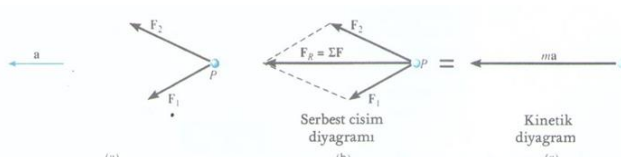
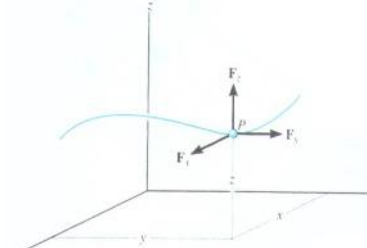


## DİNAMİK (5.hafta)

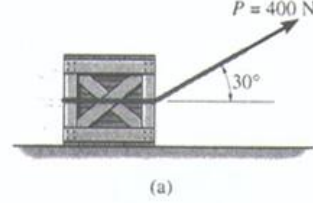
### DOĞRUSAL HAREKETTE KUVVET VE İVME

Parçacığın kütlesi  $m$  ise Newton'nun ikinci hareket kanunu matematiksel olarak  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$  olarak yazılır. Hareket denklemi olarak adlandırılan bu denklem mekanikteki en önemli formüldür. Bu formülden ivmeyi ve kütleyi biliyorsak kuvvetleri hesaplayabiliriz yada kuvveti ve kütleyi biliyorsak ivmeyi hesaplayabiliriz. Hareketin şekli tanımlanıp kinematik denklemler kullanılarak ivme hesaplanırsa, kütleyi de biliyorsak buradan oluşan kuvvetleri hesaplayabilir. Örneklerle konuyu pekiştirelim.

<p>kuvvetlere maruz kalan bir cismin hareketinin genel kanunları, parçacığın hareketi ile ilgili üç temel kanun, ilk defa Isaac Newton tarafından sunulduğu 1687 yılına kadar bilinmiyordu. Newton'un üç hareket kanunu, farklı bir ifade ile, aşağıdaki gibidir:</p> <p>olarak yazılabilir. Hareket denklemi olarak adlandırılan bu denklem, mekanikteki en önemli formüllerden biridir.<sup>3</sup> Yukarıda ifade edildiği gibi, doğrudan doğruya sadece <i>deneysel sonuçlara</i> dayandırılmıştır. Ancak, 1905'te, Albert Einstein rölativite teorisini geliştirdi ve genel parçacık hareketini tanımlayan Newton'un ikinci kanununun kullanımına sınırlamalar getirdi. <i>Zamanın</i>, Newton'un varsaydığı gibi, mutlak bir büyüklük olmadığı deneylerle kanıtlandı ve bunun bir sonucu olarak, hareket denklemi, özellikle hızı ışık hızına (0.3 Gm/s) yaklaştığı zaman, parçacığın tam davranışını kestirmekte başarısız oldu. Erwin Schrödinger ve diğer araştırmacılar kuantum mekaniği teorisinde gerçekleştirilen ilerlemeler, parçacıklar birbirlerinin atomik mesafeleri içinde hareket etmeleri halinde de, bu denklem kullanılarak çıkarılan sonuçların geçersiz olduğunu gösterdi. Ancak, mühendislik problemlerinde, çoğunlukla parçacığın hız ve büyüklüğü ile ilgili bu durumlarla karşılaşmaz. Bu nedenle, bu kitapta bunların etkileri dikkate alınmayacaktır.</p>	<p><b>Kütle ve Ağırlık.</b> <i>Kütle</i>, bir cismin hareketi ile diğerini karşılaştırmak için kullanabileceğimiz bir madde özelliğidir. Yukarıda gösterildiği gibi, bu özellik iki cisim arasındaki bir gravitasyonel çekim kuvveti olarak kendini belli eder ve maddenin hızdaki bir değişime karşı direncinin nicel bir ölçüsünü ortaya koyar. Ölçümü herhangi bir konumda yapılabildiğinden, <i>mutlak</i> bir büyüklüktür. Buna karşın, bir cismin ağırlığı bir <i>mutlak</i> büyüklük <i>değildir</i>, çünkü ağırlık bir gravitasyonel alanda ölçülür ve dolayısıyla büyüklüğü ölçüm yapılan yere bağlıdır. Denklem 13-1'den, <math>m_1 = m</math> kütleli bir parçacığın <math>W</math> ağırlığını bulmak için bir genel ifade elde edebiliriz. Dünyanın kütlesi <math>m_2</math> ve dünyanın merkezi ile parçacık arasındaki uzaklık <math>r</math> olsun. Bu takdirde, <math>g = Gm_2/r^2</math> ise</p> $W = mg$ <p>olur. Bunun <math>F = ma</math> ile karşılaştırılması sonucunda, <math>g</math>'ye gravitasyondan dolayı ortaya çıkan ivme diyoruz. Çoğu mühendislik hesapları için <math>g</math>, dünya yüzeyinde, deniz seviyesinde ve <math>45^\circ</math> enlemindeki "standart konum" denen bir noktada ölçülür.</p> <p>Bir cismin kütle ve ağırlığı SI birim sisteminde farklı bir şekilde ölçülür. Bu birimleri tanımlama yöntemi tam olarak anlaşılmalıdır.</p>
<p>Bir parçacığa birden fazla kuvvet etki ederse, bileşke kuvvet, bütün kuvvetlerin vektörel toplamı, yani <math>\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}</math> ile belirlenir. Bu genel hal için hareket denklemi</p> $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (13-4)$  <p>(a) (b) (c)</p> <p>* Hareket denklemi <math>\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 0</math> şeklinde de yazılabilir. <math>-m\mathbf{a}</math> vektörü <i>eylemsizlik kuvvet vektörü</i> olarak adlandırılır. Bu vektör, "kuvvet vektörü" olarak nitelendirilirse, ortaya çıkan "denge" durumuna <i>dinamik denge</i> denir. Hareket denkleminin bu şekilde uygulanması yöntemine, genellikle, Fransız matematikçisi Jean le Rond d'Alembert'in adından, <i>D'Alembert ilkesi</i> adı verilir.</p>	<p>Bir parçacık, <math>x, y, z</math> eylemsiz referans sistemine göre hareket ettiği zaman, parçacık üzerine etki eden kuvvetler, ivmeleriyle birlikte, kendilerinin <math>\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}</math> bileşenleri cinsinden ifade edilebilir, Şekil 13-5. Hareket denklemini uygulayarak</p> $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ $\Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = m(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})$ <p>buluruz. Bu denklemin sağlanması için, sol yandaki her bir <math>\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}</math> bileşeni sağ yanda karşı gelen bileşene eşit olmalıdır. Sonuç olarak, aşağıdaki üç skaler denklemi yazabiliriz:</p> $\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= ma_y \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned}$  <p>Özel olarak, parçacık <math>x</math>-<math>y</math> düzleminde hareket ediyorsa, hareketin belirlenmesinde bu denklemlerin sadece ilk ikisi kullanılır.</p>
<p><b>Sürtünme.</b> Parçacık pürüzlü bir yüzeye temas halindeyse, <i>sürtünme denklemini</i> kullanmak gerekebilir. Bu denklem, temas yüzeyine etkiyen <math>\mathbf{F}_s</math> sürtünme ve <math>N</math> normal kuvvetlerinin büyüklükleri ile <math>\mu_k</math> kinetik sürtünme katsayısı arasında bir bağıntı kurar, yani <math>F_f = \mu_k N</math>'dir. Serbest-cisim diyagramında, <math>\mathbf{F}_f</math>'nin, parçacığın temas ettiği yüzeye göre daima hareketini engelleyecek şekilde etki ettiği unutulmamalıdır.</p>	<p><b>Yay.</b> Parçacık, kütlesi ihmal edilebilen elastik bir yaya bağlanmışsa, <math>F_s</math> yay kuvveti, <math>F_s = ks</math> denklemi ile yayın deformasyonuna bağlı olabilir. Burada <math>k</math> birim uzunluk başına kuvvet olarak ölçülen yay katsayısı, <math>s</math> deformasyondan sonraki <math>l</math> ve önceki <math>l_0</math> uzunlukları arasındaki fark olarak tanımlanan uzama veya kısalma, yani, <math>s = l - l_0</math>'dir.</p>

## Örnek 1

Şekil 13–6a’da gösterilen 50 kg’lık bir sandık, kinetik sürtünme katsayısı  $\mu_k = 0.3$  olan yatay bir düzlemde durmaktadır. Sandık, şekilde gösterildiği gibi 400-N’luk bir çekme kuvveti uygulandığında devrilmiyorsa, durağan halden başlayarak 5 s sonunda kazandığı hızı belirleyiniz.



## ÇÖZÜM

Bu problemde hareket denklemlerini kullanmak gerekir, çünkü sandığın ivmesi ile harekete neden olan kuvvet arasında bir bağıntı kurulabilir. Sonra sandığın hızı kinematik kullanılarak belirlenebilir.

**Serbest-Cisim Diyagramı.** Şekil 13–6a’daki sandığın ağırlığı  $W = mg = 50 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}$ ’dur. Şekil 13–6b’de gösterildiği gibi, sürtünme kuvveti,  $F = \mu_k N_C$  büyüklüğüne sahiptir ve sandığın hareketini engellediğinden sola doğru etki eder.  $a$  ivmesinin pozitif  $x$  doğrultusunda yatay olarak etkidiği varsayılır. İki bilinmeyen vardır:  $N_C$  ve  $a$ .

**Hareket Denklemleri.** Serbest-cisim diyagramında gösterilen değerleri kullanarak

$$\sum F_x = ma_x; \quad 400 \cos 30^\circ - 0.3 N_C = 50a \quad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y; \quad N_C - 490.5 + 400 \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

elde ederiz.  $N_C$ ’yi Denklem 2’den çözüp, sonucu Denklem 1 de yerleştirerek, buradan  $a$ ’yı çözersek

$$N_C = 290.5 \text{ N}$$

$$a = 5.19 \text{ m/s}^2$$

buluruz.

**Kinematik.** İvme *sabit* ve başlangıç hızı sıfır olduğundan, sandığın 5 s sonundaki hızı

$$(\rightarrow) \quad v = v_0 + a_c t$$

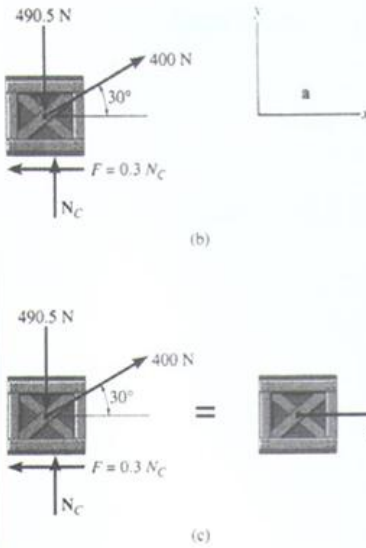
$$= 0 + 5.19(5)$$

$$= 26.0 \text{ m/s} \rightarrow$$

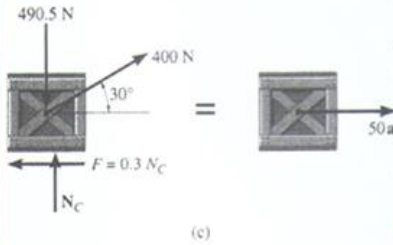
**Yanıt**

dir.

Hareket denklemlerini uygulamadan önce, sandığın serbest-cisim ve kinetik diyagramlarının Şekil 13–6c’deki alternatif çizim yoluna dikkat edelim.



(b)



(c)

Şekil 13–6



## Örnek 2

137. 10 kg'lık bir top mermisi 50 m/s'lik bir başlangıç hızı ile, yerden yukarıya doğru düşey olarak fırlatılıyor. (a) havanın direncini ihmal ederek, (b)  $v$  herhangi bir andaki, m/s cinsinden ölçülen hız olmak üzere, havanın direnci  $F_D = (0.01v^2)$  N olarak ölçüldüğüne göre, merminin ulaşabileceği maksimum yüksekliği belirleyiniz.

### ÇÖZÜM

Her iki durumda, hareket denklemleri kullanılarak, mermi üzerindeki bilinen kuvvetle merminin ivmesi arasında bir ilişki kurulabilir.

(a) *Serbest-Cisim Diyagramı.* Şekil 13-7b'de gösterildiği gibi, merminin ağırlığı  $W = mg = 10 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$ 'dur. Bilinmeyen  $a$  ivmesinin yukarıya doğru, pozitif  $z$  yönünde etkideğini varsayacağız.

#### Hareket Denklemi

$$+\uparrow \sum F_z = ma_z; \quad -98.1 = 10a, \quad a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

dir. Bu sonuç, yer yüzeyine yakın bir yerde serbest uçuş hareketi yapan her cisim gibi, mermiye aşağıya doğru  $9.81 \text{ m/s}^2$ 'lik bir ivme uygulandığını gösterir.

*Kinematik.* Başlangıçta  $z_0 = 0$  ve  $v_0 = 50 \text{ m/s}$ 'dir ve  $z = h$  olan maksimum yükseklikte  $v = 0$  dir. İvme *sabit* olduğundan,

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad v^2 &= v_0^2 + 2a_c(z - z_0) \\ 0 &= (50)^2 + 2(-9.81)(h - 0) \\ h &= 127 \text{ m} \end{aligned}$$

*Yanıt*

bulunur.

(b) *Serbest-Cisim Diyagramı.*  $F_D = (0.01v^2)$  N kuvveti merminin yukarıya doğru hareketini geciktirme eğiliminde olduğundan, serbest-cisim diyagramında gösterildiği gibi aşağıya doğru etki eder, Şekil 13-7c.

#### Hareket Denklemi \*

$$+\uparrow \sum F_z = ma_z; \quad -0.01v^2 - 98.1 = 10a, \quad a = -0.001v^2 - 9.81$$

*Kinematik.* Burada *ivme sabit* değildir; ancak  $a \, dz = v \, dv$  kullanılarak, hız ve yer değiştirme ile ilişkisi kurulabilir:

$$(+\uparrow) \, a \, dz = v \, dv; \quad (-0.001v^2 - 9.81)dz = v \, dv$$

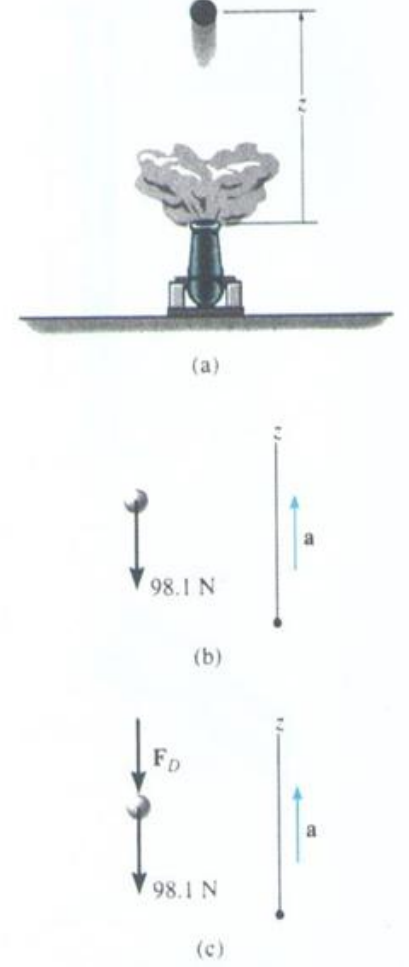
Denklem, değişkenlerine ayrılarak integre edilir ve  $z_0 = 0$   $v_0 = 50 \text{ m/s}$  (pozitif-yukarı) başlangıç koşulu ve  $z = h$ ,  $v = 0$  koşulu dikkate alınır

$$\int_0^h dz = - \int_{50}^0 \frac{v \, dv}{0.001v^2 + 9.81} = -500 \ln(v^2 + 9810) \Big|_{50}^0$$

$$h = 114 \text{ m} \quad \text{Yanıt}$$

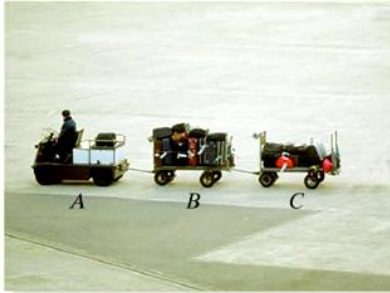
bulunur. Yanıt (a)'da bulunandan daha düşük bir yüksekliği göstermektedir. Niçin?

\* Mermi aşağıya doğru ateşlenirse, pozitif  $z$  eksenini aşağıya yönlü olmak üzere, hareket denklemi  $-0.01v^2 + 98.1 = 10a$  olur.

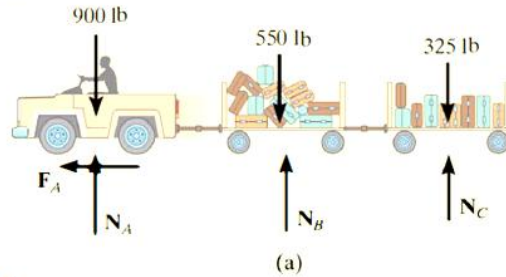


Şekil 13-7

### Örnek 3



The baggage truck *A* shown in the photo has a weight of 900 lb and tows a 550-lb cart *B* and a 325-lb cart *C*. For a short time the driving frictional force developed at the wheels of the truck is  $F_A = (40t)$  lb, where  $t$  is in seconds. If the truck starts from rest, determine its speed in 2 seconds. Also, what is the horizontal force acting on the coupling between the truck and cart *B* at this instant? Neglect the size of the truck and carts.



#### SOLUTION

**Free-Body Diagram.** As shown in Fig. 13–8a, it is the frictional driving force that gives both the truck and carts an acceleration. Here we have considered all three vehicles as a single system.

**Equation of Motion.** Only motion in the horizontal direction has to be considered.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x; & 40t &= \left( \frac{900 + 550 + 325}{32.2} \right) a \\ & & a &= 0.7256t \end{aligned}$$

**Kinematics.** Since the acceleration is a function of time, the velocity of the truck is obtained using  $a = dv/dt$  with the initial condition that  $v_0 = 0$  at  $t = 0$ . We have

$$\int_0^v dv = \int_0^{2s} 0.7256t \, dt; \quad v = 0.3628t^2 \Big|_0^{2s} = 1.45 \, \text{ft/s} \quad \text{Ans.}$$

**Free-Body Diagram.** In order to determine the force between the truck and cart *B*, we will consider a free-body diagram of the truck so that we can “expose” the coupling force *T* as external to the free-body diagram, Fig. 13–8b.

**Equation of Motion.** When  $t = 2$  s, then

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x; & 40(2) - T &= \left( \frac{900}{32.2} \right) [0.7256(2)] \\ & & T &= 39.4 \, \text{lb} \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

**NOTE:** Try and obtain this same result by considering a free-body diagram of carts *B* and *C* as a single system.

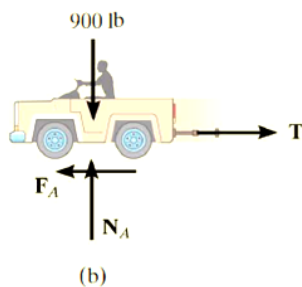


Fig. 13–8

## Örnek 4

A smooth 2-kg collar  $C$ , shown in Fig. 13–9*a*, is attached to a spring having a stiffness  $k = 3 \text{ N/m}$  and an unstretched length of  $0.75 \text{ m}$ . If the collar is released from rest at  $A$ , determine its acceleration and the normal force of the rod on the collar at the instant  $y = 1 \text{ m}$ .

### SOLUTION

**Free-Body Diagram.** The free-body diagram of the collar when it is located at the arbitrary position  $y$  is shown in Fig. 13–9*b*. Furthermore, the collar is *assumed* to be accelerating so that “ $a$ ” acts downward in the *positive*  $y$  direction. There are four unknowns, namely,  $N_C$ ,  $F_s$ ,  $a$ , and  $\theta$ .

### Equations of Motion.

$$\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad -N_C + F_s \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \quad 19.62 - F_s \sin \theta = 2a \quad (2)$$

From Eq. 2 it is seen that the acceleration depends on the magnitude and direction of the spring force. Solution for  $N_C$  and  $a$  is possible once  $F_s$  and  $\theta$  are known.

The magnitude of the spring force is a function of the stretch  $s$  of the spring; i.e.,  $F_s = ks$ . Here the unstretched length is  $AB = 0.75 \text{ m}$ , Fig. 13–9*a*; therefore,  $s = CB - AB = \sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75$ . Since  $k = 3 \text{ N/m}$ , then

$$F_s = ks = 3(\sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75) \quad (3)$$

From Fig. 13–9*a*, the angle  $\theta$  is related to  $y$  by trigonometry.

$$\tan \theta = \frac{y}{0.75} \quad (4)$$

Substituting  $y = 1 \text{ m}$  into Eqs. 3 and 4 yields  $F_s = 1.50 \text{ N}$  and  $\theta = 53.1^\circ$ . Substituting these results into Eqs. 1 and 2, we obtain

$$N_C = 0.900 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

$$a = 9.21 \text{ m/s}^2 \downarrow \quad \text{Ans.}$$

**NOTE:** This is not a case of constant acceleration, since the spring force changes both its magnitude and direction as the collar moves downward.

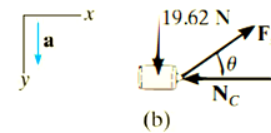
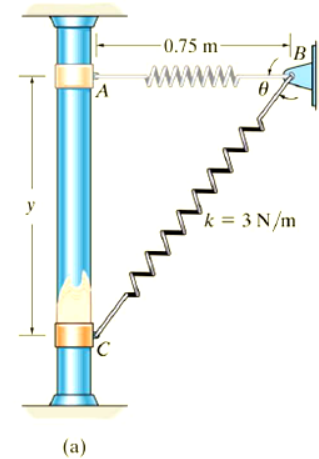


Fig. 13–9



## Örnek 5

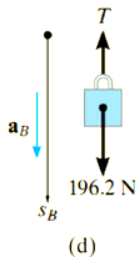
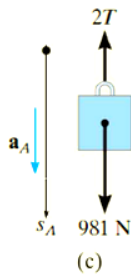
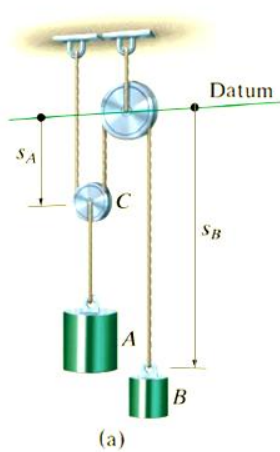


Fig. 13–10

The 100-kg block  $A$  shown in Fig. 13–10a is released from rest. If the masses of the pulleys and the cord are neglected, determine the speed of the 20-kg block  $B$  in 2 s.

### SOLUTION

**Free-Body Diagrams.** Since the mass of the pulleys is *neglected*, then for pulley  $C$ ,  $ma = 0$  and we can apply  $\Sigma F_y = 0$  as shown in Fig. 13–10b. The free-body diagrams for blocks  $A$  and  $B$  are shown in Fig. 13–10c and d, respectively. Notice that for  $A$  to remain stationary  $T = 490.5$  N, whereas for  $B$  to remain static  $T = 196.2$  N. Hence  $A$  will move down while  $B$  moves up. Although this is the case, we will assume both blocks accelerate downward, in the direction of  $+s_A$  and  $+s_B$ . The three unknowns are  $T$ ,  $a_A$ , and  $a_B$ .

**Equations of Motion.** Block  $A$ ,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \quad 981 - 2T = 100a_A \quad (1)$$

Block  $B$ ,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \quad 196.2 - T = 20a_B \quad (2)$$

**Kinematics.** The necessary third equation is obtained by relating  $a_A$  to  $a_B$  using a dependent motion analysis, discussed in Sect. 12.9. The coordinates  $s_A$  and  $s_B$  in Fig. 13–10a measure the positions of  $A$  and  $B$  from the fixed datum. It is seen that

$$2s_A + s_B = l$$

where  $l$  is constant and represents the total vertical length of cord. Differentiating this expression twice with respect to time yields

$$2a_A = -a_B \quad (3)$$

Notice that when writing Eqs. 1 to 3, the *positive direction was always assumed downward*. It is very important to be *consistent* in this assumption since we are seeking a simultaneous solution of equations. The results are

$$T = 327.0 \text{ N}$$

$$a_A = 3.27 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = -6.54 \text{ m/s}^2$$

Hence when block  $A$  accelerates *downward*, block  $B$  accelerates *upward* as expected. Since  $a_B$  is constant, the velocity of block  $B$  in 2 s is thus

$$(+\downarrow)$$

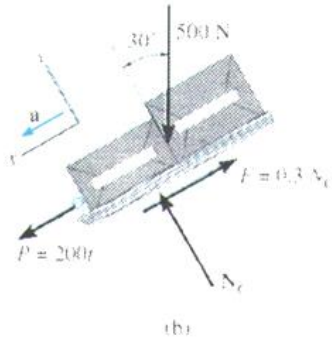
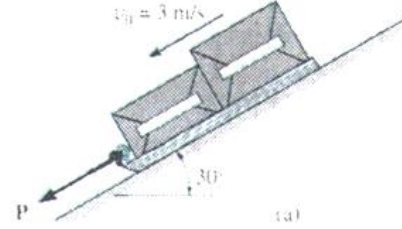
$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_B t \\ &= 0 + (-6.54)(2) \\ &= -13.1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

*Ans.*

The negative sign indicates that block  $B$  is moving upward.

## Örnek 6

Şekil 13–8a’da gösterilen yüklü kızak 500 N’lık bir ağırlığa sahiptir ve üzerine,  $P$  Newton cinsinden ve  $t$  saniye cinsinden olmak üzere, değişken  $P = 200t$  büyüklüğünde bir kuvvet etkimektedir. Kızığın,  $P$  uygulandıktan 2 s sonraki hızını hesaplayınız. Kızığın eğik düzlemde aşağıya doğru hareketinin başlangıç hızı  $v_0 = 3$  m/s’dir ve kızak ve düzlem arasındaki kinetik sürtünme katsayısı  $\mu_k = 0.3$ ’dür.



Şekil 13–8

## ÇÖZÜM

Çözümü okumaya başlamadan önce, bu problemin çözümünü elde etmek için niçin hareket ve kinematik denklemlerinin ikisini de kullanmak gerektiğini görebiliyor musunuz?

**Serbest-Cisim Diyagramı.** Şekil 13–8b’de gösterildiği gibi, sürtünme kuvveti kızığın kayma yönüne zıt doğrultudadır ve büyüklüğü  $F = \mu_k N_C = 0.3 N_C$ ’dir. Kütle  $m = W/g = 500/9.81 = 51.0$  kg’dır. İki bilinmeyen vardır:  $N_C$  ve  $a$ .

**Hareket Denklemleri.** Serbest-cisim diyagramında gösterilen değerleri kullanarak

$$+\swarrow \sum F_x = ma_x; \quad 200t - 0.3N_C + 500 \sin 30^\circ = 51a \quad (1)$$

$$+\nwarrow \sum F_y = ma_y; \quad N_C - 500 \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

elde ederiz.  $N_C$ ’yi Denklem 2’den çözüp, sonucu Denklem 1’de yerleştirirsek, sadeleştirmeden sonra

$$a = 3.922t + 2.355 \quad (3)$$

buluruz.

**Kinematik.** İvme zamanın bir fonksiyonu olduğundan, kızığın hızı,  $t = 0$ ’da  $v_0 = 3$  m/s başlangıç koşullu  $a = dv/dt$  denklemi kullanılarak elde edilir. Böylece,

(+↗)

$$dv = a dt$$

$$\int_3^v v = \int_0^t 1.961t^2 + 2.355t + 3$$

bulunur.  $t = 2$  s olduğu zaman

$$v = 15.6 \text{ m/s } \swarrow$$

olur.

Yanıt