Postać kanoniczna i ogólna funkcji kwadratowej - rozwiązania

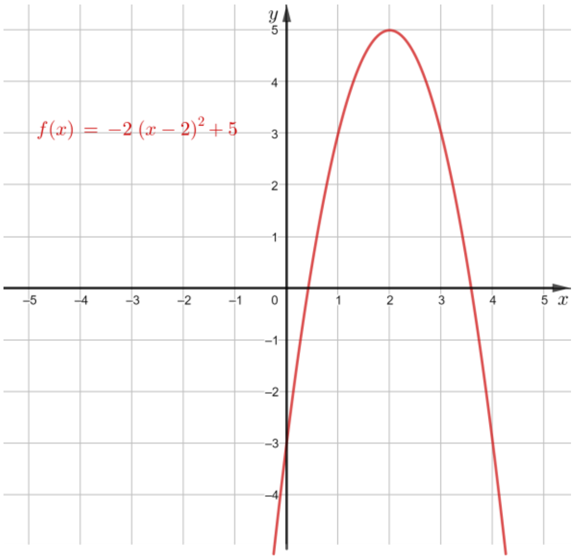
Zadanie 1. (7p) Funkcja kwadratowa f zdefiniowana jest za pomocą wzoru w postaci kanonicznej

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 5.$$

(a) Wpisz współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem funkcji f. $W = (2, 5)$

(b) Wpisz współrzędne punktu P, w którym wykres funkcji f przecina się z osią OY. $P = (0, -3)$

(c) Naszkicuj wykres funkcji f w układzie współrzędnych.



(d) Napisz równanie osi symetrii wykresu funkcji f. $x = 2$

(e) Wyznacz zbiór wartości funkcji f.
$ZW_f = (-\infty, 5\rangle$

(f) Opisz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.

Funkcja f rośnie w przedziale $(-\infty, 2\rangle$.

Funkcja f maleje w przedziale $\langle 2, \infty)$.

(g) Przekształć wzór funkcji f do postaci ogólnej.
$f(x) = -2x^2 + 8x - 3$

Zadanie 2. (3p) Wyznacz współczynniki b i c we wzorze funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + bx + c$ jeśli do wykresu tej należą punkty $A(1,3)$ i $B(-2,-6)$.

Rozwiązanie

Niech W_f oznacza wykres funkcji $y = 2x^2 + bx + c$

$$\begin{cases} A(1,3) \in W_f \Rightarrow 3 = 2 + b + c \\ B(-2,-6) \in W_f \Rightarrow -6 = 8 - 2b + c \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ -2b + c = -14 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 1 - b \\ -2b + 1 - b = -14 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 1 - b \\ -3b = -15 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

Odpowiedź: $b = 5, c = -4$

Zadanie 3. (4p) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej, wiedząc, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty, 7]$ oraz, że $f(-2) = f(4) = 4$

Rozwiązanie

$f(x) = a(x-p)^2 + q$

1. $f(-2) = f(4) \Rightarrow p = \frac{-2+4}{2} = 1 \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + q$
2. $ZW_f = (-\infty, 7] \Rightarrow q = 7 \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + 7$
3. $f(4) = 4 \Rightarrow a(4-1)^2 + 7 = 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 7$

Odpowiedź: $f(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 7$