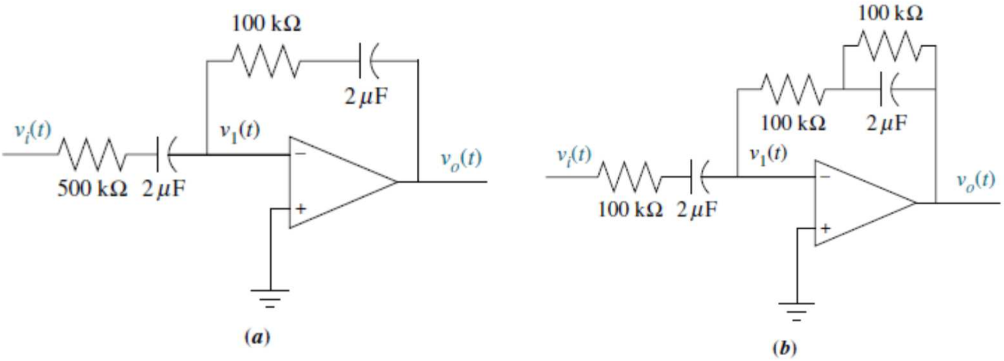
1.

Find the transfer function, $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$



a.

$$Z_1(s) = 5x10^5 + \frac{1}{2x10^{-6}s}$$

$$Z_2(s) = 10^5 + \frac{1}{2x10^{-6}s}$$

Therefore,

$$-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{1}{5}\frac{(s+5)}{(s+1)}$$

b.

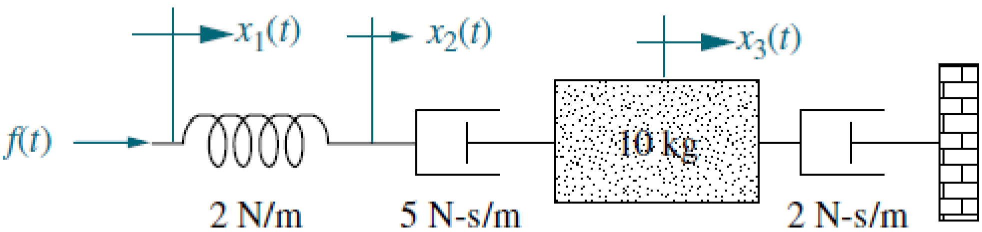
$$Z_1(s) = 10^5\left(\frac{5}{s}+1\right) = 10^5\frac{(s+5)}{s}$$

$$Z_2(s) = 10^5\left(1+\frac{5}{s+5}\right) = 10^5\frac{(s+10)}{(s+5)}$$

Therefore,

$$-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{s(s+10)}{(s+5)^2}$$

2. Aşağıdaki doğrusal mekanik sistemi için $G(s)=X_2(s)/F(s)$ transfer fonksiyonunu bulunuz. (İpucu: $x_2(t)$ de kütle sıfır kabul ediniz.)



x_1 için hareket denklemini yazarsak: $2X_1(s) - 2X_2(s) = F(s)$

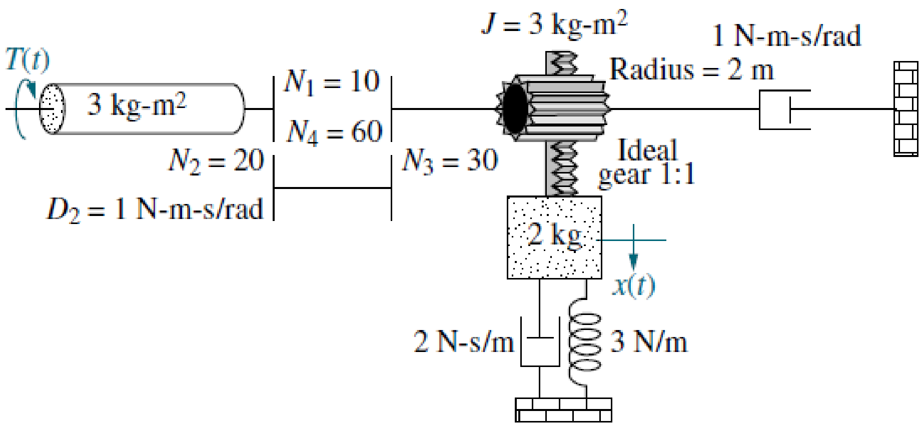
x_2 için hareket denklemini yazarsak: $(5s+2)X_2(s) - 2X_1(s) - 5sX_3(s) = 0$

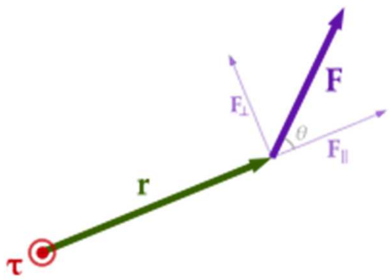
x_3 için hareket denklemini yazarsak: $(10s^2 + 7s)X_3(s) - 5sX_2(s) = 0$

$$X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 5s^2+10 & F(s) \\ -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5s^2+10 & -10 \\ -10 & \frac{1}{5}s+10 \end{vmatrix}} = \frac{10F(s)}{s(s^2+50s+2)}$$

böylece $\dfrac{X_2(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{10}\dfrac{(10s+7)}{s(5s+1)}$

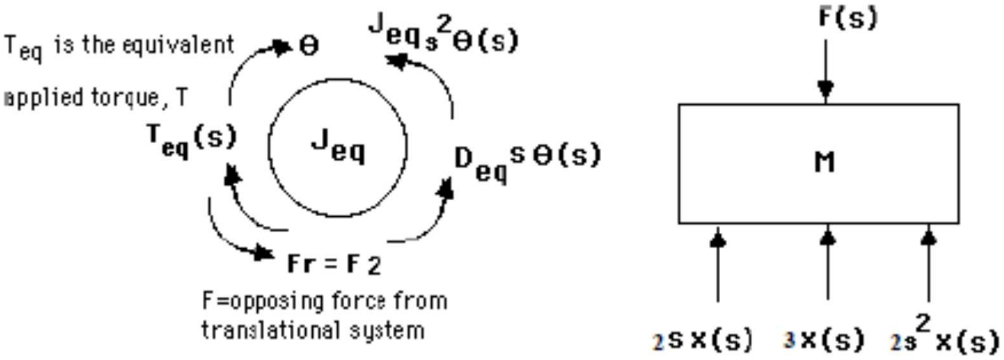
3. Aşağıdaki doğrusal ve döner dişli sistemlerinin birleşiminden oluşan mekanik sistemin serbest cisim diyagramını çizerek transfer fonksiyonunu G(s)=X(s)/T(s) bulunuz.





Tork ve kuvvet arasındaki ilişki denklemi: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$,

Döner ve doğrusal sistem serbest cisim diyagramları:



Kütleye ilişkin serbest cisim diyagramından $F(s) = (2s^2+2s+3)X(s)$ elde edilir.

Döner sistem serbest cisim diyagramından $(J_{eq}s^2 + D_{eq}s)\theta(s) + F(s)2 = T_{eq}(s)$ bulunur.

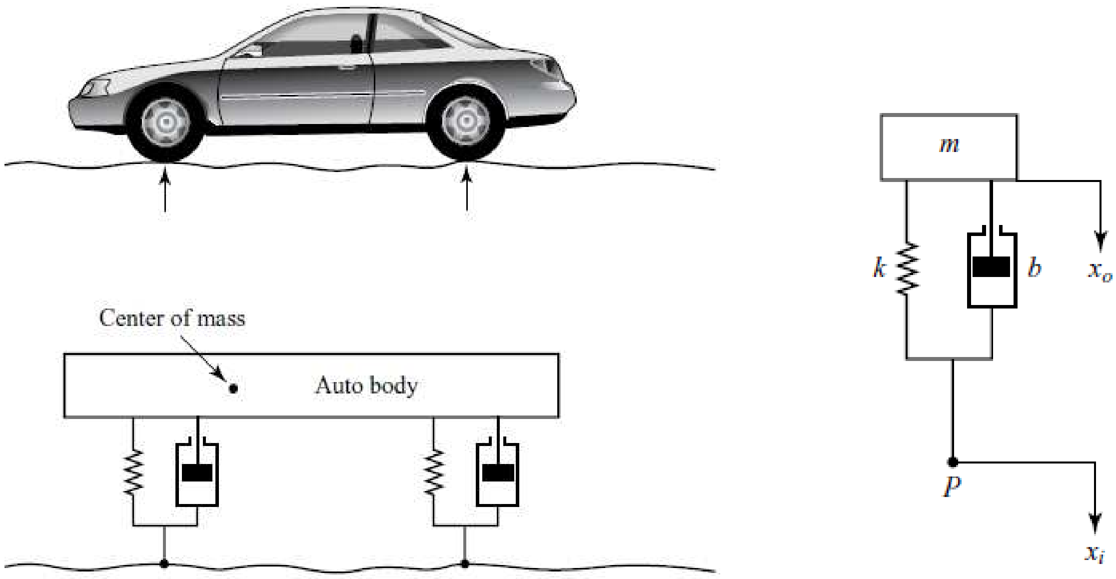
İki denklem birleştirilirse: $(J_{eq}s^2 + D_{eq}s)\theta(s) + (4s^2+4s+6)X(s) = T_{eq}(s)$ bulunur.

$\theta(s) = \dfrac{X(s)}{2}$ olduğundan $T_{eq} = \left[\left(\dfrac{J_{eq}}{2} + 4\right)s^2 + \left(\dfrac{D_{eq}}{2} + 4\right)s + 6\right]X(s)$ elde edilir.

$J_{eq} = 3+3(4)^2 = 51$, $D_{eq} = 1(2)^2 + 1 = 5$, and $T_{eq}(s) = 4T(s)$ ifadeleri denklemde yerine yazılırsa:

$$\frac{X(s)}{T(s)} = \frac{8}{59s^2 + 13s + 12}$$ elde edilir.

4. Aşağıda bir otomobil ve süspansiyon sisteminin basit bir modeli görülmektedir. 4 tekerlek ve aracın ağırlık merkezi göz önüne alındığında sistemin analizi karışıktır. Sağ yandaki basitleştirilmiş tek tekerlek modelinde x_i fonksiyonu yol yüzeyindeki engebeleri temsil ederken x_o aracın dikey hareketini temsil etmektedir. Transfer fonksiyonu $X_o(s)/X_i(s)$ hesaplayınız.

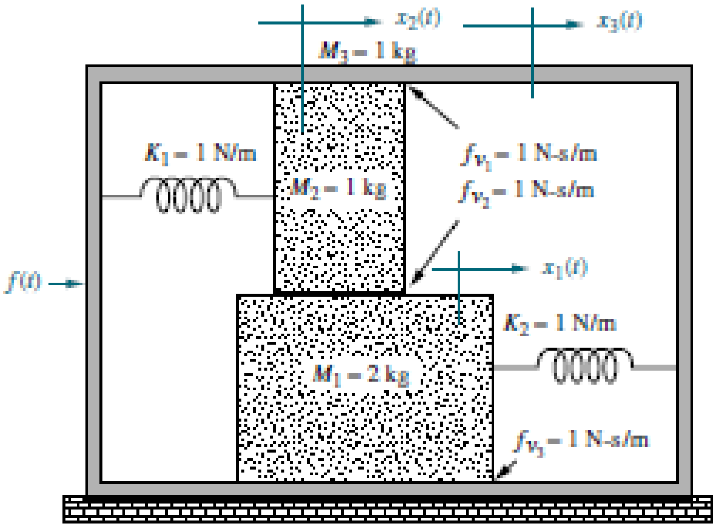


Hareket denkleminin Laplace dönüşümü alındığında:

$$(ms^2 + bs + k)X_o(s) - (bs + k)X_i(s) = 0$$ elde edilir. Buradan transfer fonksiyonu:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$ bulunur.

5. Aşağıdaki doğrusal hareket eden mekanik sistemin durum uzayı gösterimini x1(t) çıkış olacak şekilde gerçekleştiriniz. (state space representation)



sisteme ilişkin serbest cisim diyagramından hareket denklemlerini yazarsak:

$$
\begin{aligned}
&(2s^2+2s+1)X_1(s) - sX_2(s) - (s+1)X_3(s) = 0\\
&-sX_1(s) + (s^2+2s+1)X_2(s) - (s+1)X_3(s) = 0\\
&-(s+1)X_1(s) - (s+1)X_2(s) + (s^2+2s+2)X_3(s) = F(s)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklemlerin ters-Laplace dönüşümü alınırsa

$$
\begin{aligned}
&2\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 + x_1 - \dot{x}_2 - \dot{x}_3 - x_3 = 0\\
&-\dot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 + x_2 - \dot{x}_3 - x_3 = 0\\
&-\dot{x}_1 - x_1 - \dot{x}_2 - x_2 + \ddot{x}_3 + 2\dot{x}_3 + 2x_3 = f(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 = -\dot{x}_1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_2 + \frac{1}{2}\dot{x}_3 + \frac{1}{2}x_3\\
&\ddot{x}_2 = \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 - x_2 + \dot{x}_3 + x_3\\
&\ddot{x}_3 = \dot{x}_1 + x_1 + \dot{x}_2 + x_2 - 2\dot{x}_3 - 2x_3 + f(t)
\end{aligned}
$$

durum değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa:

$$z_1 = x_1;\ z_2 = \dot{x}_1;\ z_3 = x_2;\ z_4 = \dot{x}_2;\ z_5 = x_3;\ z_6 = \dot{x}_3$$

durum değişkenleri yukarıdaki denklem sisteminde yerleştirilir ve düzenlenirse:

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = z_2\\
&\dot{z}_2 = \ddot{x}_1 = -z_2 - \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_4 + \frac{1}{2}z_6 + \frac{1}{2}z_5\\
&\dot{z}_3 = \dot{x}_2 = z_4\\
&\dot{z}_4 = \ddot{x}_2 = z_2 - 2z_4 - z_3 + z_6 + z_5\\
&\dot{z}_5 = \dot{x}_3 = z_6\\
&\dot{z}_6 = \ddot{x}_3 = z_2 + z_1 + z_4 + z_3 - 2z_6 - 2z_5 + f(t)
\end{aligned}
$$

$$
\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} f(t)
$$

$$y = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]\mathbf{z}$$

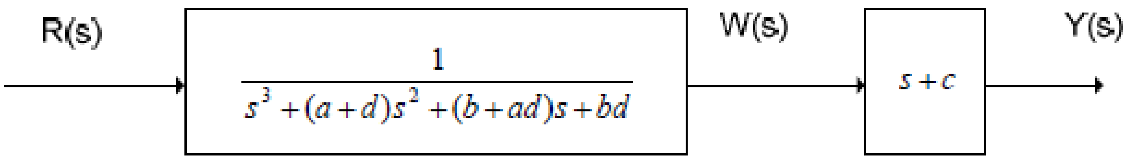
elde edilir.

4. Bir motor ve sensör sisteminin girişine birim basamak uygulandığında transfer fonksiyoun aşağıdaki gibi veriliyor.

Bu sistemin durum-uzay gösterimini gerçekleştiriniz. (state-space)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+c}{(s^2+as+b)(s+d)}$$

Çözüm: Transfer fonksiyonunu iki parçaya bölebiliriz.



$$\frac{W(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3+(a+d)s^2+(b+ad)s+bd} \quad \text{ve} \quad \frac{Y(s)}{W(s)} = s+c$$

Zaman uzayında:

$\dddot{w} + (a+d)\ddot{w} + (b+ad)\dot{w} + bdw = r$ ve $\dot{w} + cw = y$ elde edilir.

Durum değişkenleri:

$$x_1 = w$$
$$x_2 = \dot{w} = \dot{x}_1$$
$$x_3 = \ddot{w} = \dot{x}_2$$

olarak tanımlanır ve denklemler düzenlenirse

$\dddot{w} = \dot{x}_3 = r - bdx_1 - (b+ad)x_2 - (a+d)x_3$ ve $y = cx_1 + x_2$ elde edilir.

Sistemin matris-vektör formda gösterimi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bd & -(b+ad) & -(a+d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \qquad y = \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

5. Laplace dönüşümünü kullanarak aşağıda durum denklemleri ve çıkış denklemi verilen birim basamak girişli sistemin çözümünü yapınız.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \;\; \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Çözüm: Öncelikle X(s) bulunur:

$$x = (sI - A)^{-1}(x_0 + Bu)$$

$$X = \left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right) \qquad X = \begin{pmatrix} \dfrac{3s+1}{s[s+2]} \\ \dfrac{1-2s}{s[s+1][s+2]} \end{pmatrix}$$

X(s) kullanılarak çıkış yani Y(s) hesaplanır:

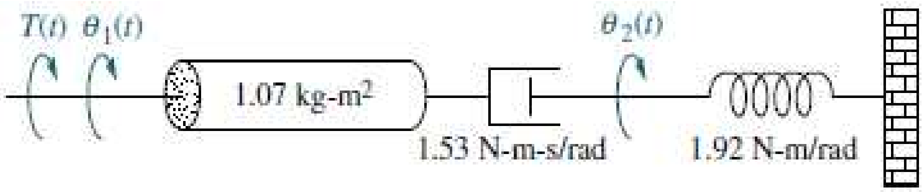
$$Y(s) = [0 \quad 1]\mathbf{X}$$

$$Y(s) = \left(\frac{1-2s}{s[s+1][s+2]} \right)$$

zaman uzayında y(t) çıkışını bulmak için ters-Laplace dönüşümünden yararlanılır. Y(s) ifadesi çarpanlara ayrılarak ters-Laplace dönüşümü alınırsa sonuç:

$$Y(s) = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{5}{2}\frac{1}{s+2} \right) \qquad y(t) = \frac{1}{2}u(t) - 3e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

6. Aşağıdaki sistemin girişine birim basamak tork uygulanmıştır. Transfer fonksiyonunu $G(s)=\theta_2(s)/T(s)$ bulunuz. $\theta_2(t)$ için yüzde aşım zamanı % OS, yerleşme zamanı ve tepe zamanı değerlerini hesaplayınız.



Çözüm: Harekete ilişkin denklemler yazılır:

$$(1.07s^2 + 1.53s)\theta_1(s) - 1.53\theta_2(s) = T(s)$$
$$-1.53s\theta_1(s) + (1.53s + 1.92)\theta_2(s) = 0$$

bu denklemlerden $\theta_2(s)$ çekilirse:

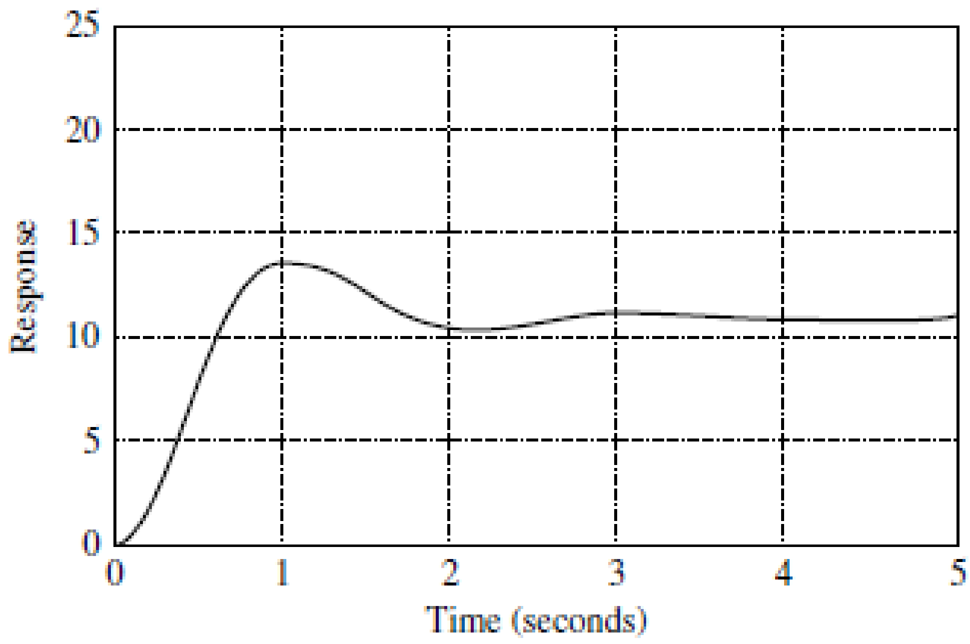
$$\theta_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (1.07s^2 + 1.53s) & T(s) \\ -1.53s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1.07s^2 + 1.53s) & -1.53s \\ -1.53s & (1.53s + 1.92) \end{vmatrix}} = \frac{0.935T(s)}{s^2 + 1.25s + 1.79}$$

transfer fonksiyonu : $\dfrac{\theta_2(s)}{T(s)} = \dfrac{0.935}{s^2 + 1.25s + 1.79}$ olarak elde edilir.

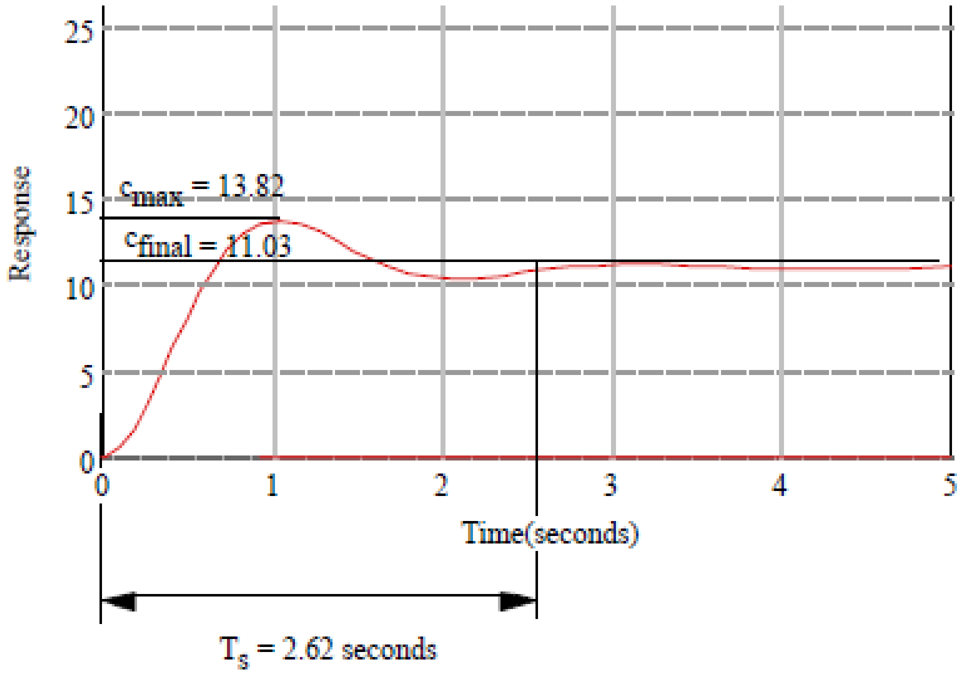
Burada $\omega_n = 1.34,\ 2\zeta\omega_n = 1.25.$ $\zeta = 0.467.$ bulunur. İlgili formüller kullanılarak

$\%OS = 19.0\%.$ $T_s = 6.4\ s$ $T_p = 2.66\ s$ elde edilir.

7. Bir sisteme ilişkin birim basamak cevabı aşağıdaki gibi veriliyor. Sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz.



Çözüm: Grafik üzerinde bazı değerleri yaklaşık olarak ölçersek:



Sistemi ikinci derece bir sistem olarak düşünecek olursak

$\%OS = (13.82 - 11.03)/11.03 = 25.3\%$ $\quad T_s = 2.62$ s

bu değerler kullanılarak

$\zeta = 0.4$ ve $\omega_n = 3.82$ olarak hesaplanır.

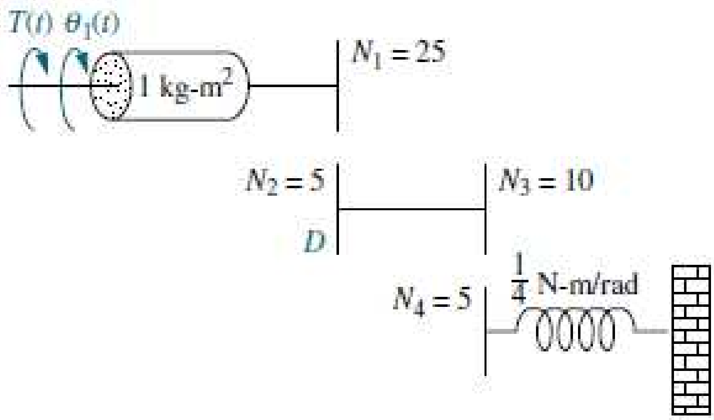
$G(s) = \dfrac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ $\quad C_{final} = 11.03$ olduğu için son değer teoremi kullanılırsa

$\dfrac{K}{\omega_n^2} = 11.03$ olur. Buradan $K = 160.95$ olarak hesaplanır ve transfer fonksiyonunda hepsi yerine yazılırsa

$$G(s) = \frac{160.95}{s^2+3.056s+14.59}$$

bulunur.

8. Aşağıdaki sistemin girişine birim basamak tork uygulandığında %30 aşım zamanı (% OS) elde ediliyor. Orta dişliye ilişkin sönüm katsayısı D değerini hesaplayınız. (diğer dişlilerdeki sönümler ihmal edilmiştir.)



Çözüm: Harekete ilişkin denklem yazılırsa:

$$[s^2+D(5)^2 s+\frac{1}{4}(10)^2]\theta(s) = T(s)$$

elde edilir. Transfer fonksiyonu ise:

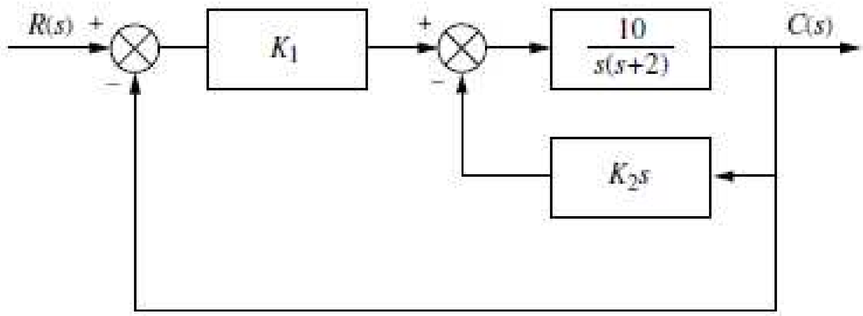
$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{s^2+25Ds+25}$$

olur.

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} = 0.358 \qquad 2\zeta\omega_n = 2(0.358)(5) = 25D$$

buradan D=0.14 olarak hesaplanır.

9. Aşağıda verilen sistemin kapalı-çevrim basamak cevabında tepe zamanı (Tp=1.5 s) ve yerleşme zamanı (Ts=3.2 s) olması için K_1 ve K_2 değerleri ne olmalıdır?



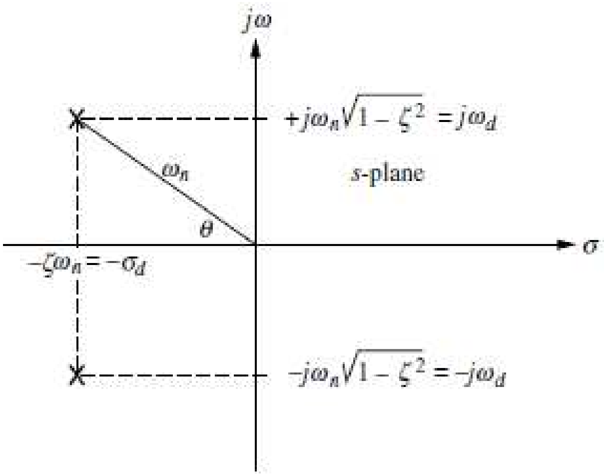
Çözüm: Sisteme ilişkin açık çevrim transfer fonksiyonu G(s) hesaplanırsa:

$$G(s) = \frac{10K_1}{s[s + (10K_2 + 2)]}$$

bulunur. Negatif-birim geri beslemeli sistem için kapalı-çevrim transfer fonksiyonu:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10K_1}{s^2 + (10K_2 + 2)s + 10K_1}$$

olur. İkinci derece sönümlü sisteme ilişkin konmpleks kökler ve Ts ve Tp arasındaki ilişkiyi hatırlayacak olursak:



$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{\pi}{\sigma_d} \qquad T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

kullanılarak:

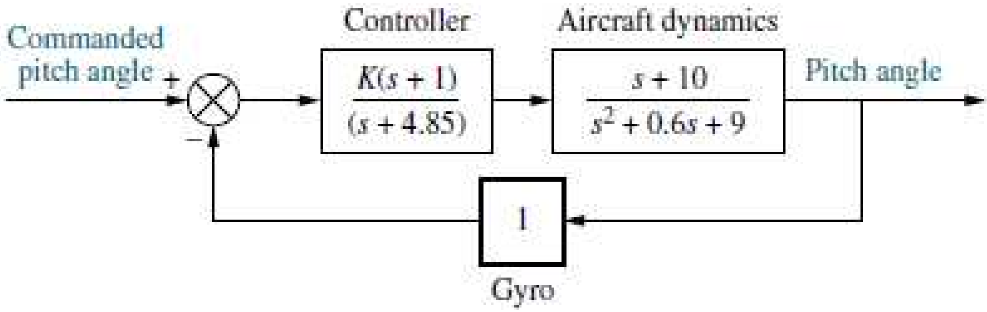
$$T_s = \frac{4}{\mathrm{Re}} = 3.2, \quad \therefore \mathrm{Re} = 1.25; \text{ and } T_p = \frac{\pi}{\mathrm{Im}} = 1.5, \quad \therefore \mathrm{Im} = 2.09$$

Kökün değeri $-1.25 + j2.09$ olur. Buradan:

$$\omega_n = \sqrt{1.25^2 + 2.09^2} = \sqrt{10K_1} \quad K_1 = 0.593 \quad (10K_2 + 2)/2 = 1.25. \quad K_2 = 0.05.$$

elde edilir.

10. Aşağıdaki şekilde bir uçağın burnunu havaya kaldırmak veya yere eğmek için girişine girilen pitch açısı ve çıkıştan elde edilen açıyı gösteren bir model bulunmaktadır. Sistem kontrol birimi, uçak dinamiği, sensör gibi birimlerden oluşmaktadır. Buna göre sistemin karaklı olarak çalışabilmesi için K değeri ne olmalıdır? (K negatif ve pozitif değerler alabilir) Sistemi kararsız yapabilecek hiç pozitif K değeri var mıdır?



Çözüm: Sistemin kapalı-çevrim transfer fonksiyonu hesaplanırsa:

$$T(s) = \frac{K(s+1)(s+10)}{s^3 + (5.45+K)s^2 + (11.91+11K)s + (43.65+10K)}$$

elde edilir. Routh tablosu doldurulursa:

s^3	1	11.91+11K
s^2	5.45+K	43.65+10K
s^1	$\frac{11K^2+61.86K+21.26}{5.45+K}$	0
s^0	43.65+10K	0

Sistemin karaklı olması için tablonun birinci sütununda işaret değişimi olmaması gerekir. Bu durumda

$-0.36772 < K < \infty$ aralığında olursa sistem kararlı olur. Tüm pozitif K değerleri için sistem kararlıdır.

11. Negatif birim geri beslemeli bir sistem için

$$G(s) = \frac{K(s^2+6s+6)}{(s+5)^2(s+3)}$$ veriliyor.

a) sistem tipini bulunuz.

b) Girişine 12u(t) uygulandığında hata değeri ne olur?

c) Girişine 12tu(t) uygulandığında hata değeri ne olur?

Çözüm: a) Sistem Tip 0 dır.

b)

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} \qquad e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{12/s}{1 + \frac{K(s^2 + 6s + 6)}{(s+5)^2(s+3)}} = \frac{12}{1 + 0.08K}.$$

c) Sistem Tip 0 olduğu için girişine rampa uygulandığında hata $e(\infty) = \infty$ olur.