למידה והסקה סטטיסטית ת״ב 1.

שאלה 1:

$$\frac{\theta y - b(\theta)}{\phi} + c(y,\phi)$$

1. בינומי שלילי עם פרמטר r ידוע

$$P(Y) = \binom{y+r-1}{y}(1-p)^y p^r$$

$$\ln f_\theta(y) = y\log(1-p) + r\log p + \log\binom{y+r-1}{y}$$

$$\theta = \log(1-p)$$

$$e^\theta = 1-p \rightarrow p = 1-e^\theta \rightarrow \log p = \log(1-e^\theta)$$

$$b(\theta) = -r\log(1-e^\theta)$$ כפי

$$\phi = 1$$

$$c(y,\phi) = \log\binom{y+r-1}{y}$$

2. לא במשפחה המעריכית מכיוון שהתומך תלוי ב-θ

3. לא במשפחה המעריכית מכיוון ש $\sup \in \{-\infty,\infty\}$ ואנו דורשים שהתומך יהיה חסום מ-0.

$$f(y) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}$$

4

$$\ln(f) = \alpha \ln\beta + (\alpha-1)\ln y - \beta y - \ln(\Gamma(\alpha))$$

$$\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha} y + \ln\beta\right) + c(y) \qquad c(y) = (\alpha-1)\ln(y)$$

$$-\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha} y - \ln\beta\right) + c(y) \rightarrow \theta = \frac{\beta}{\alpha}, \ \phi = -1/\alpha$$

$$b(\theta) = \ln(\beta)$$

סעיף 5

$$f(y;\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}e^{-\beta y}\cdot y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$supp\in[0,\infty)$

~~support~~

ותלוי ב θ .

$\theta=\alpha$

$$\ln(f_\alpha(y;\alpha,\beta))=\alpha\cdot\ln\beta-\beta y+(\alpha-1)\cdot\ln y-\ln(\Gamma(\alpha))$$

כיוון הינו נתון ולכן מתמטית כל ביטוי שתלוי ב β נלכד במילה const

$$=\underbrace{\alpha\cdot const}_{d(\alpha)}-\underbrace{const\cdot y}_{S(y)}+\underbrace{(\alpha-1)}_{c(\theta)}\cdot\underbrace{\ln y}_{T(y)}-\underbrace{\ln(\Gamma(\alpha))}_{d(\alpha)}$$

~~אמר~~

כאשר β קבוע

כלומר ~~מתקיים~~ מקיים את הגדרת המשפחה האקספוננציאלית קנונית.

סעיף 6

$$f(y;p,q)=\frac{y^{p-1}\cdot(1-y)^{q-1}}{B(p,q)}\qquad \theta=p$$

$supp\in(0,1)$

כלומר לא תלוי ב- p

$$\ln(f(y;p,q))=(p-1)\cdot\ln(y)+(q-1)\cdot\ln(1-y)-\ln(B(p,q))$$

נניח ש q ב- const

$$\ln(f(y;p,q))=\underbrace{(p-1)}_{C(p)}\cdot\underbrace{\ln(y)}_{T(y)}+\underbrace{const\cdot\ln(1-y)}_{S(y)}-\underbrace{\ln(B(p))}_{d(p)}$$

כלומר מקיים את הגדרת הפיזור ואת תלות ה- supp

לכן שייך למשפחה המעריכית

שאלה 2

$$L_{abs}(Y, f(x)) = |Y - f(x)|$$

(1) הוכח ש ה- EPE המינימלית מתקבלת כאשר $f(x) = MEDIAN(Y/X=x)$

$$EPE = E_{X,Y}[L_{abs}] = E_{X,Y}\left[\,|Y - f(x)|\,\right]$$

משפט ההחלקה

$$\overset{=}{\downarrow} \quad E_X\Big[\underbrace{E_{Y/X}\left[|Y - f(x)| \setminus X = x\right]\Big]}_{\text{רק החלק הזה תלוי ב } f(x) \text{ לכן נביא אותו למינימום}}$$

$$E_{Y|X}\left[|Y - f(x)| \setminus X = x\right]$$

נסמן $f_{Y|X}(y|x=x)$ זהו הפילוג של Y בהינתן $X=x$

נסמן את $f(x) = c$

$$\overset{=}{\downarrow} \int_Y |y - c| \cdot f_{Y|X}(y \setminus x=x)\,dy$$

$$= \int_Y \sqrt{(y-c)^2} \cdot f_{Y|X}(y \setminus x=x)\,dy$$

נגזור לפי c ונשווה לאפס

$$\int_Y \frac{-\cancel{2}(y-c)}{\cancel{2}\sqrt{(y-c)^2}} \cdot f_{Y|X}(y \setminus x=x)\,dy = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_Y \frac{y-c}{|y-c|} f_{Y|X=x}(y \setminus X=x)\,dy = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{y \geq c} 1 \cdot f_{Y|X=x}(y \setminus x=x) + \int (-1) \cdot f_{Y|X=x}(y \setminus x=x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(Y \geq c \setminus X=x) = P(Y < c \setminus X=x) = 0.5$$

מכיוון שאלו הסתברויות משלימות שיוויון מתקבל רק כאשר שניהם שווים 0.5

כלומר $c^* = Median(Y/X=x)$

חלק ג

$$L(Y, f(x)) = \begin{cases} \tau (Y - f(x)) & Y - f(x) > 0 \quad \text{הנה באיזון כלפי לקר} \\ -(1-\tau)(Y - f(x)) & \text{אחרת} \end{cases}$$

ש EPE ימוזער באמצעות $f^*(x)$ שווה. ל-τ אחוזון ה-τ של ההתפלגות $P(Y|X=x)$

$$EPE = \underset{X,Y}{E}\left[L(Y, f(x))\right] \underset{\text{החלקה}}{=} E_X\left[E_{Y|X}\left[L(Y, f(x))\right]\right]$$

בפועל נרצה למזער רק את החלק הפנימי מכיוון שרק הוא תלוי ב $f(x)$

בנוסף נסמן $f(x) = c$ ונסמן את ההתפלגות של Y ב $h(x)$

$$E_{Y|X}\left[L(Y, f(x))\right] = \int_{Y>c} \tau (Y - c) h_{Y|X}(Y)\, dY$$

$$+ \int_{Y<c} -(1-\tau)(Y - c) h_{Y|X}(Y)\, dY$$

נגזור לפי c ונשווה לאפס

$$\frac{\partial E_{Y|X}\left[L(Y, f(x))\right]}{\partial c} = \int_{Y>c} -\tau h_{Y|X}(Y)\, dY + \int_{Y<c} (-1)(1-\tau) h_{Y|X}(Y)\, dY$$

$$= -\tau \cdot \int_{Y>c} h_{Y|X}(Y)\, dY + (1-\tau) \int_{Y<c} h_{Y|X}(Y)\, dY$$

נשים לב שאלו פשוט הפונקציות המצטברות של $P(Y>c|X=x)$ ובאופן דומה ההסתברות המשלימה של

$$= -\tau \cdot P(Y > c | X = x) + (1-\tau) \cdot P(Y < c | X = x)$$

נשווה לאפס ונקבל שאחוזון הערכה כצפוי

$$\tau \cdot P(Y>c \mid X=x) = (1-\tau)\cdot P(Y<c \mid X=x)$$

בנוסף ידוע ש

$$P(Y>c \mid X=x) + P(Y<c \mid X=x) = 1$$

נסמן: $p = P(Y<c \mid X=x)$

נקבל

$$\tau \cdot (1-p) = (1-\tau)\cdot p$$

$$\tau - \cancel{\tau p} = p - \cancel{\tau p}$$

$$\boxed{p = \tau}$$

כלומר $f^*(x) = c^*$ מתקבל כאשר ההסתברות ש $Y<c$ בהינתן x שווה למעשה ל- τ

מ.ש.ל