad Q_n(P) \neq I(P) = \int_a^b P(x)dx$

2.2 Construction des formules de quadrature

Idée : utiliser l'interpolation polynomiale. Soient $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ points distincts dans $[a, b]$. Soit $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_i. On approche $I(f)$ par $I(P_n) = \int_a^b P_n(x)dx$. On sait que $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ où $L_i(x)$ sont les polynômes de Lagrange :

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Donc

$$Q_n(f) = I(P_n) = \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx$$

On pose $\omega_i = \int_a^b L_i(x)dx$. Alors $Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$ est une formule de quadrature.

Proposition 2.2. La formule de quadrature $Q_n(f)$ construite à partir de l'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_n$ est de degré de précision au moins n.

Preuve. Si $P \in \mathbb{P}_n$, alors $P_n(x) = P(x)$ (le polynôme d'interpolation d'un polynôme de degré $\leq n$ est lui-même). Donc $Q_n(P) = \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b P(x)dx = I(P)$. Donc Q_n est exacte pour les polynômes de degré $\leq n$. $\square$

2.3 Exemples

Example 2.3 (Formule du point milieu)**.** $n = 0$, un seul point $x_0 = \frac{a+b}{2}$ (milieu de l'intervalle). $L_0(x) = 1$. $\omega_0 = \int_a^b L_0(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a$. $Q_0(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Degré de précision : 1. Exacte pour les polynômes de degré ≤ 1. Exemple : $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$. $Q_0(x) = (1-0) \times \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Exact. $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$.

$Q_0(x^2) = (1-0) \times \left(\frac{0+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$. Non exacte pour degré 2.

Example 2.4 (Formule des trapèzes). $n = 1$, deux points $x_0 = a$, $x_1 = b$. $L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-b}{a-b}$, $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-a}{b-a}$. $\omega_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{1}{a-b}\left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_a^b = \frac{1}{a-b}\left[\left(\frac{b^2}{2} - b^2\right) - \left(\frac{a^2}{2} - ba\right)\right] = \frac{1}{a-b}\left[-\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + ba\right] = \frac{b-a}{2}$. $\omega_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\left(\frac{b^2}{2} - ab\right) - \left(\frac{a^2}{2} - a^2\right)\right] = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\right] = \frac{b-a}{2}$. $Q_1(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$. Degré de précision : 1. Exacte pour les polynômes de degré ≤ 1. Exemple : $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. $Q_1(x^2) = \frac{1-0}{2}[0^2 + 1^2] = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$. Non exacte pour degré 2.

2.4 Estimation de l'erreur

Soit $Q_n(f) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$ la formule de quadrature construite par interpolation de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_n$. On sait que l'erreur d'interpolation est :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Donc l'erreur de quadrature est :

$$\begin{aligned} E_n(f) = I(f) - Q_n(f) &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]dx \\ &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i)dx \end{aligned}$$

Si on suppose que $f^{(n+1)}$ est continue, on peut utiliser la formule de la moyenne pour l'intégrale :

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i)dx, \quad \xi \in [a, b]$$

où ξ est une valeur intermédiaire dans $[a, b]$. En pratique, on borne l'erreur :

$$|E_n(f)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n |x - x_i|dx$$

Remark 2.5. Pour la formule du point milieu sur $[-1, 1]$, $x_0 = 0$, $n = 0$. $Q_0(f) = 2f(0)$. $\int_{-1}^1 (x - x_0)dx = \int_{-1}^1 xdx = 0$. Donc la formule d'erreur simple ne s'applique pas directement car $\int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i)dx = 0$ dans certains cas (comme ici). Il faut une formule d'erreur plus précise.