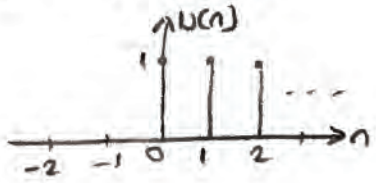
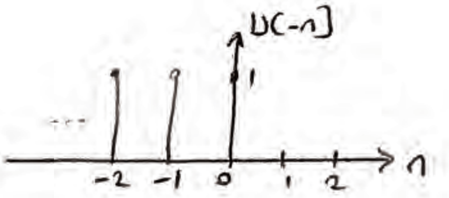
## 2- Yansıtma

$x(n)$ ayrık zamanlı işareti için $x[-n]$ yansıtma işlemi yansıtma işlemi olarak isimlendirilir. Bu işlem, basit olarak düşey eksene göre işaretin simetriğini alarak yapılır.

Örnek: $u[-n]$ işaretini elde ediniz.

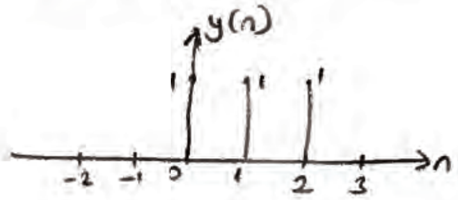




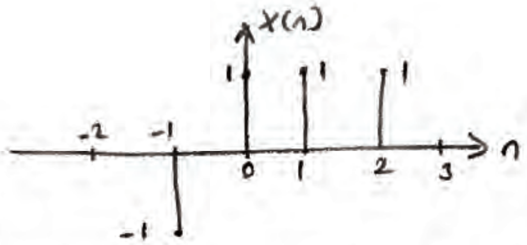
Örnek; $x(n) = u(n) - u(n-3) - \delta[n+1]$ ise

a) $x(n-1)$ b) $x(n+2)$ c) $x(-n+1)$ d) $x[-n-3]$ işaretlerini elde ediniz

$y(n) = u(n) - u(n-3)$

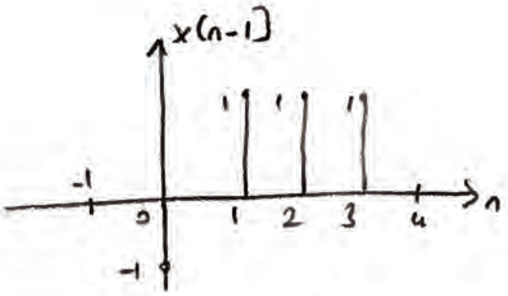


$x(n) = y(n) - \delta[n+1]$



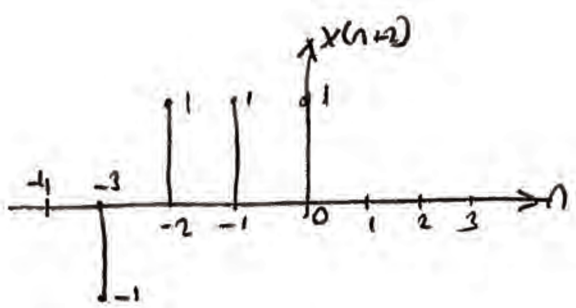
$x(n) = \{-1, \underset{\uparrow\, n=0}{1}, 1, 1\}$ ($x(n)$ işaretinin dizi olarak gösterimi)

a) $x(n-1) \rightarrow$



$x(n-1) = \{\underset{\uparrow\, n=0}{-1}, 1, 1, 1\}$

b) $x(n+2)$



$x[n+2] = \{-1, 1, 1, \underset{\uparrow\, n=0}{1}\}$

**NOT:** Yansıtma ve kaydırma işlemleri bir arada yapılıyorsa iki farklı şekilde istenen sinyal elde edilebilir.

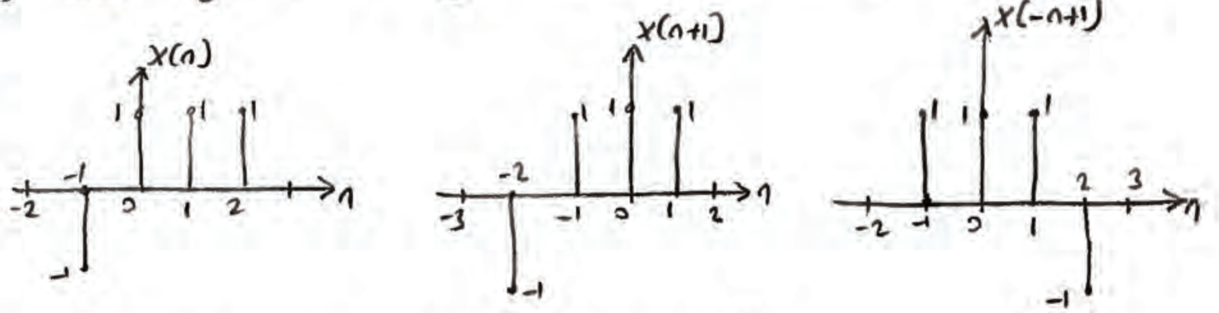
1) Önce kaydırma işlemi, daha sonra kaydırılan sinyale yansıtma işlemi uygulanır.

2) Önce yansıtma işlemi, kaydırma işlemi uygulanırken de sağa kaydırma söz konusu ise sola, sola kaydırma söz konusu ise sağa kaydırma işlemi ile istenilen sinyal elde edilir.

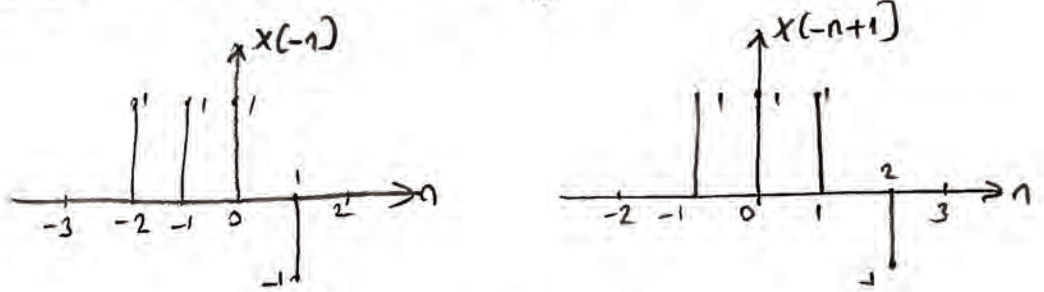
c) $x(-n+1)$

1. Yöntem; Önce kaydırma sonra yansıtma işlemi uygulanırsa;

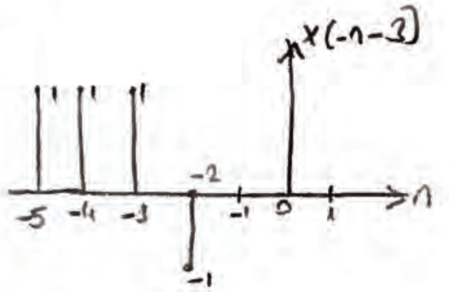
$x(-n+1)$




2. Yöntem; Önce yansıtma sonra kaydırma işlemi uygulanırsa;




d) $x(-n-3)$




3. Genlik Ölçekleme

$x(n)$ ayrık zamanlı sinyali için,

$$y(n) = A.x(n) \quad (A \in R)$$ işlemine genlik ölçekleme denir.

4. Ayrık zamanlı sinyallerin toplaması veya çıkarması

$x_1(n), x_2(n), x_3(n), \ldots x_m(n)$

$$y(n) = x_1(n) \mp x_2(n) \mp x_3(n) \mp \ldots \mp x_m(n)$$ olarak tanımlanır.

## 5. Sinyallerin Çarpılması

$x_1(n], x_2(n], \ldots x_m(n]$

$y(n] = x_1(n] . x_2(n] . \ldots . x_m(n]$ şeklinde tanımlanır.

<u>NOT:</u> Ayrık zamanlı sinyallerin çarpım sonucu bulunurken herbir sinyal örnek örnek çarpılarak işlem yapılır.

## 6. Zamanda Ölçekleme

Ayrık zamanlı sinyallerde zamanda ölçekleme işlemi iki şekilde yapılır.

a) Zamanda örnek arttırma

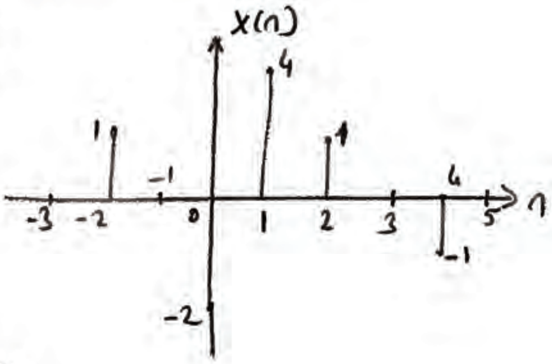
b) Zamanda örnek seyreltme

$x(n)$ ayrık zamanlı sinyali için $a > 1$ $(a \in Z^+)$ olmak üzere $x(an]$ işlemi zamanda örnek seyreltme, $x\left[\frac{n}{a}\right]$ ise zamanda örnek arttırma olarak adlandırılır.

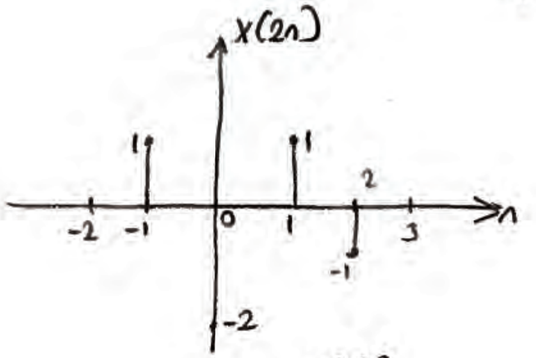
<u>örnek;</u> $x(n] = \delta(n+2] - 2\delta(n] + 4\delta(n-1] + \delta(n-2] - \delta(n-4]$ ise

a) $x[2n]$ b) $x\left(\frac{n}{2}\right]$ işaretlerini bulunuz.

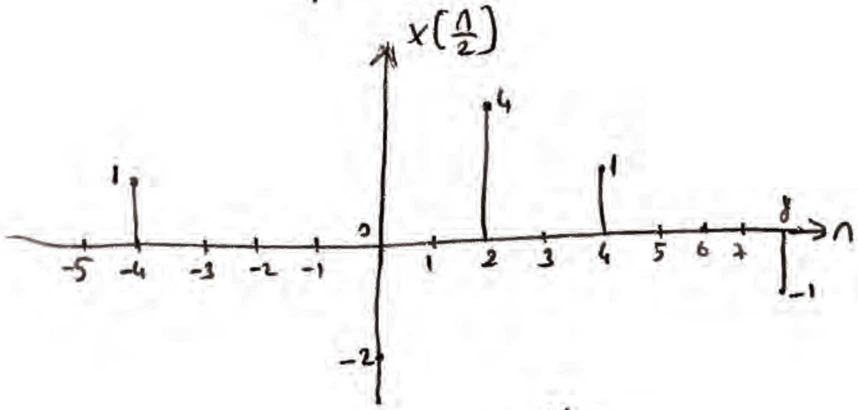
$$x(n] = \{1, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-2}, 4, 1, 0, -1\}$$



a) $x(2n]$



b) $x\left[\frac{n}{2}\right]$



**NOT:** Ötelene, yansıtma ve zamanda ölçekleme işlemleri sırarada yapılıyorsa aşağıdaki işlem sırası takip edilmelidir.

Ötelene — yansıtma — ölçekleme

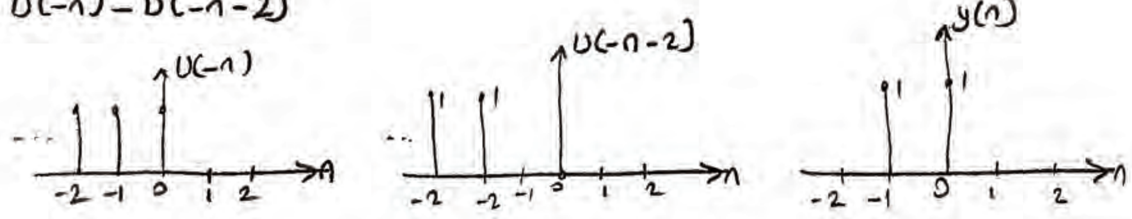
yansıtma — ötelene — ölçekleme

**Örnek:** $x(n) = u[-n] - u[-n-2] + \delta[n] + 2\delta[n-1]$ veriliyor.

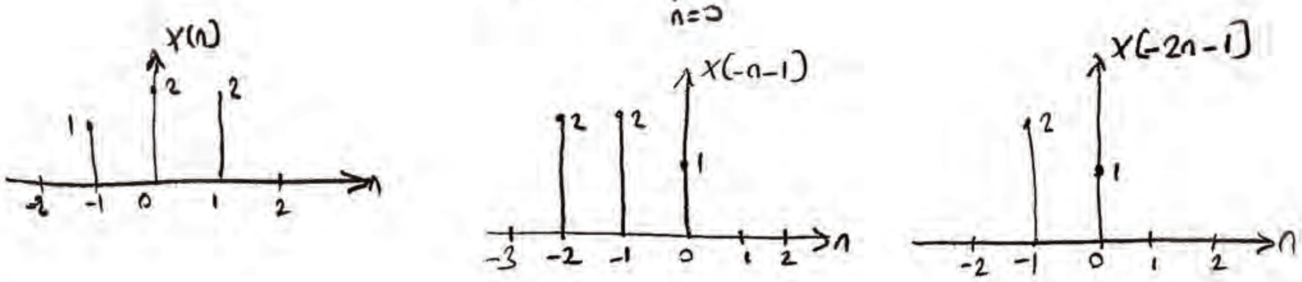
a) $x[-2n-1]$ b) $x[-\frac{n}{2}+3]$ işaretlerini bulunuz.

a)

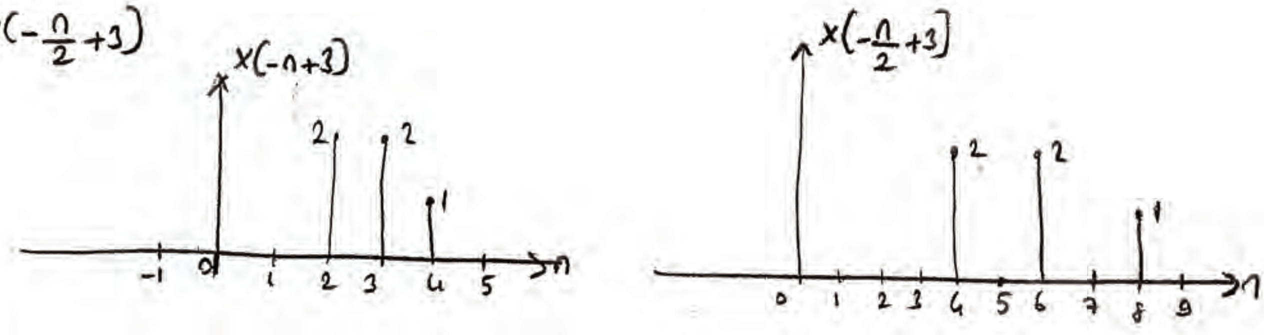
$y(n) = u[-n] - u[-n-2]$




$$y(n) = \{1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}\}$$




b) $x(-\frac{n}{2}+3)$




## Ayrık Zamanlı Sinyallerde Periyot ve Periyodiklik

Sinyaller

Periyodik sinyaller

Periyodik olmayan sinyaller (Aperyodik)

Ayrık zamanlı sinyallerde periyodik olma şartı;

$$x(n) = x(n+N] \qquad N \in Z^+$$

şartını sağlıyorsa $x(n)$ ayrık zamanlı sinyali $(N \in Z^+)$ $N$ periyodu ile periyodiktir.

**NOT:** Periyodik iki ayrık zamanlı sinyaller toplamı da periyodiktir.

$$x_1(n) = x_1(n+N_1) \quad N_1 \in Z^+$$

$$x_2(n) = x_2(n+N_2) \quad N_2 \in Z^+$$

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad x(n) \text{ periyodik bir sinyaldir.}$$

$$x_1(n) = x_1(n+mN_1)$$

$$x_2(n) = x_2(n+r.N_2)$$

$$x_1(n) + x_2(n) = x_1(n+mN_1) + x_2(n+rN_2)$$

$$x(n) = x_1(n+mN_1) + x_2(n+rN_2)$$

$$x(n+N) = x_1(n+mN_1) + x_2(n+rN_2)$$

$$N = mN_1 = r.N_2 \quad \text{veya} \quad N = EKOK(N_1, N_2)$$

k tane periyodik sinyal varsa;

$$x_1(n+N_1),\ x_2(n+N_2), \ldots\ x_k(n+N_k)$$

$$x(n+N) = x_1(n+N_1) + x_2(n+N_2) + \ldots + x_k(n+N_k)$$

$$N = OKEK(N_1, N_2, \ldots N_k)$$

**Örnek:**

$$x_1(n) = x_1(N+2)$$

$$x_2(n) = x_2(N+4)$$

$$x_3(n) = x_3(N+6)$$

a) $x_4(n) = x_1(n) + x_2(n)$ periyodik mi? Periyodik ise periyodunu bulunuz.

b) $x_5(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n)$ periyodik mi? periyodik ise periyodunu bulunuz.

a) $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, $N_3 = 6$

$x_4(n)$ sinyali periyodiktir ve periyodu $N_4 = 4$ tür.

b) $x_5(n)$ sinyali de periyodiktir ve periyodu $N_5 = OKEK(2,4,6) = 12$ 'dir.

## Sürekli ve Ayrık Zamanlı Sinüzoidal Sinyaller

### a) Sürekli Zamanlı Sinüzoidal Sinyaller

Genel olarak sürekli zamanlı sinüzoidal sinyaller;

$$x_a(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{şeklinde gösterilir.}$$

Sürekli zamanlı sinüzoidal sinyallerin özellikleri;-

1) Her frekans değeri için kati periyodiktir.
2) Farklı frekansa sahip sürekli zamanlı sinüzoidal sinyaller birbirinden farklıdır.
3) Artan frekans ile birlikte sinyalin osilasyonu da artar. Teorik olarak frekansı limitsiz bir şekilde arttırabiliriz.

b) Ayrık Zamanlı Sinüzoidal Sinyaller

Genel olarak ayrık zamanlı sinüzoidal sinyaller;

$$x(n) = A \cdot \cos(\Omega_0 n + \phi)$$ şeklinde gösterilir.

Özellikleri;

1) Ayrık zamanlı sinüzoidal sinyaller, sadece ve sadece $F_0$ ayrık zamanlı frekansın rasyonel bir sayı olduğu durumda periyodiktirler.

$\Omega_0 \rightarrow$ Ayrık açısal frekans

$F_0 \rightarrow$ Ayrık frekans olmak üzere

$$\Omega_0 = 2\pi F_0$$

$$x(n) = x(n+N)$$

$A=1$, $\phi=0$ olduğu durumda

$$x(n) = \cos(\Omega_0 n)$$
$$x(n+N) = \cos(\Omega_0 (N+n))$$
$$x(n+N) = \cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N)$$

$$\cos(\Omega_0 n) = \cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N)$$

$$\Omega_0 N = 2\pi r \quad (r \in Z^+) \qquad \boxed{\frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\Omega_0}}$$

$$\Omega_0 = 2\pi F_0 \qquad \frac{N}{r} = \frac{1}{F_0} \Rightarrow \boxed{F_0 = \frac{r}{N}}$$

Örnek; Aşağıda verilen sinyalin periyodikliğini inceleyiniz.

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{11}\right)$$

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{11} \qquad \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \Rightarrow \frac{N}{r} = 22 \qquad \underline{N = 22r}$$

$N=22$ temel periyodu ile periyodiktir.

Örnek: $x(n) = \sin(0{,}6n)$ sinyalinin periyodikliğini inceleyiniz.

$$\Omega_0 = 0{,}6 \qquad \frac{N}{r} = \frac{2\pi}{0{,}6} \Rightarrow \frac{N}{r} = \frac{10\pi}{3}$$ rasyonel olmadığından periyodik değildir.

2) Frekansları arasındaki fark $2\pi$ ve katları olan ayrık zamanlı sinüzoidal sinyaller birbirinin aynısıdır.

$$x_1(n) = \cos(\Omega_1 n)$$
$$x_2(n) = \cos(\Omega_2 n) \qquad \Omega_2 - \Omega_1 = 2\pi r \Rightarrow \Omega_2 = \Omega_1 + 2\pi r$$

$$x_2(n) = \cos(\Omega_1 n + 2\pi r n)$$
$$x_2(n) = \cos(\Omega_1 n) \qquad x_1(n) = x_2(n) \text{ dir.}$$

3) Açısal frekansları toplamı $2\pi$ olan sinüzoidal sinyallerde birbirinin aynısıdır.

$$x_1(n) = \cos(\Omega_1 n)$$
$$x_2(n) = \cos(\Omega_2 n) \qquad \Omega_1 + \Omega_2 = 2\pi$$

$$x_2(n) = \cos((2\pi - \Omega_1)n)$$
$$x_2(n) = \cos(-\Omega_1 n + 2\pi n)$$
$$x_2(n) = \cos(-\Omega_1 n) \Rightarrow x_2(n) = \cos(\Omega_1 n) \text{ ve } x_1(n) = x_2(n)$$

4) Ayrık zamanlı sinüzoidal sinyallerde en yüksek osilasyon $\Omega_0 = \pi$ veya eşdeğer olarak $F_0 = \frac{1}{2}$ frekanslarında oluşur.

NOT: Ayrık zamanlı sinüzoidal sinyaller için ayrık açısal frekans ($\Omega_0$) için temel frekans aralığı $0 - \pi$ aralığıdır. Bu aralığın dışındaki frekansa sahip bütün ayrık zamanlı sinüzoidal sinyaller temel frekans aralığındaki sinyallerin birer görüntüsüdür. $F_0$ ayrık frekans açısından bakılırsa da temel frekans aralığı $0 - \frac{1}{2}$ aralığıdır.

$\Omega_0$ Temel frekans aralığı $0 - \pi$

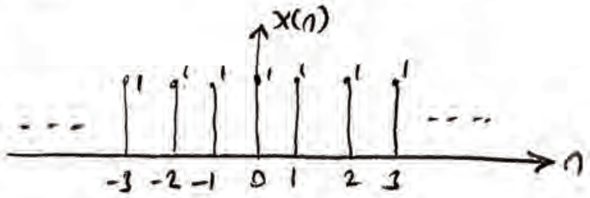
$F_0$ Temel frekans aralığı $0 - \frac{1}{2}$

$$\Omega_0(max) = \pi$$
$$\Omega_0 = 2\pi F_0$$
$$\Omega_0(max) = 2\pi F_0(max)$$
$$\pi = 2\pi F_0(max) \qquad F_0(max) = \frac{1}{2}$$

Örnek; $x(n) = \cos(\Omega_0 n)$ sinyalini aşağıdaki frekans değerleri için çiziniz ve inceleyiniz.

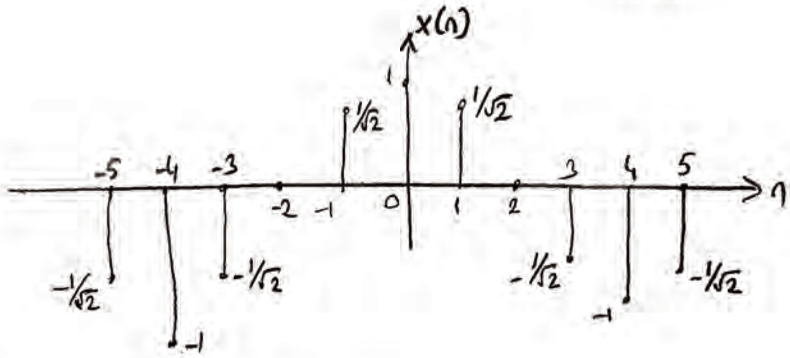
a) $\Omega_0 = 0$  b) $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$  c) $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$  d) $\Omega_0 = \pi$  e) $\Omega_0 = \frac{7\pi}{4}$

a) $\Omega_0 = 0$  $x(n) = \cos(0 . n) = 1$



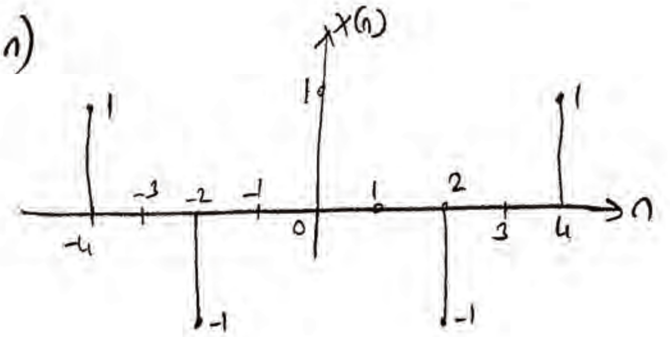

b) $\frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$  $\frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \underline{N = 8r}$

$N = 8$ ile periyodik  $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$



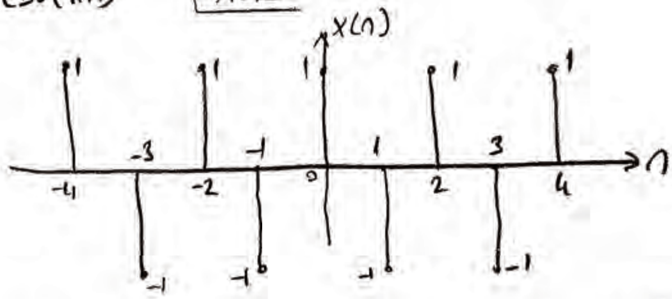

c) $\frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow N = 4r$  $N = 4$ ile periyodik

$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$




d) $\Omega_0 = \pi$

$x(n) = \cos(\pi n)$  $\underline{N = 2}$




e) $\frac{N}{r} = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{4}} \Rightarrow \frac{N}{r} = \frac{8}{7} \Rightarrow N = \frac{8r}{7}$  $N = 8$ $(r = 7)$  $x(n) = \cos\left(\frac{7\pi n}{4}\right)$

$\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi$ old.

(b) şıkkı ile aynı sonuç

**KAYNAKLAR**


**1-** Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

**2-** Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

**3-** Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.