OLASILIK VE İSTATİSTİK

ÖRN: 4 mektup 5 posta kutusuna kaç farklı şekilde dağıtılır?

$$\underset{5}{\underline{1}} \cdot \underset{5}{\underline{2}} \cdot \underset{5}{\underline{3}} \cdot \underset{5}{\underline{4}} = 625$$

Permütasyon (Sıralama)

$$P(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

ÖRN: $P(6,2) \rightarrow \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$

$P(8,0) \rightarrow \frac{8!}{8!} = 1$

ÖRN: 6 kişi yanyana 3 koltuğa?

$P(6,3) \rightarrow \frac{6!}{3!} = 120$

1) Sıralı 2) Tekrarlı 3) Döner

1) ÖRN: 6 kişi yanyana

a) Kaç farklı?

$6! = 720$

b) Belli iki kişi yanyana?

(• •) 4

$5! \cdot 2! = 240$

c) Belli iki kişi yanyana olmamak şartıyla?

Tüm durumlar − İstenmeyen $= 6! - 5! \cdot 2! = 480$

ÖRN: 5 kız, 4 erkek. Her iki kız arasına bir erkek?

K E K E K E K E K $= 5! \cdot 4!$

(2) KALEM $\rightarrow$ 5! (Sıralı Permütasyon)

KARTAL $\rightarrow$ $\dfrac{6!}{2!}$ (Tekrarlı)

ÖRN) KELEBEK sözcüğünden anlamlı ve anlamsız 7 harfli ?

$$\frac{7!}{3!.2!}$$ //

K başta B sonda ?

K $\dfrac{5!}{3!}$ // B

ÖRN) 1 1 2 3 3 3 0 1 5 1 10 basamaklı kaç farklı sayı?

$$\frac{10!}{4!.3!} - \frac{9!}{4!.3!}$$ //

(sıfır başta)

(3)  n kişi $(n-1)!$ farklı biçimde otururlar.

Yuvarlak masa.

ÖRN) Anne, baba, 3 çocuk

a) Kaç farklı biçimde?

4!

b) Anne ve baba yanyana

$3!.2! = 12$ //

c) 3 çocuk yanyana

$2!.3! = 12$ //

Kombinasyon (Seçim)

$$\binom{n}{x} = C(n,x) = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!.2!} = \frac{6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}.2!} = 15$$

Özellik

① $\binom{n}{0} = 1$ ③ $\binom{n}{1} = n$

② $\binom{n}{n} = 1$

④ $\binom{n}{x} = \binom{n}{y}$ eğer 1) $x=y$ ise
2) $x+y=n$ ise

⑤ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

ÖRN) 8 kişi arasından 3 kişi ?

$$\binom{8}{3} = \frac{8.7.\cancel{6}}{\cancel{3.2}.1} = 56$$

ÖRN) Bir torbada 4 mavi, 5 yeşil top var. Torbadan alınan 3 toptan 2sinin mavi, 1nin yeşil olma durumlarının sayısı?

$$\binom{4}{2}\binom{5}{1} = \frac{\cancel{4}^{2}.3}{\cancel{2.1}} \cdot 5 = 30$$

Dağılım

1. durum   n tane farklı nesne
r tane farklı kutu

$$\frac{1.\ nesne}{r} \cdot \frac{2.\ nesne}{r} \cdot \ldots \cdot \frac{n.\ nesne}{r} = r^n$$

2. durum   n özdeş nesne
r farklı kutuya

$$\binom{n+r-1}{n} \text{ veya } \binom{n+r-1}{r-1}$$

ÖRN? 4 özdeş bilye 3 farklı kutuya kaç farklı?

$$\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6.5.\cancel{4}.\cancel{3}}{\cancel{4}.\cancel{3}.2.1} = 15$$

ÖRN? 8 özdeş bilye 5 farklı kutuya her kutuda en az bir bilye bulunması şartıyla?

1 2 3 4 5

8 - 5 = 3 kaldı

Kalan 3 için

$$\binom{3+5-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7.\cancel{6}.5}{\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 35$$

Olasılık

$0 \leq$ olasılık ≤ 1

$$\text{Olasılık değeri} = \frac{\text{İstenen durum sayısı}}{\text{Tüm durumların sayısı}}$$

→ Olay

→ örnek uzay

$0 \leq P(A) \leq 1$

$P(A')$ = A olayının gerçekleşmemesi

$$\boxed{P(A) + P(A') = 1}$$

PARA

ÖRN) 5 para atıldığında 2 yazı 3 tura gelme olasılığı?

$\boxed{YYTTT}$ $\frac{5!}{2!.3!} \Rightarrow \frac{\frac{5!}{2!.3!}}{2^5} = \frac{5}{16}$

ÖRN) 6 para. En az 1 yazı gelme olasılığı?

$1 - \boxed{\text{istenmeyen olasılık}} \Rightarrow$

⇓

Hepsinin tura olması $= \frac{1}{64}$

$= 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

ZAR

ÖRN) 2 zar atılıyor. üste gelen sayıların toplamı 8?

$\frac{5}{36}$

(2,6) (5,3)
(3,5) (6,2)
(4,4)

ÖRNK (3K 4Y 5M) Torbadan rastgele 2 top alınıyor.
Birinin mavi, diğerinin yeşil olma olasılığı?

MY veya YM

$\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{20}{132} + \frac{20}{132} = \frac{40}{132} = \frac{10}{33}$

⇒ Her renkten bir top alınmış olma olasılığı?

KYM → 3! = 6
KMY
YMK
YKM
MKY
MYK

$\cancel{6}^{3} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{4}}{11} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{10}_{\cancel{2}}} = \frac{3}{11}$

Permütasyon içeren olasılık sorusu

⇒ KERTENKELE harfleri ile 10 harfli kelime yazılacak.
Bu kelimelerin R ile başlayıp E ile bitme olasılığı?

$\frac{\text{İstenen}}{\text{Tüm durumlar}} = \frac{\frac{8!}{2!.3!}}{\frac{10!}{2!.4!}}$ //

⇒ Anne, Baba ve 3 çocuk yuvarlak masa.
Anne ile babanın yanyana oturmama olasılığı?

oturmama ↓ Tüm d. − Yanyana oturma

$\frac{(5-1)! - 3!.2!}{(5-1)!}$ //

Kombinasyon içeren Olasılık Sorusu

⇒ Ali ve Velinin de içinde olduğu 8 kişiden 3 kişi seçilecek. Alinin seçilenler içinde olup, velinin olmadığı?

$$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{3}}$$

A var

~~V~~ yok

6 kişi kaldı

⇒ 15 sağlam 5 bozuk yumurta. Omlet için alınan 4 yumurtadan hiç birinin bozuk olmama olasılığı?

$$\frac{\text{İstenen}}{\text{Tüm durum}} = \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{0}}{\binom{20}{4}}$$

Koşullu Olasılık

Olasılık deneyinde KOŞUL veriliyorsa Tüm durumların sayısı değişime uğrar. örneğin

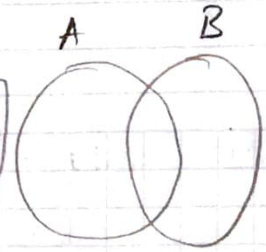
Bir zar için Tüm d. ⇒ {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Zarın üst yüzüne çift geldiği bilindiğine göre → {2, 4, 6}

ÖRN Bir zar atılıyor Üst yüze gelenin asal olduğu biliniyorsa, tek sayı gelme olasılığı?

$\{\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}\} \Rightarrow \{2, 3, 5\} = \dfrac{2}{3}$

$$P(A \mid B) = \boxed{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$



$P(A)$
$P(B)$
$P(A\cap B)$ = A ve B'nin gerçekleşme olasılığı

B'nin gerçekleşmesi koşulu altında A'nın gerç. olasılığı

ÖRN) $P(A\cap B) = 0,3$
$P(B) = 0,7$ ise $P(A \mid B) = ?$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

Bayes Teoremi

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A)\cdot P(B \mid A)}{P(B)}}$$

ÖRN) Sabah havanın bulutlu olduğunu gördük. Yağmurlu günlerin %50'sinin bulutlu bir günle başladığı biliniyor. Günlerin %40'ı bulutlu başlamaktadır. Bir günün yağmurlu gün olma olasılığı %10'dur. Buna göre, bulutlu başlanan bir günde yağmur yağma olasılığı nedir?

$P(\text{Yağmur} \mid \text{Bulutlu}) = ?$

$P(\text{Bulutlu} \mid \text{Yağmur}) = 0,50$

$P(\text{Bulutlu}) = 0,40$

$P(\text{Yağmur}) = 0,10$

$$\frac{0,10 \cdot 0,50}{0,40}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{10}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{20}_{2}}\cdot\frac{\cancel{10}}{4} = \frac{1}{8}$$

ÖRN | Kedilere karşı alerji testi

* Gerçekten alerjisi varsa %80 "EVET"
* Alerjisi yoksa %10 "EVET"

Bu popülasyonda kedilere karşı alerji olma olasılığı %1 ise bu testin "EVET" dediği durumda testin uygulandığı kişinin gerçekte alerjisi olma olasılığı?

$$P(\text{ALERJİ OLAN} \mid \text{EVET}) = ? \qquad P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$$

$$P(\text{Alerjisi olan} \mid \text{EVET}) = \frac{P(\text{Alerjisi olan}) \cdot P(\text{EVET} \mid \text{Alerji olan})}{P(\text{EVET})}$$

$$\left.\begin{aligned} P(\text{EVET} \mid \text{Alerjisi olan}) &= 0{,}80 \\ P(\text{EVET} \mid \text{Alerjisi olmayan}) &= 0{,}10 \\ P(\text{Alerjisi olan}) &= 0{,}01 \end{aligned}\right\} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}80}{0{,}107} = 0{,}748$$

$$P(\text{EVET}) = 0{,}01 \cdot 0{,}80 + 0{,}99 \cdot 0{,}10 = \boxed{0{,}107}$$

Rastgele Değişken

$$\text{Olasılık} \rightarrow \boxed{\text{Rastgele Değişken}} \rightarrow \text{Olasılık Dağılımları} \begin{cases} \rightarrow \text{Ayrık (Kesikli)} \\ \rightarrow \text{Sürekli} \end{cases}$$

⇓

* Olasılık değeri değildir.
* X, Y, Z gibi harfler ile tanımlanır.

↙ Ayrık Rastgele değişken ↘ Sürekli Rastgele Değişken

Ayrık Rastgele Değişken

Bir para 3 kez atılıyor → X : tura gelmelerinin sayısı

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

X	0	1	2	3
P(X=x)				

Bir zar 2 kez atılıyor → Y : 5 gelmelerinin sayısı

$Y = \{0, 1, 2\}$

Sürekli Rastgele Değişken : Sayılamayan durumlar

Bir şeyin Süresi

" " Miktarı

$1 < X < 3$

$5 \leq Y \leq 10$ → $f(x) = \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$

Kesikli Olasılık Dağılımı

Olasılık Deneyi

(Bir zarın 3 kez atılması)

(Bir paranın 2 kez atılması)

⇒ Ayrık (Kesikli) rastgele değişken ⇒ Kesikli Olas. Dağılımı

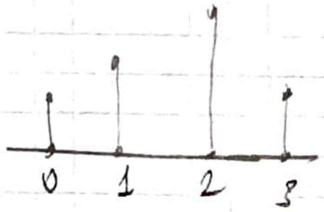
→ 1 gelmelerinin sayısı

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

(*)

X	0	1	2	3
P(X=x)	.	.	.	.

(*)



ÖRN! Bir para 3 kez atılıyor. Tura gelmelerinin sayısına ait kesikli olasılık dağılımını bulunuz.

1.adım $X = \{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow$ Rastgele değişken

2.adım

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P(X=0) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ YYY

$P(X=1) = 3 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

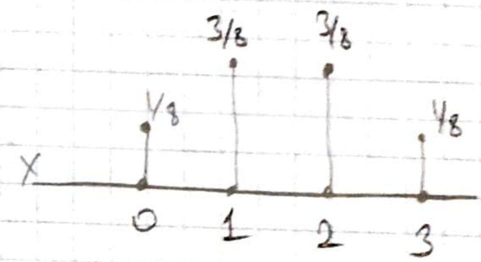
TYY
YTY
YYT

$P(X=2) = 3 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

TTY
TYT
YTT

$P(X=3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

TTT



$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Kesikli Olma Şartları

1. $\sum P(X=x)$ = Bütün olasılıkların toplamı 1 olmalı
2. $P(X=x) \geq 0$

ÖRN!

X	1	3	5
$P(X=x)$	c	$2c$	$3c$

Kesikli ise c'yi bulunuz.

$$c + 2c + 3c = 1$$
$$6c = 1$$
$$c = \frac{1}{6}$$

Kesikli Olasılık Dağılımında Beklenen Değer Hesaplama

$E[X]$ = beklenen değer $\qquad \boxed{E[x] = \Sigma x \cdot P(X=x)}$

ÖRN)

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Beklenen değer kaçtır?

$$0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$$

Beklenen değer = Ortalama = μ

Kesikli Olasılık Dağılımında Varyans Hesaplama

$Var[X]$ veya $\sigma^2 \qquad Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$

$$E[x^2] = \Sigma x^2 \cdot P(X=x)$$

ÖRN)

x	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$

Varyans nedir?

$$E[x^2] = 1^2 \cdot \frac{3}{7} + 2^2 \cdot \frac{2}{7} + 3^2 \cdot \frac{2}{7} = \frac{29}{7}$$

$$E[x] = 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{7}$$

$$Var[x] = \frac{29}{7} - \left(\frac{13}{7}\right)^2 = \frac{29}{7} - \frac{169}{49} = \frac{34}{49}$$

Kesikli Olasılık Dağılımında Koşullu olasılık Hesaplama

ÖRNEK

X	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

a) $P(X=1 \mid X=3) = ?$

$$\frac{P(X=1 \cap X=3)}{P(X=3)} = \frac{0}{\frac{1}{12}}$$

b) $P(X=1 \mid X \leq 2) = ?$

$$\frac{P(X=1 \cap X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \,//$$

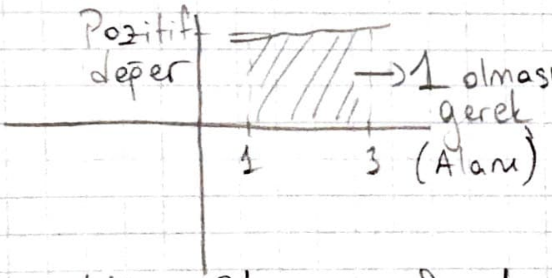
c) $P(X<3 \mid X \leq 3) = ?$

$$\frac{P(X<3 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(X=1)+P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{9}{12}} = \frac{8}{9} \,//$$

Sürekli Olasılık Dağılımı

$X \rightarrow \quad 1 < X < 5$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$



Sürekli Olas. dağılımı parçalı fonk. ile gösterilir.

$f(x) \geq 0$

Sürekli Olma şartı:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ olmalı (2) $f(x) \geq 0$

ÖRN) $f(x) = \begin{cases} x+1 & , 1 < x < 3 \\ 0 & , \text{diğer durum} \end{cases}$

1. şart

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} (x+1)\,dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{12}{2} = 6$$

$6 \neq 1$

Bu fonk. sürekli olas. dağılım fonk. değildir.

Sürekli Olasılık Dağılımında Olasılık Hesaplama

ÖRN) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}x & , 1 < x < 4 \\ 0 & , \text{diğer durum} \end{cases}$

$P(X=3)$ = Aralık yok, 0

$$P(2 < X < 3) = \int_2^3 \frac{2}{15} x\,dx = \frac{2x^2}{30}\Big|_2^3 = \frac{1}{3}$$

$$P(2 \le X) = \int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{2x}{15}\,dx = \frac{2x^2}{30}\Big|_2^4 = \frac{4}{5}$$

Sürekli Olasılık Dağılımında Beklenen Değer Hesaplama

$$\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx}$$

ÖRN) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{15} & , 1 < x < 4 \\ 0 & , \text{diğer durum} \end{cases}$ $\quad E[X] = ?$

$$E[X] = \int_1^4 x \cdot \frac{2x}{15}\,dx = \int_1^4 \frac{2x^2}{15}\,dx = \frac{2x^3}{45}\Big|_1^4 = \frac{14}{5}$$

Sürekli Olasılık Dağılımında Varyans Hesaplama

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\boxed{E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx} \qquad \boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$

ÖRN) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{15} & , 1 < x < 4 \\ 0 & , \text{diğer durum} \end{cases}$ $\quad Var[X] = ?$

$$E[X] = \int_1^4 x \cdot \frac{2x}{15}\, dx = \frac{14}{5}$$

$$E[X^2] = \int_1^4 x^2 \cdot \frac{2x}{15}\, dx = \frac{17}{2}$$

$$Var[X] = \frac{17}{2} - \left(\frac{14}{5}\right)^2 = \frac{33}{50}$$

Sürekli Olasılık Dağılımında Koşullu Olas. Hesaplama

ÖRN) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^5} & , x \geq 1 \\ 0 & , x < 1 \end{cases}$ sürek. dağılım veriliyor.

a) $P(X=2 \mid X > 1{,}5) = \dfrac{P(X=2 \cap X > 1{,}5)}{P(X > 1{,}5)}$

$$= \frac{P(X=2)}{P(X > 1{,}5)} = \frac{0}{\int_{1,5}^{\infty} \frac{4}{x^5}\, dx}$$

b) $P(0 < X < 1{,}2 \mid 0{,}5 < X < 1{,}5) = ?$

$$= \frac{P(0 < X < 1{,}2 \cap 0{,}5 < X < 1{,}5)}{P(0{,}5 < X < 1{,}5)} = \frac{P(0{,}5 < X < 1{,}2)}{P(0{,}5 < X < 1{,}5)}$$

$$= \frac{\int_1^{1,2} \frac{4}{x^5}\, dx}{\int_1^{1,5} \frac{4}{x^5}\, dx} = //$$

Beklenen Değer ve Varyansın Özellikleri

Kesikli (Ayrık) Hesaplama

$E[x] = \sum x\, P(X=x)$

$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$

$E[x^2] = \sum x^2 . P(X=x)$

Sürekli Hesaplama

$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x . f(x)\, dx$

$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$

$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$

Beklenen Değer Özellikleri

1. $E[1] = 1$ $\quad E[a] = a$
2. $E[3x] = 3E[x]$ $\quad E[ax] = a . E[x]$
3. $E[2x-5] = 2E[x]-5$ $\quad E[ax+b] = a . E[x] + b$

Varyans Özellikleri

1. $Var[3] = 0$ $\quad Var[a] = 0$
2. $Var[3x] = 3^2 Var[x]$ $\quad Var[ax] = a^2 Var[x]$
3. $Var[4x-5] = 16 Var[x]$ $\quad Var[ax+b] = a^2 Var[x]$

ÖRN) X rast. değiş. $E[x] = 4$, $Var[x] = 2$ dir

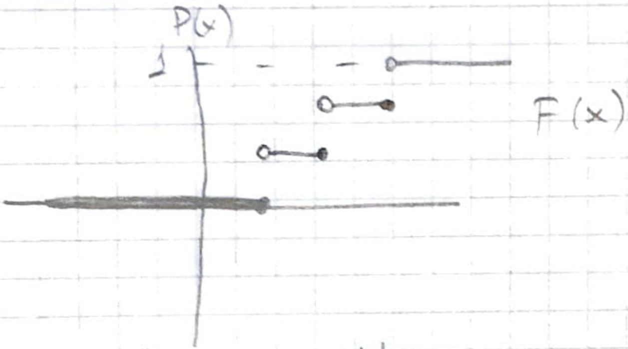
a) $E[3x-5] = 3E[x] - 5 = 3.4 - 5 = 7$

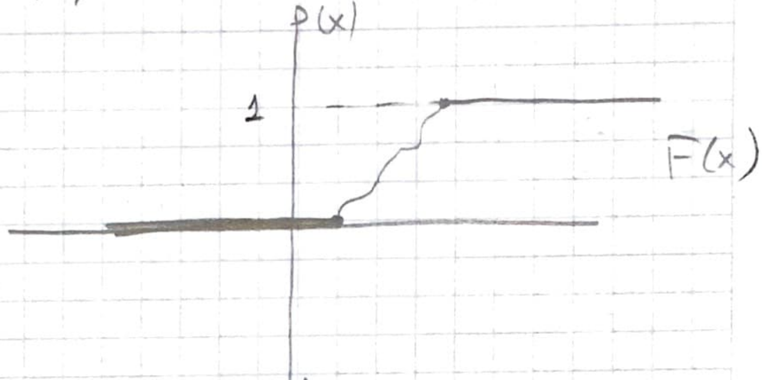
b) $Var[5x+2] = 25 Var[x] = 25 . 2 = 50$

Birikimli (Kümülatif) Dağılım Fonksiyonu

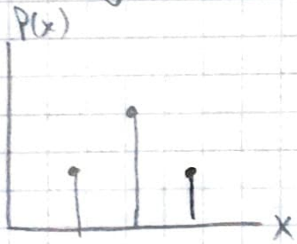
$f(x)$ → Kesikli, → Sürekli $\Rightarrow$ $f(x)$ elde edilen. $\Downarrow$ $F(x) \Rightarrow$ Birikimli dağılım fonksiyonu.

Olasılıklar toplanarak 1 e ulaşır ve $F(x)$ oluşur.

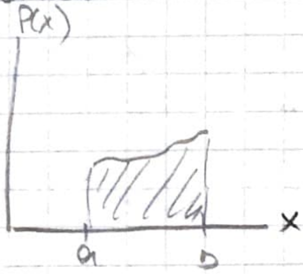




Kesikli $\Downarrow$



Sürekli



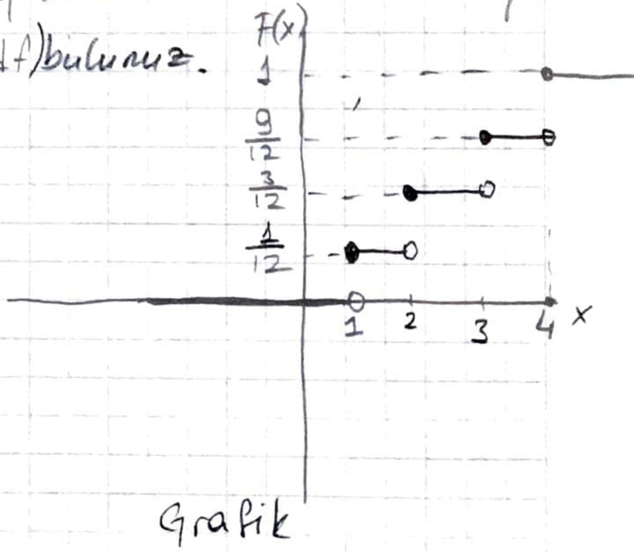
Kesikliden Birikimli Elde Etme

ÖRN

X	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X rast. değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonunu(cdf) bulunuz.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{1}{12} & , 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{12}+\frac{1}{6} = \frac{3}{12} & , 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{12} & , 3 \leq x < 4 \\ 1 & , 4 \leq x \end{cases}$$



Grafik

Sürekliden Birikimli Elde Etme

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}$$

ÖRN

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{diğer durum.} \end{cases}$$

sürekli olasılık dağılımı veriliyor.

a) K nedir?

$$\int_{1}^{3} kx\,dx = 1 \qquad \frac{kx^2}{2}\Big|_{1}^{3} = \frac{9k}{2} - \frac{k}{2} = \frac{8k}{2} = 4k = 1$$

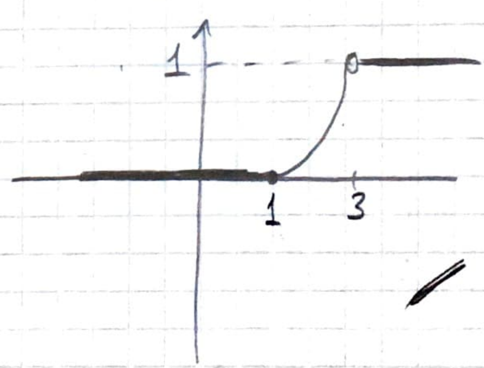
$$k = \frac{1}{4}$$

b) F(x) birikimli fonk. bulunuz ve grafiğini çiziniz.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \longrightarrow F(x) = \int_{1}^{x} \frac{x}{4}\,dx = \frac{x^2}{8}\Big|_{1}^{x}$$

$$F(x) = \boxed{\frac{x^2}{8} - \frac{1}{8}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{8} - \frac{1}{8}, & 1 < x < 3 \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$$



Birikimli (Kümülatif) Fonksiyon Özellikleri

① $0 \leq F(x) \leq 1$ ~~$F(3) = 5$~~

② $F(x)$ azalmayan bir fonksiyon.

$x_1 < x_2$ ise $F(x_1) \leq F(x_2)$

③ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

④ $F(x) = P(X \leq x)$ $\boxed{F(2) = P(X \leq 2)}$

$F(x)$: küçük, X: Büyük

⑤ Kesikli olasılık dağılımından üretilmişse $F(x)$

$P(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ $\boxed{P(1) = F(1) - F(0)}$

$F(x)$ in Kesiklidenmi, Süreklidenmi elde edildiğini belirleme

$$F(x) = \begin{cases} \underbrace{\quad}_{\text{Bütün sayı ise hepsi}} & , \ldots \\ & , \ldots \\ & , \ldots \end{cases}$$

→ Kesikli $f(x)$'ten elde edilmiş.

ÖRN

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 3 \\ \frac{1}{4} & , 3 \leq x < 5 \\ \frac{1}{2} & , 5 \leq x < 6 \\ 1 & , 6 \leq x \end{cases}$$

Kesikli $f(x)$ ⇒

$$F(x) = \begin{cases} \underbrace{\quad}_{\text{x'li bir ifade varsa}} & , \ldots \\ & , \ldots \\ & , \ldots \end{cases}$$

→ Sürekli $f(x)$'ten elde edilmiş.

ÖRN

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{x^2}{8} - \frac{1}{8} & , 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & , 3 < x \end{cases}$$

Sürekli $f(x)$ ⇒

Birikimliden Sürekli - Kesikli elde etme

$F(x) \longrightarrow f(x)$

ÖRN)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ \frac{1}{5}, & 1 \leq x < 4 \\ \frac{1}{2}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

Hepsi sayı (Kesikli)

x	1	4	5
$f(x)$	$\left(\frac{1}{5}-0\right) \Rightarrow \frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \frac{3}{10}$	$\left(1-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}$

ÖRN)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ \frac{x^2-1}{8}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ \frac{x}{4}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}}$$

X var (Sürekli)

TÜREV $f(x) = F'(x)$

Moment üreten Fonksiyon

$M_x(t) = \ldots$ X = rastgele değişken

$$\frac{d}{dt}\left(M_x(t)\right)\Big|_{t=0} = E(x) = \mu$$

t'ye göre türevi alınıp yerine 0 konulduğunda

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(M_x(t)\right)\Big|_{t=0} = E(x^2)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\left(M_x(t)\right)\Big|_{t=0} = E(x^3)$$

Moment üreten fonk. türevleri $E(x), E(x^2), \ldots$ $E(x^n)$

↓

Momentin n. türevi

Kesiklide Moment Fonksiyonu Bulma

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=..}^{n} e^{xt} \cdot P(X=x)$$

ÖRN/

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

kesikli olasılık dağılımı veriliyor. Moment üreten fonk. bulunuz.

$$\boxed{M_x(t) = e^{t} \cdot \frac{1}{12} + e^{2t} \cdot \frac{1}{6} + e^{3t} \cdot \frac{1}{2} + e^{4t} \cdot \frac{1}{4}}$$

Beklenen değer $= E(x) =$ 1. moment.

$$E(x) = \frac{d}{dt}(M_x(t)) \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}(m_x(t)) = \frac{1}{12}e^{t} + \frac{2}{6}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{3t} + e^{4t}$$

$t=0$ yaparsak $= \frac{1}{12} + \frac{2}{6} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{35}{12}$ //

Süreklide Moment Fonksiyonu Bulma

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\,dx$$

ÖRN/ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 1<x<3 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

Sürekli olasılık dağılımı veriliyor. Moment üreten fonk bulunuz

$$\boxed{M_x(t) = \int_1^3 e^{tx} \cdot \frac{x}{4}\,dx}$$

LAPTÜ

$\boxed{u = \frac{x}{4}}$ $\quad \int dv = \int e^{tx}\,dx$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{4}$ $\quad \boxed{v = \frac{e^{tx}}{t}}$

$du = \frac{dx}{4}$

$$u.v - \int v\,du = \frac{x}{4} \cdot \frac{e^{tx}}{t} - \int \frac{e^{tx}}{t} \cdot \frac{dx}{4}$$

$$= \frac{x}{4} \cdot \frac{e^{tx}}{t} - \frac{1}{4t} \int e^{tx}\, dx = \frac{x}{4t} e^{tx} - \frac{1}{4t^2} \cdot e^{tx} \Big|_1^3$$

$$= \left(\frac{3}{4t} e^{3t} - \frac{1}{4t^2} e^{3t}\right) - \left(\frac{1}{4t} e^{t} - \frac{1}{4t^2} e^{t}\right)$$

$$\boxed{M_x(t) = \frac{3t e^{3t} - e^{3t}}{4t^2} - \frac{t e^{t} - e^{t}}{4t^2}}$$

Chebyshev Eşitsizliği

Bir x değişkenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ (Sürekli olasılık dağılımı) bilinmiyorken bu rastgele değişkenin belli aralıklarda aldığı değerlerin olasılığını hakkında bilgi verir.

$k > 0$, ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan X için

σ standart sapma, σ^2 varyans

① $P(|X-\mu| \geq k.\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

② $P(|X-\mu| \leq k.\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

X'in belli aralıkta olasılığı için üst veya alt sınır vermektedir.

① $P(X-\mu \geq k.\sigma$ veya $X-\mu \leq -k.\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

② $P(-k.\sigma < X-\mu < k.\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

ÖRN) X ortalaması −4 olan rastgele değişkendir.
$P(-10 < X < 2) \geq 0,5$ olarak veriliyor.
Varyansı bulunuz. (Chebyshev kullanarak)

$P(|X-\mu| < k.\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \Rightarrow P(\underbrace{-k\sigma + \mu}_{-10} < X < \underbrace{k.\sigma + \mu}_{2})$

$\mu = -4$ $\quad k.\sigma - 4 = 2$ $\quad 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}$ $\quad k^2 = 2$

$\boxed{k.\sigma = 6}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{k^2}$ $\quad k = \sqrt{2}$

$\cancel{k = -\sqrt{2}}$ $\quad k > 0$

$\sqrt{2}.\sigma = 6$ $\quad$ Varyans $= \sigma^2$

$\sigma = \frac{6}{\sqrt{2}}$ $\quad \sigma^2 = \frac{36}{2} = 18$

Kesikli (Ayrık) Düzgün Dağılım

⇒ Olasılık değerlerinin her bir rastgele değişken için eşit olduğu dağılım.

X	1	2	3	4
P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

→ Düzgün Dağılım

ÖRN) X rast. değiş. sahip kesiklide düzgün dağılıma sahip.
$X = \{1,2,3,4,5\}$ ise

a) Ayrık olasılık dağılımı?

X	1	2	3	4	5
P(X=x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

b) $P(X=4) = ?$ $\quad \frac{1}{5}$

c) $P(X<3) = ?$ $\quad \frac{2}{5}$

d) $E[X] = 1.\frac{1}{5} + 2.\frac{1}{5} + 3.\frac{1}{5} + 4.\frac{1}{5} + 5.\frac{1}{5} = 3$

Binom Dağılımı

Bernouilli deneyi ⇒ 2 olası sonuç olan olasılık deneyi

* Para atma ✓
* Hastalıktan iyileşip iyileşmeme ✓
* Zar atma ✗

n defa Bernouilli deneyi yapılırsa **BİNOM DAĞILIMI** denir

n defada X başarı hesabı

P = başarı

q = başarısızlık

$$\boxed{P + q = 1}$$

Binomda olasılık hesaplama $= \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$

ÖRN/ Bir para 7 kez atılıyor. 3 kez yazı gelme olasılığı?

Yazı $P = \frac{1}{2}$

Tura $q = \frac{1}{2}$

$$\binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3} = 35 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{35}{128}$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

ÖRN/ Bir hastanede iyileşme olasılığı 0,07'dir. Buraya gelen 10 hastadan

a) 2 kişinin iyileşme olasılığı?

$p = 0,07$

$q = 0,93$

$$\binom{10}{2} \cdot (0,07)^2 \cdot (0,93)^8 =$$

b) En fazla 2'sinin iyileşme olasılığı?

0 kişi, 1 kişi, 2 kişi

$$\binom{10}{0} \cdot (0,07)^0 \cdot (0,93)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0,07)^1 \cdot (0,93)^9 + \binom{10}{2} \cdot (0,07)^2 \cdot (0,93)^8$$

c) En az 3'ünün iyileşme olasılığı?

3.kişi, 4 kişi, ... 10 kişi

1 - istenmeyen durum

(0, 1, 2) b şıkkında bulduğumuzu çıkarıyoruz.

Ortalama = Beklenen Değer = $n \cdot p$

μ

σ = Varyans = $n \cdot p \cdot q$

n = deneme adedi

P = başarı olasılığı

q = başarısız "

Geometrik Dağılım

Bernouilli deneyi ile hesaplanır.

* İlk başarının n. de görülme olasılığını hesaplama.

p → başarı

q → başarısız

$\boxed{p + q = 1}$

İlk başarının n. de görülme olasılığı

İlk n - 1 deneme başarısız demektir.

$\Rightarrow \boxed{q^{n-1} \cdot p}$

ÖRN Bir hastalıktan iyileşme olasılığı 0,05 tir. Bu hastaneye gelenlerden ilk iyileşenin 8. hasta olma olasılığı?

$(0,95)^7 \cdot 0,05$

Geometrik Dağılımda Ortalama Ve Varyans

ÖRN) Bir zar atıldığında ilk kez 5 gelmesinin 4. denemede gerçekleşme olasılığı?

$p = \frac{1}{6}$

$q = \frac{5}{6}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

Ortalama $= \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

Varyans $= \frac{1-\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30$

Ortalama = Beklenen Değer $= E[x] = \mu = \boxed{\frac{1}{p}}$

Varyans $= Var[x] = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$

ÖRN) Bir uçağın başarılı inme olasılığı 0,8 dir. İlk başarılı inişini gerçekleştirmesinin beklenen değeri?

$p = 0{,}8$

$q = 0{,}2$

$E[x] = \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{0{,}8} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Negatif Binom Dağılımı

X. başarının n. denemede gerçekleşmesi

n. denemede kesinlikle başarılı

ilk n-1 deneme için BİNOM

$$\left[\binom{n-1}{x-1} \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x}\right] \cdot p$$

ÖRN) Hastanede iyileşme olasılığı 0,03 tür. Buraya gelen hastalardan 5. iyileşenin gelenlerden 12. kişi olma olasılığı?

12. kişi → iyileşen

$$\left[\binom{11}{4} \cdot (0{,}03)^4 \cdot (0{,}97)^7\right] \cdot 0{,}03$$

POISSON DAĞILIMI

⇒ Nadir gerçekleşen olaylar

λ → Bu tarz sorularda verilen ortalama

* Beşiktaş ilçesinde 3 aylık sürede yangın ortalaması 7'dir.

$\lambda = 7$ (3 aylık)

X = istenen olasılık adedi (örnek olarak 5 aydaki ortalama)

$$\boxed{\text{Olasılık} = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}}$$

e = euler sayısı = 2,71...

ÖRN) Bir kavşakta 4 aylık sürede kaza ortalaması 6'dır.

a) Bu kavşakta gelecek 4 ayda 7 kaza olma olasılığı nedir?

b) " " " 6 ayda 5 " " " "

c) " " " 1 yılda 2'den fazla kaza olma olasılığı?

d) " " " 8 aylık sürede en çok 2 kaza olasılığı?

a) $\lambda = 6$ $X = 7$

$$\frac{6^{7} \cdot e^{-6}}{6!}$$

b) $\lambda = 6$ (4 ay için) → 6 ay için $\lambda = 9$

$\lambda = 9$ $X = 5$

$$\frac{9^{5} \cdot e^{-9}}{5!}$$

c) $\lambda = 6$ (4 ay için) 1 yıl için $\lambda = 18$

$\lambda = 18$ $X = 3, 4, 5, 6, \ldots$

1 − (0 kaza, 1 kaza, 2 kaza)

$$\boxed{1 - \frac{18^{0} \cdot e^{-18}}{0!} - \frac{18^{1} \cdot e^{-18}}{1!} - \frac{18^{2} \cdot e^{-18}}{2!}}$$

d) $\lambda = 6$ (4 ay için) → 8 ay için $\lambda = 12$

$\lambda = 12$ $X = 0, 1, 2$ kaza

$$\boxed{\frac{12^{0} \cdot e^{-12}}{0!} + \frac{12^{1} \cdot e^{-12}}{1!} + \frac{12^{2} \cdot e^{-12}}{2!}}$$

Binom Dağılımına Poisson Dağılımı Yaklaşımı

→ Binom'da işlem zorluğu olduğu için belli bir hata ile yaklaşık olasılığı işlem kolaylığı sağlayıp bulmaya yarar.

NOT İşlem Kolaylığı ⟶ Hata Vardır.

ŞARTLARI

Binomda;
n = deneme sayısı
p = başarı
q = başarısızlık

n çok büyük
p çok küçükse
işlem zorluğu olur.

$\boxed{\mu = n \cdot p}$

$\boxed{n \cdot p \leq 5}$!!!
Olmalıdır.

Poissonda;
λ = ortalama
x = istenen şeyin adedi

$$\boxed{\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}} = \text{Olasılık}$$

$\boxed{\lambda = n \cdot p}$

ÖRN Bir sigorta şirketinde müşterinin trafik kazasında ölme olasılığı 0,003'tür. Bu şirketten 1000 kişilik örnek alındığında

a) 4 müşterinin ölme olasılığı?
b) En az 2 müşterinin ölme olasılığı?

a) $\binom{1000}{4} \cdot (0{,}003)^4 \cdot (0{,}997)^{996}$ = İşlem Zorluğu

$p = 0{,}003$
$q = 0{,}997$
$n = 1000$

Poisson → $n \cdot p \leq 5 \Rightarrow 1000 \cdot 0{,}003 = 3 \leq 5$

$\lambda = n \cdot p$ $\boxed{\lambda = 3} \Rightarrow \boxed{\frac{e^{-3} \cdot 3^{4}}{4!}}$

b) Binomda işlem zorluğu olduğu için Poisson kullanırız.

$$1 - \underbrace{\frac{e^{-3} \cdot 3^{0}}{0!}}_{\text{0 kişinin}} - \underbrace{\frac{e^{-3} \cdot 3^{1}}{1!}}_{\text{1 kişinin}}$$

0 kişinin 1 kişinin ölme olasılığını 1'den çıkarıyoruz

Özel Sürekli Olasılık Dağılımları

Sürekli dağılım

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(2) $f(x) \geq 0$

Özel Sürekli Olasılık Dağılımları

(1) Düzgün Dağılımı
(2) Üstel Dağılımı
(3) Normal Dağılımı
} En önemlileri ☆☆☆

(4) Weibull Dağılımı
(5) Gamma Dağılımı
(6) Beta Dağılımı

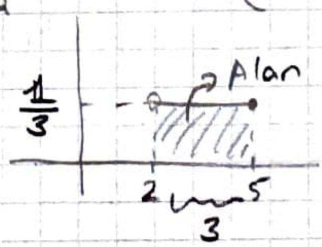
(1) Sürekli Düzgün Dağılım

X (a,b) aralığında düzgün dağılıma sahip ise

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{diğer durum} \end{cases}$$

ÖRN X $(2,5)$ aralığında düzgün d.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-2}, & 2<x<5 \\ 0, & \text{diğer durum} \end{cases}$$



ÖRN X rast. değişkeni $(3,7)$ aralığında düzgün dağılıma sahip. Buna göre

a) $P(X=2) = ?$

b) $P(4<X\leq 5) = ?$

c) $P(X<4) = ?$

d) $P(4 \leq X) = ?$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{7-3}\right) \Rightarrow \frac{1}{4}, & 3<x<7 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}}$$

a) $P(X=2) = 0$ (Sürekli dağılım olduğu için bir aralık tanımlanmalı)

b) $P(4<x\leq 5) = \int_4^5 \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_4^5 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = \underline{1}$

c) $P(x<4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int_{-\infty}^{3} 0\,dx + \int_3^4 \frac{1}{4}\,dx = \frac{x}{4}\Big|_3^4 = \underline{\frac{1}{4}}$

d) $P(4\leq x) = \int_4^{\infty} f(x)dx = \int_4^7 \frac{1}{4}\,dx = \frac{x}{4}\Big|_4^7 = \frac{7}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$ //

Düzgün Dağılımda Beklenen Değer $E[x]$

$$\boxed{E[x] = \mu = \frac{a+b}{2}}$$

Düzgün Dağılımda Varyans $Var[x]$

$$Var[x] = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ÖRN x, $(2,5)$ aralığında düzgün dağılıma sahip.

$$E[x] = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ //}$$

$$Var[x] = \frac{(5-2)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \text{ //}$$

② Üstel Dağılım

Sorularda üstel dağılım söylenir.

μ = ortalama soruda verilir

$$\boxed{f(t) : \begin{cases} \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{1}{\mu}t} , & t > 0 \\ 0 , & \text{diğer durumlar.} \end{cases}}$$

NOT Üstel dağılım Sürekli bir dağılım olduğu için integralle çözülür

Üstel dağılımda → $\boxed{\begin{aligned} E[x] &= \mu \\ Var[x] &= \mu^2 \end{aligned}}$

ÖRN Bir duraktan otobüs geçme süreleri üstel. Arka arkaya 2 otobüsün geçmesi için ortalama zaman 5 dakika;

a) Bu durağa gelen bir kişinin en fazla 3 dakika bekleme olasılığı?

b) " " " " " 6 dakikadan fazla " "

c) " " " " " 8 dakika bekleme olasılığı?

d) Beklenen Değer ve Varyans ?

$\mu = 5$ $\quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}t} , & t > 0 \\ 0 , & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$

(★) $\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + c$

a) $P(t \leq 3) = ? \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}t} dt = \left. \frac{\frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}t}}{-\frac{1}{5}} \right|_0^3 = \left. -e^{-\frac{1}{5}t} \right|_0^3 = -e^{-\frac{3}{5}} - (-1)$

$= \boxed{1 - e^{-3/5}}$

b) $P(t > 6) \Rightarrow \int_6^{\infty} \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}t} dt = \left. -e^{-\frac{1}{5}t} \right|_6^{\infty} = \underbrace{-e^{-\infty}}_{0} - (-e^{-6/5})$

c) $P(t = 8) = 0$ (Aralık yok. Tek bir noktadaki değerin olasılıksal sonucu yoktur.)

d) Beklenen değer $= E[x] = 5$

Varyans $= Var[x] = 25$

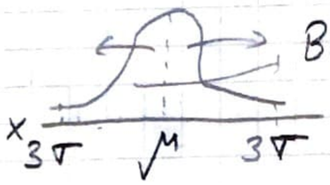
③ Normal Dağılım ***

σ = Standart sapma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

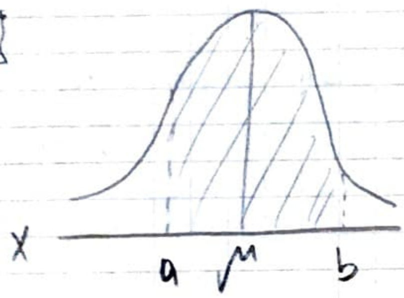
→ Bu formülü pek kullanmayız.

* Gauss eğrisi şeklinde
 Simetrik.
 Altında kalan alan 1'dir.



$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1} \qquad \boxed{f(x) \geq 0}$$

NOT



$P(a < x \leq b) = ?$

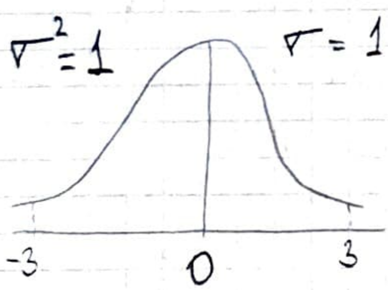
$$\underbrace{\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx}$$

integralin alınışı çok zordur.
Bu yüzden bir tablo oluşturulmuştur.

$\boxed{Z \text{ tablosu}}$

- Standart normal dağılım;

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

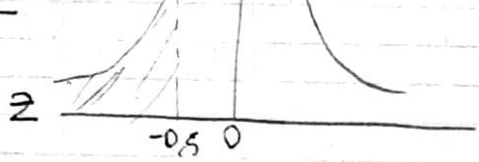


* Ortalaması 0
 Varyansı 1 haline getirilen dağılım.

ÖRN Ortalaması 6, standart sap. 2 olan normal dağılımda $P(X<5) = ?$

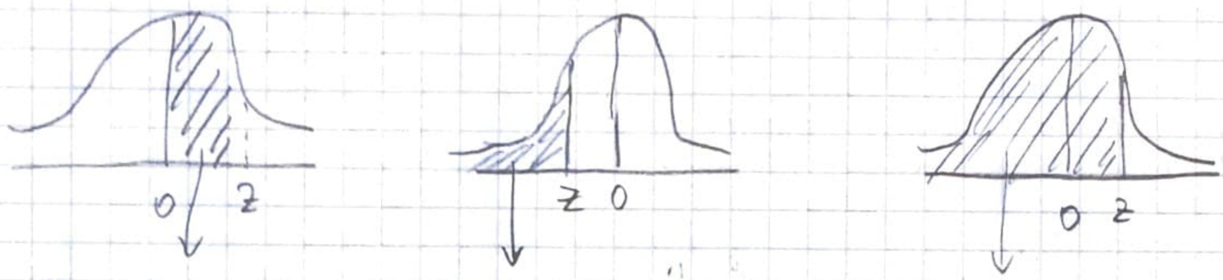
$$P(X<5) = P\left(Z < \frac{5-6}{2}\right) = \boxed{P(Z < -0{,}5)}$$

Taralı alan bu olasılığı verir.
Z tablosu kullanırız



NOT Z tablosu okuma videolarını izleyin.
(Buders Olasılık ve İstatistik 48-49-50. video)

Z Tabloları



1. Çeşit
Bu alanı verir. (0 − z) arası

2. Çeşit
Bu alanı verir. (−∞ − z) arası

3. Çeşit
Bu alanı verir. (−∞ − z) arası

Binom Dağılımına Normal Dağılım Yaklaşımı

İşlem zorluğu varsa normal dağılım kullanılır.
n yeterince büyükse ⇒ Merkezi Limit teoremi
$n>40$, $n>5$, $n>100$ ...

Tüm Dağılımlar $n \to \infty$'a gittikçe normal dağılıma benzerler.

ÖRN Bir hastalık iyileşme olasılığı 0,07. Bu hastalığa yakalanan 100 kişiden 45'ten fazla 60'tan az kişinin iyileşme olasılığı?

$$P(45<X<60) = P(X=46) + P(X=47) + \ldots + P(X=59)$$

$$\underbrace{\binom{100}{46}(0{,}07)^{46}\cdot(0{,}93)^{54} + \ldots}_{\text{işlem zorluğu}}$$

Normal Dağılım ile yaklaşık değeri hesaplıcaz.

Binomun Normal Dağılımında;

$$\boxed{Z = \frac{X - np}{\sqrt{n.p.q}}}$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\mu = n.p$$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q}$$

Binom		Normal
Kesikli	$\longrightarrow$	Sürekli

$P(45 < X < 60)$

$\overset{\text{Normal}}{\Rightarrow} P(44,5 < X < 60,5)$

Buçuk ileri, Buçuk geri

ÖRN! Bir satıcı müşterileri arayıp evlerine uğramak istemektedir. Deneyimlerine göre bu ön bağlantıların %40'ı eve uğramayla sonuçlanır. Bu satıcı aradığı 100 kişiden 45 ile 50 arasında eve gitme olasılığı?

$n = 100$ Binom yapılırsa işlem zorluğu olur.

$p = 0,4$ Bu yüzden normal dağılım yaklaşımı yapılır.

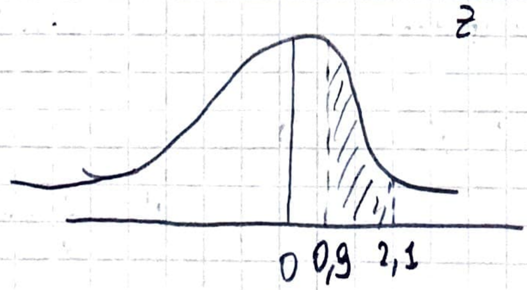
$q = 0,6$

$$P(44,5 < X < 50,5) = ?$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - n.P}{\sqrt{n.p.q}} \qquad P\left(\frac{44,5 - 40}{\sqrt{24}} < Z < \frac{50,5 - 40}{\sqrt{24}}\right)$$

$\sqrt{24} \cong 5$ $\qquad P(0,9 < Z < 2,1)$

Z tablosuna bakarak çözülür.



$(0,9 \to -\infty) = 0,8159$

$(2,1 \to -\infty) = 0,9821$

$$= 0,9821 - 0,8159 \cong \boxed{0,1662}$$

Poisson Dağılımına Normal Dağılım Yaklaşımı

$$\frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

λ = ortalama

x = olasılık hesaplanacak adet

$P(X=2)$ = KOLAY

$\underbrace{P(10<X<30) = P(X=11) + \dots + P(X=29)}_{\text{İşlem Zorluğu}}$

Normal → $P(9,5 < X < 30,5)$ yapılır.

Normal dağılım

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

λ = ortalama

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\lambda}}$$

$$\boxed{Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}$$

ÖRN) Kasabada 1 haftalık sürede yangın ortalaması 4'tür.

a) 2 haftalık sürede 10 yangın olma olasılığı? (Normal kullan)

b) 28 günlük sürede 20 ile 30 arasında yangın olasılığı?

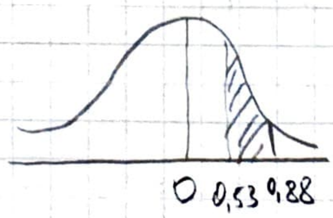
a) $\lambda = 4 \leftarrow$ 1 haftalık 2 haftalık $\lambda = 8$

$$P(X=10) = \frac{e^{-8} \cdot 8^{10}}{10!} \quad \text{Poisson}$$

$$Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Normal → $P(9,5 < X < 10,5)$

$$= P\left(\frac{9,5-8}{\sqrt{8}} < Z < \frac{10,5-8}{\sqrt{8}}\right) = P(0,53 < Z < 0,88)$$



$(0,88 \to -\infty) = 0,8106$

$(0,53 \to -\infty) = 0,7019$

$-$

$0,1087$

b) $\lambda = 4 \longleftarrow$ 1 haftalık 28 gün → $\lambda = 16$

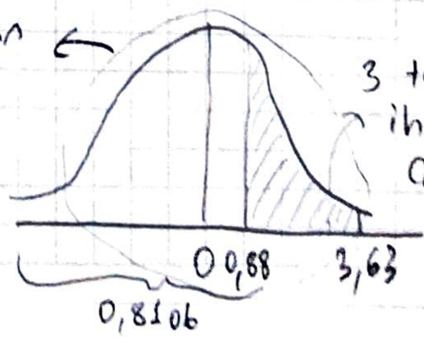
$$P(20<X<30) \longrightarrow P(19,5 < X < 30,5) = P\left(\frac{19,5-16}{\sqrt{16}} < Z < \frac{30,5-16}{\sqrt{16}}\right)$$

$$= P(0,88 < Z < 3,63)$$

Tüm Alan ←

1

$1 - 0,8106 = 0,1894$



3 ten sonrası ihmal ediliyor Çok küçük

Ortak Olasılık Dağılımı

Bir veya iki olasılık deneyinde kullanılır.

2 adet rastgele değişken tanımlanır. X ve Y gibi

ÖRN Bir para 2 kez atılıyor X= Paranın tura gelmesi sayısı

ve Bir zar 1 kez atılıyor Y = Zarın 3 gelmesi sayısı

$X = \{0, 1, 2\}$ $Y = \{0, 1\}$

$$P(X=0,\ Y=0) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{X} \cdot \underbrace{\frac{5}{6}}_{Y}$$

$P(X=0,\ Y=1) = \ldots$

Kesikli (Ayrık) Olasılık Dağılımı

X ve Y gibi iki adet rastgele değişkene ait olasılıkların AYNI ANDA gerçekleşme olasılıklarının dağılımı

ÖRN Bir zar 2 kez, para 3 kez atılıyor. X: paraların tura gelmelerinin sayısı

Y: Zarın 5 gelmelerinin sayısı

X ve Y'ye ait ortak olasılık dağılımını bulunuz.

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

$Y = \{0, 1, 2\}$

Y \ X	0	1	2	3
0	$\frac{25}{288}$	$\frac{75}{288}$		
1				
2				

$$P(X=0,\ Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{288}$$

$$P(X=1,\ Y=0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{75}{288}$$

TYY
YTY
YYT

Kesikli Ortak Olasılık Özellikleri

① $\sum_{x=i}^{k} \sum_{y=j}^{m} P(X=x, Y=y) = 1$ Bütün olasılıkların toplamı 1

② $P(X=x, Y=y) \geq 0$ Bütün değerler 0'a eşit veya büyük olmalı.

ÖRN)

y \ x	0	1	2
3	c	2c	3c
4	4c	5c	6c

⇒ Kesik ortak dağılım tablosu.

a) c kaçtır?

b) $P(X=2, Y=4) = ?$

c) $P(X \leq 1, Y=3) = ?$

d) $P(X+Y \leq 4) = ?$

a) $c+2c+3c+4c+5c+6c = 1$

$21c = 1$

$c = \frac{1}{21}$

b) $P(X=2, Y=4) = 6c$

$6c = \frac{6}{21}$

c) $P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=3) = c + 2c = 3c = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

d) $P(X=0, Y=4) + P(X=1, Y=3) = 4c + 2c = 6c = \frac{6}{21}$

ÖRN) Torbada 2 mavi, 3 yeşil ve 4 kırmızı top var.
Bu torbadan 2 top çekiliyor. X = kırmızı top gelme sayısı

$X = \{0,1,2\}$ $Y = \{0,1,2\}$ Y = Yeşil " " "

y \ x	0	1	2
0	$\frac{2}{72}$	$\frac{16}{72}$	$\frac{12}{72}$
1	$\frac{12}{72}$	-	-
2	-	-	

$P(X=0, Y=0) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{72}$

$P(X=1, Y=0) =$ K.M veya M K

$\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{16}{72}$

$P(X=2, Y=0) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{72}$ (KK)

$P(X=0, Y=1) =$ MY veya YM

$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{12}{72}$

Kesikli Marjinal Olasılık Dağılımı

y \ x	0	1	2	
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	

X'in Marjinal →

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$

Y'nin Marjinal →

y	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

Kesikli Rastgele Değişkenlerin Bağımsızlığı

⇒ Olasılık hesaplamaları birbirini etkilemiyorsa X ve Y bağımsız.

ÖRN: Bir para 2 kez atılıyor. X
Bir zar 3 kez atılıyor Y ⟹ Bağımsız

⇒ Olasılık hesaplamaları birbirini etkiliyorsa X ve Y bağımlı

ÖRN: Bir torbadan 3 mavi, 4 yeşil, 5 kırmızı top var.
Torbadan 2 top çekiliyor.

X = Mavi gelmelerinin sayısı = {0, 1, 2}
Y = Kırmızı " " = {0, 1, 2} → Bağımlı

Kesikli ORTAK dağılımda bağımlı mı? bağımsız mı? belirleme

y \ x	1	2
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

y \ x	1	2	3
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	0

$\boxed{\text{KURAL}}$ ⇒ $a \in X$, $b \in Y$ her a ve b için $P(X=a; Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b)$ sağlanırsa X ve Y bağımsız. 1 durum için bile sağlanmazsa Bağımlı.

1. Tablo

X	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	0	1
$P(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$P(X=1, y=0) \overset{?}{=} P(X=1) . P(y=0)$

$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} . \frac{1}{4}$ ✓

$P(X=2, y=0) \overset{?}{=} P(X=2) . P(y=0)$ eşitmi?

$\frac{1}{6} = \frac{2}{3} . \frac{1}{4}$ ✓

$P(X=1, y=1) \overset{?}{=} P(x=1) . P(y=1)$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} . \frac{3}{4}$ ✓

$P(X=2, y=1) \overset{?}{=} P(x=2) . P(y=1)$

$\frac{1}{2} \overset{?}{=} \frac{2}{3} . \frac{3}{4}$ ✓

X ve Y <u>Bağımsız</u>

2. Tablo

X	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$P(X=1, y=0) \overset{?}{=} P(x=1) . P(y=0)$

$\frac{1}{6} \overset{?}{=} \frac{1}{2} . \frac{1}{3}$ ✓

$P(X=2, y=0) \overset{?}{=} P(x=2) . P(y=0)$

$\frac{1}{6} \overset{?}{=} \frac{1}{3} . \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ X Eşit olmadığı için

X ve Y <u>Bağımlı</u>

Kesikli Ortak Dağılımında Kolerasyon Hesaplama

X ve Y arasındaki ilişkiyi gösteren bir katsayıdır.

$$\boxed{\text{Kolerasyon} = r_{xy} = E(x,y) = \sum\sum XY . P(X=x, Y=y)}$$

ÖRN)

$y \backslash x$	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Kolerasyon $E(XY) = ?$

$E(X,y) = 1.0.\frac{1}{12} + 1.1.\frac{1}{4} + 2.0.\frac{1}{6} + 2.1.\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ //

Kesikli Ortak Dağılımda Kovaryans Hesaplama

X ve Y arasındaki ilişkiyi gösteren bir katsayı

$$\text{Kovaryans} = \operatorname{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = \boxed{E(XY) - E(X).E(Y)}$$
$$= E(XY) - \mu_x . \mu_y$$

ÖRN

y \ x	1	2	
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\} \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\} \frac{3}{4}$
+	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

$\operatorname{cov}(x,y) = ?$

$\sigma_{xy} = ?$

1. adım

$$E(XY) = 1.0.\frac{1}{12} + 1.1.\frac{1}{4} + 2.0.\frac{1}{6} + 2.1.\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

2. adım → Marjinal olasılık dağılımlarını çıkar

X	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	0	1
P(Y=y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$E(X) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$E(Y) = 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

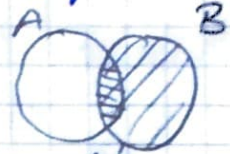
3. adım

$$\sigma_{xy} = E(XY) - E(X).E(Y)$$
$$= \frac{5}{4} - \frac{5}{\cancel{3}}.\frac{\cancel{3}}{4} = 0$$

$\boxed{\text{KURAL}}$ $\operatorname{cov}(x,y) = \sigma_{xy} = 0$ çıkarsa X ile Y **BAĞIMSIZ**

Kesikli Ortak Dağılımda
~~Kesiklide~~ Koşullu Dağılım Hesaplama

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



⇓

B'nin gerçekleşmesi durumunda A'nın gerçekleşmesi

	2	3	4	
5	0,12	0,42	0,06	} 0,6
	+	+		
6	0,08	0,28	0,01	} 0,4
	0,2	0,7	0,01	

$P(X=2, Y=5) = 0,12$

Y	5	6
P(Y=y)	0,6	0,4

a) $P(X=2 \mid Y=6) = \dfrac{P(X=2, Y=6)}{P(Y=6)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}4} = \dfrac{1}{5}$

X	2	3	4
P(X=x)	0,2	0,7	0,01

b) $P(Y=5 \mid X=4) = \dfrac{P(Y=5, X=4)}{P(X=4)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}01} = \dfrac{3}{5}$ //

c) $P(Y=6 \mid X \leq 3) = \dfrac{P(X=2, Y=6) + P(X=3, Y=6)}{P(X \leq 3)} = \dfrac{0{,}08 + 0{,}28}{0{,}9}$

$= \dfrac{2}{5}$ //

Sürekli ~~Dağılımda Ortak~~ Ortak Olasılık Dağılımı

$1 \leq x \leq 3$
$2 \leq y \leq 5$

$$f(x,y) = \begin{cases} \text{----}, & 1 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq 5 \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases}$$

Örnek Olarak;

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & x \frac{2}{3} / 0 \leq x \leq 1 \quad , x \frac{4}{3} / 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{ diğer durumlar.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{ŞARTLARI}}$

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\, dx = 1$ olmalı.

(2) $f(x,y) \geq 0$ olmalı

Bu fonksiyonunun Sürekli ortak dağılımı olup olmadığını belirle

1. Şart

$$\int_0^1 \left(\underbrace{\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\, dx}_{} \right) dy = \frac{x^2}{3} + \frac{4yx}{3} \Big|_0^1 \quad \frac{1}{3} + \frac{4y}{3} - 0 = \frac{1}{3} + \frac{4y}{3}$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{4y}{3}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{4y}{3}\right) dy = \left(\frac{1}{3}y + \frac{2y^2}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 0 + 0 = \frac{3}{3} = 1$$

2. Şart $\quad \frac{2x}{3} + \frac{4y}{3}$

$$0 \leq \frac{2x}{3} \leq \frac{2}{3}$$

$$+ \quad 0 \leq \frac{4y}{3} \leq \frac{4}{3}$$

$$0 \leq \frac{2x}{3} + \frac{4y}{3} \leq 2$$

$$0 \leq f(x,y) \leq 2 \longrightarrow f(x,y) \geq 0$$

ÖRN $f(x,y) = \begin{cases} a(x+y) & , 1 \leq x \leq 2 , 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$

Sürekli ortak ise a kaçtır?

$$\int_4^5 \int_1^2 ax + ay \, dx \, dy = 1 \quad \text{olmalı}$$

$$\frac{ax^2}{2} + ayx \Big|_1^2 = (2a + 2ay) - \left(\frac{a}{2} + ay\right) = \frac{3a}{2} + ay$$

$$\int_4^5 \left(\frac{3a}{2} + ay\right) dy = \frac{3ay}{2} + \frac{ay^2}{2} \Big|_4^5 = \left(\frac{15a}{2} + \frac{25a}{2}\right) - \left(\frac{12a}{2} + \frac{16a}{2}\right)$$

$$= 20a - 14a = 6a = 1$$

$$a = \frac{1}{6}$$

Sürekli Ortak Olasılık Dağılımında Olasılık Hesaplama

$$P(a<x<b , c<y,d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dx \, dy$$

$P(x=2 , y=3) = 0 \longrightarrow$ Aralık yok.

$P(x=2 , y<3) = 0$

ÖRN $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+y) & , 1 \leq x \leq 2 , 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$

sürekli ortak dağılımdır. Buna göre

a) $P(x=1{,}5 , y=4{,}2) = ?$ 0

b) $P(x<\frac{3}{2} , y \leq \frac{9}{2}) = \int_1^{3/2} \int_4^{9/2} \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{6}\right) dy \, dx$

c) $P(-2<x<1{,}2 , y=4) = ?$ 0

d) $P(1<x , y<\frac{9}{2}) = \int_1^2 \int_4^{9/2} \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{6}\right) dx \, dy$

Sürekli Marjinal Olasılık Dağılımı

X'in Marjinal $\longrightarrow$ $\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy}$

y'nin " $\longrightarrow$ $\boxed{f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx}$

ÖRN: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+y) & , 1 \leq x \leq 2 , \ 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$

a) X'in Marjinal dağılım fonk. ?

$$f(x) = \int_4^5 \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{6}\right) dy = \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{12} \Big|_4^5 = \left(\frac{5x}{6} + \frac{25}{12}\right) - \left(\frac{4x}{6} + \frac{16}{12}\right)$$

$$= \boxed{\frac{x}{6} + \frac{3}{4}}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{3}{4} & , 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}}$$

b) Y'nin marjinal dağılım fonk. ?

$$f(y) = \int_1^2 \left(\frac{x}{6} + \frac{y}{6}\right) dx = \frac{x^2}{12} + \frac{yx}{6} \Big|_1^2 = \left(\frac{4}{12} + \frac{2y}{6}\right) - \left(\frac{1}{12} + \frac{y}{6}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} + \frac{y}{6}}$$

$$\boxed{f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{y}{6} & , 4 \leq y \leq 5 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}}$$

Sürekli Rastgele Değişkenlerin Bağımsızlığı

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{6} & , 1 \leq x \leq 3 \, , \, 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{diğer durum.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{KURAL}}$: $f(x,y) = f(x) . f(y)$ ise X ve Y **BAĞIMSIZ**

değil ise **BAĞIMLI**

$f(x)$: X'in marjinal olasılık dağılımı

$f(y)$: Y'nin " " "

Bağımlımı Bağımsızmı?

$$f(x) = \int_1^2 \frac{xy}{6} dy = \frac{xy^2}{12} \Big|_1^2 = \frac{4x}{12} - \frac{x}{12} = \frac{3x}{12} = \frac{x}{4}$$

$$f(y) = \int_1^3 \frac{xy}{6} dx = \frac{x^2 y}{12} \Big|_1^3 = \frac{9y}{12} - \frac{y}{12} = \frac{8y}{12} = \frac{2y}{3}$$

$$f(x,y) \stackrel{?}{=} f(x) . f(y) =$$

$$\frac{x.y}{6} \stackrel{?}{=} \frac{x}{\cancel{4}_2} . \frac{\cancel{2}y}{3} = \frac{x\,y}{6} \checkmark$$ **BAĞIMSIZ**

Sürekli Ortak Olasılık Dağılımında Korelasyon

$$\text{Kolerasyon} = r_{xy} = E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} XY \, f(x,y) \, dx \, dy$$

ÖRN $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{6} & , 1 \leq x \leq 3 \, , 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{diğer durum.} \end{cases}$ Kolerasyon?

$$E(XY) = \int_1^3 \int_1^2 x.y.\frac{xy}{6} dy \, dx = \int_1^3 \int_1^2 \frac{x^2 y^2}{6} dy \, dx = \int_1^3 \frac{7x^2}{18} dx$$

$$\frac{x^2 y^3}{18} \Big|_1^2 = \frac{8x^2}{18} - \frac{x^2}{18} = \frac{7x^2}{18}$$

$$\frac{7x^3}{54} \Big|_1^3 \; \frac{7.27}{54} - \frac{7.1}{54} = \frac{91}{27}$$

Sürekli Ortak Olasılık Dağılımında Kovaryans

$$\boxed{\text{Kovaryans} = \operatorname{cov}(x,y) = \sigma_{xy} = E(XY) - E(X).E(Y)}$$

ÖRN: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{6} & , 1 \le x \le 2 , 4 \le y \le 5 \\ 0 & , \text{diğer durum.} \end{cases}$ kovaryans = ?

1. adım

$$E(XY) = \int_4^5 \int_1^2 x.y\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{6}\right) dx\, dy = \int_4^5 \int_1^2 \frac{x^2 y}{6} + \frac{x y^2}{6} dx\, dy$$

$$\frac{x^3 y}{18} + \frac{x^2 y^2}{12} \Big|_1^2 = \left(\frac{8y}{18} + \frac{4y^2}{12}\right) - \left(\frac{y}{18} + \frac{y^2}{12}\right) = \frac{7y}{18} + \frac{y^2}{4}$$

$$\int_4^5 \frac{7y}{18} + \frac{y^2}{4} dy = \frac{7y^2}{36} + \frac{y^3}{12} \Big|_4^5 = \left(\frac{175}{36} + \frac{125}{12}\right) - \left(\frac{112}{36} + \frac{64}{12}\right)$$

$$= \boxed{\frac{41}{6} = E(XY)}$$

2. adım

$$f(x) = \int_4^5 \frac{x}{6} + \frac{y}{6} dy = \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{12} \Big|_4^5 = \frac{5x}{6} + \frac{25}{12} - \frac{4x}{6} - \frac{16}{12} = \boxed{\frac{x}{6} + \frac{3}{4}}$$

$$f(y) = \int_1^2 \frac{x}{6} + \frac{y}{6} dx = \frac{x^2}{12} + \frac{yx}{6} \Big|_1^2 = \frac{4}{12} + \frac{2y}{6} - \frac{1}{12} - \frac{y}{6} = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{y}{6}}$$

$$E(X) = \int x.f(x)\, dx = \int_1^2 \frac{x^2}{6} + \frac{3x}{4} dx = \frac{x^3}{18} + \frac{3x^2}{8} \Big|_1^2 = \frac{109}{72}$$

$$E(Y) = \int y.f(y)\, dy = \int_4^5 \frac{y}{4} + \frac{y^2}{6} dy = \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{18} \Big|_4^5 = \frac{325}{72}$$

3. adım

$$\sigma_{xy} = \operatorname{cov}(x,y) = E(XY) - E(X).E(Y) = \frac{41}{6} - \frac{109}{72} . \frac{325}{72} = -0{,}000192\ldots$$

Ortalama Nedir?

$$\text{Ortalama} = \frac{\text{Verilerin tamamının toplamı}}{\text{Veri adedi}}$$

DAL - YAPRAK GRAFİĞİ

13, 15, 15, 18, 21, 35, 38, 38, 39, 41, 41, 41, 43, 47, 54

Yaprak=her zaman son basamaktır.

Dal = Son basamak hariç olan basamaklar.

Dal	Yaprak
1	3 5 5 8
2	1
3	5 8 8 9
4	1 1 1 3 7

Popülasyon: Hakkında bilgi edilmek istenen veya tahminde bulunulmak istenen kitle, grup, veri herneyse tamamıdır.

Örneklem : Popülasyon içinden seçilen bir alt kümedir.

Popülasyon Ve Örneklem İstatistikleri

Popülasyon İstatistikleri	Örneklem İstatistikleri
μ = Ortalama (Aritmetik)	$\bar{x}$ = Ortalama
σ^2 = Varyans	s^2 = Varyans
σ = Standart Sapma	s = standart sapma

(Varyans ne kadar küçükse veriler ortalamaya o kadar yakındır.)

Sınıflanmış Serilerde Aritmetik Ortalama

Sınıflanmış Seri :

Sınıflar	Frekans
10-16	4
17-23	2
24-30	5
31-37	1

Aritmetik ort. ?

$\frac{10+16}{2} = 13 \times 4 = 52$

$\frac{17+23}{2} = 20 \times 2 = 40$

$\frac{24+30}{2} = 27 \times 5 = 135$

$\frac{31+37}{2} = 34 \times 1 = 34$

$+$ ―――
261

$\frac{261}{12} = 21,75$

Sınıflanmış Serilerde Mod (Tepe Değer)

Mod: Bir veri grubunda en çok tekrar eden değer.

Sınıflanmış Seri :

Sınıflar	Frekans
15-20	4
21-26	8
27-32	11
33-38	6
39-44	7

1. adım: Frekansı en yüksek sınıf belirlenmeli. (Mod Sınıfı)

2. adım

$$mod = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \cdot i \Longrightarrow 27 + \frac{3}{3+5} \cdot 5 = 28,875$$

L = Mod sınıfının alt sınırı

Δ_1 = " " frekansı ile bir önceki sınıfın frekansı arasındaki fark

Δ_2 = " " " " sonraki " " "

i = Sınıf aralığı

Basit Seride Medyan:

Veri Adedi = n

n tek ise $\frac{n+1}{2}$. terim medyan

n çift ise $\frac{n}{2}$ ve $\left(\frac{n}{2}+1\right)$. terimlerin aritmetik ortalaması medyandır.

Gruplanmış Serilerde Medyan:

Veri	Frekans
15	7
21	4
23	11
30	5

medyan?

$\rightarrow n = 7+4+11+5 = 27$ tek

$\frac{n+1}{2} = \frac{27+1}{2} = 14$. terim medyan

23

İstatiksel Tahmin

Örneklem istatistiklerinden populasyon istatistiklerini tahmin etmektir.

İstatiksel Tahmin Çeşitleri

1- Nokta Tahmini : Tek bir değer tahmini olur.

2- Aralık Tahmini : Aralık tahmini yapılır. (Güven Aralığı)

① örneklem $\bigcirc \longrightarrow \mu = 20$

② örneklem $\bigcirc \longrightarrow 18 < \mu < 22$

① Aralık Tahmini (Giriş)

1- Tek Populasyon için

* Ortalama için aralık tahmini (μ)
  - Populasyon varyansı bilinen (standart sapma) (z tablosu)
  - Populasyon varyansı bilinmeyen
    - $n > 30$ (örneklem veri adedi) (z tab.)
    - $n \leq 30$ (t tablosu)

* Varyans için aralık tahmini (σ^2) (kikare tablosu)
* Populasyon Oranı için aralık tahmini (p) (z tablosu)
* Eşleştirilmiş gözlemlerin farkı için ortalama tahmini

2- İki Populasyon İçin

* Ortalamaların farkı için aralık tahmini ($\mu_1 - \mu_2$)
  - Populasyon varyansları biliniyorsa (z tablosu)
  - " " bilinmiyorsa
    - varyanslar eşit kabul edilip çözülür.
    - " " " etmeyerek çözülür.

* Populasyon varyanslarının oranı için aralık tahmini

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$ (F tablosu)

Ortalama İçin Güven Aralığı Bulma

Nokta tahmini: Popülasyon ortalaması için örneklem ortalaması en iyi nokta tahminidir.

Örnek Standart Sapma ve Varyans Hesaplama

s = standart Sapma

s^2 = Varyans

Standart Sapma, ortalamadan sapmaların ortalamasıdır.

1. Yol: 1. adım = $\bar{X}$ bulunur

Varyans

2. adım = Herbirinden $\bar{X}$ çıkarılır ve kareleri alınır ve çıkan sonuçlar toplanır

3. adım = Veri adedinin 1 eksiğine $(n-1)$'e bölücez.

4. adım = Çıkan sonucu $\sqrt{\ }$ şeklinde yazarak stan. sapma bulunur.

Örn: 1, 3, 5, 7, 9 st. sapma ve varyans?

$$\bar{X} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = 5$$

$(1-5)^2 = 16$

$(3-5)^2 = 4$

$(5-5)^2 = 0$

$(7-5)^2 = 4$

$(9-5)^2 = 16$

toplam = 40

$$s^2 = \frac{40}{5-1} = 10$$

St. sapma $= \sqrt{10}$

Varyans $= 10$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

2. yol =

$$s^2 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{5 \cdot 165 - 625}{5 \cdot 4} = \frac{200}{20} = 10$$

1, 3, 5, 7, 9 = 25

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

1 9 25 49 81 = 165

$s = \sqrt{10}$

Hipotez Testi

- Sıfır Hipotezi ve Karşıt Hipotez

⇒ Populasyon hakkında ortaya bir iddia atılır.

2 tane hipotez elde edilir.

H_0 = Sıfır Hipotezi

H_1 = Karşıt Hipotez

H_0 = Örneklemden elde edilen değer ile populasyonun bilinen değeri arasında fark yoktur.

H_1 = " " " " " "

" önemli bir fark vardır.

---

1. Çeşit

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

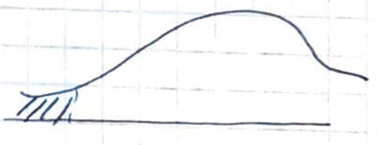
} Çift taraflı

2. Çeşit

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 = \mu < \mu_0$

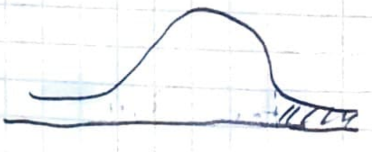
} Tek taraflı



$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

} Tek taraflı



ÖRN) Bir hastalık iyileşme süreci 10 günden az olduğu iddia ediliyor.

$H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu < 10$

ÖRN Bir firma ürettiği çiplerde hatalı üretim oranının %5'ten fazla olduğunu iddia ediyor.

P = oran

$H_0 : P = 0,05$

$H_1 : P > 0,05$

Anlamlılık Düzeyi

α : Anlamlılık Düzeyi

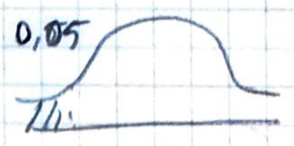
1-α : Güven düzeyi

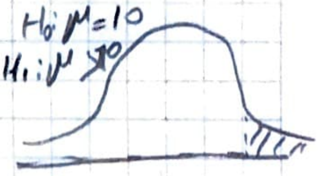
α → kritik bölge (Ret bölgesi)

$\alpha = 0,05$

$H_0 : \mu = 10$

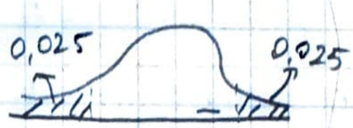
$H_1 : \mu < 10$





$H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu \neq 10$



*** Kritik Bölge, Kritik Değer, Test İstatistiği**

Kritik Değer: Hipotez testinde ret bölgesini, kabul bölgesinden ayıran değere denir. Örnek $\alpha = 0,05 = \%5$

3 çeşidi vardır

1. ve 2. Tip Hata Kavramları

1. Hata Tipi : Ho doğru olduğunda Ho'ı reddetmek (α)

2. " " : Ho yanlış " Ho'ı kabul etmek (β)

Hipotez Testinin Gücü ⇒ $1 - \beta$

Hipotez Testi Uygulama Adımları

1. adım : Hipotezler Oluşturulmalı H_0: ...

H_1: ...

2. adım : Anlamlılık Düzeyi Belirlenmeli ve hipoteze göre ret bölgesi ve kabul bölgesi çizimi yapılmalı

*** 3. adım : Örneklem dağılımının belirlenmesi
1) Z tablosumu?
2) t tablosumu?
3) χ^2 tablosumu?
4) F tablosumu?

4. adım : Bulduğumuz tablodan kritik değer elde edilmeli ve red bölgesi belirlenmeli

5. adım : Test istatistiği hesaplanmalı. (Her tabloda farklı formül.)

t_{test} = ...

6. adım : $t_{kritik\ değer}$ ile t_{test} karşılaştırılarak H_0 (kabulmü edilecek/reddedilmesi) H_0 reddedilir.

Tabloları Belirleme.

1. çeşit : Popul. Ort. Hip. Testi (μ)
- Popul. varyansı biliniyorken (σ^2) => Z tablosu
- " " bilinmiyorken (σ^2) ve $n \geq 30$ => Z tablosu
- " " " (σ^2) ve $n < 30$ => t tablosu

2. Çeşit : Populasyon Oranının Hip. Testi (P)
Z tablosu

3. Çeşit : Populasyon Varyansının Hip. Testi (σ^2)
(χ^2 tablosu)

4. Çeşit : Eşlendirilmiş gözlemler için Ortal. Farkı(μ_D) için Hipotez testi

(t tablosu)

Varyansın Bilindiği Durum

ÖRN] Bir hast. tedavisi için yeni bir tür ilaç geliştirilmiş. Bu ilaçla tedavi edilenlerin ortalama iyileşme süresinin 10 günden az olduğu iddia ediliyor. Rastgele seçilen 7 hasta bu ilaçla tedavi edilmiş ve kaç günde iyileştikleri yazılmıştır.

$$2, 4, 11, 3, 4, 6, 8$$

$\sigma^2 = 4$ ve $\alpha = 0,01$ ise bu iddia için kararınız?

⇒ Kullanılacak tablo ⇒ z tablosu (Pop. varyansı biliniyor)

(1) Kritik değer ⇒ $z_c = z_{tablo}$

(2) Test istatistiği ⇒ $z_{test} = \dfrac{\bar{X}\text{ (örneklem ortalaması)} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

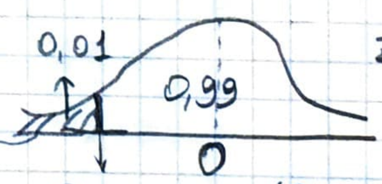
$\sqrt{n} \to$ örneklem sayısı

---

1. adım: $H_0: \mu = 10$

$H_1: \mu < 10$

2. adım:



$z_c = -$

$z_{test} = -6,046$

$z_{kritik} = -2,33$ (z tablosundan 0,99'u bulucaz)

3. adım: $z_{test} = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$\bar{X} = \dfrac{2+4+11+3+4+6+8}{7} = \dfrac{37}{7} = 5,43$

$= \dfrac{5,43 - 10}{\frac{2}{\sqrt{7}}} \cong -6,046$

$\sigma^2 = 4$

$\sigma = 2$

$z_{test} = -6,046$

z_{test} taralı alan içine düşerse H_0'ı reddederiz. Yani H_1 kabul edilir.

$z_{test} = -6,046 < z_{kritik} = -2,33$

Yorum: %99 olasılıkla ortalama iyileşme süresi 10 günden azdır.