למידה והסקה סטטיסטית ת.ב 1.

שאלה 1:

$$\frac{\theta y - b(\theta)}{\phi} + c(y,\phi)$$

א. בינומי שלילי עם פרמטר r ידוע

$$P(Y) = \binom{y+r-1}{y} (1-p)^{y} p^{r}$$

$$\ln f_\theta(y) = y\log(1-p) + r\log p + \log\binom{y+r-1}{y}$$

$$\theta = \log(1-p)$$

$$e^{\theta} = 1-p \rightarrow p = 1-e^{\theta} \rightarrow \log p = \log(1-e^{\theta})$$

$$b(\theta) = -r\log(1-e^{\theta})$$ כנדרש

$$\phi = 1$$

$$c(y,\phi) = \log\left(\frac{y+r-1}{y}\right)$$

ב- לא במשפחה המעריכית מכיוון שהתומך תלוי ב- θ

סעיף 3 יופיע לאחר סעיף 4

Scanned with CamScanner

$$f(y) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}$$ .4

$$\ln(f) = \alpha \ln\beta + (\alpha-1)\ln y - \beta y - \ln(\Gamma(\alpha))$$

$$\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha} y + \ln\beta\right) + c(y) \qquad c(y) = (\alpha-1)\ln(y)$$

$$-\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha} y - \ln\beta\right) + c(y) \rightarrow \theta = \frac{\beta}{\alpha}, \ \phi = -\frac{1}{\alpha}$$

$$b(\theta) = \ln(\beta)$$

(3) התפלגות Student t_n

$$supp \in \{-\infty, \infty\}$$

פרמטר: ν -

$$f(y;\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \left(1+\frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

$$\ln\left(f(y;\nu)\right) = \ln\left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right) - \frac{\nu+1}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{y^2}{\nu}\right)$$

לא ניתן לייצג $\Leftarrow c(\nu)\cdot T(y)$

לכן Student t_n אינו חלק מהמשפחה האקספוננציאלית.

סעיף ~~5~~

$$f(y;\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha} e^{-\beta y} \cdot y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$supp \in [0,\infty)$

~~support~~

ולא תלוי ב Θ.

$\Theta = \alpha$

$$\ln(f_\alpha(y;\alpha,\beta)) = \alpha\cdot\ln\beta - \beta y + (\alpha-1)\cdot\ln y - \ln(\Gamma(\alpha))$$

ולכן הינו קבוע ועל מניח α בגלל שתלוי ב β בלבד במילוי const

$$= \underbrace{\alpha\cdot const}_{d(\alpha)} - \underbrace{const\cdot y}_{S(y)} + \underbrace{(\alpha-1)}_{c(\theta)}\cdot\underbrace{\ln y}_{T(y)} - \underbrace{\ln(\Gamma(\alpha))}_{d(\alpha)}$$

באמצעות β קבוע

כלומר ~~...~~ מקיים את הגדרת המשפחה האקספוננציאלית כמקובל.

סעיף 6

$$f(y;p,q) = \frac{y^{p-1}\cdot(1-y)^{q-1}}{B(p,q)} \qquad \Theta = p$$

$supp \in (0,1)$

כלומר לא תלוי ב- p

$$\ln(f(y;p,q)) = (p-1)\cdot\ln(y) + (q-1)\cdot\ln(1-y) - \ln(B(p,q))$$

נתון ש q ב- const

$$\ln(f(y;p,q)) = \underbrace{(p-1)}_{C(p)}\cdot\underbrace{\ln(y)}_{T(y)} + \underbrace{const\cdot\ln(1-y)}_{S(y)} - \underbrace{\ln(B(p))}_{d(p)}$$

כלומר מקיים את הגדרת הפיזור ולא תלוי ה- supp

לכן שייך למשפחה המעריכית

שאלה 2

$$L_{abs}(Y, f(x)) = |Y - f(x)|$$

(1) הוכח ש ה- EPE המינימלית מתקבל כאשר $f(x) = MEDIAN(Y/X=x)$

$$EPE = E_{X,Y}[L_{abs}] = E_{X,Y}\left[|Y - f(x)|\right]$$

$$\overset{\text{חוק ההחלקה}}{=} E_X\Big[\underbrace{E_{Y/X}\left[|Y - f(x)| \setminus X=x\right]}_{\text{רק החלק הזה תלוי ב } f(x) \text{ לכן נביא אותו למינימום}}\Big]$$

$$E_{Y|X}\left[|Y - f(x)| \setminus X=x\right]$$

נסמן $f_{Y|X}(y|X=x)$ זוהי התפלגות של Y כאשר $X=x$

נסמן את $f(x) = c$

$$= \int_y |y - c| \cdot f_{Y|X}(y \setminus X=x)\, dy$$

$$= \int_y \sqrt{(y-c)^2} \cdot f_{Y|X}(y \setminus X=x)\, dy$$

נגזור לפי c ונשווה לאפס

$$\int_y \frac{-\cancel{2}(y-c)}{\cancel{2}\sqrt{(y-c)^2}} \cdot f_{Y|X}(y \setminus X=x)\, dy = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_y \frac{y-c}{|y-c|} f_{Y|X=x}(y \setminus X=x)\, dy = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{y \geq c} 1 \cdot f_{Y|X=x}(y \setminus X=x) + \int (-1) \cdot f_{Y|X=x}(y \setminus X=x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(Y \geq c \setminus X=x) = P(Y < c \setminus X=x) = 0.5$$

מכיון שאלו הסתברויות משלימות שיוויון מתקבל רק כאשר שניהם שווים 0.5 כלומר

$$c^* = Median(Y/X=x)$$

חלק ג

$$L(Y, f(x)) = \begin{cases} \tau (Y - f(x)) & Y - f(x) > 0 \\ -(1-\tau)(Y - f(x)) & \text{אחרת} \end{cases}$$

הנחה בשוויון כלשהו לא קרי

צ"ל EPE ימוזער כאשר $f^*(x)$ שווה ל-τ אחוזון ה-τ של ההתפלגות $P(Y|X=x)$

$$EPE = \underset{X,Y}{E}\left[L(Y, f(x))\right] \underset{\text{החלקה}}{=} E_X\left[E_{Y|X}\left[L(Y, f(x))\right]\right]$$

בכלל נרצה למזער רק את החלק הפנימי מכיוון שרק הוא תלוי ב $f(x)$

בנוסף נסמן $f(x)=c$ ונסמן את ההתפלגות של Y ב $h(x)$

$$E_{Y|X}\left[L(Y, f(x))\right] = \int_{Y>c} \tau (Y-c) h_{Y|X}(Y)\, dY$$

$$+ \int_{Y<c} -(1-\tau)(Y-c) h_{Y|X}(Y)\, dY$$

נגזור לפי c ונשווה לאפס

$$\frac{\partial E_{Y|X}\left[L(Y, f(x))\right]}{\partial c} = \int_{Y>c} -\tau h_{Y|X}(Y)\, dY + \int_{Y<c} (-1)(1-\tau) h_{Y|X}(Y)\, dY$$

$$= -\tau \cdot \int_{Y>c} h_{Y|X}(Y)\, dY + (1-\tau)\int_{Y<c} h_{Y|X}(Y)\, dY$$

נשים לב שאלו פשוט ההגדרה של ההסתברות $P(Y>c|X=x)$ ולכן גם ההסתברות המשלימה של

$$= -\tau \cdot P(Y>c|X=x) + (1-\tau) \cdot P(Y<c|X=x)$$

נשווה לאפס ונקבל שאומר הדרוש כנדרש

$$\tau \cdot P(Y>c \mid X=x) = (1-\tau)\cdot P(Y<c \mid X=x)$$

בנוסף ידוע ש

$$P(Y>c \mid X=x) + P(Y<c \mid X=x) = 1$$

נסמן: $p = P(Y<c \mid X=x)$

נקבל

$$\tau \cdot (1-p) = (1-\tau)\cdot p$$

$$\tau - \cancel{\tau p} = p - \cancel{\tau p}$$

$$\boxed{p = \tau}$$

כלומר $f^*(x) = c^*$ מתקבל כאשר ההסתברות ש $Y<c$ בהינתן x שווה לשמאל ה- τ

מ.ש.ל