

Szkic rozwiązania zadania 1.

Niech \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r} oznaczają odpowiednio wektory wodzące psów i psa względem pewnego układu odniesienia nieporuszającego się względem ziemi. Ponieważ liny łączące psy z saniami są napięte, więc musi zachodzić

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^2 = 2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) \\ 0 &= \frac{d}{dt} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^2 = 2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (1)$$

Przyjmijmy układ współrzędnych kartezjańskich (x, y) , w którym oś x pokrywa się z wektorem \mathbf{V} . Niech η , ξ oznaczają odpowiednio kąty jakie tworzą wektory \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 z osią x . Oczywiście $\eta + \xi = \alpha$. Z powyższego otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} v_1 &= V \cos \eta \\ v_2 &= V \cos \xi = V \cos(\alpha - \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

Z pierwszego równania mamy $\cos \eta = \frac{v_1}{V}$ i $\sin \eta = \frac{\sqrt{V^2 - v_1^2}}{V}$, zatem

$$v_2 = v_1 \cos \alpha + \sqrt{V^2 - v_1^2} \sin \alpha. \quad (3)$$

Podnosząc stronami do kwadratu i rozwiązując względem V otrzymujemy odpowiedź

$$V = \frac{\sqrt{v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2}}{\sin \alpha}. \quad (4)$$

Oczywiście zakładaliśmy tutaj, iż $\alpha \neq 0$. Jeśli $\alpha = 0$ to spełnienie warunku (1) jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $V = v_1 = v_2$ ■

Szkic rozwiązania zadania 2.

Przyjmijmy układ współrzędnych kartezjańskich, w którym oś X jest pozioma i skierowana od drabiny do bloku, a oś Y pionowa i skierowana w dół. Niech \mathbf{F} oznacza siłę reakcji działającą na drabinę w miejscu styku drabiny i bloku. Ponieważ nie występuje tarcie siła ta jest prostopadła do drabiny. Jeżeli drabina jest nieruchoma to wypadkowy moment siły działający na nią względem punktu podparcia drabiny o podłoże wynosi 0. Niech s oznacza położenie człowieka na drabinie mierząc wzdłuż drabiny. Mamy zatem

$$F \sqrt{h^2 + b^2} = mgs \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}, \quad (5)$$

skąd

$$F = mgs \frac{b}{b^2 + h^2}. \quad (6)$$

Zgodnie z III zasadą dynamiki na blok działa więc siła $-\mathbf{F}$, której składowe F_x , F_y są dane wzorami

$$\begin{aligned} F_x &= F \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} = mgs \frac{bh}{(b^2 + h^2)^{3/2}} \\ F_y &= F \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} = mgs \frac{b^2}{(b^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Aby dla pewnego położenia s blok zaczął się obracać bez wcześniejszego przesuwania musi zachodzić

$$F_x h - F_y b \geq Mg \frac{b}{2} \quad \text{oraz} \quad \mu \geq \frac{F_x}{Mg + F_y}. \quad (8)$$

Z pierwszego warunku otrzymujemy

$$ms \frac{h^2 - b^2}{(h^2 + b^2)^{3/2}} \geq \frac{1}{2} M, \quad (9)$$

czyli

$$s \geq \frac{M}{2m} \frac{(h^2 + b^2)^{3/2}}{h^2 - b^2}, \quad (10)$$

a zatem najmniejsze położenie s , przy którym blok zacznie się obracać wynosi

$$s_{\min} = \frac{M}{2m} \frac{(h^2 + b^2)^{3/2}}{h^2 - b^2}. \quad (11)$$

Jednocześnie zauważmy, że zawsze zachodzi $s \leq \sqrt{h^2 + b^2}$, zatem aby blok mógł dla pewnego położenia s zacząć się przewracać musi zachodzić $s_{\min} \leq \sqrt{h^2 + b^2}$, czyli

$$\frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} \geq \frac{M}{2m} \quad (12)$$

i jest to poszukiwany warunek. Z drugiego warunku mamy natomiast

$$\begin{aligned} \mu &\geq \frac{mbh}{\frac{M}{s}(h^2 + b^2)^{3/2} + mb^2} \\ &\geq \frac{mbh}{\frac{M}{s_{\min}}(h^2 + b^2)^{3/2} + mb^2} = \frac{bh}{2h^2 - b^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

zatem

$$\mu_{\min} = \frac{bh}{2h^2 - b^2} \quad \blacksquare \quad (14)$$

Szkic rozwiązania zadania 3.

Niech ϕ , θ oznaczają odpowiednio kąty jakie tworzą nie z pionem i pręt z podłożem. Zakładając, że nie jest cały czas napięta zachodzi

$$\cos \phi + \sin \theta = \frac{H}{l}, \quad (15)$$

skąd

$$\Omega \sin \phi = \omega \cos \theta, \quad (16)$$

gdzie

$$\omega := \frac{d\theta}{dt}, \quad \Omega := \frac{d\phi}{dt}. \quad (17)$$

Całkowita energia mechaniczna układu jest oczywiście zachowana, więc z tw. Königa i elementarnej geometrii mamy

$$\frac{mgH}{4} = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12}ml^2\omega^2 + \frac{mgl \sin \theta}{2}, \quad (18)$$

gdzie m jest masą pręta, a v_{CM} oznacza szybkość środka masy pręta w dowolnej chwili. Z powyższego

$$v_{\text{CM}}^2 = \frac{1}{2}gH - gl \sin \theta - \frac{1}{12}l^2\omega^2. \quad (19)$$

Zauważmy, że $\omega^2 \geq 0$ oraz $\sin \theta \geq H/l - 1$, zatem

$$v_{\text{CM}}^2 \leq \frac{1}{2}gH - gH + gl = g \left(l - \frac{H}{2} \right), \quad (20)$$

czyli wartość v_{CM} jest ograniczona z góry przez $v_m = \sqrt{g(l - \frac{H}{2})}$. Pozostaje wykazać, iż istnieje chwila w trakcie ruchu pręta gdy $v_{\text{CM}} = v_m$. Istotnie, gdy nic nie jest pionowe mamy $\phi = 0$, a zatem z równania (16) $\omega = 0$ i (z równania (15)) $\sin \theta = H/l - 1$, co kończy rozwiązanie zadania ■

Szkic rozwiązania zadania 4.

W rozwiązaniu kropka nad daną wielkością oznacza różniczkowanie po czasie, tj. $\dot{f} := \frac{df}{dt}$, $\ddot{f} := \frac{d^2f}{dt^2}$, ...

Niech $\mathbf{r} = [l \cos \phi, l \sin \phi]$ oznacza wektor wodzący kulki o masie m zaczepiony w miejscu zawiasu, ϕ – kąt między prętem i podłożem, a $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ – prędkość klocka. Równanie więzów układu (do momentu utraty kontaktu między kulką i klockiem) ma postać

$$v = -\dot{\phi}l \sin \phi. \quad (21)$$

Niech \mathbf{N} oznacza siłę reakcji między kulką i klockiem. Ponieważ zakładamy, że powierzchnie są idealnie gładkie i nie występuje tarcie, więc $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{x}}$. Z II zasady dynamiki $N = M\dot{v}$, więc w momencie utraty kontaktu zachodzi

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon = -\omega^2, \quad (22)$$

gdzie ε , ω oznaczają odpowiednio $\ddot{\phi}$ i $\dot{\phi}$ w momencie utraty kontaktu. Jednocześnie energia mechaniczna układu jest zachowana więc w dowolnej chwili

$$mgl = \frac{1}{2}(M \sin^2 \phi + m)\dot{\phi}^2 l^2 + mgl \sin \phi, \quad (23)$$

skąd

$$\omega^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon = \frac{g}{l} \frac{4m}{M + 4m}. \quad (24)$$

Różniczkując (23) po czasie otrzymujemy natomiast

$$-\frac{1}{2}Ml^2\dot{\phi}^2 \sin 2\phi - mgl \cos \phi = (M \sin^2 \phi + m)l^2\ddot{\phi}. \quad (25)$$

Z powyższego więc

$$Ml\varepsilon - 2\sqrt{3}mg = \varepsilon l(M + 4m). \quad (26)$$

Podstawiając do powyższego (24) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{M}{m} = 4. \quad (27)$$

Szybkość klocka wynosi natomiast

$$V = -\omega l \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{gl}{8}}, \quad (28)$$

co kończy rozwiązanie zadania ■

Szkic rozwiązania zadania 5.

Z definicji ciepła molowego i I zasady termodynamiki dla gazu jednoatomowego mamy

$$2R = C = \frac{\delta Q}{n dT} = \frac{3}{2}R + \frac{p dV}{n dT}, \quad (29)$$

skąd, podstawiając $\frac{p}{n} = \frac{RT}{V}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V}. \quad (30)$$

Całkując obustronnie powyższe równanie odpowiednio od V do $2V$ i od T do T' otrzymujemy

$$\log \frac{T'}{T} = \log 4, \quad (31)$$

skąd wnioskujemy, że temperatura wzrosła czterokrotnie ■

Szkic rozwiązania zadania 6.

W rozwiązaniu kładę $4\pi\epsilon_0 = 1$.

Udowodnimy, że rozkład ładunku na powierzchni odosobnionego, metalowego dysku naładowanego ładunkiem Q jest taki, że nieskończenie mały ładunek $dq = \sigma d\Sigma$ znajdujący się w dowolnym punkcie X' na powierzchni dysku jest równy ładunkowi znajdującemu się w punkcie przecięcia prostej prostopadłej do płaszczyzny dysku przechodzącej przez X' z naładowaną jednorodnie z gęstością powierzchniową $\sigma_0 = Q/4\pi R^2$ sferą, której kołem wielkim jest ów dysk. Istotnie rozpatrzmy dowolny punkt P na kole wielkim AB naładowanej (z gęstością σ_0) sfery oraz dowolną

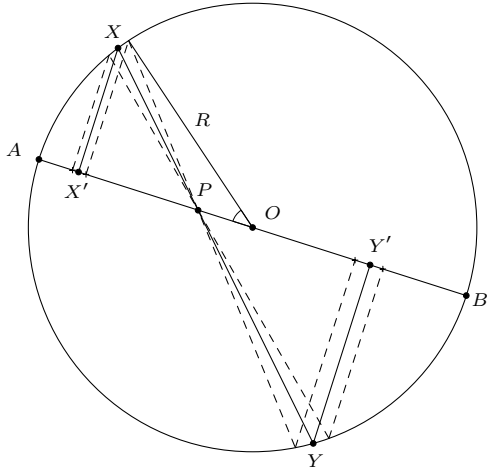


Figure 1: Konstrukcja poszukiwanego rozkładu σ

cięciwę XY sfery zawierającą P . Infinitesimalny ładunek zgromadzony w X i Y wynosi odpowiednio

$$dq_X = \sigma_0 d\Sigma_X, \quad dq_Y = \sigma_0 d\Sigma_Y, \quad (32)$$

gdzie $d\Sigma_X$, $d\Sigma_Y$ są infinitesimalnymi fragmentami powierzchni sfery otaczającymi odpowiednio punkt X i Y . W granicy zachodzi

$$\frac{d\Sigma_X}{d\Sigma_Y} = \frac{PX^2}{PY^2}. \quad (33)$$

Rozpatrzmy teraz osobną sytuację, w której mamy cienki, przewodzący dysk AB naładowany w taki sposób, że $dq_{X'} = dq_X$ i $dq_{Y'} = dq_Y$, gdzie X' , Y' są rzutami prostokątnymi punktów X , Y na koło wielkie AB . Oczywiście całkowity ładunek dysku wynosi wówczas Q . Pole elektryczne w punkcie P pochodzące od ładunków $dq_{X'}$ i $dq_{Y'}$ wynosi

$$\delta \mathbf{E}(P) = \left(\frac{\sigma_0 d\Sigma_X}{X'P^2} - \frac{\sigma_0 d\Sigma_Y}{Y'P^2} \right) \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}. \quad (34)$$

Z podobieństwa trójkątów $\triangle X'XP$ i $\triangle Y'YP$ mamy

$$\frac{X'P}{XP} = \frac{Y'P}{YP}, \quad (35)$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{d\Sigma_X}{X'P^2} \div \frac{d\Sigma_Y}{Y'P^2} = 1, \quad (36)$$

czyli $\delta \mathbf{E}(P) = \vec{0}$. Powtarzając konstrukcję dla wszystkich punktów dysku (po obu jego stronach) otrzymujemy $\mathbf{E}(P) = \vec{0}$, ale punkt P wybraliśmy dowolnie, zatem dla każdego punktu P należącego do

dysku $\mathbf{E}(P) = \vec{0}$, więc potencjał wewnątrz dysku jest stały. Zauważmy jednak, iż w ten sposób znaleźliśmy rozkład ładunku na powierzchni dysku, dla którego potencjał dysku jest stały. Na mocy tw. o jednoznaczności (dla danej geometrii przewodnika istnieje dokładnie jeden sposób rozłożenia ładunku Q na jego powierzchni, w taki sposób, aby jego powierzchnia była powierzchnią ekwipotencjalną) skonstruowany rozkład jest zatem poszukiwanym rozkładem dla metalowego dysku. Pozostaje wyznaczyć $\sigma(X')$. Mamy

$$\sigma(X') d\Sigma_{X'} = \sigma_0 d\Sigma_X \quad (37)$$

oraz z prostych rozważań geometrycznych

$$d\Sigma_{X'} = d\Sigma_X \frac{XX'}{R} = d\Sigma_X \frac{\sqrt{R^2 - OX'^2}}{R}. \quad (38)$$

Z powyższego otrzymujemy zatem

$$\sigma(X') = \frac{\sigma_0 R}{\sqrt{R^2 - OX'^2}} = \frac{Q}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - OX'^2}} \quad (39)$$

po każdej stronie dysku. Oznaczając $OX' = s$ mamy

$$\sigma(s) = \frac{Q}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - s^2}}. \quad (40)$$

Potencjał dysku V_0 możemy znaleźć wykonując elementarne całkowanie. Przyjmując $V(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) = 0$ mamy

$$V_0 = 4\pi \int_0^R \frac{\sigma(s)}{s} s ds = \frac{\pi Q}{2R}. \quad (41)$$

Pojemność metalowego dysku o promieniu R wynosi z powyższego

$$C_{\text{disc}} = \frac{Q}{V_0} = \frac{2R}{\pi}, \quad (42)$$

jednocześnie pojemność metalowej sfery o promieniu R wynosi oczywiście

$$C_{\text{sphere}} = R. \quad (43)$$

Stosunek tych pojemności jest zatem równy

$$\frac{C_{\text{disc}}}{C_{\text{sphere}}} = \frac{2}{\pi}. \quad (44)$$

Ten stosunek został wyznaczony doświadczalnie w XVIII w. przez H. Cavendisha, który otrzymał wartość $1 \div 1.57$ ■

Szkic rozwiązania zadania 7.

W rozwiązaniu kładę $4\pi\epsilon_0 = 1$.

Udowodnimy najpierw następujący lemat. Niech Γ' oznacza przewodnik powstały z usunięcia pewnej

części sfery o średnicy f . Jeśli na przewodniku Γ' będzie utrzymywany stały potencjał V_0 to różnica gęstości powierzchniowych ładunku po zewnętrznej i wewnętrznej stronie wynosi $V_0/2\pi f$.

Wykażemy, że $\Delta\sigma$ jest niezależna od wyboru punktu P . Istotnie rozpatrzmy przewodnik powstały przez wycięcie pewnej części Γ z bardzo cienkiego, nieskończonego arkusza metalu danego równaniem $z = 0$. Załóżmy, że przewodnik Γ został uziemiony, a w punkcie $(0, 0, h)$ umieszczono punktowy ładunek elektryczny $-q$. Niech $\sigma_o(P)$ oznacza gęstość ładunku indukowanego wówczas w $P \in \Gamma$ po stronie bliższej ładunkowi $-q$ ($z = 0^+$), a $\sigma_i(P)$ – analogiczną wielkość po stronie dalszej ($z = 0^-$). Jeśli zamiast ładunku $-q$ w $O = (0, 0, h)$ umieścimy ładunek q w $O' = (0, 0, -h)$ to gęstości powierzchniowe indukowanego ładunku w P wynoszą oczywiście $-\sigma_i(P)$ dla $z = 0^+$ i $-\sigma_o(P)$ dla $z = 0^-$. Dokonując superpozycji obu sytuacji otrzymujemy, iż dla ładunków $-q$ i q umieszczonych odpowiednio w O i O' gęstość ładunku w $P \in \Gamma$ po stronie $z = 0^+$ wynosi $\sigma_o - \sigma_i$. Możemy jednak tą wielkość obliczyć, gdyż dla takiego ułożenia ładunków $z = 0$ jest powierzchnią ekwipotencjalną, zatem $\sigma_o - \sigma_i$ będzie równa gęstości powierzchniowej ładunku indukowanego na nieskończonej, uziemionej płaszczyźnie $z = 0$ pod wpływem ładunku $-q$ w O . Jak łatwo sprawdzić

$$\sigma_o - \sigma_i = \frac{qh}{2\pi|OP|^3}. \quad (45)$$

Dokonajmy teraz inwersji przewodnika Γ (gdy po jednej stronie ma ładunek o gęstości σ_o , a po drugiej σ_i) względem sfery o środku O i promieniu \mathcal{R} . Obrazem inwersyjnym przewodnika Γ będzie pewien fragment Γ' sfery o średnicy $f = \frac{\mathcal{R}^2}{h}$, na którym utrzymywany jest stały potencjał $V_0 = \frac{q}{\mathcal{R}}$. Gęstości powierzchniowe, w inwersji, transformują się jak $\frac{|OP|^3}{\mathcal{R}^3}$, zatem

$$\begin{aligned} \Delta\sigma' &= \sigma'_o - \sigma'_i = \frac{|OP|^3}{\mathcal{R}^3}(\sigma_o - \sigma_i) \\ &= \frac{qh}{2\pi\mathcal{R}^3} = \frac{V_0}{2\pi f}, \end{aligned} \quad (46)$$

co kończy dowód lematu \square

Niech C oznacza pojemność rozpatrywanego przewodnika. Niech Q_i , Q_o oznaczają odpowiednio ładunki zgromadzone na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni półsfery, gdy jej potencjał wynosi V_0 względem punktu w nieskończoności. Zachodzi

$$Q_o + Q_i = CV_0. \quad (47)$$

Jednocześnie, korzystając z udowodnionego lematu, mamy

$$Q_o - Q_i = \Delta\sigma \cdot 2\pi R^2 = \frac{V_0 R}{2}. \quad (48)$$

Wyznamy stosunek Q_o/Q_i

$$\frac{Q_o}{Q_i} = \frac{2C + R}{2C - R}. \quad (49)$$

Ten stosunek jest dodatni, gdyż gęstość powierzchniowa ładunku indukowanego na odosobnionym przewodniku Γ ma w każdym punkcie taki sam znak lub jest zerowa, tj. $\forall p \in \Gamma : \text{sgn}(\sigma(p)) = \text{sgn}(V_0) \vee \sigma(p) = 0$. Istotnie w przeciwnym przypadku w przewodniku płynąłby prąd*. W takim razie z powyższego otrzymujemy†

$$C > \frac{R}{2} \quad \blacksquare$$

Szkic rozwiązania zadania 8.

W rozwiązaniu kropka nad daną wielkością oznacza różniczkowanie po czasie, tj. $\dot{f} := \frac{df}{dt}$, $\ddot{f} := \frac{d^2f}{dt^2}$, ...

Niech $\mathbf{r} = [x, y, z]$ oznacza wektor wodzący cząstki. Ponieważ ruch cząstki jest ograniczony do powierzchni sfery o promieniu l , więc dogodnym wyborem współrzędnych, w których będziemy opisywać ruch są kąty θ , ϕ zdefiniowane jako

$$x = l \sin \theta \cos \phi, \quad y = l \sin \theta \sin \phi, \quad z = l \cos \theta. \quad (50)$$

Do rozwiązania zadania wystarczy nam znajomość dwóch całek ruchu dla powyższego układu. Istotnie, ponieważ składowa magnetyczna siły Lorentza nie wykonuje pracy, więc w dowolnym momencie ruchu

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = \text{const}. \quad (51)$$

*Fakt ten można uzasadnić ściślej korzystając z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych (tj. funkcji spełniających równanie Laplace'a). Istotnie z zasady maksimum funkcja f harmoniczna w obszarze $D \subset \mathbb{R}^3$ może osiągać wartości ekstremalne tylko na brzegu ∂D tego obszaru. Rozpatrzmy zatem dowolną krzywą gładką l łączącą pewien punkt p na powierzchni odosobnionego naładowanego przewodnika Γ z punktem w nieskończoności, która jest normalna do powierzchni przewodnika w p . Z powyższego twierdzenia pochodna V wzdłuż tej krzywej nie może zmieniać znaku, gdyż V osiąga wartości ekstremalne odpowiednio na powierzchni przewodnika i w punkcie w nieskończoności. W takim razie $\forall p \in \Gamma : \text{sgn}\left(\frac{\partial V}{\partial l}\Big|_p\right) = -\text{sgn}(V_0) \vee \frac{\partial V}{\partial l}\Big|_p = 0$, gdzie V_0 jest potencjałem przewodnika względem nieskończoności, ale jednocześnie $4\pi\sigma(p) = -\frac{\partial V}{\partial l}\Big|_p$, skąd otrzymujemy tezę.

†Dokładna wartość poszukiwanej pojemności wynosi $C = R\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)$. Patrz np. Yu. Ya. Iossel', E. S. Kochanov and M. G. Štrunskiy, *The Calculation of Electrical Capacitance*, s.163

Jednocześnie, zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego i wzorem na siłę Lorentza mamy

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = qB\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} = qB\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}}) = qBz\dot{\mathbf{r}}, \quad (52)$$

gdzie skorzystaliśmy z reguły BAC–CAB i faktu, że $0 = \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{dt} = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}$. Z powyższego mamy zatem

$$\frac{d}{dt} \left(J_z - \frac{qBz^2}{2} \right) = 0, \quad (53)$$

gdzie

$$J_z = [\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}]_z = ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta. \quad (54)$$

Otrzymaliśmy zatem drugą całkę ruchu

$$ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta - \frac{qBz^2}{2} = \text{const.} \quad (55)$$

Oznaczmy powyższe całki ruchu odpowiednio przez \mathcal{E} i \mathcal{J} . Korzystając z warunków początkowych mamy oczywiście $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$ i $\mathcal{J} = 0$. Jednocześnie przypomnijmy, że $z = l \cos \theta$ i $\dot{z} = -\dot{\theta}l \sin \theta$. Z powyższego mamy

$$\dot{\phi} = \frac{qB}{2ml^2} \frac{z^2}{\sin^2 \theta}, \quad (56)$$

co po podstawieniu daje

$$\dot{z}^2 l^2 = v^2 l^2 - v^2 z^2 - \left(\frac{qB}{2m} \right)^2 z^4. \quad (57)$$

Maksymalne z musi odpowiadać $\dot{z} = 0$, zatem

$$z_m = \frac{m\sqrt{2}}{qB} \sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + \left(\frac{qBlv}{m} \right)^2}}. \quad (58)$$

Zauważmy, że $z_m \leq l$. Istotnie, $v^4 + \frac{q^2 B^2 l^2 v^2}{m^2} \leq \left(v^2 + \frac{q^2 B^2 l^2}{2m^2} \right)^2$, przy czym równość zachodzi tylko dla $qBl = 0$ ■

Szkic rozwiązania zadania 9.

Siła elektryczna działająca na dielektryk umieszczony wewnątrz kondensatora o pojemności C , na którym utrzymywane jest stałe napięcie U jest dana wzorem

$$F_e = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}. \quad (59)$$

Rozpatrzmy zatem układ opisany w treści zadania w momencie, w którym ciecz jest na wysokości x licząc od dolnych krawędzi kondensatora. Podzielmy obszar wewnątrz kondensatora na dwie części: 1 - obszar, w którym nie występuje ciecz; 2 - obszar, w którym występuje ciecz o gęstości ρ i względnej

przenikalności elektrycznej ϵ_r . Natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami wynosi $E = U/d$ i nie zależy od rozpatrywanego obszaru. Pojemność układu jest równa

$$C = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{a}{d} x + \epsilon_0 \frac{a^2}{d}. \quad (60)$$

Korzystając zatem ze wzoru na siłę elektryczną działającą na dielektryk mamy

$$F_e = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{U^2 a}{2d}. \quad (61)$$

Jeżeli ciecz sięga górnych krawędzi okładek, siła ciężkości działająca na ciecz wynosi $F_c = \rho a^2 g d$. Z warunków równowagi musi zachodzić $F_e = F_c$, zatem

$$\rho a^2 g d = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{U^2 a}{2d}, \quad (62)$$

skąd otrzymujemy

$$\epsilon_r = 1 + \frac{2\rho a g d^2}{\epsilon_0 U^2}, \quad (63)$$

co stanowi rozwiązanie zadania ■

Szkic rozwiązania zadania 10.

W najwyższym punkcie trajektorii składowa y-owa prędkości pocisku wynosi 0. Niech $(v_{10})_y$, $(v_{20})_y$, $(v_{30})_y$ oznaczają y-owe składowe prędkości początkowych odpowiednich fragmentów w momencie wybuchu. Z zasady zachowania pędu mamy

$$(v_{10})_y + (v_{20})_y + (v_{30})_y = 0. \quad (64)$$

Zależność $y(t)$ danego fragmentu ma postać

$$y_i(t) = h_0 + (v_{i0})_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (65)$$

gdzie h_0 oznacza szukaną wysokość początkową, będącą jednocześnie wysokością, na jakiej eksplodował pocisk. Ponieważ 2 z 3 fragmentów spadły po takim samym czasie, ich składowe y-owe prędkości początkowych musiały być takie same. Bez straty ogólności możemy przyjąć $(v_{10})_y = (v_{20})_y$. Równanie (5) ma zatem postać $2(v_{10})_y = -(v_{30})_y$. Mamy zatem dwie zależności:

$$\begin{cases} y_1(t) = y_2(t) = h_0 + (v_{10})_y t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y_3(t) = h_0 - 2(v_{10})_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}. \quad (66)$$

Niech τ oznacza czas, po którym spadł pierwszy fragment. Z treści zadania mamy zatem

$$\begin{cases} y_1(2\tau) = 0 = h_0 + 2(v_{10})_y \tau - 2g\tau^2 \\ y_3(\tau) = 0 = h_0 - 2(v_{10})_y \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 \end{cases}, \quad (67)$$

skąd otrzymujemy

$$h_0 = \frac{5}{4} g \tau^2,$$

co stanowi rozwiązanie zadania ■

Szkic rozwiązania zadania 11.

1) W przypadku, gdy powierzchnia stożka jest pomalowana na czarno światło jest całkowicie pochłaniane. Niech ΔF oznacza siłę od promieniowania działającą na niewielką powierzchnię stożka. Niech p oznacza całkowity pęd fotonów uderzających w tę niewielką powierzchnię. Z II zasady dynamiki Newtona mamy

$$\Delta F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p}{\Delta t}. \quad (68)$$

Niech n oznacza całkowitą liczbę fotonów uderzających w stożek. Całkowita siła działająca na stożek w przypadku czarnej powierzchni wynosi więc

$$F_1 = n \Delta F = \frac{np}{\Delta t}. \quad (69)$$

2) W przypadku drugim światło jest całkowicie odbijane. Niech ΔF_\perp oznacza siłę od promieniowania działającą na niewielką powierzchnię stożka i prostopadłą do niej. Z II zasady dynamiki mamy

$$\Delta F_\perp = \frac{\Delta p_\perp}{\Delta t} = \frac{2p_\perp}{\Delta t}, \quad (70)$$

gdzie p_\perp – składowa całkowitego pędu fotonów uderzających w niewielką powierzchnię stożka, prostopadła do powierzchni bocznej stożka. Z zależności geometrycznych $p_\perp = p \sin(\theta/2)$, gdzie θ jest kątem rozwarcia stożka. Ponieważ na przyspieszenie stożka ma wpływ jedynie składowa siły równoległa do osi stożka i ponieważ, ponownie z zależności geometrycznych, $(\Delta F_\perp)_{os} = \Delta F_\perp \sin(\theta/2)$, zatem całkowita siła od promieniowania działająca na stożek w przypadku powierzchni odbijającej światło wynosi

$$F_2 = \frac{2np \sin^2(\theta/2)}{\Delta t}. \quad (71)$$

Rozpatrzmy stosunek

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{a_2}{a_1} = 0.7 = \frac{2np \sin^2(\theta/2)/\Delta t}{np/\Delta t} = 2 \sin^2(\theta/2), \quad (72)$$

skąd otrzymujemy odpowiedź.

$$\theta = 2 \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} \approx 72.5^\circ,$$

co stanowi rozwiązanie zadania ■

Szkic rozwiązania zadania 12.

Zauważmy, że kula o indeksie 4 będzie znajdować się na symetralnej odcinka L . Ze względu na symetrię możemy zatem rozpatrywać tylko kule po jednej stronie, gdyż wszystko będzie analogiczne po stronie drugiej. Ponumerujmy więc kule po jednej stronie od 1 do 4, gdzie kula o indeksie 1 jest kulą najniższą położoną, a kula o indeksie 4 skrajną, unieruchomioną kulą. Na kulę o indeksie $1 < i < 4$ działają następujące siły: mg , $\mathbf{R}_{(i-1)i}$ i $\mathbf{R}_{(i+1)i}$, gdzie \mathbf{R}_{mn} oznacza siłę reakcji z jaką kula o indeksie m działa na kulę o indeksie n . Oczywiście z III zasady dynamiki zachodzi $|\mathbf{R}_{mn}| = |\mathbf{R}_{nm}|$. Niech α_i oznacza kąt jaki tworzy pręt między kulami i , $i+1$ z poziomem. Z treści zadania mamy $\alpha_1 = 30^\circ$. Wyznamy α_2 i α_3 . Rozpatrzmy kulę o indeksie 1. Z warunków równowagi dla tej kuli mamy

$$mg = 2R_{21} \sin 30^\circ = R_{21}. \quad (73)$$

Rozpatrzmy kulę o indeksie $1 < i < 4$. Z warunków równowagi

$$\begin{aligned} R_{(i-1)i} \cos \alpha_{i-1} &= R_{(i+1)i} \cos \alpha_i, \\ R_{(i-1)i} \sin \alpha_{i-1} + mg &= R_{(i+1)i} \sin \alpha_i. \end{aligned} \quad (74)$$

Łatwo sprawdzić, że warunek zerowania się momentu siły (np. względem osi przechodzącej przez $i+1$ kulę i prostopadłej do płaszczyzny układu) nie wprowadza żadnego dodatkowego ograniczenia.

Dla $i = 2$ mamy zatem

$$\begin{aligned} R_{12} \cos 30^\circ &= mg \cos 30^\circ = R_{23} \cos \alpha_2 \\ R_{12} \sin 30^\circ + mg &= R_{23} \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (75)$$

eliminując R_{23} z tych równań otrzymujemy

$$\tan \alpha_2 = \frac{1 + \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \sqrt{3}, \quad (76)$$

skąd $\alpha_2 = 60^\circ$ oraz $R_{23} = \sqrt{3}mg$. Analogicznie dla $i = 3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} R_{23} \cos \alpha_2 &= R_{34} \cos \alpha_3 \\ R_{23} \sin \alpha_2 + mg &= R_{34} \sin \alpha_3, \end{aligned} \quad (77)$$

skąd otrzymujemy

$$\tan \alpha_3 = \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad (78)$$

a zatem $\cos \alpha_3 = \sqrt{3}/2\sqrt{7}$. Ostatecznie zatem

$$\begin{aligned} L &= 2 \cdot l (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3) \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{21}}{\sqrt{7}} l \end{aligned} \quad (79)$$

co stanowi rozwiązanie zadania ■

Szkic rozwiązania zadania 13.

Układ możemy traktować jako pętlę o rezystancji $\mathcal{R} \approx 2\rho R/r^2$ i pojemności $\mathcal{C} \approx \epsilon_0 \pi r^2/d$. Zgodnie z regułą strumienia SEM indukowana w pętli wynosi

$$\mathcal{E} = |-\alpha\pi R^2 \dot{z}| = \alpha\pi R^2 v, \quad (80)$$

gdzie v jest szybkością pętli w danej chwili. Niech I oznacza natężenie prądu płynącego w chwili t w pętli. Zachodzi

$$\alpha\pi R^2 v(t) = IR + \frac{1}{\mathcal{C}}Q, \quad (81)$$

różniczkując po czasie otrzymujemy

$$\alpha\pi R^2 a(t) = \dot{I}\mathcal{R} + \frac{1}{\mathcal{C}}I. \quad (82)$$

Siła magnetyczna działająca na pętlę wynosi

$$F_m = 2\pi R I(t) B_s(R), \quad (83)$$

gdzie B_s jest składową radialną indukcji pola magnetycznego. Można ją w prosty sposób wyznaczyć korzystając z faktu, że dla pola magnetycznego całkowity strumień przez powierzchnię zamkniętą wynosi zero $\Phi_{\text{tot}} = 0$. Istotnie rozpatrzmy powłokę walcową z zakreslaną przez spadającą pętlę w czasie dt o wysokości $v dt = dz$ i promieniu R . Całkowity strumień przez tą powierzchnię zamkniętą wynosi

$$\Phi_{\text{tot}} = [B_z(z+dz) - B_z(z)]\pi R^2 - B_s(R) \cdot 2\pi R dz = 0, \quad (84)$$

skąd $B_s(R) = \alpha R/2$. Z drugiej zasady dynamiki mamy zatem

$$ma(t) = mg - \pi\alpha R^2 I(t). \quad (85)$$

Korzystając z (82) otrzymujemy zatem

$$\frac{\mathcal{R}}{\alpha\pi R^2} \dot{I} + \frac{1}{\mathcal{C}\alpha\pi R^2} I = g - \frac{\pi\alpha R^2}{m} I. \quad (86)$$

Jest to niejednorodne liniowe równanie różniczkowe postaci

$$A_1 \dot{I} + B_1 I + C_1 = 0, \quad (87)$$

gdzie

$$A_1 = \frac{\mathcal{R}}{\alpha\pi R^2}, \quad B_1 = \frac{\pi\alpha R^2}{m} + \frac{1}{\mathcal{C}\alpha\pi R^2}, \quad C_1 = -g. \quad (88)$$

Szkic rozwiązania z uwzględnieniem warunku brzegowego $I(0) = 0$ ma postać

$$I(t) = -\frac{C_1}{B_1} \left(1 - e^{-\frac{B_1}{A_1}t}\right). \quad (89)$$

Z (85) otrzymujemy zatem

$$a(t) = g + \frac{\pi\alpha R^2}{m} \frac{C_1}{B_1} \left(1 - e^{-\frac{B_1}{A_1}t}\right) = A + Be^{Ct}, \quad (90)$$

gdzie poszukiwane stałe są dane wzorami

$$\begin{aligned} A &= g - B \\ B &= \frac{\alpha^2 \pi^2 R^4 \mathcal{C} g}{\alpha^2 \pi^2 R^4 \mathcal{C} + m} \\ C &= -\frac{\alpha^2 \pi^2 R^4 \mathcal{C} + m}{m\mathcal{R}\mathcal{C}}, \end{aligned} \quad (91)$$

gdzie $\mathcal{R} = 2\rho R/r^2$ i $\mathcal{C} = \epsilon_0 \pi r^2/d$ ■

Szkic rozwiązania zadania 16.

Wskazania woltomierza nie są równe rzeczywistym napięciom na rezystorach ze względu na obecność wewnętrznej rezystancji miernika. Nie wpływa ona na pomiar SEM idealnego ogniwa, a zatem $\mathcal{E} = 6\text{ V}$, natomiast wpływa na pomiar napięcia na rezystorach, gdyż zmienia natężenie prądu pobieranego ze źródła. Niech V_α ($\alpha = 1, 2$) oznacza napięcie zmierzone na rezystorze R_α . Bez strat ogólności możemy przyjąć $V_1 = 2\text{ V}$ i $V_2 = 3\text{ V}$. Niech I, I' oznaczają odpowiednio natężenie prądu pobieranego ze źródła w przypadku podłączenia woltomierza do R_1 lub R_2 . Z napięciowego prawa Kirchhoffa

$$\mathcal{E} = V_1 + IR_2 = V_2 + I'R_1. \quad (92)$$

Niech R_0 oznacza opór wewnętrzny miernika. Z prawa Ohma mamy

$$\begin{aligned} I &= V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right), \\ I' &= V_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_0} \right). \end{aligned} \quad (93)$$

Łącząc powyższe równania otrzymujemy

$$\begin{aligned} V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right) &= \frac{\mathcal{E} - V_1}{R_2}, \\ V_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_0} \right) &= \frac{\mathcal{E} - V_2}{R_1}. \end{aligned} \quad (94)$$

Dzieląc odpowiednio przez V_1 i V_2 i odejmując stronami otrzymujemy

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = \frac{\mathcal{E} V_2 R_1 - V_1 V_2 R_1 - \mathcal{E} V_1 R_2 + V_1 V_2 R_2}{V_1 V_2 R_1 R_2}. \quad (95)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (96)$$

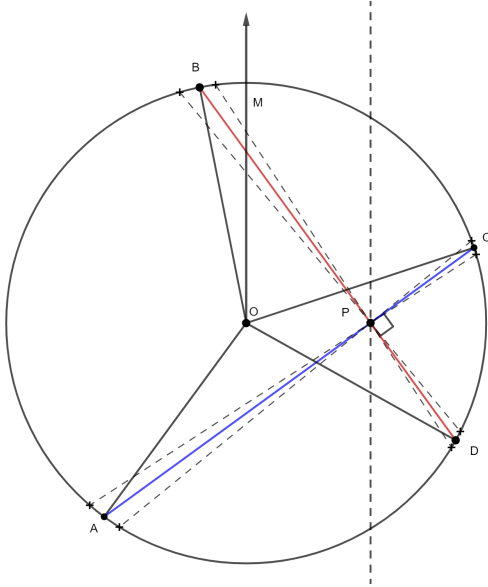
Rzeczywiste napięcia U_α na rezystorach są więc dane wzorami

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{\mathcal{E} V_1}{V_1 + V_2} = 2.4\text{ V}, \\ U_2 &= \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{\mathcal{E} V_2}{V_1 + V_2} = 3.6\text{ V}, \end{aligned} \quad (97)$$

co kończy rozwiązanie zadania ■

Szkic rozwiązania zadania 28.

Problem jest dość typowy. Można go znaleźć w wielu podręcznikach akademickich do podstaw elektrodynamiki (patrz np. D.J. Griffiths „Podstawy elektrodynamiki”) jako pokaz wykorzystania magnetycznego potencjału skalarnego (sic!). Poniżej prezentujemy elementarne rozwiązania będące w zasięgu wiedzy licealnej.



Przede wszystkim stwierdzamy, że jednorodna magnetyzacja $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{x}}$ odpowiada prądowi powierzchniowemu $\mathbf{K}(\theta) = M\sin\theta\hat{\mathbf{z}}$ płynącemu po powierzchni cylindra (to powinno zostać umieszczone jako *wskazówka* wraz z definicją prądu powierzchniowego), gdzie θ jest kątem między \mathbf{r} i $\hat{\mathbf{x}}$. Jednocześnie ponieważ cylinder jest bardzo długi, więc możemy traktować problem jako dwuwymiarowy (tj. tak jakby cylinder był nieskończony). Rozważmy układ w płaszczyźnie xy . Skorzystamy z faktu, iż pole magnetyczne wytwarzane przez nieskończony prostoliniowy przewód, przez który płynie prąd o natężeniu $I = K dl$ wynosi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K dl}{2\pi s}, \quad (98)$$

gdzie s jest odległością od przewodu. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz cylindra w rozważanej płaszczyźnie. Poprowadźmy proste prostopadłe AC i BD przechodzące przez P oraz zakresmy niewielkie łuki o środkach A, B, C, D takie, że kąty o wierzchołku P wyznaczone przez ich końce są sobie równe i wynoszą $d\omega$. Niech $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$ oznaczają kąty skierowane między osią x (kierunkiem magnetyzacji), a odcinkami odpowiednio OA, OB, OC i OD , gdzie

O jest środkiem okręgu. Przyczynek do całkowitego pola magnetycznego od pary punktów A, C wynosi

$$dB_1 = \frac{\mu_0 M}{2\pi} \left(\frac{dl_A \sin\theta_A}{AP} - \frac{dl_C \sin\theta_C}{CP} \right), \quad (99)$$

gdzie dl oznacza długość zakreślonego łuku wokół danego punktu. Przyczynek ten jest skierowany wzdłuż BD . Analogicznie przyczynek od pary B, D wynosi

$$dB_2 = \frac{\mu_0 M}{2\pi} \left(\frac{dl_B \sin\theta_B}{BP} - \frac{dl_D \sin\theta_D}{DP} \right) \quad (100)$$

i jest skierowany wzdłuż AC . Z założenia o równości kątów wyznaczonych przez zaznaczone łuki mamy jednak

$$\begin{aligned} \frac{dl_A}{AP} &= \frac{dl_C}{CP} = \frac{d\omega}{\cos\angle OAC}, \\ \frac{dl_B}{BP} &= \frac{dl_D}{DP} = \frac{d\omega}{\cos\angle OBD}, \end{aligned} \quad (101)$$

przy czym oczywiście $\cos\angle OBD = \sin(\frac{\theta_D - \theta_B}{2})$ i $\cos\angle OAC = \sin(\frac{\theta_C - \theta_A}{2})$. Z powyższego zatem

$$\begin{aligned} dB_1 &= \frac{\mu_0 M d\omega}{2\pi} \frac{\sin\theta_A - \sin\theta_C}{\sin\frac{\theta_C - \theta_A}{2}}, \\ dB_2 &= \frac{\mu_0 M d\omega}{2\pi} \frac{\sin\theta_B - \sin\theta_D}{\sin\frac{\theta_D - \theta_B}{2}}. \end{aligned} \quad (102)$$

Udowodnimy, że wypadkowa tych przyczynków jest skierowana równoległe do osi x . Istotnie niech γ oznacza kąt skierowany między prostą równoległą do x przechodzącą przez P , a prostą AC . Udowodnimy, że

$$\frac{dB_1}{dB_2} = \frac{\sin\theta_A - \sin\theta_C}{\sin\theta_B - \sin\theta_D} \frac{\sin\frac{\theta_D - \theta_B}{2}}{\sin\frac{\theta_C - \theta_A}{2}} = \tan\gamma. \quad (103)$$

Istotnie łatwo pokazać (np. korzystając z liczb zespolonych), że

$$\tan\gamma = \frac{\sin\theta_C - \sin\theta_A}{\cos\theta_C - \cos\theta_A} = -\frac{\cos\theta_D - \cos\theta_B}{\sin\theta_D - \sin\theta_B}, \quad (104)$$

z powyższego po prostych przekształceniach mamy zatem

$$\tan\gamma = \tan\frac{\theta_B + \theta_D}{2} \quad (105)$$

oraz

$$\theta_A + \theta_C = \theta_B + \theta_D + (2k - 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (106)$$

Jednocześnie po prostych przekształceniach

$$\frac{\sin\theta_A - \sin\theta_C}{\sin\theta_B - \sin\theta_D} \frac{\sin\frac{\theta_D - \theta_B}{2}}{\sin\frac{\theta_C - \theta_A}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta_A + \theta_C}{2}}{\cos\frac{\theta_B + \theta_D}{2}}, \quad (107)$$

czyli z powyższego

$$\frac{\sin \theta_A - \sin \theta_C}{\sin \theta_B - \sin \theta_D} \frac{\sin \frac{\theta_D - \theta_B}{2}}{\sin \frac{\theta_C - \theta_A}{2}} = \tan \gamma \quad \square \quad (108)$$

W takim razie przyczynę od czwórki punktów A, B, C, D jest skierowany zgodnie z wektorem magnetyzacji i wynosi

$$dB = \sqrt{dB_1^2 + dB_2^2} = \frac{\mu_0 M d\omega}{2\pi} \cdot 2 = \frac{\mu_0 M}{\pi} d\omega. \quad (109)$$

Całkowita indukcja pola magnetycznego w punkcie P wynosi zatem

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M}, \quad (110)$$

czyli wewnątrz cylindra pole magnetyczne jest jednorodne ■

Szkic rozwiązania zadania 29.

Pole elektryczne światła odbitego od płytki będzie superpozycją pól elektrycznych promieni świetlnych odbitych kolejno od górnej i dolnej powierzchni płytki. Ponieważ drgania pola elektrycznego są koherentne, zatem aby obliczyć wypadkowe natężenie światła musimy najpierw obliczyć wypadkowe pole elektryczne (nie możemy dodawać natężeń światła). Ponieważ $I \sim E^2$, więc amplituda pola elektrycznego promienia po przejściu przez granicę powietrze-szkło wyniesie $\sqrt{r}E_0$, a promienia odbitego $\sqrt{1-r}E_0$. Wprowadźmy parametr $l = \sqrt{1-r}$. Pole elektryczne promienia odbitego od górnej powierzchni od strony powietrza wynosi

$$lE_0 \sin(-\omega x/c + \omega t + \pi) = lE_0 \sin(\phi + \pi). \quad (111)$$

Pole elektryczne n -tego promienia wychodzącego z płytki po górnej stronie po n odbiciach od dolnej powierzchni płytki wynosi

$$E_n = rl^{2n-1}E_0 \sin(\phi + n\delta), \quad (112)$$

gdzie $\delta = \frac{4\pi}{\lambda}h$ (h - grubość płytki). Istotnie amplituda pola elektrycznego promienia po przejściu przez granicę powietrze-szkło wynosi $\sqrt{r}E_0$, każde odbicie mnoży ją przez czynnik l , a odbić tych jest zawsze nieparzyste wiele, dodatkowo przy przejściu ponownym przez granicę szkło-powietrze należy ją pomnożyć przez czynnik \sqrt{r} . Wypadkowe pole elektryczne światła odbitego od płytki wynosi więc

$$E_{\text{tot}} = lE_0 \sin(\phi + \pi) + rE_0 \left[l \sin(\phi + \delta) + l^3 \sin(\phi + 2\delta) + \dots \right]. \quad (113)$$

Podstawiając $h = \lambda/4$ otrzymujemy $\delta = \pi$ zatem

$$E_{\text{tot}} = -lE_0 \sin \phi + rE_0 \sin \phi \left[(-l - l^5 - l^9 - \dots) + (l^3 + l^7 + \dots) \right]. \quad (114)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe sumie dwóch szeregów geometrycznych, które z łatwością można obliczyć

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= -lE_0 \sin \phi + rE_0 \sin \phi \frac{-l}{1+l^2} \\ &= -E_0 \sin \phi \frac{l+l^3+rl}{1+l^2} \\ &= -E_0 \sin \phi \frac{2l}{1+l^2}. \end{aligned} \quad (115)$$

Amplituda pola elektrycznego światła odbitego wynosi zatem

$$E_0 \frac{2l}{1+l^2}. \quad (116)$$

Natężenie światła odbitego jest więc równe

$$I_o = I \frac{4l^2}{(1+l^2)^2} = 4I \frac{1-r}{(2-r)^2}. \quad (117)$$

Oczywiście ze względu na zachowanie energii natężenie światła przechodzącego przez płytkę jest równe

$$I_p = I - I_o = I - 4I \frac{1-r}{(2-r)^2} \quad \blacksquare \quad (118)$$

Szkic rozwiązania zadania 36.

Droga optyczna światła wewnątrz kuli jest dana przez

$$\begin{aligned} c(t_B - t_A) &= \int_{r_A}^{r_B} n(r) \sqrt{1+r^2\phi'(r)^2} dr \\ &= \int_{r_A}^{r_B} F(\phi', r) dr. \end{aligned} \quad (119)$$

Zgodnie z zasadą Fermata cała ta musi być stacjonarna, zatem z tw. Eulera-Lagrange'a musi zachodzić

$$\frac{\partial F}{\partial \phi'} = P = \text{const.}, \quad (120)$$

skąd

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{P}{r \sqrt{n^2(r)r^2 - P^2}}. \quad (121)$$

Dla zadanej trajektorii zachodzi

$$\phi(r) = \arcsin \left(\frac{r^2 - R^2}{2rb} \right), \quad (122)$$

skąd

$$n(r) = \frac{2P\sqrt{R^2 + b^2}}{r^2 + R^2}. \quad (123)$$

Całkę ruchu P wyznaczymy z warunku $n(R) = 1$, skąd $P = R^2/\sqrt{R^2 + b^2}$, zatem

$$n(r) = \frac{2}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \quad \blacksquare \quad (124)$$

Szkic rozwiązania zadania 40.

W rozwiązaniu kładę $c = 1$.

Niech β_e , β_p , β_ν oznaczają prędkości poszczególnych cząstek, a \mathcal{E}_e , \mathcal{E}_p , \mathcal{E}_ν – ich energie relatywistyczne. Z zasady zachowania czterowektora energii–pędu mamy

$$-\frac{m_e\beta_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = \frac{m_p\beta_p}{\sqrt{1-\beta_p^2}} + \frac{m_\nu\beta_\nu}{\sqrt{1-\beta_\nu^2}} \quad (125)$$

oraz

$$m_n = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_\nu. \quad (126)$$

Podnosząc pierwsze równanie skalarnie do kwadratu i korzystając z zależności

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\mathcal{E}^2}} \quad (127)$$

otrzymujemy

$$\mathcal{E}_e^2 - m_e^2 = \mathcal{E}_p^2 - m_p^2 + \mathcal{E}_\nu^2 - m_\nu^2 + 2\mathcal{E}_p\mathcal{E}_\nu\beta_p\beta_\nu \cos \Psi, \quad (128)$$

gdzie Ψ jest kątem między β_p i β_ν . Ponieważ $\cos \Psi \leq 1$, więc z powyższego otrzymujemy nierówność

$$\mathcal{E}_e^2 - m_e^2 \leq \mathcal{E}_p^2 - m_p^2 + \mathcal{E}_\nu^2 - m_\nu^2 + 2\mathcal{E}_p\mathcal{E}_\nu\beta_p\beta_\nu. \quad (129)$$

Jednocześnie podnosząc równanie (126) do kwadratu mamy

$$(m_n - \mathcal{E}_e)^2 = \mathcal{E}_p^2 + \mathcal{E}_\nu^2 + 2\mathcal{E}_p\mathcal{E}_\nu. \quad (130)$$

Z powyższego zatem

$$m_n(2\mathcal{E}_e - m_n) \leq (m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2) - 2\mathcal{E}_p\mathcal{E}_\nu(1 - \beta_p\beta_\nu), \quad (131)$$

czyli

$$\mathcal{E}_e \leq \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2 - m_\nu^2}{2m_n} - \frac{m_pm_\nu}{m_n} \frac{1 - \beta_p\beta_\nu}{\sqrt{(1-\beta_p^2)(1-\beta_\nu^2)}}. \quad (132)$$

Zauważmy, że

$$1 - \beta_p\beta_\nu = \frac{(1 - \beta_p)(1 + \beta_\nu) + (1 + \beta_p)(1 - \beta_\nu)}{2}, \quad (133)$$

skąd

$$\begin{aligned} \frac{1 - \beta_p\beta_\nu}{\sqrt{(1-\beta_p^2)(1-\beta_\nu^2)}} &= \\ &= \frac{1 - \beta_p\beta_\nu}{\sqrt{(1-\beta_p)(1+\beta_\nu)}\sqrt{(1+\beta_p)(1-\beta_\nu)}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1-\beta_p)(1+\beta_\nu)}}{\sqrt{(1+\beta_p)(1-\beta_\nu)}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1+\beta_p)(1-\beta_\nu)}}{\sqrt{(1-\beta_p)(1+\beta_\nu)}} \geq 1, \end{aligned} \quad (134)$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z elementarnej nierówności dla dodatnich liczb rzeczywistych

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \quad (135)$$

W takim razie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &\leq \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2 - m_\nu^2}{2m_n} - \frac{m_pm_\nu}{m_n} = \\ &= \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2}{2m_n} \\ &\approx \frac{m_n^2 - m_p^2}{2m_n} \approx 1.29 \text{ MeV} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (136)$$