CHAPTER 1

CM1

1.1 Analyse

1.2 Introduction aux espaces vectoriels $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$

1.2.1 Définitions et propriétés fondamentales

Nous allons définir les espaces vectoriels $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$.

Definition 1.1. L'espace $\mathbb{R}^d$, pour $d \geq 1$, est défini comme l'ensemble des d-uplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^d := \{X = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

où $x_1, \ldots, x_d$ sont les coordonnées cartésiennes du point X.

Pour $d = 2$, on note parfois les points de $\mathbb{R}^2$ par (x, y), et pour $d = 3$, par (x, y, z).

Definition 1.2. L'espace $\mathbb{C}^d$, pour $d \geq 1$, est défini de manière analogue comme l'ensemble des d-uplets de nombres complexes :

$$\mathbb{C}^d := \{X = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

où $x_1, \ldots, x_d$ sont des nombres complexes.

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut être écrit sous la forme $z = a + bi$, où $a = Re(z)$ est la partie réelle de z et $b = Im(z)$ est la partie imaginaire de z. On peut écrire pour $X \in \mathbb{C}^d$,

$$X = Re(X) + iIm(X)$$

où $Re(X) = (Re(x_1), \ldots, Re(x_d)) \in \mathbb{R}^d$ et $Im(X) = (Im(x_1), \ldots, Im(x_d)) \in \mathbb{R}^d$.

$\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ sont des espaces vectoriels. L'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire sont définies de la manière suivante dans $\mathbb{R}^d$ (et de même dans $\mathbb{C}^d$) : Pour $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $Y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- **Addition vectorielle** : $X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)$
- **Multiplication par un scalaire** : $\lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_d)$
- **Vecteur nul** : $\overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$

Pour $\mathbb{C}^d$, le corps des scalaires est $\mathbb{C}$.

1.2.2 Coordonnées polaires et sphériques

Dans $\mathbb{R}^2$, on peut utiliser les coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ définies par :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser les coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi[$ définies par :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.2.3 Représentation graphique de $\mathbb{R}^3$

On peut représenter un point $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques. Dans la figure ci-dessous, θ est l'angle entre l'axe z et le vecteur OX, et φ est l'angle entre l'axe x et la projection de OX sur le plan (xOy).

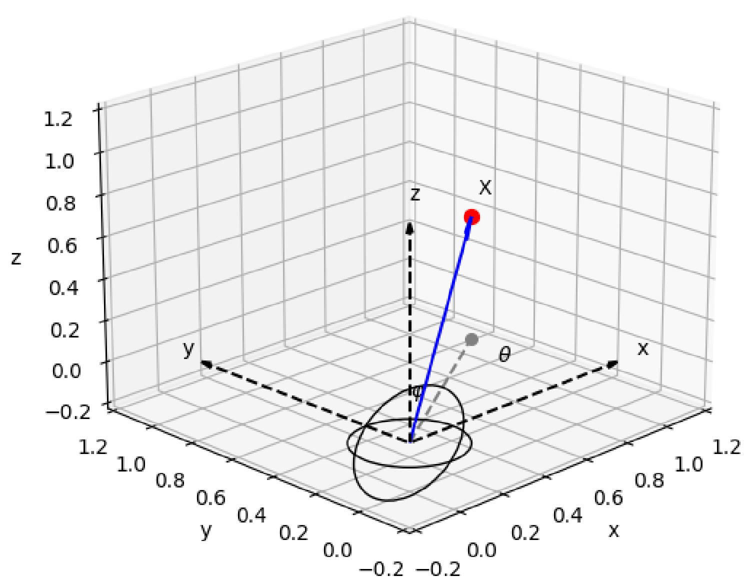

Figure 1.1: Représentation des coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

1.2.4 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Definition 1.3. Le produit scalaire de deux vecteurs $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $Y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ est défini par :

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

1.2.5 Propriétés du produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ possède les propriétés suivantes :

1. **Bilinéarité** : Pour tous vecteurs $X, Y, Z \in \mathbb{R}^d$ et scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (X+Y) \cdot Z &= X \cdot Z + Y \cdot Z \\ Z \cdot (X+Y) &= Z \cdot X + Z \cdot Y \\ (\lambda X) \cdot Y &= X \cdot (\lambda Y) = \lambda (X \cdot Y) \end{aligned}$$

2. **Symétrie** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$,

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$,

$$X \cdot X \geq 0 \quad \text{et} \quad (X \cdot X = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|X \cdot Y| \leq \sqrt{(X \cdot X)}\sqrt{(Y \cdot Y)}$$

Preuve. Fixons $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et considérons la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$P(t) = (X + tY) \cdot (X + tY)$$

En développant, on obtient

$$P(t) = t^2 (Y \cdot Y) + 2t (X \cdot Y) + (X \cdot X)$$

Comme $P(t) = ||X + tY||^2 \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, le polynôme $P(t)$ de degré 2 est toujours positif ou nul. Son discriminant Δ est donc négatif ou nul :

$$\Delta = (2(X \cdot Y))^2 - 4(Y \cdot Y)(X \cdot X) = 4(X \cdot Y)^2 - 4(X \cdot X)(Y \cdot Y) \leq 0$$

D'où $(X \cdot Y)^2 \leq (X \cdot X)(Y \cdot Y)$, et en prenant la racine carrée, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

1.3 Normes

1.3.1 Norme associée au produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

Definition 1.5. La norme euclidienne associée au produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ est définie par :

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$$

pour $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Cette norme représente la longueur du vecteur X. Elle est parfois notée $\|X\|_2$.

1.3.2 Propriétés des normes

Les normes possèdent les propriétés suivantes :

1. **Homogénéité** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$ et scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$$
2. **Inégalité triangulaire** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^d$,
$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$
3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$,
$$\|X\| \geq 0 \quad \text{et} \quad (\|X\| = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

1.3.3 Définition générale d'une norme

Definition 1.6. Une norme sur $\mathbb{R}^d$ est une application $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$
2. $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3. $N(X) \geq 0$ et $(N(X) = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$

1.3.4 Exemples de normes sur $\mathbb{R}^d$

Outre la norme euclidienne $\|X\| = \|X\|_2$, on peut définir d'autres normes sur $\mathbb{R}^d$:

1. **Norme 1** : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$
2. **Norme infini** : $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

1.4 Espace $\mathbb{C}^d$

1.4.1 Définition et produit scalaire hermitien

Nous rappelons la définition de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^d$ sur $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}^d = \{X = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

Definition 1.7. Le produit scalaire hermitien de deux vecteurs $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ et $Y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{C}^d$ est défini par :

$$(X|Y) = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$$

Notez la conjugaison complexe sur les composantes de Y. Certains auteurs utilisent la conjugaison sur les composantes de X.

1.4.2 Propriétés du produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$

Le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$ possède les propriétés suivantes :

1. **Sesquilinéarité** : Pour tous vecteurs $X, Y, Z \in \mathbb{C}^d$ et scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(X+Y|Z) &= (X|Z) + (Y|Z)\\ (\lambda X|Z) &= \lambda(X|Z)\\ (Z|X+Y) &= (Z|X) + (Z|Y)\\ (Z|\lambda Y) &= \overline{\lambda}(Z|Y)\end{aligned}$$

   On dit que le produit scalaire est linéaire par rapport au premier argument (à gauche) et antilinéaire par rapport au deuxième argument (à droite). Certains auteurs choisissent la convention inverse.

2. **Hermiticité (ou symétrie hermitienne)** : Pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{C}^d$,

$$(X|Y) = \overline{(Y|X)}$$

3. **Positivité et caractère défini** : Pour tout vecteur $X \in \mathbb{C}^d$,

$$(X|X) = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad ((X|X) = 0 \iff X = \overrightarrow{0})$$

1.5 Norme Hilbertienne dans $\mathbb{C}^d$

Definition 1.8. La norme Hilbertienne (ou norme euclidienne) associée au produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^d$ est définie par :

$$\|X\| = \sqrt{(X|X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}$$

pour $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$.

On a $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 = \|Re(X)\|^2 + \|Im(X)\|^2$.

Lemma 1.9. Pour tout $X \in \mathbb{C}^d$, on a :

$$\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire hermitien (qui est aussi valable dans $\mathbb{C}^d$), on a

$$|(X|Y)| \leq \sqrt{(X|X)}\sqrt{(Y|Y)} = \|X\|\|Y\|$$

Si $\|Y\| \leq 1$, alors $|(X|Y)| \leq \|X\|$. Donc $\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)| \leq \|X\|$.

Inversement, considérons $X \neq \overrightarrow{0}$ (si $X = \overrightarrow{0}$, l'égalité est triviale). Posons $Y = \frac{X}{\|X\|}$. Alors $\|Y\| = 1$ et

$$(X|Y) = \left(X\middle|\frac{X}{\|X\|}\right) = \frac{1}{\|X\|}(X|X) = \frac{\|X\|^2}{\|X\|} = \|X\|$$

Donc, il existe Y avec $\|Y\| \leq 1$ tel que $|(X|Y)| = \|X\|$. D'où $\sup_{\|Y\|\leq 1} |(X|Y)| \geq \|X\|$.

En conclusion, on a bien l'égalité $\|X\| = \sup_{\|Y\|\leq 1} |(X|Y)|$. □

1.5.1 Autres normes sur $\mathbb{C}^d$

De même que pour $\mathbb{R}^d$, on peut définir les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^d$:

- Norme 1 : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$
- Norme infini : $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|$

1.6 Distances

1.6.1 Distance induite par une norme

Definition 1.10. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$). La distance induite par cette norme entre deux points X, Y est définie par :

$$d(X,Y) = \|Y - X\|$$

1.6.2 Propriétés d'une distance

Une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ sur un ensemble E doit satisfaire les propriétés suivantes :

Definition 1.11. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur E si elle satisfait pour tous $x, y, z \in E$:

1. **Positivité** : $d(x,y) \geq 0$
2. **Symétrie** : $d(x,y) = d(y,x)$
3. **Inégalité triangulaire** : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
4. **Séparation** : $d(x,y) = 0 \iff x = y$

1.6.3 Exemples de distances

1. **Distance euclidienne** (ou distance d_2) : induite par la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

$$d_2(X,Y) = \|X - Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2}$$

2. **Distance** d_1 : induite par la norme $\|\cdot\|_1$.

$$d_1(X,Y) = \|X - Y\|_1 = \sum_{i=1}^{d}|x_i - y_i|$$

3. **Distance** d_∞ : induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

$$d_\infty(X,Y) = \|X - Y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d}|x_i - y_i|$$

4. **Distance logarithmique** sur $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$:

$$d_{log}(a, b) = |\ln(b/a)| = |\ln(b) - \ln(a)|$$

En base 10 : $d_{log_{10}}(x, y) = |\log_{10}(y/x)|$.

5. **Distance SNCF** sur un ensemble de points. Si on considère trois points $0, X, Y$ non alignés :

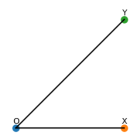

Figure 1.2: Distance SNCF

La distance SNCF entre X et Y est définie par

$$d_{SNCF}(X, Y) = d(0, X) + d(0, Y)$$

6. **Distance usuelle dans** $\mathbb{R}^2$:

$$\delta(X, Y) = \begin{cases} d(X, Y) & \text{si } 0, X, Y \text{ alignés} \\ d(0, X) + d(0, Y) & \text{sinon} \end{cases}$$

1.7 Espaces métriques

Definition 1.12. Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur E.

1.7.1 Inégalité triangulaire inverse

Dans un espace métrique (E, d), on a l'inégalité triangulaire inverse : Pour tous $x, y, z \in E$,

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

1.7.2 Distance induite sur un sous-ensemble

Si (E, d) est un espace métrique et $U \subset E$ est un sous-ensemble de E, la restriction de d à $U \times U$ fait de (U, d) un espace métrique.

1.8 Boules dans les espaces métriques

Soit (E, d) un espace métrique, $x_0 \in E$ et $r \geq 0$.

Definition 1.13. 1. La **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$$

2. La **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$$

3. La **sphère** de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble

$$S(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) = r\}$$

1.8.1 Propriétés des boules

Lemma 1.14.
1. $B(x_0, 0) = \emptyset$ et $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$
2. Pour $0 \leq r_1 < r_2$, on a $B(x_0, r_1) \subset B_f(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$
3. Si $d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$, alors $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$

Preuve.
1. Les propriétés (1) et (2) sont évidentes d'après la définition des boules.
2. Pour montrer (3), supposons $x \in B(x_1, r_1)$. Alors $d(x_1, x) < r_1$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$$

Donc $d(x_0, x) < r$, ce qui signifie que $x \in B(x_0, r)$. D'où $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

$\square$

CHAPTER 2

CM2

2.1 Espaces métriques

Definition 2.1. Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est appelée distance sur E si :

1. $d(x, y) \geq 0$ (positivité)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)
4. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiome de séparation)

(E, d) est appelé espace métrique.

Proposition 2.2 (Inégalité triangulaire)**.** Dans un espace métrique (E, d), on a aussi l'inégalité suivante:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

2.1.1 Exemples

Example 2.3.

1. $E = \mathbb{R}$. On définit $d(x, y) = |x - y|$.
   Boule $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} =]x_0 - r, x_0 + r[$.
2. $E = \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3, \ldots$. On a différentes normes :
   - Norme euclidienne: $||x||_2 = (\sum_{i=1}^d x_i^2)^{1/2}$
   - Norme 1: $||x||_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$
   - Norme ∞: $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

   Pour $E = \mathbb{R}^d$, on définit la distance $d_2(x, y) = ||y - x||_2 = ||\overrightarrow{xy}||_2$. De même, on peut définir $d_1(x, y) = ||y - x||_1$ et $d_\infty(x, y) = ||y - x||_\infty$.
   Boule $B_2(0, r)$ pour d_2 dans $\mathbb{R}^2$:

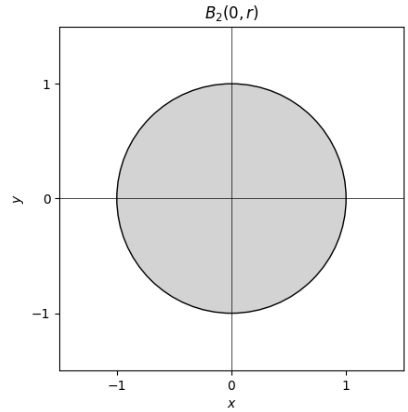

Figure 2.1: Boule $B_2(0, r)$ dans $\mathbb{R}^2$

Boule $B_\infty(0, r)$ pour d_∞ dans $\mathbb{R}^2$:

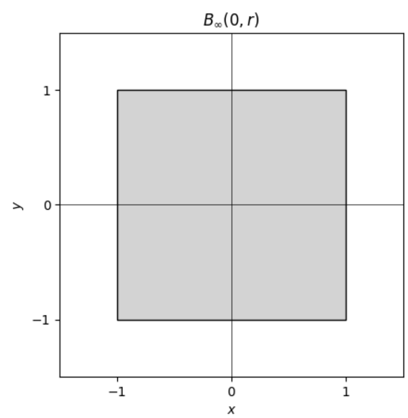

Figure 2.2: Boule $B_\infty(0, r)$ dans $\mathbb{R}^2$

Boule $B_1(0, r)$ pour d_1 dans $\mathbb{R}^2$:

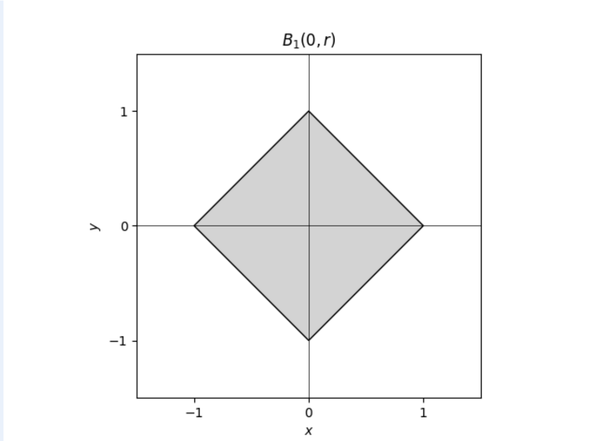

Figure 2.3: Boule $B_1(0, r)$ dans $\mathbb{R}^2$

Remark 2.4. **Important:** notion de proximité, pas la forme.

Dans $\mathbb{R}^n$, on a les relations entre les distances:

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$$
$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x, y)$$

2.2 Parties bornées

Definition 2.5. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. A est dite **bornée** si

$$\exists R > 0 \text{ et } \exists x_0 \in E \text{ tel que } A \subset B(x_0, R).$$

Lemma 2.6. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. A est bornée.
2. $\forall x_0 \in E, \exists r > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r)$.
3. $\exists r > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, on a $d(x, y) < r$.

Solution (Démonstration:). **1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1)**
Preuve que 1) ⇒ 2)
Hyp: $\exists x_1 \in E, \exists r_1 > 0$ tel que $A \subset B(x_1, r_1)$.
Soit $x_0 \in E$. But: trouver r tel que $A \subset B(x_0, r)$.
Si $x \in A$, alors $x \in B(x_1, r_1)$, on a $d(x, x_1) < r_1$.
On veut $d(x_0, x) < r$.

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &\leq d(x_0, x_1) + r_1 \\ &< r \text{ si } r > d(x_0, x_1) + r_1 \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $r = d(x_0, x_1) + r_1$.

2) $\Rightarrow$ 3)
On fixe $x_0 \in E$. D'après 2), $\exists r_0 > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r_0)$. Alors $\forall x, y \in A$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \\ &< r_0 + r_0 = 2r_0 \end{aligned}$$

On prend $r = 2r_0$.
3) $\Rightarrow$ 1)
On fixe $x_0 \in E$ (n'importe lequel). D'après 3), $\exists r > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, $d(x,y) < r$. Alors $\forall x \in A$, $d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(y, x) < d(x_0, y) + r$. On fixe $y \in A$. Alors $d(x_0, y) < \infty$ est fixe. On prend $R = d(x_0, y) + r$. Alors $\forall x \in A$, $d(x_0, x) < R$, donc $A \subset B(x_0, R)$. □

Proposition 2.7 (Propriétés élémentaires).
1. Toute partie finie est bornée.
2. Si A bornée et $B \subset A$ alors B bornée.
3. L'union d'un nb fini de bornées est bornée.

Solution (Démonstration:). **1) Tout partie finie est bornée**
Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie finie de E. On fixe $x_0 \in E$. Pour chaque a_i, $d(x_0, a_i) < \infty$. Soit $r_i = d(x_0, a_i) + 1$. Alors $a_i \in B(x_0, r_i)$. On prend $R = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$. Alors $a_i \in B(x_0, R)$ pour tout i. Donc $A \subset B(x_0, R)$.
2) Si A bornée et $B \subset A$ alors B bornée
Si A est bornée, $\exists x_0, R$ tq $A \subset B(x_0, R)$. Comme $B \subset A$, on a $B \subset B(x_0, R)$. Donc B est bornée.
3) L'union d'un nb fini de bornées est bornée (Partie)
Soient $A_1, \ldots, A_n$ sont bornées. Je fixe $x_0 \in E$. A_i bornée ($1 \leq i \leq n$) donc $\exists r_i > 0$ tel que $A_i \subset B(x_0, r_i)$. Soit $r = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$. Si $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, alors $x \in A_i$ pour un i. Donc $x \in B(x_0, r_i) \subset B(x_0, r)$. Donc $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset B(x_0, r)$. □

2.3 Fonctions bornées

Definition 2.8. Soit B un ensemble. Une fonction $F : B \to E$ est **bornée** si

$$F(B) = \{F(b) : b \in B\} \subset E$$

est bornée.

2.4 Distances entre ensembles

Definition 2.9. Soit A, B deux parties de E. On pose

$$d(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y).$$

Remark 2.10. $\forall x \in A, y \in B$, $d(A,B) \leq d(x,y)$. $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A, y \in B$ tq $d(x,y) \leq d(A,B) + \epsilon$.

Proposition 2.11 (Notation Proposition).

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y) = d(\{x\},A).$$

2.5 Topologie des espaces métriques

Concepts importants: distance $\to$ boules $B(x_0,r)$ $\to$ ensembles ouverts.

Definition 2.12. Soit (E,d) espace métrique.

1. $U \subset E$ est **ouvert** si
$$\forall x_0 \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x_0,r) \subset U.$$
2. $F \subset E$ est **fermé** si $E \setminus F$ est ouvert.

Remark 2.13. Dans $\mathbb{R}$ les intervalles ouverts sont des ouverts.

Comment montrer que l'ensemble est ouvert ou fermé. Dans le poly.

- $\emptyset$ est ouvert (par définition).
- E est ouvert.
- E est fermé, $\emptyset$ est fermé (comme complémentaires d'ouverts).

2.6 Lemmes et théorèmes

Lemma 2.14. 1)$B(x_0,r)$ est ouvert.
2)$B_f(x_0,r)$ est fermé.

Solution (Démo dans le poly). □

Example 2.15. $E=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|y-x|$. $A =]0,1[$ ouvert dans $\mathbb{R}$. $A=]0,1[$ pas fermé dans A. $R\setminus A =]-\infty,0]\cup[1,\infty[$ fermé dans $\mathbb{R}$.
Je regarde A comme partie de (A,d). A est fermé dans A.

Theorem 2.16.
1. Soit $U_i, i\in I$ une collection d'ouverts. Alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ est ouvert (l'union quelconque d'ouverts est un ouvert).
2. Si $U_1,\dots,U_n$ sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est ouvert (l'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouvert).
3. Si $F_i, i\in I$ sont fermés, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé (l'intersection quelconque de fermés est fermé).
4. $F_1,\dots,F_n$ fermés, alors $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est fermé.

Example 2.17 (Examples et remarques). $U_i =]-\frac{1}{i},\frac{1}{i}[$, $i\geq 0$. $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i = \{0\}$ pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
$F_i=[0,1-\frac{1}{i}]$ fermé dans $\mathbb{R}$. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i = [0,1[$ pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Solution (Dem:). **1) Soit** $x \in \bigcup_{i\in I} U_i = U$. Il existe un i noté i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} est ouvert donc $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i = U$. Donc U est ouvert.

2) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$. $x \in U_i$ pour $1 \leq i \leq n$. U_i ouvert donc $\exists r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset U_i$. Soit $r = \min_{1\leq i\leq n} r_i > 0$. $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i$ $1 \leq i \leq n$. Donc $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$. Donc $B(x,r) \subset U$. $\square$

CHAPTER 3

CM3

3.1 Intérieur, Adhérence, Frontière

3.1.1 Intérieur

Definition 3.1. Soit $A \subseteq E$.

1. Un point $x_0 \in E$ est **intérieur** à A s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subseteq A$.
2. **Int**(A) (l'intérieur de A) : ensemble de tous les points intérieurs de A.

Autre notation : $\overset{\circ}{A}$.

Proposition 3.2. $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A. De manière équivalente, $\text{Int}(A)$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans A.

Preuve.

1. **Int**$(A) \subseteq A$ **: évident**. Par définition, tous les points de $\text{Int}(A)$ sont dans A.
2. **Int**(A) **est ouvert**. Soit $x_0 \in \text{Int}(A)$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x_0, \delta_0) \subseteq A$. Pour montrer que $\text{Int}(A)$ est ouvert, il faut montrer que pour tout $x \in \text{Int}(A)$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq \text{Int}(A)$.

   Soit $x \in \text{Int}(A)$. Puisque $x \in \text{Int}(A)$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x, \delta_0) \subseteq A$. Pour montrer que x est un point intérieur de $\text{Int}(A)$, nous devons trouver un $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq \text{Int}(A)$. Choisissons $\delta = \delta_0/2$. Considérons $y \in B(x, \delta)$. Alors $d(y, x) < \delta_0/2$. Pour montrer que $y \in \text{Int}(A)$, nous devons trouver $\delta' > 0$ tel que $B(y, \delta') \subseteq A$. Prenons $\delta' = \delta_0/2$. Si $z \in B(y, \delta')$, alors $d(z, y) < \delta_0/2$. Par l'inégalité triangulaire, $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta_0/2 + \delta_0/2 = \delta_0$. Donc $z \in B(x, \delta_0) \subseteq A$. Ainsi, $B(y, \delta') \subseteq A$, ce qui signifie que $y \in \text{Int}(A)$. Par conséquent, $B(x, \delta) \subseteq \text{Int}(A)$. Donc $\text{Int}(A)$ est ouvert.
3. Si U est ouvert et $U \subseteq A$ alors $U \subseteq \text{Int}(A)$?

   Soit U un ouvert tel que $U \subseteq A$. Pour tout $x_0 \in U$, puisque U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subseteq U$. Comme $U \subseteq A$, on a $B(x_0, \delta) \subseteq A$. Par définition, cela signifie que x_0 est un point intérieur de A, donc $x_0 \in \text{Int}(A)$. Par conséquent, $U \subseteq \text{Int}(A)$.

□

3.1.2 Adhérence

Definition 3.3. Soit $A \subseteq E$, $x_0 \in E$. x_0 est **adhérent** à A si $\forall \delta > 0$, $B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$. (Équivalent à $d(x_0, A) = 0$).

Adh(A) (adhérence ou fermeture de A) = ensemble des points adhérents à A.

Notée aussi $\overline{A}$.

$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} d(x_0, x)$.
$d(x_0, A) = 0 \iff x_0 \in \mathrm{Adh}(A)$.
$\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) < \delta$. $\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) \leq \delta$. $\forall \delta > 0$, donc $d(x_0, A) = 0$.

Proposition 3.4. $\mathrm{Adh}(A)$ est le plus petit fermé qui contient A (l'intersection de tous les fermés qui contiennent A).

Preuve.

1. $A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$: clair. Si $x \in A$, alors pour tout $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ car $x \in B(x, \delta) \cap A$. Donc $x \in \mathrm{Adh}(A)$.

2. $\mathrm{Adh}(A)$ est fermé. Il faut montrer que $E \setminus \mathrm{Adh}(A)$ est ouvert.

   $x_0 \in \mathrm{Adh}(A) \iff \forall \delta > 0$, $B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$. $x_0 \notin \mathrm{Adh}(A) \iff \exists \delta_0 > 0$ t.q. $B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset$. $\iff \exists \delta_0 > 0$ t.q. $B(x_0, \delta_0) \subseteq E \setminus A$. $\implies x_0 \in \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

   Donc $E \setminus \mathrm{Adh}(A) \subseteq \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

   Réciproquement, si $x_0 \in \mathrm{Int}(E \setminus A)$, alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que $B(x_0, \delta_0) \subseteq E \setminus A$. Donc $B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset$. Ainsi $x_0 \notin \mathrm{Adh}(A)$, et donc $x_0 \in E \setminus \mathrm{Adh}(A)$.

   $E \setminus \mathrm{Adh}(A) = \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

   Comme $\mathrm{Int}(E \setminus A)$ est ouvert, son complémentaire $E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus A) = \mathrm{Adh}(A)$ est fermé.

   $\mathrm{Adh}(A) = E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

□

3.1.3 Frontière

Definition 3.5. Soit $A \subseteq E$, la **frontière** de A (ou bord de A) notée $\mathrm{Fr}(A)$ ou ∂A, c'est $\mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(E \setminus A)$.

$x_0 \in \mathrm{Fr}(A) \iff d(x_0, A) = 0$ et $d(x_0, E \setminus A) = 0$.

$\forall \delta > 0$, $B(x_0, \delta)$ intersecte A et aussi $E \setminus A$.

Example 3.6. Exemples dans $\mathbb{R}$ $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. $\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$.

$\mathrm{Adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. $\mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

$\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. $\mathrm{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Parfois $B_f(x_0, r)$ notée $\overline{B}(x_0, r)$.

Example 3.7. $E = \{a, b, c\}$. On pose $d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$. $d(a, b) = d(b, a) = d(b, c) = d(c, b) = 1$. $d(a, c) = d(c, a) = 2$.

$B(a, 2) = \{a, b\} = \mathrm{Adh}(B(a, 2))$. No it should be $B(a, 2) = \{y \in E : d(a, y) < 2\} = \{a, b\}$. $\mathrm{Adh}(B(a, 2)) = \mathrm{Adh}(\{a, b\})$. Points adherent to $\{a, b\}$ are points x such that for any $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$. For a, $B(a, \delta) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ for any $\delta > 0$. Same for b. For c, $B(c, 1) = \{c\}$, $B(c, 1) \cap \{a, b\} = \emptyset$. So $\mathrm{Adh}(\{a, b\}) = \{a, b\}$. $B_f(a, 2) = \{y \in E : d(a, y) \leq 2\} = \{a, b, c\} = E$.

Proposition 3.8.
1. $\mathrm{Int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$.
2. $E = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(E \setminus A)$ (union disjointe).
3. $E \setminus \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Adh}(E \setminus A)$.
4. $E \setminus \mathrm{Adh}(A) = \mathrm{Int}(E \setminus A)$.
5. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Adh}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Proposition 3.9.
1. A ouvert $\iff A = \mathrm{Int}(A)$.
2. A fermé $\iff A = \mathrm{Adh}(A)$.
3. $x \in \mathrm{Adh}(A) \iff d(x, A) = 0$.
4. $x \in \mathrm{Int}(A) \iff d(x, E \setminus A) > 0$.

3.2 Ensembles Denses

Definition 3.10. Soit $A \subseteq B \subseteq E$. On dit que A est **dense** dans B si $B \subseteq \mathrm{Adh}(A)$.

Soit $x_0 \in B$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ t.q. $d(x_0, x) < \epsilon$.

Example 3.11. $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$ dense dans $\mathbb{R}^2$.

3.3 Suites dans un Espace Métrique

Definition 3.12. Soit E un ensemble. Une **suite** dans E (notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) c'est une fonction $u : \mathbb{N} \to E$ où $n \mapsto u(n)$. On note u_n le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $E = \mathbb{R}^d$. $X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$ où $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ suites dans $\mathbb{R}$.

Definition 3.13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $x \in E$. On dit que $\lim_{n\to\infty} X_n = x$ si : $(\forall \epsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N})$ t.q. si $n \geq N \implies d(X_n, x) < \epsilon$.

Suite bornée : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ est un ensemble borné.

Remark 3.14. *Dans $\mathbb{R}^d$ muni de d_2. $X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$. $X = (x_1, \dots, x_d)$. $\lim_{n\to\infty} X_n = X \iff \lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$, $1 \leq i \leq d$.*

Proposition 3.15. La limite d'une suite convergente est unique.

Preuve. Soit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x'$. $d(x, x') \leq d(x, X_n) + d(X_n, x')$. $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
$\implies d(x, x') = 0 \implies x = x'$. □

Proposition 3.16 (Lien avec l'adhérence).

1. $x \in \mathrm{Adh}(A)$ ssi il existe une suite (X_n) d'éléments de A t.q. $\lim_{n\to\infty} X_n = x$.
2. A est fermé ssi pour toute suite (X_n) d'éléments de A qui converge vers $x \in E$, on a $x \in A$.

Preuve.

1. " $\implies$ " : Soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$.

   Avec (X_n), $X_n \in A$ et $\lim_{n\to\infty} X_n = x$.

   J'ai $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ t.q. $d(x, x_\epsilon) < \epsilon$. donc $\inf_{y\in A} d(x,y) = 0 = d(x,A)$. $d(x,A) = 0 \implies x \in \mathrm{Adh}(A)$.

   " $\implies$ " soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$. $\implies d(x,A) = 0$. $\implies \forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ t.q. $d(x, x_\epsilon) < \epsilon$. Prendre $\epsilon = 1/n$. Je pose $u_n = x_{1/n}$. $u_n \in A$. $d(x, u_n) \leq 1/n$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = x$.

2. " $\implies$ " soit A fermé donc $A = \mathrm{Adh}(A)$.

   Soit (X_n) suite dans A qui converge vers x. $x \in \mathrm{Adh}(A) = A$. $x \in \mathrm{Adh}(A) \implies x \in A$.

   "$\impliedby$" Réciproquement. Si toute suite dans A qui converge vers x, $x \in A$ (donc A fermé). $A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$, j'ai $A = \mathrm{Adh}(A)$ (donc A fermé). Suites de Cauchy.

$\square$

3.3.1 Suites de Cauchy

Definition 3.17. Une suite (X_n) est de **Cauchy** si : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(X_p, X_n) < \epsilon$ pour tous $n, p \geq N$.

CHAPTER 4

CM4

4.1 Suites de Cauchy et Complétude

Definition 4.1 (Suite de Cauchy)**.** Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique E est dite suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geq N$, on a $d(x_p, x_n) \leq \varepsilon$.

Proposition 4.2. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve. Supposons que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Alors pour tous $n, p \geq N$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leq d(x_n, x) + d(x, x_p) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. □

Proposition 4.3. Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par définition (en prenant $\varepsilon = 1$), il existe N tel que $d(x_n, x_p) \leq 1$ pour $n, p \geq N$. En particulier $d(x_n, x_N) \leq 1$ pour $n \geq N$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_N) \leq \max(\{d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\} \cup \{1\}) =: r_0.$$

Ainsi $x_n \in B(x_N, r_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Definition 4.4 (Espace complet)**.** Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Theorem 4.5. $\mathbb{R}^d$ muni de la distance canonique est complet.

4.2 Intérieur et Adhérence

Definition 4.6 (Intérieur)**.** Soit $A \subset E$. Un point $x \in E$ est intérieur à A s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A se note $\mathrm{Int}(A)$ et s'appelle l'intérieur de A.

Proposition 4.7. $\mathrm{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A, ou de manière équivalente la réunion de tous les ouverts inclus dans A.

Definition 4.8 (Adhérence)**.** Soit $A \subset E$. Un point $x \in E$ est adhérent à A si $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$. L'ensemble des points adhérents à A se note $\mathrm{Adh}(A)$ et s'appelle l'adhérence ou la fermeture de A.

Proposition 4.9. $\mathrm{Adh}(A)$ est le plus petit fermé contenant A, ou de manière équivalente l'intersection de tous les fermés contenant A.

Proposition 4.10. $x \in \mathrm{Adh}(A)$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Example 4.11. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y < 4\}$. Déterminer $\mathrm{Int}(A)$ et $\mathrm{Adh}(A)$.

- $\mathrm{Int}(A) = A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y < 4\}$. A est ouvert.
- $\mathrm{Adh}(A) = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \leq 4\}$. C est fermé et contient A.

Example 4.12. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$. Déterminer $\mathrm{Adh}(A)$ et $\mathrm{Int}(A)$.

- $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$. Car $\mathrm{Int}(A)$ est un ouvert inclus dans A. Or A ne contient aucune boule ouverte.
- $\mathrm{Adh}(A) = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$.

4.3 Exercices Résolus

Example 4.13. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$. Déterminer $\mathrm{Int}(A)$ et $\mathrm{Adh}(A)$.

Solution.
1. On dessine A, c'est un carré ouvert.
2. On pense que $\mathrm{Int}(A) = B = A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$ et $\mathrm{Adh}(A) = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
3. Montrons que $B = \mathrm{Int}(A)$.
   - B est ouvert et $B \subset A$. Vrai par définition de B.
   - Soit $X \in A \setminus B = \emptyset$. Donc il n'y a pas de points de A qui ne sont pas dans B. Ainsi $B = \mathrm{Int}(A)$.
4. Montrons que $C = \mathrm{Adh}(A)$.

- C est fermé et $A \subset C$. Vrai par définition de C.
- Montrons que $C \subset \mathrm{Adh}(A)$. Pour chaque $X \in C$, on cherche une suite (X_n) avec $X_n \in A$ et $\lim X_n = X$. Soit $X = (x, y) \in C$, i.e., $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. On prend $X_n = (x - 1/n, y - 1/n)$ (si $x = 1$, on prend $x - 1/n$, similarly for y). Plus précisément, soit $X_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n = x - \frac{1}{n}\mathrm{sign}(x)$ si $x \neq 0$ et $x_n = -1/n$ si $x = 0$, et $y_n = y - \frac{1}{n}\mathrm{sign}(y)$ si $y \neq 0$ et $y_n = -1/n$ si $y = 0$. Alors $X_n \in A$ et $\lim X_n = X$.

$\square$

Example 4.14. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$. Déterminer $\mathrm{Adh}(A)$ et $\mathrm{Int}(A)$.

Solution.

1. On dessine A. C'est le graphe de $\sin(1/x)$ pour $x > 0$.
2. On pense que $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Adh}(A) = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$. Soit $C = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$.
3. Montrons que $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$. Si $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Int}(A)$ est un ouvert non vide inclus dans A. Donc $\mathrm{Int}(A)$ contient une boule $B(X_0, r) \subset A$. Mais A est le graphe d'une fonction, il n'y a pas de boule dans A. Donc $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.
4. Montrons que $\mathrm{Adh}(A) = C = A \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$.
   - C est fermé et $A \subset C$. A n'est pas fermé. C est fermé, car si $(X_n) \in C$ et $X_n \to X$, alors $X \in C$. Si $X_n = (x_n, y_n) \in A$, alors $x_n > 0, y_n = \sin(1/x_n)$. Si $X_n \to X = (x, y)$, alors $x_n \to x, y_n \to y$. Si $x > 0$, alors $X \in A \subset C$. Si $x = 0$, on ne peut pas dire que $y = \sin(1/x)$. Mais on sait que $-1 \leq \sin(1/x_n) \leq 1$, donc $-1 \leq y_n \leq 1$, donc $-1 \leq y \leq 1$. Donc si $x = 0$, $X = (0, y)$ avec $y \in [-1, 1]$, donc $X \in C$.
   - Montrons que $C \subset \mathrm{Adh}(A)$. Pour $X \in C$, si $X \in A$, alors $X \in \mathrm{Adh}(A)$. Si $X \in C \setminus A = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$, i.e., $X = (0, y)$ avec $y \in [-1, 1]$. On doit montrer que $X \in \mathrm{Adh}(A)$. On cherche une suite $X_n \in A$ avec $X_n \to X$. On prend $X_n = (\frac{1}{n\pi + \arcsin(y)}, \sin(n\pi + \arcsin(y))) = (\frac{1}{n\pi + \arcsin(y)}, y)$. Alors $X_n \in A$ et $X_n \to (0, y) = X$. Donc $X \in \mathrm{Adh}(A)$.

$\square$

CHAPTER 5

CM5

5.1 Compacité

5.1.1 Définitions clés

Definition 5.1 (Recouvrement ouvert)**.** Soit $F \subset E$. Un recouvrement ouvert de F est une collection $(U_i)_{i\in I}$ où U_i sont des ouverts de E et $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Definition 5.2 (Ensemble compact)**.** $K \subset E$ est compact si de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Theorem 5.3 (Caractérisation séquentielle de la compacité)**.** $K \subset E$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite qui converge vers un élément de K.

5.1.2 Exemples et contre-exemples

Example 5.4. $F = \mathbb{R}^2$ n'est pas compact. Considérons le recouvrement ouvert $U_x = B(x, 1/2)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^2} U_x$. Cependant, on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.

Example 5.5. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 0 \leq -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}\}$. F n'est pas compact. Considérons la suite $u_n = (n, 0) \in F$. Toute sous-suite de (u_n) est non bornée, donc sans sous-suite convergente dans F.

5.2 Propriétés des ensembles compacts

Proposition 5.6. Tout compact $K \subset E$ est borné et fermé.

Proposition 5.7. Si K est compact et F est fermé, alors $K \cap F$ est compact.

Proposition 5.8. Si K est compact, toute suite de Cauchy dans K converge dans K.

5.2.1 Preuves des propriétés

Preuve (Preuve qu'un compact est borné). Soit K compact. Pour $x \in K$, considérons $U_x = B(x, 1)$. Alors $(U_x)_{x \in K}$ est un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, il existe un sous-recouvrement fini $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Soit $R = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| + 1$. Alors pour tout $x \in K$, il existe i tel que $x \in U_{x_i} = B(x_i, 1)$, donc $d(x, x_i) < 1$. Par l'inégalité triangulaire, $\|x\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i\| < 1 + \|x_i\| \leq R$. Ainsi, $K \subset B(0, R)$, et K est borné. □

Preuve (Preuve qu'un compact est fermé). Soit K compact et montrons que K est fermé. Montrons que $E \setminus K$ est ouvert. Soit $x \notin K$. Pour tout $y \in K$, il existe $r_y > 0$ tel que $B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset$. Considérons le recouvrement ouvert de K donné par $(B(y, r_y))_{y \in K}$. Il existe un sous-recouvrement fini $B(y_1, r_{y_1}), \ldots, B(y_n, r_{y_n})$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, r_{y_i})$. Soit $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_{y_i} > 0$. Considérons $B(x, r)$. Pour tout $z \in B(x, r)$, et pour tout i, $B(z, r) \cap B(y_i, r_{y_i}) = \emptyset$. Donc $B(x, r) \cap K = \emptyset$, et $B(x, r) \subset E \setminus K$. Ainsi $E \setminus K$ est ouvert, et K est fermé. □

Preuve (Preuve que K compact et F fermé $\implies$ K ∩ F compact). Soit K compact et F fermé. Considérons un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de $K \cap F$. Alors $(U_i)_{i \in I} \cup (E \setminus F)$ est un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, il existe un sous-recouvrement fini $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, E \setminus F$ tel que $K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup (E \setminus F)$. Alors $K \cap F \subset (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup (E \setminus F)) \cap F = (U_{i_1} \cap F) \cup \cdots \cup (U_{i_n} \cap F) \cup ((E \setminus F) \cap F) = (U_{i_1} \cap F) \cup \cdots \cup (U_{i_n} \cap F) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Ainsi, $K \cap F$ est compact. □

Preuve (Preuve que si K est compact, toute suite de Cauchy dans K converge dans K). Soit (u_n) une suite de Cauchy dans K compact. Puisque K est compact, il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers une limite $l \in K$. Puisque (u_n) est de Cauchy et qu'une sous-suite converge vers l, la suite (u_n) converge vers l. Donc toute suite de Cauchy dans K converge dans K. □

Preuve (Preuve par contradiction qu'un compact est borné). Supposons que K n'est pas borné. On fixe $a \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme K n'est pas borné, il existe $x_n \in K$ tel que $d(a, x_n) > n$. La suite (x_n) n'est pas bornée (car $d(a, x_n) \to +\infty$), donc (x_n) ne possède pas de sous-suite convergente. Ceci contredit le fait que K est compact (par caractérisation séquentielle). Donc K est borné. □

5.3 Compacts de $\mathbb{R}^n$

5.3.1 Théorème de Borel-Lebesgue

Theorem 5.9 (Théorème de Borel-Lebesgue). Dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle, $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si K est fermé et borné.

5.3.2 Compacité des boules fermées

Proposition 5.10. Dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle, les boules fermées $B_f(x_0, r)$ sont compactes.

5.3.3 Preuve de la compacité des boules fermées

Preuve. Pour $n = 1$, montrons que $[a, b]$ est compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$. Soit $E = \{x \in [a, b] \mid [a, x]$ est recouvert par un nombre fini de $U_i\}$. E est non vide car $a \in E$. Montrons que E est borné. Soit $c = \sup E$. Supposons que $c < b$. Puisque $c \in [a, b]$, il existe $U_{i_0} \in \mathcal{U}$ tel que $c \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $]c - \delta, c + \delta[\subset U_{i_0}$. Puisque $c = \sup E$, il existe $x \in E$ tel que $c - \delta < x \leq c$. Par définition de E, $[a, x]$ est recouvert par un nombre fini de U_i. Donc $[a, x] \cup [x, c + \delta/2] = [a, c + \delta/2]$ est recouvert par un nombre fini de U_i (en ajoutant U_{i_0}). Donc $c + \delta/2 \in E$, ce qui contredit $c = \sup E$. Donc $c = b$. Montrons que $b \in E$. On choisit U_{i_1} tel que $b \in U_{i_1}$ et $\delta > 0$ tel que $]b - \delta, b + \delta[\subset U_{i_1}$. On choisit $x \in]b - \delta, b] \cap E$. Alors $[a, x]$ est recouvert par un nombre fini de U_i. Donc $[a, x] \cup [x, b] = [a, b]$ est recouvert par un nombre fini de U_i (en ajoutant U_{i_1}). Donc $[a, b]$ est compact. □

5.4 Limites et continuité

5.4.1 Définition des limites dans les espaces métriques

Definition 5.11 (Limite)**.** Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, $x_0 \in E_1$, $l \in E_2$ et $F : E_1 \to E_2$ une application. On dit que $\lim_{x\to x_0} F(x) = l$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E_1$ tel que $d_1(x, x_0) < \delta$, on a $d_2(F(x), l) < \epsilon$.

5.4.2 Définition de la continuité

Definition 5.12 (Continuité en un point)**.** On dit que F est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Definition 5.13 (Continuité sur un ensemble)**.** On dit que F est continue (sur E_1) si F est continue en tout point $x_0 \in E_1$.

Proposition 5.14. F est continue sur E_1 si et seulement si elle est continue en tout point de E_1.

5.5 Propriétés équivalentes de la continuité

Proposition 5.15 (Propriétés équivalentes de la continuité)**.** Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $F : E_1 \to E_2$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F est continue.
2. Pour tout ouvert $U \subset E_2$, $F^{-1}(U)$ est ouvert dans E_1.
3. Pour tout fermé $F \subset E_2$, $F^{-1}(F)$ est fermé dans E_1.
4. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_1 avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E_1$, on a $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$.

5.5.1 Preuves des équivalences

Preuve.

1. (1) $\implies$ (2) : Soit $U \subset E_2$ ouvert et $x_0 \in F^{-1}(U)$. Alors $y_0 = F(x_0) \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(y_0, \epsilon) \subset U$. Comme F est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que si $d_1(x, x_0) < \delta$, alors $d_2(F(x), y_0) < \epsilon$. Donc si $x \in B(x_0, \delta)$, alors $F(x) \in B(y_0, \epsilon) \subset U$, donc $x \in F^{-1}(U)$. Ainsi $B(x_0, \delta) \subset F^{-1}(U)$, et $F^{-1}(U)$ est ouvert.

2. (2) $\implies$ (3) : Par passage aux complémentaires.

3. (3) $\implies$ (4) : Soit (x_n) une suite dans E_1 avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E_1$. Supposons que $(F(x_n))$ ne converge pas vers $F(x)$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p(n) > n$ avec $d_2(F(x_{p(n)}), F(x)) \geq \epsilon_0$. Soit $y_n = x_{p(n)}$ et $U = E_2 \setminus B(F(x), \epsilon_0)$. U est fermé, $F(y_n) \in U$, donc $y_n \in F^{-1}(U)$, qui est fermé par propriété (3). Comme (y_n) est une sous-suite de (x_n) qui converge vers x, on a $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Puisque $F^{-1}(U)$ est fermé, on a $x \in F^{-1}(U)$. Donc $F(x) \in U = E_2 \setminus B(F(x), \epsilon_0)$, ce qui signifie $d_2(F(x), F(x)) \geq \epsilon_0$, ce qui est faux.

4. (4) $\implies$ (1) : Supposons que F n'est pas continue en $x_0 \in E_1$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x_\delta \in E_1$ avec $d_1(x_\delta, x_0) < \delta$ et $d_2(F(x_\delta), F(x_0)) \geq \epsilon_0$. En prenant $\delta = 1/n$, on obtient une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $d_2(F(x_n), F(x_0)) \geq \epsilon_0$ pour tout n. Ceci contredit (4).

$\square$

5.5.2 Exemple de fonction continue

Example 5.16. Considérons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x\sin(y) - e^x$. Les fonctions coordonnées x et y, et les fonctions $\sin(y)$ et e^x sont continues. Par composition et opérations algébriques, $F(x, y) = x\sin(y) - e^x$ est continue.

5.6 Fonctions de plusieurs variables

5.6.1 Cadre $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Considérons des fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Le cadre est $\mathbb{R}^n$ pour la variable et $\mathbb{R}^p$ pour la valeur.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ le domaine de définition. On considère des applications $F : D \to \mathbb{R}^p$.

5.6.2 Continuité et composantes

Proposition 5.17. $F : D \to \mathbb{R}^p$ est continue si et seulement si chaque composante $F_i : D \to \mathbb{R}$ est continue, où $F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n))$.

5.6.3 Fonctions coordonnées

Les fonctions coordonnées (x_i) sont continues. Ce sont les F_i pour $F(x) = x$ (l'identité).

CHAPTER 6

CM6

6.1 Continuité

6.1.1 Définition de la continuité

Definition 6.1. Soit $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$. On dit que f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in D$ avec $\|x - x_0\| \leq \alpha$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

6.1.2 Opérations sur les fonctions continues

Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont continues sur D, alors:

- $f + g$ est continue sur D.
- $f \cdot g$ est continue sur D.
- Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur D.
- Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et $f(D) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ est continue sur D.

6.1.3 Continuité et compacité

Theorem 6.2. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}^p$ une application continue. Alors $f(K)$ est compact dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 6.3. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue et $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.

6.1.4 Continuité uniforme

Definition 6.4. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}^p$ est uniformément continue sur D si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in D$ avec $\|x - y\| \leq \alpha$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$.

6.1.5 Lien avec la compacité

Theorem 6.5. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue et $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Alors $F(K)$ est compact dans $\mathbb{R}^p$.

Remark 6.6. Alors $F(K)$ compact dans $\mathbb{R}^p$ donc borné et atteint ses bornes.

6.1.6 Continuité partielle

Definition 6.7. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est partiellement continue en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ si les fonctions partielles $f_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ sont continues en a_i pour tout $1 \leq i \leq n$. On dit que f est partiellement continue sur D si f est partiellement continue en tout point de D.

Non continuité et continuité partielle: Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

- f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- f est partiellement continue en $(0,0)$. En effet, les fonctions partielles sont
  - $f(x_1, 0) = \frac{x_1 \cdot 0}{x_1^2 + 0^2} = 0$ si $x_1 \neq 0$ et $f(0,0) = 0$. Donc $f(x_1, 0) = 0$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$.
  - $f(0, x_2) = \frac{0 \cdot x_2}{0^2 + x_2^2} = 0$ si $x_2 \neq 0$ et $f(0,0) = 0$. Donc $f(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$.

  Les fonctions partielles sont constantes nulles, donc continues en 0.
- f n'est pas continue en $(0,0)$. En coordonnées polaires $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, pour $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, on a
  $$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta.$$
  Si θ est constant, alors $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$ dépend de θ. Par exemple:
  - si $\theta = 0$, $\lim_{r\to 0} f(r\cos 0, r\sin 0) = 0$.
  - si $\theta = \pi/4$, $\lim_{r\to 0} f(r\cos(\pi/4), r\sin(\pi/4)) = \cos(\pi/4)\sin(\pi/4) = \frac{1}{2}$.

  La limite $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2)$ n'existe pas.

Remark 6.8. La continuité implique la continuité partielle. La réciproque est fausse.

6.2 Dérivation des fonctions de plusieurs variables

6.2.1 Dérivabilité selon une direction

Definition 6.9. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$, $u \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est dérivable au point x_0 dans la direction u si la fonction $g(t) = f(x_0 + tu)$ est dérivable en $t = 0$.

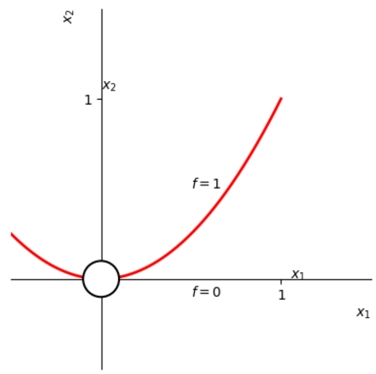

Figure 6.1: Discontinuité en $(0, 0)$

6.2.2 Dérivées partielles

Definition 6.10. On dit que f admet des dérivées partielles en x_0 si f est dérivable en x_0 dans les directions de la base canonique $e_1, \ldots, e_n$. On pose

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + te_i)\Big|_{t=0}.$$

Notation:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \partial_i f(x_0) = D_i f(x_0).$$

6.2.3 Différentiabilité

Definition 6.11. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable en $x_0 \in D$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. On note $L = df(x_0) = Df(x_0)$.

Remark 6.12. L'application linéaire L est unique.

Gradient: L'application linéaire L est de la forme $L(h) = \nabla f(x_0) \cdot h$ où $\nabla f(x_0)$ est le gradient de f en x_0.

Lemma 6.13. Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0 et f est dérivable dans toutes les directions en x_0 et

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

6.2.4 Plan tangent

Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ une surface dans $\mathbb{R}^3$ et $x_0 \in S$. Le plan tangent à S en x_0 est donné par l'équation

$$\nabla F(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

si $\nabla F(x_0) \neq 0$.

6.2.5 Fonctions de classe C^1

Definition 6.14. On dit que f est de classe C^1 sur D si f est différentiable en tout point de D et les fonctions $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sont continues sur D pour tout $1 \leq i \leq n$.

Theorem 6.15. Si f est de classe C^1 sur D, alors f est différentiable sur D.

Remark 6.16. La réciproque est fausse. Une fonction peut être différentiable sans être C^1.