Ayrık Zamanlı Sistemlerin Frekans Cevabı Analizi

$$X(z) \longrightarrow \boxed{\text{LZDAZS}} \longrightarrow Y(z)$$

Eğer sistemin girisine $x(n) = C.\cos(\Omega_0 n)$ şeklinde isaret uygulansın.

Burada C = genlik, Ω_0 = ayrık acısal frekans

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

Eğer giris sinyalini z domain olarak degistirirsek

$$X(z) = C.\frac{z(z-\cos(\Omega_0))}{z^2 - 2.z\cos(\Omega_0) + 1}$$

$$Y(z) = H(z).X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} . C . \frac{z(z-\cos(\Omega_0))}{z^2 - 2z\cos(\Omega_0) + 1}$$

(sistemin cıkısı)

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} . C \frac{(z-\cos(\Omega_0))}{\underbrace{z^2 - 2z\cos(\Omega_0) + 1}_{(z-e^{j\Omega_0})(z-e^{-j\Omega_0})}}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = C.\frac{B(z)}{A(z)} \frac{(z-\cos(\Omega_0))}{(z-e^{j\Omega_0})(z-e^{-j\Omega_0})}$$ olarak yazabiliriz

$$\frac{Y(z)}{z} = C \cdot \frac{N(z)}{A(z)} + \frac{c_1}{z - e^{J\Omega_0}} + \frac{c_2}{z - e^{-J\Omega_0}} \qquad c_1 = c_2^*$$

$$c_1 = c\,H(e^{J\Omega_0}) \cdot \frac{e^{J\Omega_0} - \cos(\Omega_0)}{e^{J\Omega_0} - e^{-J\Omega_0}} = c\,H(e^{J\Omega_0}) \frac{J\sin(\Omega_0)}{2J\sin(\Omega_0)}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{c}{2} H(e^{J\Omega_0})} \qquad \boxed{c_2 = \frac{c}{2} H(e^{-J\Omega_0})}$$

Eğer c_1 ve c_2 değerlerini üst kısma yazarsak

$$y[n] = 2\left(\frac{c}{2}\left|H(e^{J\Omega_0})\right|\right) \cdot \cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{J\Omega_0})\right)$$

Hatırlatmalar:

$$\frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} \qquad c_1 = c_2^* \qquad c_1 = |c|\,e^{J\theta} \qquad c_1 = \frac{c}{2} H(e^{J\Omega_0})$$

$$p_1 = p_2^* \qquad p_1 = |r|\,e^{J\phi} \qquad p_1 = e^{J\Omega_0} \quad |r| = 1$$

$$\phi = \Omega_0$$

$$y(n) = 2|c|\,(|r|)^n \cos(\phi n + \theta)$$

$$\boxed{y(n) = c\,\left|H(e^{J\Omega_0})\right| \cdot \cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{J\Omega_0})\right)}$$

Ayrık zamanlı sistemlerde; $H(e^{J\Omega}) = H(z)\Big|_{z = e^{J\Omega}}$

Sürekli zamanlı sistemlerde;

$$H(jw) = H(s)\Big|_{s = jw}$$

ÖRNEK

Birim örnek cevabı $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ şeklinde verilen bir sistem için

a) $x(n) = A.\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) u(n)$ giriş işaretinin verdiği çıkışı bulunuz.

b) Aynı sistemin $x(n) = 10 - 5.\sin\left(\frac{\pi}{2}.n\right) + 20.\cos(\pi n)$ girişine verdiği cevabı bulunuz.

CEVAP

a) Öncelikle transfer fonksiyonunu bulmamız gerekir. (sistemin)

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xrightarrow{Z} H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$ olarak elde ederiz

Not: Birim örnek cevabı bir bakıma sistemin transfer fonksiyonu ile birim örnek sinyalinin çarpımından meydana gelmektedir

örneğin: $Y(z) = H(z).X(z)$

└ Birim örnek sinyalinin z dönüşümü -1- olacaktır.

Yani cevabının z dönüşümü sistemin transfer fonksiyonunu da verecektir

Şimdi genlik cevabı ile faz farkını bulalım. Girişimiz sinüsoidal olduğundan dolayı

$$H(\Omega) = H(e^{j\Omega}) = H(z)\Big|_{z = e^{j\Omega}}$$

! eğer sinüsoidal transfer fonksiyonu bulmak istiyorsak z görülen yere $e^{j\Omega}$ yazılacaktır

$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$ elde ederiz.

Genel denklemi tekrar hatırlatırsak

$$\boxed{y(n) = |H(\pi/2)|\,|x(n)| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \angle H(\pi/2)\right)}$$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\cos(\Omega)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\Omega)\right)^2}}$$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1-\cos(\Omega)+\frac{1}{4}\cos^2(\Omega)+\frac{1}{4}\sin^2(\Omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos(\Omega)}}$$

Yani $\boxed{|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos(\Omega)}}}$ *genlik cevabı

$\boxed{\angle H(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}\sin(\Omega)}{1-\frac{1}{2}\cos(\Omega)}}$ *faz farkı

Girişimiz $\Rightarrow$ $x(n) = A.\cos\left(\frac{\pi}{2}.n\right).u(n)$

Burada ayrık zaman frekansı $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$ olduğunu görürüz.

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \,//$$

$$\angle H(\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$\angle H(\Omega) = -0{,}4636$ radyan

Bulduğumuz faz farkı ve genlik cevabını sinyalimize karşı verilen cevabı bulmak için kullanacağız.

$$\boxed{y(n) = \frac{2.A}{\sqrt{5}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}.n - 0.4636\right) u(n)}$$

olarak elde ederiz..

b) Girisimiz $x(n) = 10 - 5.\sin\left(\frac{\pi}{2}.n\right) + 20\cos(\cancel{\pi}\,n)$ π

olduğundaki cevabı bulacağız.

$10 \rightarrow \Omega_1 = 0$

$5.\sin\left(\frac{\pi}{2}.n\right) \rightarrow \Omega_2 = \frac{\pi}{2}$

$20\cos(\pi.n) \rightarrow \Omega_3 = \pi$

genel sinyalin her bir kısmının frekansı. Bu frekanslara göre genlik cevaplarını ve faz farklarını buldum.

$$\boxed{|H(\Omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} = 2 \ , \quad \angle H(\Omega_1) = 0}$$

$$\boxed{|H(\Omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 0}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \ , \quad \angle H(\Omega_2) = -0.4636}$$

$$\boxed{|H(\Omega_3)| = \frac{2}{3} \ , \quad \angle H(\Omega_3) = 0}$$

Elde edilen faz farklarına ve genlik cevaplarına göre sistemin cevabını bulacağız.

$$y(n) = 10.2 - 5.\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{\pi}{2}n - 0,4636\right) + 20.\frac{2}{3}\cos(\pi n)$$

$$\boxed{y(n) = 20 - 2\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}.n - 0.4636\right) + \frac{40}{3}.\cos(\pi n)}$$

FİLTRELER

En basit tanımıyla frekans seçici devreye filtre (süzgeç) denir. Başka bir ifadeyle, arzu edilen frekansların geçmesine izin veren arzu edilmeyen frekansların ise geçişine izin vermeyen donanımların adıdır.

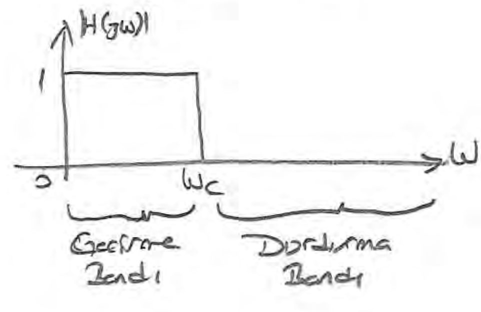
FİLTRELER

- Analog Filtreler
  - Pasif Analog Filt. (R, L, C)
  - Aktif Analog Filt. (OpAmp - OTA)
- Sayısal Filtreler
  - FIR filtreler (Finite Impulse Response)
  - IIR Filtreler (Infinite Impulse Response)

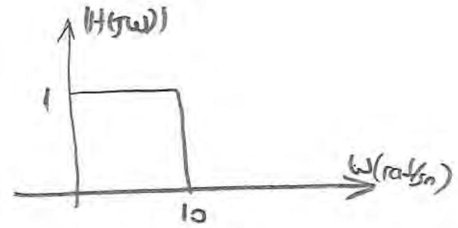
Hem analog hem de sayısal filtreler frekans cevaplarına göre beşe ayrılırlar.

- Alçak Geçiren Filtre (Low Pass Filter, AGF, LPF)
- Yüksek Geçiren Filtre (High Pass Filter, YGF, HPF)
- Band Geçiren Filtre (Band Pass Filter, BGF, BPF)
- Band Durduran Filtre (Band Stop Filter, BDF, BSF)
- Hep (Tüm) Geçiren Filtre (All Pass Filter, HGF, APF)

İdeal AGF genlik cevabı,



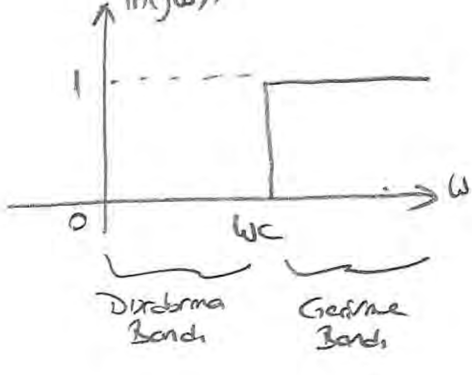
Örnek;



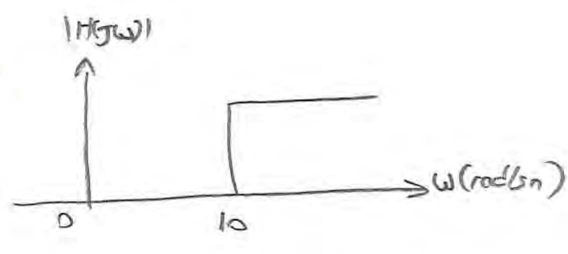
$x(t) = 20 + \sin(2t) + \cos(25t)$

$y(t) = 20 + \sin(2t)$

İdeal YGF genlik cevabı,



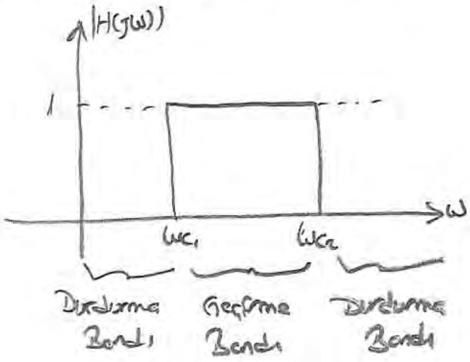
Örnek;



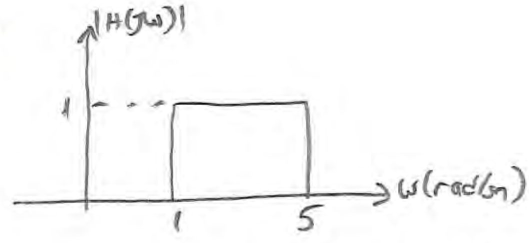
$x(t) = 20 + \sin(2t) + \cos(25t)$

$y(t) = \cos(25t)$

İdeal BGF genlik cevabı,



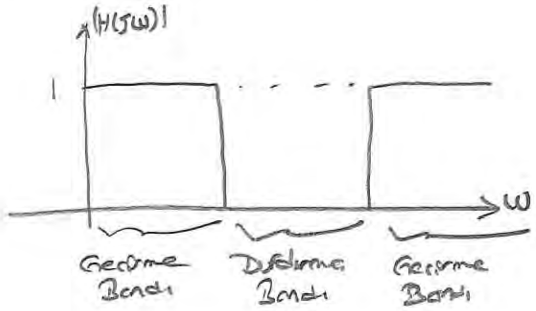
Örnek;



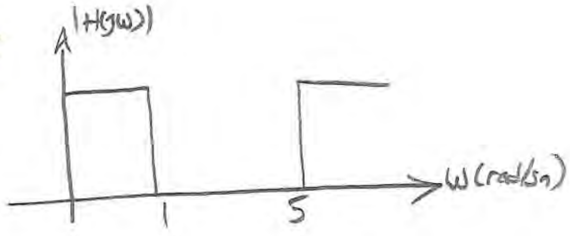
$x(t) = 20 + \sin(2t) + \cos(25t)$

$y(t) = \sin(2t)$

İdeal BDF genlik cevabı,



Örnek;



$x(t) = 20 + \sin(2t) + \cos(25t)$

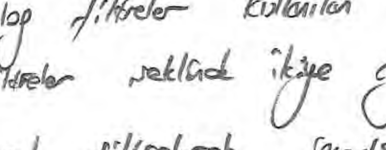
$y(t) = 20 + \cos(25t)$

Analog filtreler kullanılan devre elemanlarına göre Pasif analog filtreler ve Aktif analog filtreler şeklinde ikiye ayrılırlar.

Sayısal filtreler de impals cevaplarına göre iki gruba ayrılırlar. Sayısal bir filtre tasarlayabilmek için çok farklı yaklaşımlar vardır. Öncelikle istenen karakteristiği veren bir analog filtre tasarlanır ve çeşitli dönüşümler ile sayısal eşdeğeri (karşılığı) olan sayısal filtre elde edilir. Bu yaklaşım IIR filtreler için kullanılmaktadır. FIR filtre tasarımında ise genellikle pencereleme metodları veya değişmez impals cevabı yöntemi kullanılır.

Pasif Filtreler

1) AGF;



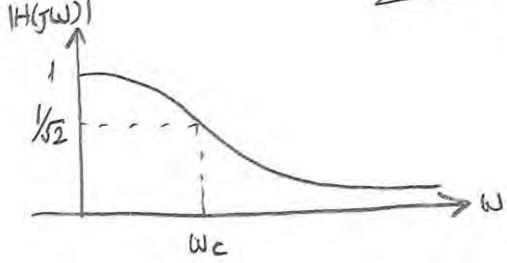
devrenin karakteristiğini inceleyebilmek için transfer fonksiyonunu elde etmemiz gerekiyor.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + s(RC)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

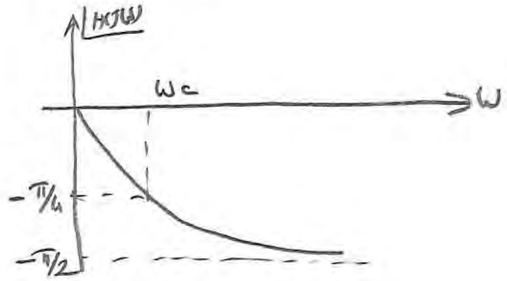
(1. dereceden pasif AGF)

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s \to j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega(RC)} \qquad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

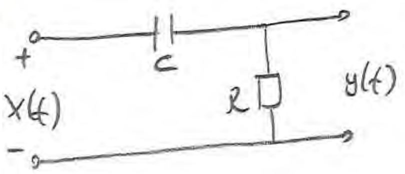


$\omega_c = \dfrac{1}{RC}$ $\qquad$ ω_c: kesim frekansı

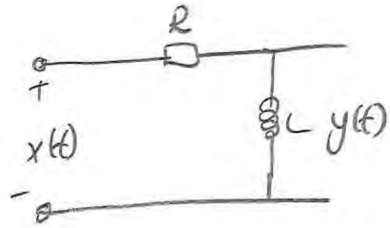


$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

2) YGF:



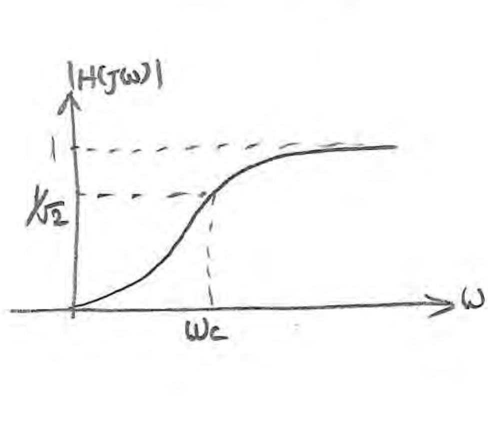
$\equiv$

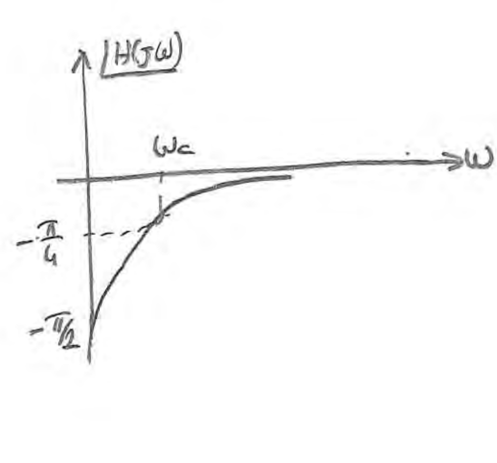


$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s(RC)}{1 + sRC} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \qquad \left(H(s) = \frac{s}{s + \omega_c} \right)$$

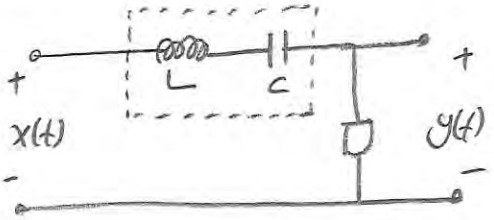
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \qquad \angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

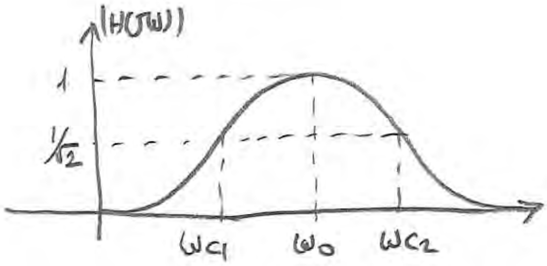




3.) BGF:



Giriş, çok düşük frekanslarda çıkışa aktarılmaz. Giriş, çok yüksek frekanslarda çıkışa aktarılmaz. Rezonansta ise $X_L = X_C$ olacağından göstereceklerı direnç sıfır (0) olacak ve çıkışa $x(t)$ (giriş) aktarılacaktır.



$$H(s) = \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s(RC)}{s(RC) + s^2(LC) + 1}$$

$$H(s) = \frac{s(R/L)}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}$$

$$BG = w_{c2} - w_{c1} = \frac{R}{L}$$

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

w_0: Rezonans (merkez) frekansı

$$H(s) = \frac{B \cdot s}{s^2 + Bs + w_0^2}$$

w_{c1} ve w_{c2} frekansları $|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğu durumdaki frekansları göstermektedir.

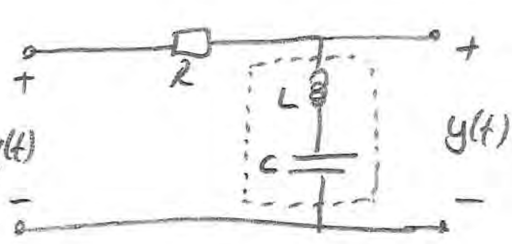
Alt kesim frekansı $\quad w_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$

Üst kesim frekansı $\quad w_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$

$$w_0 = \sqrt{w_{c1} \cdot w_{c2}}$$

$$w_{c1} = -\frac{BG}{2} + \sqrt{\left(\frac{BG}{2}\right)^2 + w_0^2} \qquad w_{c2} = \frac{BG}{2} + \sqrt{\left(\frac{BG}{2}\right)^2 + w_0^2}$$

4.) BDF:



Devrenin karakteristiği değişmeyecektir. Çıkış BGF'ye göre farklı yerden alındığı için frekans cevabı değişmektedir.

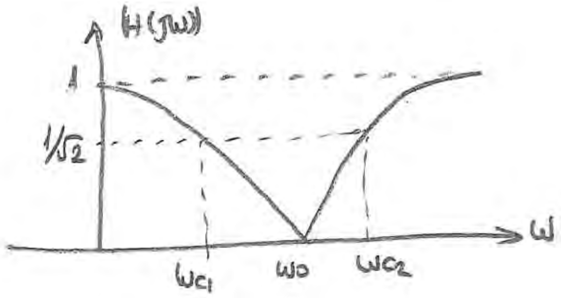
$$H(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2(LC) + 1}{s^2(LC) + s(RC) + 1} = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

Verilen devrede; giriş çok düşük frekanslarda çıkışa aktarılır.
giriş çok yüksek frekanslarda çıkışa aktarılır.
giriş, rezonans frekansında ise çıkış $(y(t))$ sıfır (0) olacaktır.

Dolayısıyla bu karakteristiği gösteren devreye BDF adı verilir.

$$H(s) = \frac{s^2 + w_0^2}{s^2 + Bs + w_0^2} \qquad B = \frac{R}{L} \text{ (Band genişliği)} \qquad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

w_0: Rezonans frekans merkez



$$\text{Band genişliği} = BG = w_{c2} - w_{c1} = \frac{R}{L}$$

$$\text{Alt kesim frekansı} = w_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\text{Üst kesim frekansı} = w_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$w_0 = \sqrt{w_{c1} \cdot w_{c2}}$$

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.

4- Doç. Dr. Turgay KAYA Ders Notları