שאלה 2

$$L_{abs}(Y, f(x)) = |Y - f(x)|$$

(1) הוכח ש- EPE המינימלית מתקבל כאשר $f(x) = MEDIAN(Y/X=x)$

$$EPE = E_{X,Y}[L_{abs}] = E_{X,Y}[|Y - f(x)|]$$

לפי ההחלקה

$$\overset{=}{\downarrow} \quad E_X\Big[\underbrace{E_{Y/X}[|Y - f(x)| \setminus X = x]}_{}\Big]$$

רק החלק הזה תלוי ב f(x) לכן נביא אותו למינימום

$$E_{Y\setminus X}[|Y - f(x)| \setminus X = x]$$

נסמן $f_{Y\setminus X}(Y\setminus X=x)$ זוהי הצפיפות של Y בהינתן $X=x$

נסמן את $f(x) = c$

$$= \int_Y |Y - c| \cdot f_{Y\setminus X}(Y \setminus X=x)\, dy$$

$$= \int_Y \sqrt{(Y-c)^2} \cdot f_{Y\setminus X}(Y \setminus X=x)\, dy$$

נגזור לפי c ונשווה לאפס

$$\int_Y \frac{-\cancel{2}(Y-c)}{\cancel{2}\sqrt{(Y-c)^2}} \cdot f_{Y\setminus X}(Y\setminus X=x)\, dy = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_Y \frac{Y-c}{|Y-c|} f_{Y\setminus X=x}(Y \setminus X=x)\, dy = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{Y \geq c} 1 \cdot f_{Y\setminus X=x}(Y\setminus X=x) + \int (-1) \cdot f_{Y\setminus X=x}(Y \setminus X=x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$P(Y \geq c \setminus X=x) = P(Y < c \setminus X=x) = 0.5$$

סיכוי שווה 0.5

מכיון שאלו הסתברויות משלימות שויון מתקבל רק כאשר $c^* = Median(Y/X=x)$ נשווה

חלק ג

$$L(Y, f(x)) = \begin{cases} \tau (Y - f(x)) & Y - f(x) > 0 \\ -(1-\tau)(Y - f(x)) & \text{אחרת} \end{cases}$$

הנוגה באמון כללי לעקר

ה EPE ימוזער כאשר $f^*(x)$ שווה ל- τ אחוזון ה-τ של ההתפלגות $P(Y \mid X=x)$

$$EPE = \underset{X,Y}{E}\left[L(Y, f(x))\right] \underset{\text{החלקה}}{=} E_X\left[E_{Y \mid X}\left[L(Y, f(x))\right]\right]$$

כלומר נרצה למזער רק את התוחלת הפנימית מכיון שרק היא תלויה ב $f(x)$

בנוסף נסמן $f(x) = c$ ונסמן את ההתפלגות של Y ב $h(x)$

$$E_{Y \mid X}\left[L(Y, f(x))\right] = \int_{Y>c} \tau (Y - c)\, h_{Y \mid X}(Y)\, dY$$

$$+ \int_{Y<c} -(1-\tau)(Y - c)\, h_{Y \mid X}(Y)\, dY$$

נגזור לפי c ונשווה לאפס

$$\frac{\partial E_{Y \mid X}\left[L(Y, f(x))\right]}{\partial c} = \int_{Y>c} -\tau\, h_{Y \mid X}(Y)\, dY + \int_{Y<c} (-1)(1-\tau)\, h_{Y \mid X}(Y)\, dY$$

$$= -\tau \cdot \int_{Y>c} h_{Y \mid X}(Y)\, dY + (1-\tau) \int_{Y<c} h_{Y \mid X}(Y)\, dY$$

נשים לב שמה שיש באינטגרל הראשון זה $P(Y>c \mid X=x)$ ובשני ההסתברות המשלימה שלו

$$= -\tau \cdot P(Y > c \mid X = x) + (1-\tau) \cdot P(Y < c \mid X = x)$$

נשווה לאפס ונקבל שאכן הגדרת האחוזון

$$\tau \cdot P(Y>c \mid X=x) = (1-\tau)\cdot P(Y<c \mid X=x)$$

בנוסף ידוע ש

$$P(Y>c \mid X=x) + P(Y<c \mid X=x) = 1$$

נסמן: $p = P(Y<c \mid X=x)$

ונקבל

$$\tau \cdot (1-p) = (1-\tau)\cdot p$$

$$\tau - \cancel{\tau p} = p - \cancel{\tau p}$$

$$\boxed{p = \tau}$$

כלומר $f^*(x) = c^*$ מתקיים כאשר ההסתברות ש $Y < c$ בהינתן x שווה לשמרון ה- τ

מ.ש.ל.