

Метод на Якоби (проста итерация) за решаване на СЛАУ

```
In[1]:= A =  $\begin{pmatrix} 5 & 0.36 & 0.4 \\ 0.3 & 7 & 0.22 \\ 0.72 & 0.77 & -6 \end{pmatrix}$ ; b = {12, 15, 79};
```

```
LinearSolve[A, b] (*за сравнение на резултатите *)
```

```
Out[2]= {3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

Конструирание на метода - получаване на матрицата **B** и вектора **c**

```
n = Length[A]
```

```
B = Table[0, {i, n}, {j, n}] (*инициализираме нулева матрица*)
```

```
Out[3]= 3
```

```
Out[4]= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

```
In[5]:= B // MatrixForm
```

```
Out[5]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
For[i = 1, i ≤ n, i++,
```

$$B[[i]] = \frac{-A[[i]]}{A[[i, i]]};$$

$$B[[i, i]] = 0$$

```
] (*запълваме елементите на B*)
```

```
In[9]:= B // MatrixForm
```

```
Out[9]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.072 & -0.08 \\ -0.0428571 & 0 & -0.0314286 \\ 0.12 & 0.128333 & 0 \end{pmatrix}$$

Инициализиране вектора c и добавяме пресмятане на неговите координати към цикъла

```
In[10]:= c = Table[0, n]
```

```
Out[10]=
```

```
{0, 0, 0}
```

```
In[11]:= For[i = 1, i ≤ n, i++,
  B[[i]] =  $\frac{-A[[i]]}{A[[i, i]]}$ ;
  B[[i, i]] = 0;
  c[[i]] =  $\frac{b[[i]]}{A[[i, i]]}$ 
] (*запълваме елементите на B и c*)
```

```
In[12]:= c
```

```
Out[12]=
```

$$\left\{ \frac{12}{5}, \frac{15}{7}, -\frac{79}{6} \right\}$$

```
In[13]:= x = {0, 0, 0};
```

(*избора на начално приближение – не е задължително да е нулев вектор*)

```
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
  Print["k = ", k, " x = ", x];
  x = B.x + c
```

```
]
```

```
k = 0 x = {0, 0, 0}
```

```
k = 1 x = {2.4, 2.14286, -13.1667}
```

```
k = 2 x = {3.29905, 2.45381, -12.6037}
```

```
k = 3 x = {3.23162, 2.39758, -12.4559}
```

за сравнение:

```
{3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

пускаме повече итерации

```
In[15]:= x = {0, 0, 0};
```

(*избора на начално приближение – не е задължително да е нулев вектор*)

```
For[k = 0, k ≤ 10, k++,
  Print["k = ", k, " x = ", x];
  x = B.x + c
```

```
]
```

```
k = 0 x = {0, 0, 0}
```

```
k = 1 x = {2.4, 2.14286, -13.1667}
```

```
k = 2 x = {3.29905, 2.45381, -12.6037}
```

```
k = 3 x = {3.23162, 2.39758, -12.4559}
```

```
k = 4 x = {3.22384, 2.39583, -12.4712}
```

```
k = 5 x = {3.22519, 2.39664, -12.4723}
```

```
k = 6 x = {3.22523, 2.39662, -12.4721}
```

```
k = 7 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

```
k = 8 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

```
k = 9 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

```
k = 10 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

за сравнение:

{3.22521, 2.39661, -12.4721}

с друго начално приближение

```
In[17]:= x = {7, 3, 11};
(*избора на начално приближение - не е задължително да е нулев вектор*)
For[k = 0, k ≤ 10, k++,
  Print["k = ", k, " x = ", x];
  x = B.x + c
]
k = 0 x = {7, 3, 11}
k = 1 x = {1.304, 1.49714, -11.9417}
k = 2 x = {3.24754, 2.46228, -12.8181}
k = 3 x = {3.24816, 2.40653, -12.461}
k = 4 x = {3.22361, 2.39528, -12.468}
k = 5 x = {3.22498, 2.39656, -12.4724}
k = 6 x = {3.22524, 2.39663, -12.4721}
k = 7 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 8 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 9 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 10 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

за сравнение:

{3.22521, 2.39661, -12.4721}

избор на начално приближение, което е далеч от решението

```
In[23]:= x = {107, -76, 345 782 344 567 788};
(*избора на начално приближение - не е задължително да е нулев вектор*)
For[k = 0, k ≤ 30, k++,
  Print["k = ", k, " x = ", x];
  x = B.x + c
]
```

$k = 0 \quad x = \{10000000, -117649, 345782344567788\}$
 $k = 1 \quad x = \{-2.76626 \times 10^{13}, -1.08674 \times 10^{13}, 1.18489 \times 10^6\}$
 $k = 2 \quad x = \{7.82456 \times 10^{11}, 1.18554 \times 10^{12}, -4.71417 \times 10^{12}\}$
 $k = 3 \quad x = \{2.91774 \times 10^{11}, 1.14626 \times 10^{11}, 2.46039 \times 10^{11}\}$
 $k = 4 \quad x = \{-2.79362 \times 10^{10}, -2.02373 \times 10^{10}, 4.97232 \times 10^{10}\}$
 $k = 5 \quad x = \{-2.52077 \times 10^9, -3.65466 \times 10^8, -5.94946 \times 10^9\}$
 $k = 6 \quad x = \{5.0227 \times 10^8, 2.95016 \times 10^8, -3.49394 \times 10^8\}$
 $k = 7 \quad x = \{6.7104 \times 10^6, -1.05449 \times 10^7, 9.81328 \times 10^7\}$
 $k = 8 \quad x = \{-7.09139 \times 10^6, -3.37176 \times 10^6, -548026.\}$
 $k = 9 \quad x = \{286611., 321143., -1.28369 \times 10^6\}$
 $k = 10 \quad x = \{79575.3, 28063.3, 75593.5\}$
 $k = 11 \quad x = \{-8065.64, -5784.02, 13137.3\}$
 $k = 12 \quad x = \{-632.136, -65.0743, -1723.33\}$
 $k = 13 \quad x = \{144.951, 83.3961, -97.3742\}$
 $k = 14 \quad x = \{4.18542, -1.00901, 14.93\}$
 $k = 15 \quad x = \{1.27825, 1.49425, -12.7939\}$
 $k = 16 \quad x = \{3.31593, 2.49017, -12.8215\}$
 $k = 17 \quad x = \{3.24643, 2.40371, -12.4492\}$
 $k = 18 \quad x = \{3.22287, 2.39498, -12.4686\}$
 $k = 19 \quad x = \{3.22505, 2.39661, -12.4726\}$
 $k = 20 \quad x = \{3.22525, 2.39664, -12.4721\}$
 $k = 21 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 22 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 23 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 24 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 25 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 26 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 27 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 28 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 29 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$
 $k = 30 \quad x = \{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$

за сравнение:

$\{3.22521, 2.39661, -12.4721\}$

Векторни и матрични норми (основни сведения от ЛА)

Пример:

In[25]:= **a** = {1, -2, 0.6}

Out[25]=
 $\{1, -2, 0.6\}$

In[27]:= **Z** = $\begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -1.17 \\ 13 & -6 & -2.5 \\ 77 & 0.69 & \pi \end{pmatrix}$

Out[27]=
 $\{\{3, 0.2, -1.17\}, \{13, -6, -2.5\}, \{77, 0.69, \pi\}\}$

векторни норми

първа - кубична

In[29]:= **Max**[**Abs**[**a**[[1]]], **Abs**[**a**[[2]]], **Abs**[**a**[[3]]]

Out[29]=
 2

In[30]:= **Norm**[**a**, ∞]

Out[30]=
 2.

втора - октаедрична

In[31]:= **Abs**[**a**[[1]]] + **Abs**[**a**[[2]]] + **Abs**[**a**[[3]]]

Out[31]=
 3.6

In[32]:= **Norm**[**a**, 1]

Out[32]=
 3.6

трета - сферична

In[33]:= $\sqrt{\mathbf{a}[[1]]^2 + \mathbf{a}[[2]]^2 + \mathbf{a}[[3]]^2}$

Out[33]=
 2.31517

In[34]:= **Norm**[**a**]

Out[34]=
 2.31517

матрични норми

In[35]:= **Norm**[**Z**]

Out[35]=
 78.1924

```
In[38]:= Z // MatrixForm
```

```
Out[38]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -1.17 \\ 13 & -6 & -2.5 \\ 77 & 0.69 & \pi \end{pmatrix}$$

първа - кубична

```
In[39]:= Table[Sum[Abs[Z[[i, j]]], {j, n}], {i, n}]
```

```
Out[39]=
```

```
{4.37, 21.5, 80.8316}
```

```
In[40]:= Max[Table[Sum[Abs[Z[[i, j]]], {j, n}]]
```

```
Out[40]=
```

```
80.8316
```

втора - октаедрична

```
In[41]:= Table[Sum[Abs[Z[[i, j]]], {j, n}], {i, n}]
```

```
Out[41]=
```

```
{93, 6.89, 6.81159}
```

```
In[42]:= Max[Table[Sum[Abs[Z[[i, j]]], {j, n}]]
```

```
Out[42]=
```

```
93
```

трета - сферична

```
In[43]:= Sqrt[Sum[Sum[Z[[i, j]]^2, {j, n}], {i, n}]]
```

```
Out[43]=
```

```
78.4921
```

```
In[44]:= Norm[Z]
```

```
Out[44]=
```

```
78.1924
```

Проверка на сходимост

$$\|B\| < 1$$

първа - кубична

```
In[45]:= Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, n}]]
```

```
Out[45]= 0.248333
```

втора - октаедрична

```
In[46]:= Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, n}]]
```

```
Out[46]= 0.200333
```

трета - сферична

```
In[47]:= Sqrt[Sum[Sum[B[[i, j]]^2, {j, n}], {i, n}]]
```

```
Out[47]= 0.212786
```

Избираме норма, която да е по-малка от единица.

В случая ще изберем най-малката възможна за да си подсигури по-бърза сходимост - **втора норма**

Извод: $\|B\|_2 = 0.20033 < 1$. Следователно итерационният процес ще бъде сходящ **при всеки избор на начално приближение**.

Краен вариант на кода

```
In[64]:= A =  $\begin{pmatrix} 5 & 0.36 & 0.4 \\ 0.3 & 7 & 0.22 \\ 0.72 & 0.77 & -6 \end{pmatrix}$ ; b = {12, 15, 79};

Print["За сравнение решението е ", LinearSolve[A, b] ]
n = Length[A];
B = Table[0, {i, n}, {j, n}]; (*инициализираме нулева матрица*)
c = Table[0, n];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
  B[[i]] =  $\frac{-A[[i]]}{A[[i, i]]}$ ;
  B[[i, i]] = 0;
  c[[i]] =  $\frac{b[[i]]}{A[[i, i]]}$ 
] (*запълваме елементите на B и c*)
Print["Итерационният процес е  $x^{(k+1)} =$ ", B // MatrixForm, " $. x^{(k)} +$ ", c // MatrixForm]
x = {107, -76, 345 782 344 567 788};
(*избора на начално приближение – не е задължително да е нулев вектор*)
(*избрали сме да работим с втора норма –
вж. разсъжденията при проверка на сходимостта*)
normB = Max[Table[ $\sum_{i=1}^n \text{Abs}[B[[i, j]]]$ , {j, n}]];
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 5, k++,
  Print["k = ", k, " x = ", x, "  $\epsilon_k =$ ", eps = normBk  $\left( \text{normx0} + \frac{\text{normc}}{1 - \text{normB}} \right)$ ];
  x = B.x + c
]
```

За сравнение решението е {3.22521, 2.39661, -12.4721}

$$\text{Итерационният процес е } x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.072 & -0.08 \\ -0.0428571 & 0 & -0.0314286 \\ 0.12 & 0.128333 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{15}{7} \\ -\frac{79}{6} \end{pmatrix}$$

$$k = 0 \quad x = \{10000000, -117649, 345782344567788\} \quad \epsilon_k = 3.45782 \times 10^{14}$$

$$k = 1 \quad x = \{-2.76626 \times 10^{13}, -1.08674 \times 10^{13}, 1.18489 \times 10^6\} \quad \epsilon_k = 6.92717 \times 10^{13}$$

$$k = 2 \quad x = \{7.82456 \times 10^{11}, 1.18554 \times 10^{12}, -4.71417 \times 10^{12}\} \quad \epsilon_k = 1.38774 \times 10^{13}$$

$$k = 3 \quad x = \{2.91774 \times 10^{11}, 1.14626 \times 10^{11}, 2.46039 \times 10^{11}\} \quad \epsilon_k = 2.78011 \times 10^{12}$$

$$k = 4 \quad x = \{-2.79362 \times 10^{10}, -2.02373 \times 10^{10}, 4.97232 \times 10^{10}\} \quad \epsilon_k = 5.56949 \times 10^{11}$$

$$k = 5 \quad x = \{-2.52077 \times 10^9, -3.65466 \times 10^8, -5.94946 \times 10^9\} \quad \epsilon_k = 1.11576 \times 10^{11}$$