

Boolean Cebri

Dogru ve yanlış olduğu konusunda karar verebilen fikirler hipotez olarak tanımlanır. Hipotez aynı anda hem doğru hem yanlış olamaz. Örneğin su 0° 'nın altında donar. Güneş dünya etrafında döner. Göründüğü gibi ilk değer doğru ikincisi yanlıştır. Bu nedenle bu fikirler hipotez olarak kabul edilir. Sağlıksız beslenen insanlar hastalanırlar fikrine, insanların hastalanmalarına tek etken sağlıklı beslenme olmadığından hipotez olarak değerlendirilmelidir.

Basit veya karmaşık hipotezlerin matematiksel ifadeler şeklinde ifade edilmesi ile Boole matematiğinin temeli oluşur. Boole kuralları veya matematiğinin temeli Aristo mantığının matematiksel notasyonlara uygulanması sonucu oluşur.

Herhangi bir matematiği tamamlamamız iaih bir kümeye ve bu kümede tanımlanmış işlemler ve bu işlemlerin sağlanması gereken kurallar olmalıdır. Boole matematiği 2 elemandan oluşan $B = \{0, 1\}$ kümesi ve bu kümeye üzerinde uygulanan $(+)$, (\cdot) , $(')$ işlemleri ile tanımlanır.

Boole matematiği $B = \{0, 1\}$ kümesi ile bu kümeye üzerinde tanımlanan türleme, veya, ve işlemlerine tabi tutulan $a, b, c \in B$ doğrularının uyumluluğu gereken aksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

Aksiyomlar

1) Kapalılık

$$a+b \in B$$

$$a \cdot b \in B$$

$$a' \in B$$

2) Değişme

$$a+b = b+a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

3) Birlesme

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$$a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

4) Etkisiz Eleman

$$a+0 = a$$

Lütfen işlemi

$$a \cdot 1 = a$$

Lütfen işlemi

5) Dağılma Özelliği

$$a+(b \cdot c) = (a+b)(a+c)$$

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

6) Tümlene

$$a \cdot a' = 1$$

$$a \cdot a' = 0$$

Özellikler ve Teoremler

Burada yer alan tüm özellikler ve teoremler yukarıda verilen aksiyomlar ile ispatlanabilir.

1) Yutma

$$a+1 = 1$$

$$a \cdot 0 = 0$$

2) Dönüşümre

$$(a')' = a$$

3) Sabit Kuvvet

$$a+a+\dots+a = n$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = n$$

4) Sağurma

$$a+a \cdot b = a$$

$$a(a+b) = a$$

5) De Morgan Teoremi

$$(a+b+\dots)' = a' \cdot b' \cdot \dots$$

$$(a \cdot b \cdot c \cdot \dots)' = a' + b' + c' + \dots$$

İkili işlemleri arasında ilişkiler sağlanır.

$$f'(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 1, +, \cdot) = f(x_1, x_2', \dots, x_n', 1, 0, +)$$

6) Basitleştirme

$$a+a \cdot b = a+b$$

7) Dijitalite

Bir logik ifadenin dijital ($.$) yerine (t) , ($+$) yerine (1),
 0 yerine 1 , 1 yerine 0 koynarak ve değişkenler degistirilmeden
elde edilir.

$$a+b+c+ \dots = a \cdot b \cdot c$$

$$f(x_1, x_2, \dots, 0, 1, +, \cdot)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, 1, 0, \cdot, +)$$

$$(A+B)^D = A \cdot B \quad (A \cdot B)^D = A+B$$

Nzlemler arası öncelik

- 1) parantez
- 2) üslülene
- 3) ve (.)
- 4) veya (+)

Doğruluk Tablosu

Logik devrelerde giriş değişkenlerinin olabilecekleri sayısal değerleri (kombinasyonları) ve sayısal değerlere göre çıktı durumlarını gösteren tablolar doğruluk tablosu olarak isimlendirilir. Doğruluk tablosu oluştururken giriş değişken sayısına göre durum ifadesi ortaya çıkar. n tane değişken için 2^n tane değişik durum oluşur.

$$(xy)' = x'y' \Rightarrow$$

x	y	$x+y$	$(x+y)'$	$x'y'$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

Lojik ifadeler

Lojik ifade değişkenlerin, sabitlerin ve işlemlerin kurallara uygun şekilde sonlu kombinasyonudur.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$x_i ; i \in \{0,1\}$ olmak üzere $E(x)$ şeklinde gösterilir.

$\rightarrow E_1$ ve E_2 lojik ifade ise $E_1^1, E_2^1, E_1 + E_2, E_1 \cdot E_2$ gibi tüm kombinasyonlar da bir lojik ifadedir.

Lojik ifadelerin Yapıları

Monoform ifadelerde değişkenlerin sadece kendileri ya da sadece tümleyenleri bulunur.

Biform ifadeler bir x değişkenine göre tanımlanır.

x' e göre biform bir ifade hem x hem de tümleyeni bulunur. Çarpım ifadeleri değişkenlerin sadece lojik çarpımından oluşurlar.

$$ab'cd \rightarrow \text{monom} \quad a'b' + c + d \rightarrow \text{monal}$$

\Rightarrow Toplam ifadeleri değişkenlerin sadece lojik toplamlarından oluşur.

$a' + b' + c + d \rightarrow$ monal ifade adını veriyoruz.

\Rightarrow Çarpım böleni bir çarpımdan (monomdan) bir ya da daha fazla değişken kaldırıldığında elde edilen çarpım ifadesidir.

$ab'cd \rightarrow$ bölenlerinden bazıları

$$(a)(b') (c) (d) (ab') (b'c) (acd) \dots$$

Ifadelerin Yazılma Şekilleri

- $E \in \Rightarrow$ Lojik çarpımların lojik Toplanması
(monomların veysalanması)

ÖR: $b'c + ad + a'b$

- $\Pi E \Rightarrow$ Lojik Toplamların Lojik Çarpılması
(monallerin velesmesi)

ÖR: $(b+c')(a'+d')(a+b')$

ÖR: $(a+b+c')(a+b')(a+c+d)$

Bir lojik ifadenin Değeri

$E(x)$ ifadesi $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörünün her değeri için $B = \{0, 1\}$ kümesinden bir değer üretir. Bu değerler ifadelerin doğruluk tablosunu oluşturur.

x_1	x_2	x_3	$E(x) = x_1 \cdot x_2 + x_3$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Sıra bağıntısı! B 'nın elemanları arasında zu sıra bağıntısı tanımlanır:

$0 < 1 \rightarrow 0, 1$ olen önce gelir ya da kılaklıdır diye okunur. Bu da göre x vektörleri arasında bir sıra bağıntısı tanımlanabilir.

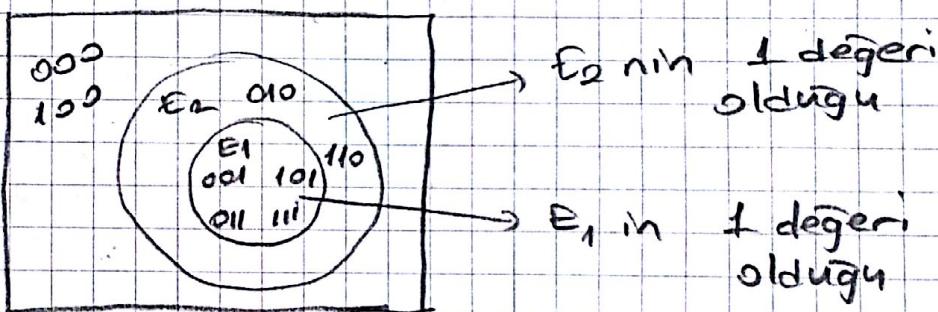
Eğer x_1 vektörünün tüm elementleri x_2 vektörünün aynı sıradaki elementlerinden yukarıda tanımlandığından küçükse ya da eşitse ($x_1 \leq x_2$) sıralaması geçerlidir.

$x_1 = 1001$ | ise $x_1 \leq x_2$ diyoruz.
 $x_2 = 1101$

x_1	x_2	x_3	$E_1(x)$	$E_2(x)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\Rightarrow E_1(x) \leq E_2(x)$$

$E_1(x)$ 'in 1 olduğu her giriş kombinasyonunda $E_2(x)$ de 1 değeri olur
 $\Rightarrow E_2(x), E_1(x)$ 'i örter.

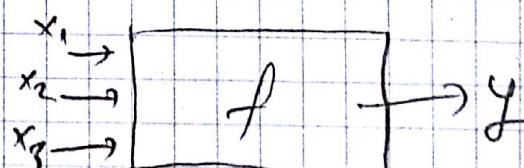


Logik Fonksiyonlar

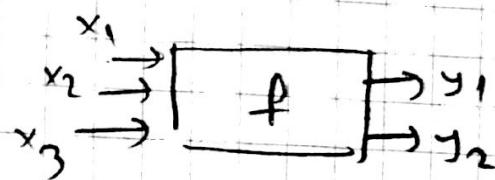
Logik fonksiyonlar 3'e ayrılır.

1) Yalın fonksiyon: Fok girişli tek çıkışlı fonksiyondur.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



2) Genel fonksiyon: Çok girişli çok çıkışlı.



3) Tümü ile tanımlanmış fonksiyon:

Bazı giriş kombinasyonları için fonksiyonun aralığı, değer belirsizdir.

ÖR: BCD sayıları bir artıran fonksiyondur.

ÖR: $f = (BCD + 1)$

BCD kod 9'a kadar

tanımlıdır. $f = BCD + 1$

buradan sonra tanımsız

I_3	I_2	I_1	I_0	$f(x)$
0	0	0	0	0001
0	0	0	1	0010
0	0	1	0	0011
0	0	1	1	0100
<hr/>				
0	1	0	0	0101
0	1	0	1	0110
0	1	1	0	0111
0	1	1	1	1000
<hr/>				
1	0	0	0	1001
1	0	0	1	0000
<hr/>				
1	0	1	0	XXXX
1	0	1	0	XXXX