Değişken Değiştirme Metodu

1. $\int \frac{3x}{1+9x^2} dx$

$u = 1 + 9x^2 \qquad du = 18xdx \qquad 3xdx = \frac{1}{6}dx$

$$\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{6} ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln|1 + 9x^2| + C$$

2. $\int (8x - 12)(4x^2 - 12x)^4 dx$

$u = 4x^2 - 12x \qquad du = (8x - 12)dx$

$$\int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{5}(4x^2 - 12x)^5 + C$$

Kısmi İntegrasyon Metodu

1. $\int 4x \cos(2 - 3x) dx$

$u = 4x \quad \rightarrow \quad du = 4dx$

$dv = \cos(2 - 3x)dx \quad \rightarrow \quad v = -\frac{1}{3}\sin(2 - 3x)$

$$4x(-\frac{1}{3}\sin(2 - 3x)) - \int -\frac{4}{3}\sin(2 - 3x)dx = -\frac{4}{3}x\sin(2 - 3x) + \frac{4}{3}\int \sin(2 - 3x)\, dx$$

$$= \frac{4}{3}x\sin(2 - 3x) + \frac{4}{9}\cos(2 - 3x) + C$$

2. $\int xe^{6x}dx$

$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$

$dv = xe^{6x}dx \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{6}e^{6x}$

$$\frac{x}{6}e^{6x} - \int \frac{1}{6}e^{6x}dx$$

$$= \frac{x}{6}e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$$

Rasyonel Fonksiyonların İntegrali

1. $\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx$

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$3x + 11 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad 5 = A(0) + B(-5) \quad \rightarrow \quad B = -1$$

$$x = 3 \quad \rightarrow \quad 20 = A(5) + B(0) \quad \rightarrow \quad A = 4$$

$$\int \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+2}dx = \int \frac{4}{x-3}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$

$$= 4\ln|x-3| - \ln|x+2| + C$$

2. $\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}dx$

$$\frac{x^2+4}{x(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-2}$$

$$x^2 + 4 = A(x+2)(3x-2) + Bx(3x-2) + Cx(x+2)$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 4 = A(2)(-2) \quad \rightarrow \quad A = -1$$

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad 8 = B(-2)(-8) \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{40}{9} = C\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) \quad \rightarrow \quad C = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$\int -\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}+\frac{\frac{5}{2}}{3x-2}dx$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+2|+\frac{5}{6}\ln|3x-2|+C$$

tanx/2 = t ile Hesaplanan İntegraller

1. $\int \frac{4}{1+\cos x}dx$

$$\tan\frac{x}{2}=t \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right))=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{4}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int 4dt=4t+C$$

$$=4\tan\frac{x}{2}+C$$

2. $\int \frac{1}{3-5\sin x}dx$

$$\tan\frac{x}{2}=t \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right))=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{3-5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{2}{3(1+t^2)-5(2t)}dt$$

$$\int \frac{2}{3t^2-10t+3}dt$$

$$\int \frac{2}{(3t-1)(t-3)}dt=\frac{A}{3t-1}+\frac{B}{t-3}$$

$$2=A(t-3)+B(3t-1)$$

$$t=3 \quad \rightarrow \quad B=\frac{1}{4}$$

$$t=\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad A=-\frac{3}{4}$$

$$\int \frac{-\frac{3}{4}}{3t-1} + \frac{\frac{1}{4}}{t-3} dt$$

$$-\frac{1}{4}\ln|3t-1| + \frac{1}{4}\ln|t-3| + C$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|3\tan\frac{x}{2} - 1\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2} - 3\right| + C$$

tanx = t ile Hesaplanan İntegraller

1. $\int \sec^4 x \tan^6 x dx$

$$\int \sec^2 x \tan^6 x \sec^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1)\tan^6 x \sec^2 x dx$$

$t = \tan x \qquad dt = \sec^2 x dx$

$$\int (t^2+1)t^6 dt = \int t^8 + t^6 dt$$

$$= \frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C$$

2. $\int \frac{\sec^4(2x)}{\tan^9(2x)} dx$

$$\int \frac{\tan^2(2x)+1}{\tan^9(2x)}\sec^2(2x)dt$$

$t = \tan(2x) \qquad dt = \sec^2(\,2x)dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t^9} dt = \frac{1}{2}\int t^{-7} + t^{-9} dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6}t^{-6} - \frac{1}{8}t^{-8}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{12}\frac{1}{\tan^6 2x} - \frac{1}{16}\frac{1}{\tan^8 2x} + C$$

$$= -\frac{1}{12}\cot^6 2x - \frac{1}{16}\cot^8 2x + C$$

Sinx ya da cosx e göre tek ($\int \sin^n x \cos^m x dx \quad (m>0, n>0)$) gibi olan fonksiyonların integralleri

1. $\int \sin^8(3z)\cos^5(3z)\,dz$

$$\int \sin^8(3z)\cos^4(3z)\cos(3z)\,dz$$

$$\int \sin^8(3z)\,[\cos^2(3z)]^2\cos(3z)dz = \int \sin^8(3z)[1-\sin^2(3z)]^2\cos(3z)dz$$

$t = \sin(3z) \qquad dt = \cos(3z)dz$

$$\frac{1}{3}\int t^8\,[1-t^2]^2 dt = \frac{1}{3}\int t^8 - 2t^{10} + t^{12} dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}t^9 - \frac{2}{1}t^{11} + \frac{1}{13}t^{13}\right) + C$$

$$= \frac{1}{27}\sin^9(3z) - \frac{2}{33}\sin^{11}(3z) + \frac{1}{39}\sin^{13}(3z) + C$$

2. $\int \sin^6 x\cos^3 x dx$

$$\int \sin^6 x\cos^2 x\cos x\,dx$$

$$\int \sin^6 x\,(1-\sin^2 x)\cos x dx$$

$t = \sin x \qquad dt = \cos x dx$

$$\int t^6(1-t^2)dt = \int t^6 - t^8 dt$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

Eğer integral $\sqrt{a^2 - x^2}$ şeklinde bir ifade içeriyorsa

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$x = 2sint \qquad dx = 2costdt$

$$\int \frac{2costdt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int dt = t + C = \arcsin\frac{x}{2} + C$$

2. $\int \sqrt{9-16x^2}$

$$\int \sqrt{9\left(1-\frac{16x^2}{9}\right)}\,dx = 3\int \sqrt{1-\left(\frac{4x}{3}\right)^2}\,dx$$

$4x = 3sint \qquad 4dx = 3costdt$

$$3\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\frac{3}{4}\cos tdt = \frac{9}{4}\int \cos^2 tdt$$

$$cos2t = 2\cos^2 t - 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2 t = \frac{cos2t+1}{2}$$

$$\frac{9}{8}\int (cost+1)\,dt = \frac{9}{8}\left(\frac{sin2t}{2}+t\right)+C$$

$$= \frac{9}{8}\,(\frac{4x}{3}\,\frac{\sqrt{9-16x^2}}{3} + \arcsin\frac{4x}{3}) + C$$

Eğer integral $\sqrt{x^2-a^2}$ şeklinde bir ifade içeriyorsa

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$x = 2\sec t \qquad dx = 2\sec t\tan tdt$

$$\int \frac{2\sec t\tan tdt}{2\sec t\sqrt{4\sec^2 t-4}} = \int \frac{\tan tdt}{2\tan t} = \frac{1}{2}t + C = \operatorname{arcsec}\frac{x}{2} + C$$

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

$x = \sec t \qquad dx = \sec t\tan tdt$

$$\int \frac{\sqrt{\sec^2 t-1}}{\sec t}\sec t\tan tdt = \int \tan^2 tdt = \int (1+\tan^2 t-1)dt$$

$$= \tan t - t + C$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec} x + C$$

Eğer integral $\sqrt{x^2+a^2}$ şeklinde bir ifade içeriyorsa

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

$x = 2\tan t \qquad dx = \frac{2dt}{\sec^2 t}$

$$\int \frac{\frac{2dt}{\sec^2 t}}{\sqrt{4+4\tan^2 t}} = \int \frac{dt}{\sec t} = \int \cos t \, dt = \sin t + C$$

$$= \sin(\arctan\frac{x}{2}) + C$$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

$x = \tan t \qquad dx = (1+\tan^2 t)dt$

$$\int \frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t\ \sqrt{1+\tan^2 t}} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\frac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$$

$\sin^2 t = u \qquad \cos t \, dt = du$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t^{-2} du = -\frac{1}{t} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ şeklindeki integraller

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}$

$$9x^2+6x-8 = 9\left(x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - 8 - 1 = 9\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right]$$

$$9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - 9 \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - 9}}$$

$$x+\frac{1}{3}=u$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9u^2-9}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9(u^2-1)}}=\int \frac{dx}{3\sqrt{u^2-1}}$$

$$du=\sec\alpha\tan\alpha\, d\alpha$$

$$\int \frac{\sec\alpha\tan\alpha\, d\alpha}{3\sqrt{\sec^2\alpha-1}}=\frac{\sec\alpha\tan\alpha\, d\alpha}{3\sqrt{\tan^2\alpha}}=\frac{1}{3}\int \sec\alpha\, d\alpha=\frac{1}{3}\ln|\sec\alpha+\tan\alpha|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x+\frac{1}{3}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-1}\right|+C$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-36x+37}}$

$$9x^2-36x+37=9\left(x^2-4x+\frac{37}{9}\right)=9\left(x^2-4x+4-4+\frac{37}{9}\right)=9\left[(x-2)^2+\frac{1}{9}\right]$$

$$=9(x-2)^2+1 \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9(x-2)^2+1}}$$

$$x=2+\frac{1}{3}\tan u$$

$$\sqrt{9(x-2)^2+1}=\sqrt{\tan(u)^2+1}=\sqrt{\sec^2 u}=\sec u$$

$$dx=\frac{1}{3}\sec^2 u du$$

$$\int \frac{1}{\sec u}(\frac{1}{3}\sec^2 u)du=\frac{1}{3}\int \sec u du$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\sqrt{9(x-2)^2+1}+3(x-2)|+C$$

$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ şeklindeki integraller

1. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2-4x-7}}dx$

$$2x^2-4x-7=2\left(x^2-2x-\frac{7}{2}\right)=2\left(x^2-2x+1-1-\frac{7}{2}\right)=2\left((x-1)^2-\frac{9}{2}\right)$$

$$=2(x-1)^2-9 \quad \rightarrow \quad \int \frac{x}{\sqrt{2(x-1)^2-9}}dx$$

$$x=1+\frac{3}{\sqrt{2}}\sec u \qquad dx=\frac{3}{\sqrt{2}}\sec u\tan u\,du$$

$$\sqrt{2(x-1)^2-9}=\sqrt{9\sec^2 u-9}=3\sqrt{\tan^2 u}=3\tan u$$

$$\int \frac{1+\frac{3}{\sqrt{2}}\sec u}{3\tan u}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sec u\tan u\right)du=\int \frac{1}{\sqrt{2}}\sec u+\frac{3}{2}\sec^2 u\,du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sec u+\tan u|+\frac{3}{2}\tan u+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(x-1)}{3}+\frac{\sqrt{2x^2-4x-7}}{3}\right|+\frac{\sqrt{2x^2-4x-7}}{2}+C$$

2. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$

$$\int \frac{2x}{x^2+6x+3^2+13-9}dx=\int \frac{2x}{(x+3)^2+4}dx$$

$$u=x+3 \qquad du=dx \qquad a=2$$

$$\int \frac{2(u-3)}{u^2+a^2}du=\int \frac{2u}{u^2+a^2}du-6\int \frac{du}{u^2+a^2}$$

$$z=u^2+a^2 \qquad dz=2udu \qquad \frac{dz}{2u}=du$$

$$\int \frac{2u}{z}\frac{dz}{2u}=\int \frac{1}{z}dz=\ln|z|=\ln|u^2+a^2|=\ln|(x+3)^2+4|$$

$$=\ln|x^2+6x+13|$$

Belirli İntegralde Değişken Değiştirme

1. $\int_{-1}^{5}(1+w)(2w+w^2)^5 dw$

$u = 2w + w^2 \qquad du = (2+2w)dw \quad \rightarrow \quad (1+w)dw = \frac{1}{2}du$

$w = -1 \quad \rightarrow \quad u = -1 \qquad\qquad w = 5 \quad \rightarrow \quad u = 35$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{35} u^5 du = \frac{1}{12}u^6\Big|_{-1}^{35}$$

$= 153188802$

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^y + 2\cos(\pi y)\, dy$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^y dy + \int_0^{\frac{1}{2}} 2\cos(\pi y)\, dy$$

$u = \pi y \qquad du = \pi dy \quad \rightarrow \quad dy = \frac{1}{\pi}du$

$y = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0 \qquad\qquad y = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad u = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^y dy + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)du = e^y\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi}\sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{1}{2}} - e^0 + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sin 0$$

$$= e^{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{2}{\pi}$$

Belirli İntegralde Kısmi İntegrasyon

1. $\int_{6}^{0}(2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\,dx$

$u = 2 + 5x \quad \rightarrow \quad du = 5dx$

$dv = e^{\frac{1}{3}x} \quad \rightarrow \quad v = 3e^{\frac{1}{3}x}$

$$\int (2+5x)e^{\frac{1}{3}x} = 3e^{\frac{1}{3}x}(2+5x) - 45e^{\frac{1}{3}x} + c = \ 15xe^{\frac{1}{3}x} - 39e^{\frac{1}{3}x} + C$$

$$\left(15xe^{\frac{1}{3}x} - 39e^{\frac{1}{3}x}\right)\Big|_{6}^{0} = -39 - 51e^{2}$$

$$= -415.8419$$

2. $\int_{-1}^{2} xe^{6x}\,dx$

$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$

$dv = e^{6x} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{6}e^{6x}$

$$\frac{x}{6}e^{6x}\Big|_{-1}^{2} - \frac{1}{6}\int_{-1}^{2} e^{6x} = \frac{x}{6}e^{6x}\Big|_{-1}^{2} - \frac{1}{36}e^{6x}\Big|_{-1}^{2} = \frac{11}{36}e^{12} + \frac{7}{36}e^{-6}$$

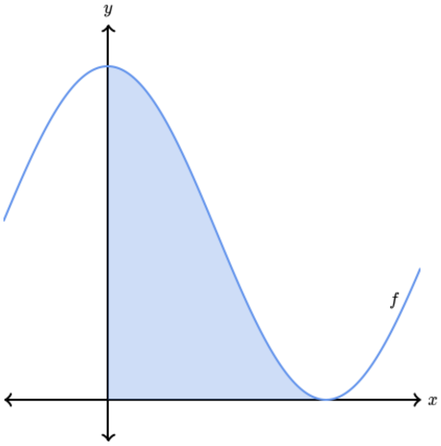
$$\int xe^{6x}dx = \frac{x}{6}e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$$

$$\left(\frac{x}{6}e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x}\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}e^{12} - \frac{1}{36}e^{12}\right) - \left(-\frac{1}{6}e^{-6} - \frac{1}{36}e^{-6}\right)$$

$$= \frac{11}{36}e^{12} + \frac{7}{36}e^{-6}$$

Eğri ile x-ekseni arasında kalan alan

1. $f(x) = 2 + 2\cos x$

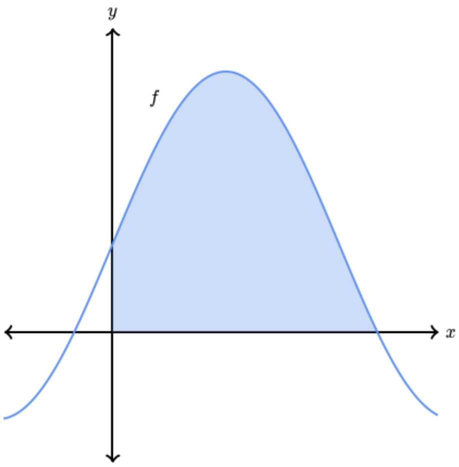


$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 + 2\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = -1 \quad \rightarrow \quad x = \pi$

$$\int_0^{\pi} (2 + 2\cos x)dx = (2x + 2\sin x)|_0^{\pi} = (2\pi + 2\sin\pi) - (2(0) + 2\sin 0) = (2\pi + 0) - 0$$

$= 2\pi$

2. $f(x) = 2\sin x + 1$



$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2\sin x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \sin x = -1 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{7\pi}{6}$

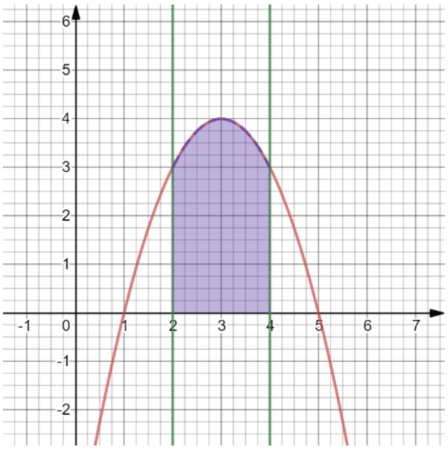
$$\int_0^{\frac{7\pi}{6}} (2\sin x + 1)dx = (-2\cos x + x)|_0^{7\pi/6} = \left(-2\cos\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}\right) - (-2\cos(0) + 0)$$

$$= \left(\sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}\right) - (-2) = \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6} + 2$$

Düşey doğrularla taranan bölgelerin alanı

1. $Analitik\ düzlemde, y = -x^2 + 6x - 5\ parabolünün\ x = 2\ ve$

$x = 4\ doğruları\ ile\ x\ ekseni\ arasında\ kalan\ bölgenin\ alanı\ kaç\ br^{2'} dir?$



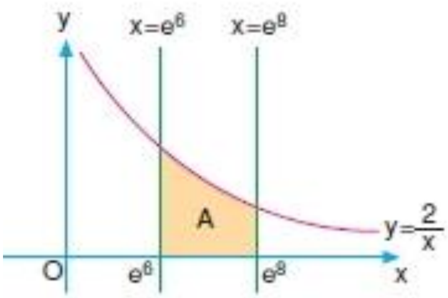
$$\int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 5)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right)\Big|_2^4 = \left(-\frac{64}{3} + 48 - 20\right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 10\right)$$

$$= \frac{22}{3} br^2$$

2. $Analitik\ düzlemde, y = \frac{2}{x}\ eğrisinin\ x = e^6\ ve$

$x = e^8\ doğruları\ ile\ x\ ekseni\ arasında\ kalan\ bölgenin\ alanı\ kaç\ br^{2'} dir?$

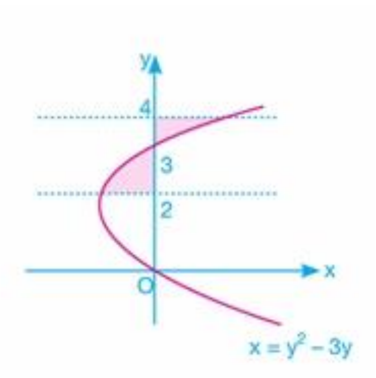


$$A = \int_{e^6}^{e^8} f(x)dx = \int_{e^6}^{e^8} \frac{2}{x} dx =$$

$$= 2\ln x|_{e^6}^{e^8} = 2\ln e^8 - 2\ln e^6 = 4\ br^2$$

Yatay doğrularla taranan bölgelerin alanı

1. $Şekildeki\ taralı\ bölgenin\ alanı\ kaç\ br^{2'}dir?$



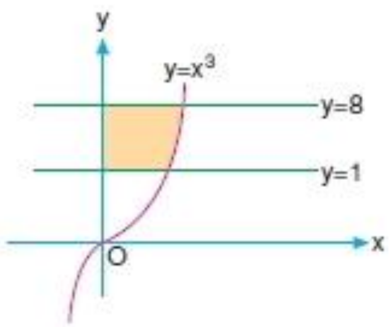
$$-\int_2^3 f(y)dy + \int_3^4 f(y)dy = \int_2^3 (y^2 - 3y)dy + \int_3^4 (y^2 - 3y)dy$$

$$= -\left(\frac{y^3}{3} - \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_2^3 + \left(\frac{y^3}{3} - \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_3^4$$

$$= 3\ br^2$$

2. $y = x^3\ eğrisi\ ile\ y = 1\ ve\ y = 8\ doğrularının\ grafiği\ verilmiştir.$

$Buna\ göre\ taralı\ bölgenin\ alanı\ kaç\ br^{2'}dir?$



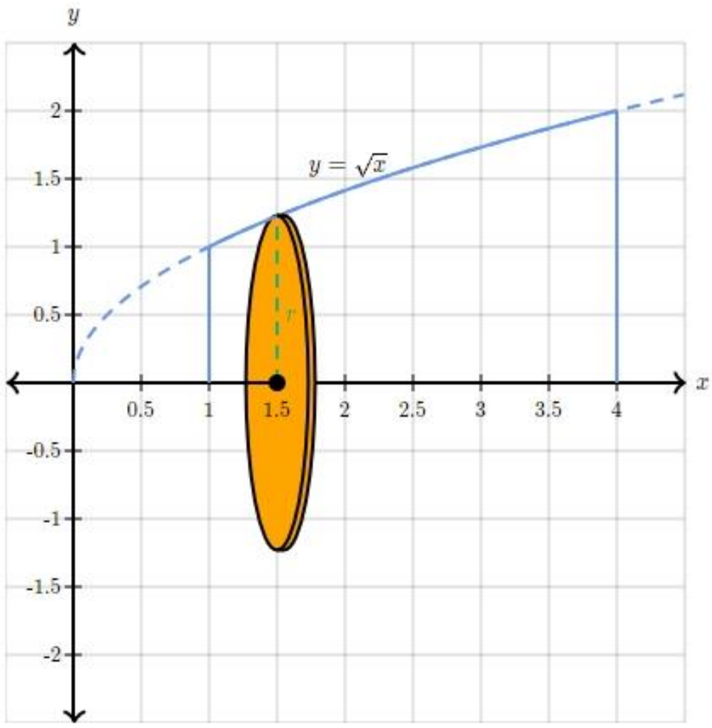
$$y = x^3 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{y}$$

$$\int_1^8 f(y)dy = \int_1^8 \sqrt[3]{y}\, dy$$

$$= \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^8 = \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^8 = \frac{3}{4} 8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} = \frac{45}{4}\ br^2$$

Disk Metodu: Bölgenin *x*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

1. Bir bölge x ekseni, x=1 doğrusu, x=4 doğrusu ve y=$\sqrt{x}$ eğrisi ile çevrelenmiştir. Bu bölge x ekseni etrafında döndürüldüğünde elde edilen cismin hacmi nedir?



Diskin yüzünün alanı → $\pi r^2 = n\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x$

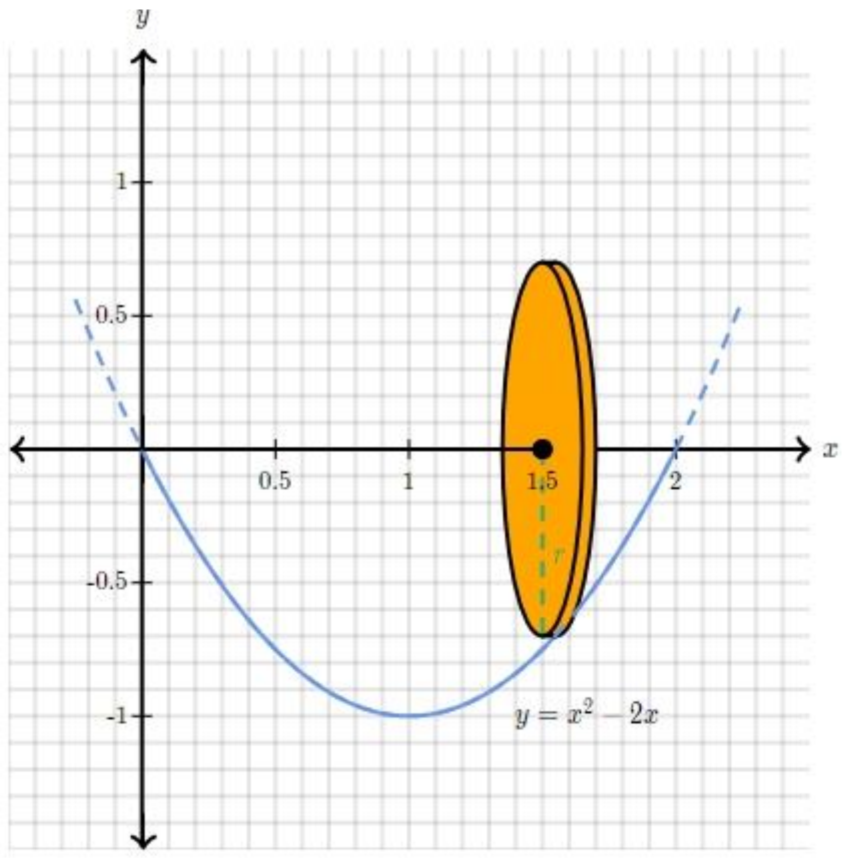
Diskin hacmi → $\pi x dx$

$$V(x) = \int_1^4 \pi x dx$$

$$= \pi \int_1^4 x dx = \pi \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 = \pi \left(8 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{15\pi}{2}\ br^3$$

2. Bir bölge x ekseni ve $y = x^2 - 2x$ eğrisi ile çevrelenmiştir. Bu bölge x ekseni etrafında döndürüldüğünde elde edilen cismin hacmi nedir?



$x^2 - 2x = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 0 \; veya \; x = 2$

Diskin yüzünün alanı → $\pi r^2 = \pi(-(x^2 - 2x))^2$

Diskin hacmi → $\pi(-(x^2 - 2x))^2 dx$

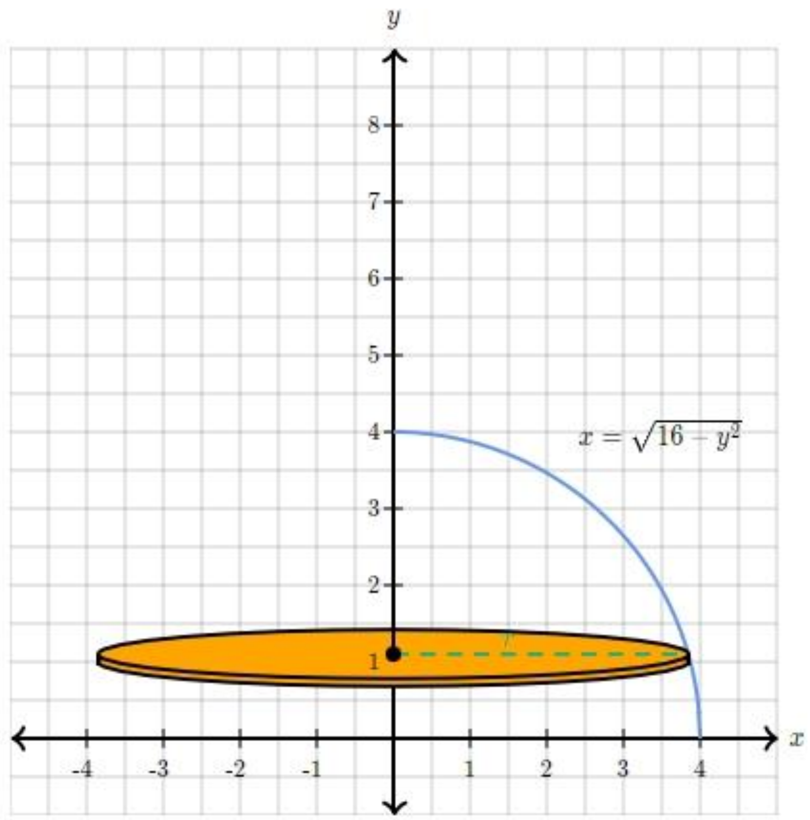
$$V(x) \int_0^2 n(-(x^2 - 2x))^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 = \pi \left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3} \right)$$

$$= \frac{16}{15} \pi \; br^3$$

Disk Metodu: Bölgenin *y*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

1. Bir bölge pozitif x ekseni, pozitif y ekseni ve x=$\sqrt{16-y^2}$ eğrisi ile çevrelenmiştir. Bu bölge y ekseni etrafında döndürüldüğünde elde edilen cismin hacmi nedir?



Diskin yüzünün alanı → $\pi r^2 = \pi\left(\sqrt{16-y^2}\right)^2$

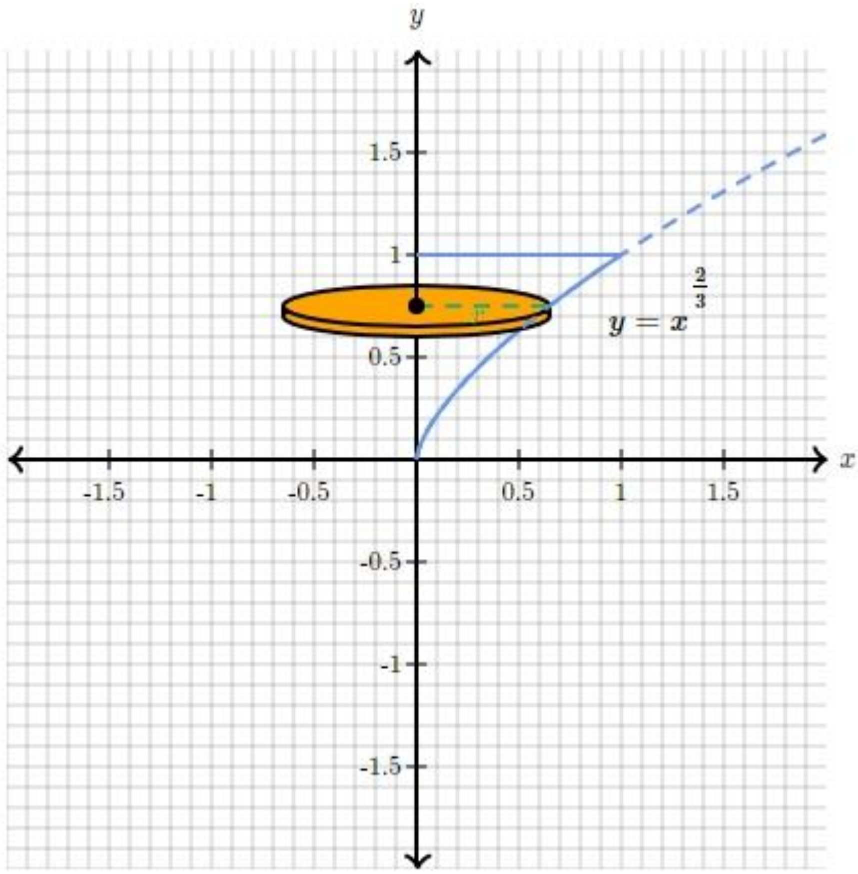
Diskin hacmi → $\pi\left(\sqrt{16-y^2}\right)^2 dy$

$$V(y) = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{16-y^2}\right)^2 dy$$

$$= \pi\int_0^4 (16-y^2)dy = \pi\left(16y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \pi\left(64 - \frac{64}{3}\right)$$

$$= \frac{128}{3}\pi\, br^3$$

2. Bir bölge y ekseni, y=1 doğrusu ve $y = x^{\frac{2}{3}}$ eğrisi ile çevrelenmiştir. Bu bölge y ekseni etrafında döndürüldüğünde elde edilen cismin hacmi nedir?



$y = x^{\frac{2}{3}} \quad \rightarrow \quad (y)^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad y^{\frac{3}{2}} = x$

Diskin yüzünün alanı → $\pi r^2 = \pi \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \pi y^3$

Diskin hacmi → $\pi y^3 dy$

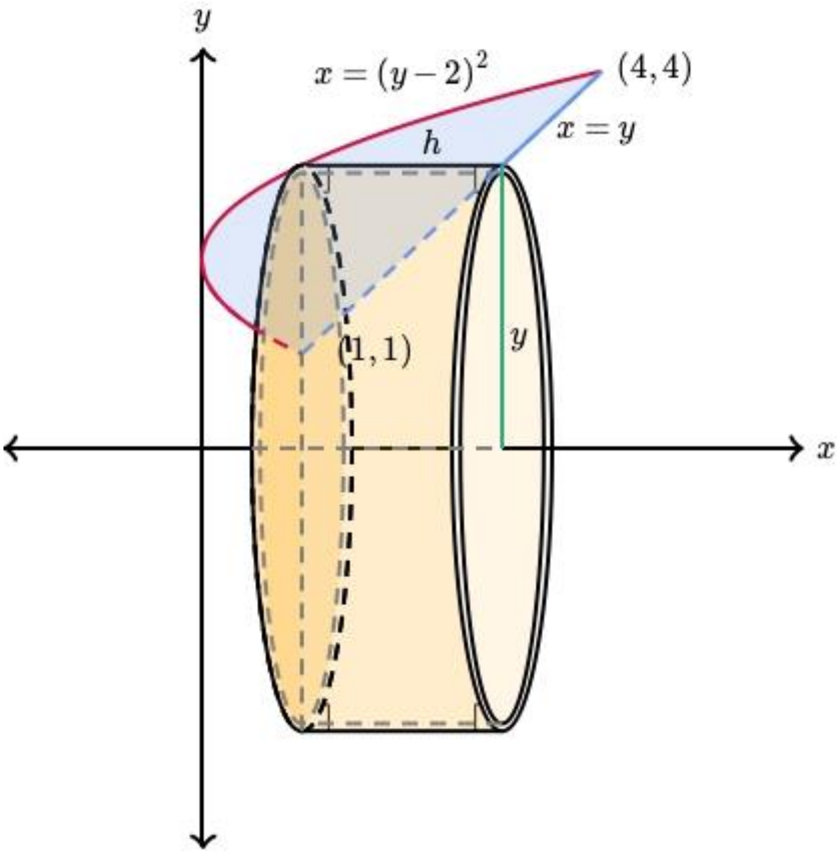
$V(y) = \int_0^1 \pi y^3 dy$

$= \pi \int_0^1 y^3 dy = \pi \left(\frac{1}{4} y^4\right)\Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4}\ br^3$

Kabuk Metodu: Bölgenin *x*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

1. Bir bölge y=x doğrusu ve $x = (y-2)^2$ parabolü ile çevrelenmiştir. Bu bölge x ekseni etrafında döndürüldüğünde elde edilen cismin hacmi nedir?



$r = y \qquad h = y - (y-2)^2$

$y = 1 \; ve \; y = 4 \; arasında$

$$V = \int_a^b 2\pi r h \, dy$$

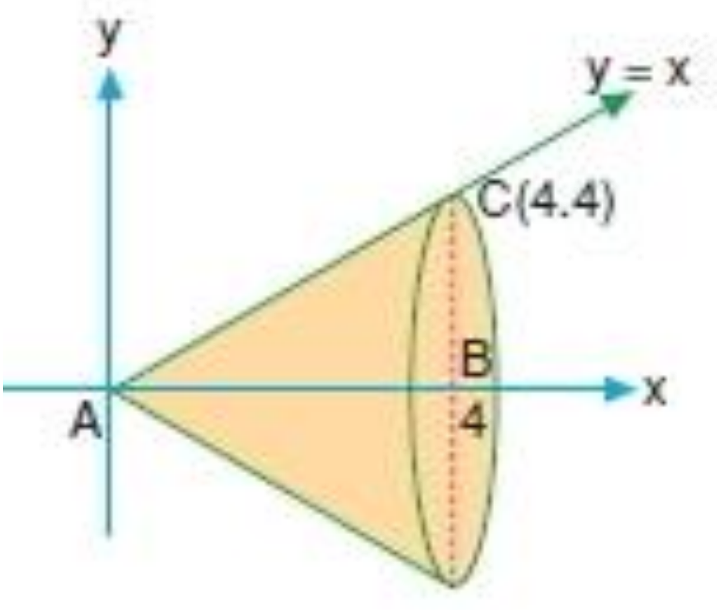
$$V = \int_1^4 2\pi(y)(y-(y-2)^2)dy = 2\pi \int_1^4 y\big(y-(y^2-4y+4)\big)dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 (5y^2 - y^3 - 4y)dy = 2\pi \left(\frac{5}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - 2y^2\right)\Big|_1^4$$

$$= 2\pi\left(\frac{320}{3} - 64 - 32 - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{4} - 2\right)\right) = 2\pi\left(\frac{45}{4}\right)$$

$$= \frac{45}{2}\pi \, br^3$$

2. Analitik düzlemde, A(0,0), B(4,0) ve C(4,4) noktalarından oluşan ABC üçgeninin x ekseni etrafında 360 derece döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi nedir?



$$V(x) = \pi \int_0^4 y^2 dx$$

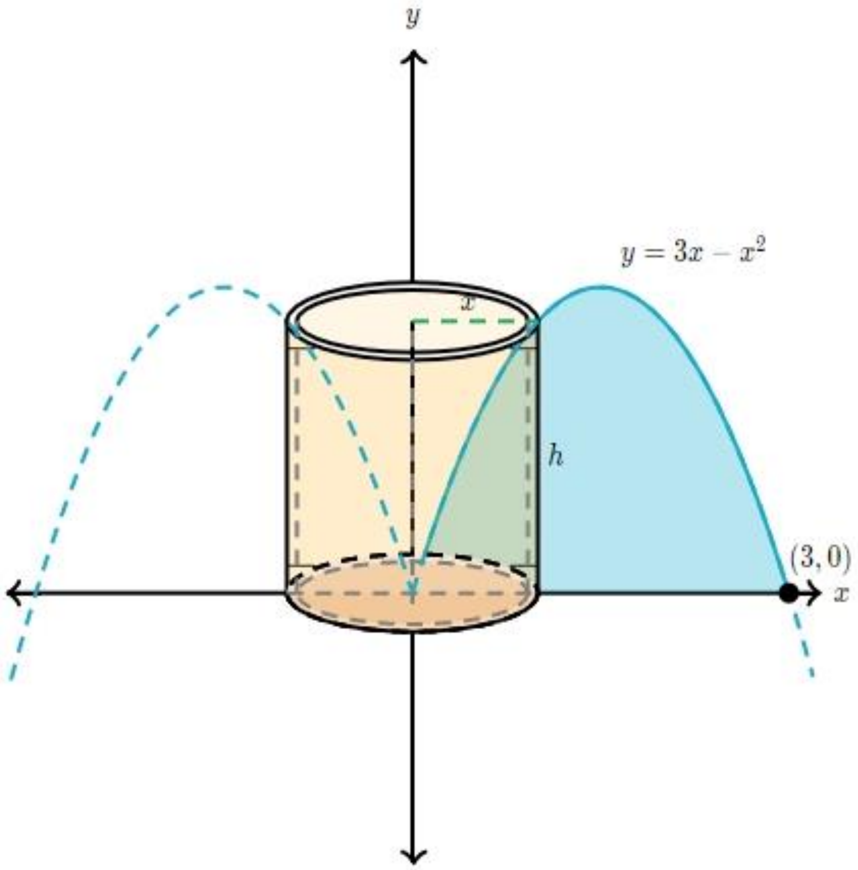
$$= \pi \int_0^4 x^2 dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4$$

$$= \frac{64\pi}{3}\ br^3$$

Kabuk Metodu: Bölgenin *y*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

1. Bir bölge x ekseni ve $y = 3x - x^2$ eğrisi ile çevrelenmiştir. Bu bölge y ekseni etrafında döndürüldüğünde elde edilen cismin hacmi nedir?



$r = x \qquad h = 3x - x^2$

$x = 0 \; ve \; x = 3 \; arasında$

$$V = \int_a^b 2\pi r h \, dx$$

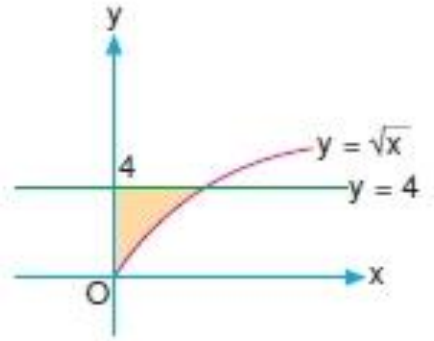
$$V = \int_0^3 2\pi x(3x - x^2)dx = 2\pi \int_0^3 (3x^2 - x^3)dx$$

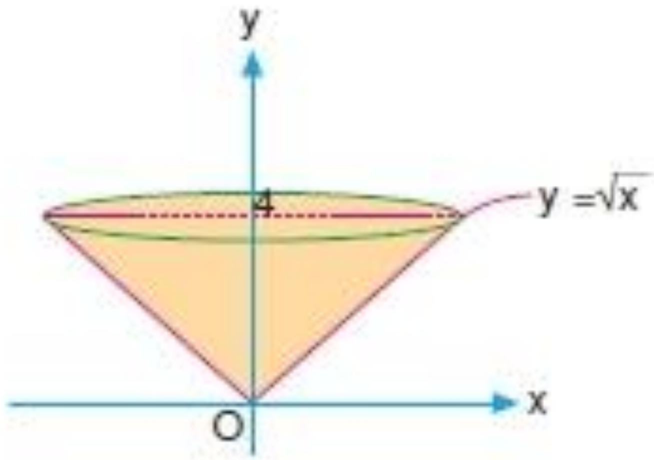
$$= 2\pi \left(x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3 = 2\pi \left(27 - \frac{81}{4}\right)$$

$$= \frac{27\pi}{2} \; br^3$$

2.

$y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 4$ doğrusunun grafiği verilmiştir. Buna göre, taralı bölgenin y ekseni etrafında 360 derece döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi nedir?





$y = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad x = y^2$

$V(y) = \pi \int_0^4 x^2 dy$

$= \pi \int_0^4 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^4 y^4 dy$

$= \pi \left(\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^4$

$= \frac{1024\pi}{5}\ br^3$

Yay uzunluğu

1. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ $aralığındaki\ y = \ln(\sec x)\ uzunluğunu\ hesaplayınız.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \tan^2 x$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\sec^2 x} = \sec x$$

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

2. $1 \leq y \leq 4$ $aralığındaki\ x = \frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\ uzunluğunu\ hesaplayınız.$

$$\frac{dx}{dy} = (y-1)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + y - 1} = \sqrt{y}$$

$$U = \int_1^4 \sqrt{y} dy$$

$$= \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4$$

$$= \frac{14}{3}$$

Yüzey Alanı

1. $y = 4 + 3x^2, 1 \leq x \leq 2$, y ekseni etrafında döndürülerek elde edilen yüzey alanını bulunuz.

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x \quad \rightarrow \quad ds = \sqrt{1 + (6x)^2} dx = \sqrt{1 + 36x^2} dx$$

$$YA = \int 2\pi x ds = \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + 36x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{54}(1 + 36x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{54}\left(145^{\frac{3}{2}} - 37^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= 88.4864$$

2. $y = \sqrt{9 - x^2}, -2 \leq x \leq 2$, x ekseni etrafında döndürülerek elde edilen yüzey alanını bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{(9 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} = \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$YA = \int 2\pi y ds = \int_{-2}^{2} 2\pi y \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\pi\sqrt{9 - x^2} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx = \int_{-2}^{2} 6\pi dx$$

$$= 24\pi$$

Birinci Tip has olmayan integral

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ integralinin yakınsak ya da ıraksak olduğunu belirleyiniz.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\ln|x|\,|_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty}\ln t = \infty$$

Limit sonlu bir sayı olmadığından ıraksaktır.

2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

$a = 0\ ise$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \int_\infty^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}t + \tan^{-1}0) = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}dx = \lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}x|_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Her iki integral de yakınsak olduğu için, baştaki integral de yakınsaktır.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$\frac{1}{1+x^2} > 0$ olduğundan verilen integral y eğrisinin altında ve

x ekseninin üstünde kalan sonsuz bölgenin alanı olarak yorumlanabilir.

İkinci Tip has olmayan integral

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x \, dx$ integralinin yakınsak ya da ıraksak olduğunu belirleyiniz.

$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sec x = \infty$ olduğundan has değildir.

$t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)$ iken $\sec t \to \infty$ ve $\tan t \to \infty$ olduğundan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx = \lim_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^t \sec x dx = \lim_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \ln |\sec x + \tan x| |_0^t$$

$$= \lim_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \ln(\sec t + \tan t) - \ln 1 = \infty$$

Dolayısıyla verilen integral ıraksaktır.

2. $\int_0^1 \ln x \, dx$ integralini hesaplayınız.

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ olduğundan has değildir.

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \ln x dx$$

$$u = \ln x \quad \to \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \quad \to \quad v = x$$

$$\int_t^1 \ln x dx = x \ln x |_t^1 - \int_t^1 dx$$

$$= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t) = -t \ln t - 1 + t$$

$$\lim_{t \to 0^+} t \ln t = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to 0^+} (-t) = 0$$

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \to 0^+} (-t \ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0$$

$$= -1$$

Çok değişkenli fonksiyonlarda tanım aralığı

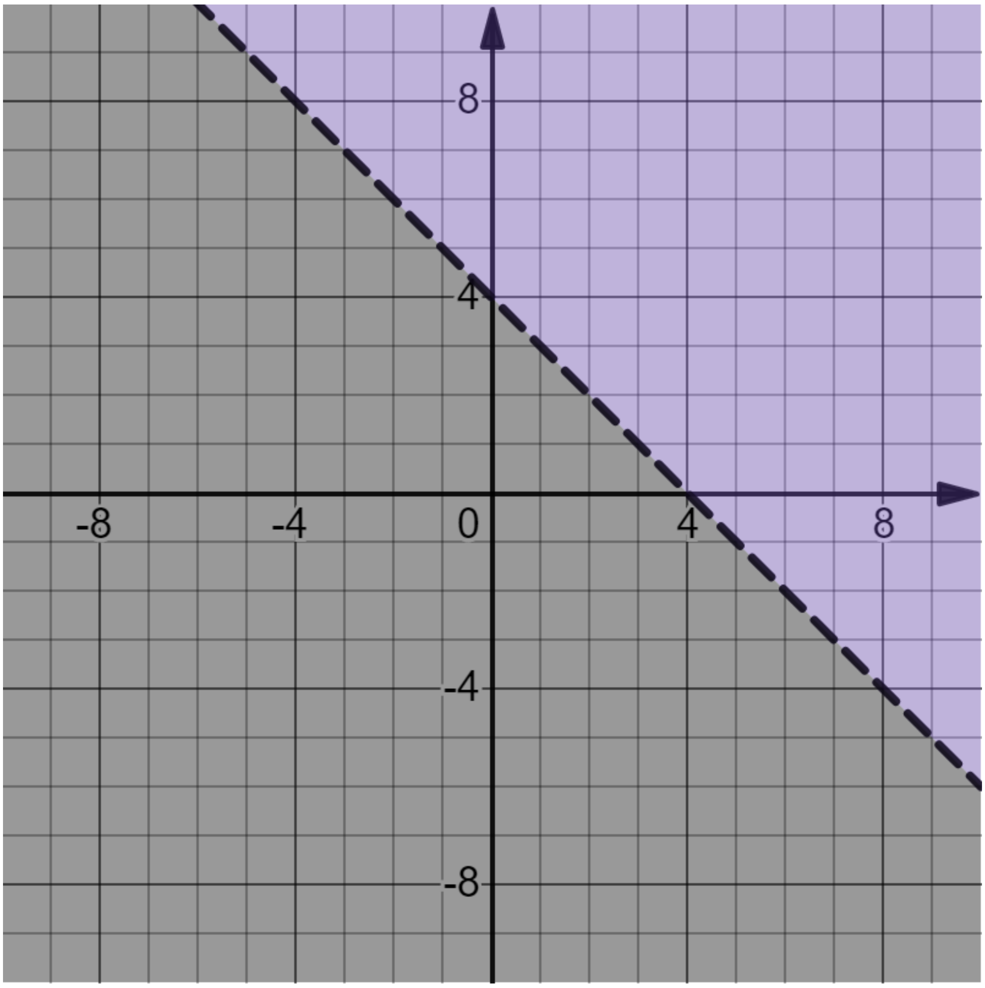
1. $f(x,y) = \frac{1}{x+y-4}$ fonksiyonun tanım kümesini bulup, çizerek gösteriniz.

$x + y - 4 \neq 0$

$x + y \neq 4$

$x = 0 \; ise \; y = 4$

$y = 0 \; ise \; x = 4$



2. $f(x,y) = \arcsin\frac{y-1}{x}$ fonksiyonun tanım kümesini bulup, çizerek gösteriniz.

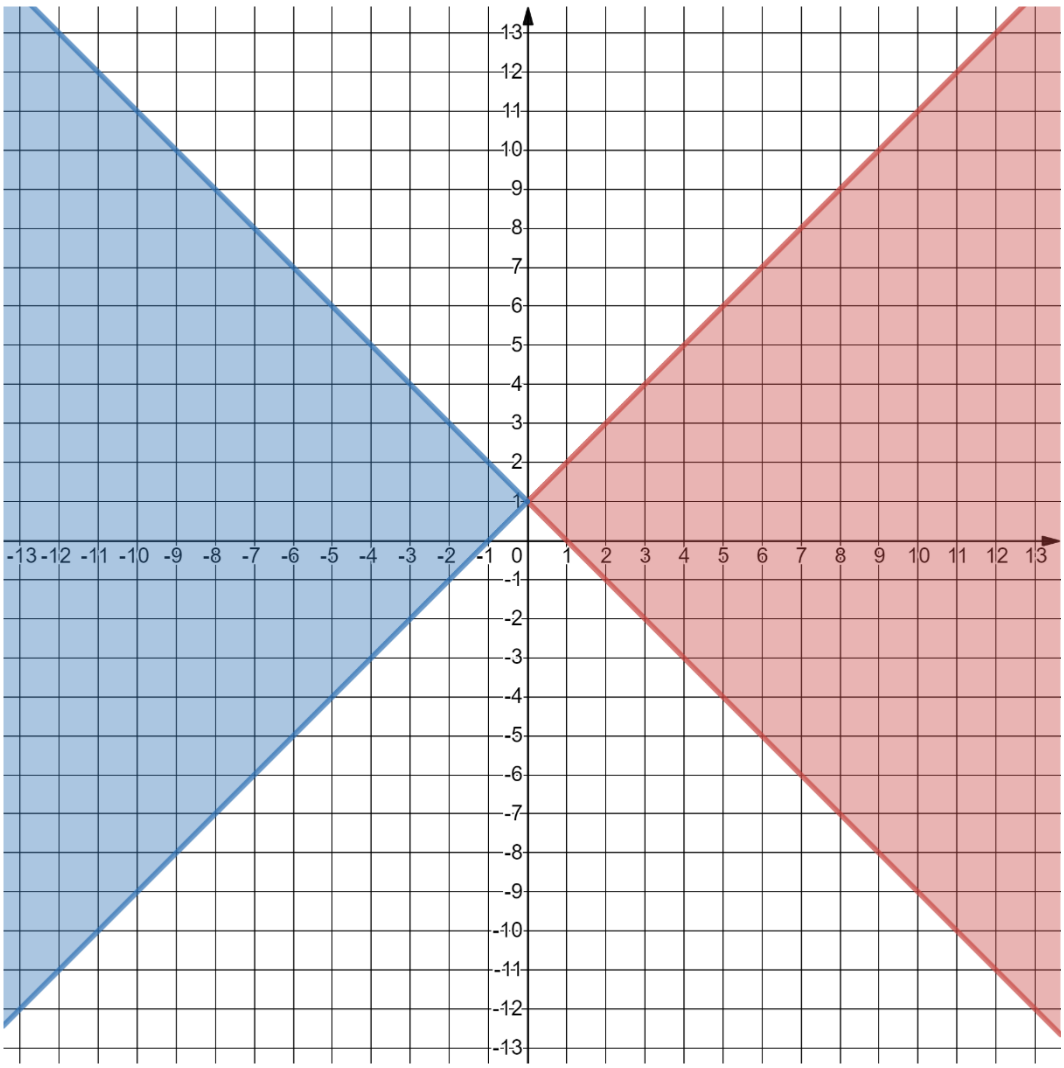
$$-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1, \quad \rightarrow \quad x \neq 0$$

$1) x > 0 \; ise$

$1 - x \leq y \leq 1 + x$

$2) x < 0 \; ise$

$1 + x \leq y \leq 1 - x$



Çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$ limitinin var olmadığını ispatlayınız.

$x = 0\ boyunca \quad \rightarrow \quad \lim\limits_{y\to 1} \frac{y-1}{\sqrt{(y-1)^2}} = \lim\limits_{y\to 1} \frac{y-1}{|y-1|}$

$\lim\limits_{y\to 1^+} \frac{y-1}{y-1} = 1$

$\lim\limits_{y\to 1^-} \frac{y-1}{1-y} = -1$

1 noktasında limit yoktur. Dolayısıyla (0,1) noktasında limit yoktur.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun (0,0) noktasında sürekli olup olmadığını belirleyiniz.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$

$x = 0\ boyunca \quad \rightarrow \quad \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

$y = 0\ boyunca \quad \rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

$y = x\ boyunca \quad \rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

y=x boyunca farklı çıktığından dolayı burada limit yoktur. Limit olmayan bir durumda ise eşitlik sağlanamayacağından dolayı bu fonksiyon sürekli değildir.