Ayrık Zamanlı Sistemlerin Frekans Cevabı Analizi

Frekans cevabı analizi, ayrık zamanlı sistemin girişine farklı frekansta sinüsoidal girişler uygulandığında sinüsoidal kalıcı durumda sistemin verdiği cevabı elde etme ve inceleme şeklindeki analizdir. Bu analizi gerçekleştirebilmek için sistemin sinüsoidal transfer fonksiyonunu elde etmemiz gerekir.

$$X(z) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LZDAZS}\\ H(z)\end{matrix}} \longrightarrow Y(z)$$

Sistem girişine $x(n) = c\cdot\cos(\Omega_0 n)$ şeklindeki işaret uygulansın.

c: genlik
Ω_0: Ayrık açısal frekans

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

$$X(z) = c\cdot\frac{z(z-\cos(\Omega_0))}{z^2 - 2z\cos(\Omega_0) + 1}$$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z)$$

(Transfer fonksiyonu bulunurken sistemin enerjisiz olduğu kabul edilir. Bu yüzden $Y(z)$ sıfır durum cevabıdır.)

Sistem çıkışı,

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}\cdot c\cdot\frac{z(z-\cos(\Omega_0))}{z^2 - 2z\cos(\Omega_0)+1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = c\,\frac{B(z)}{A(z)}\cdot\frac{z-\cos(\Omega_0)}{(z-e^{j\Omega_0})(z-e^{-j\Omega_0})}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = c\,\frac{N(z)}{A(z)} + \frac{c_1}{z-e^{j\Omega_0}} + \frac{c_2}{z-e^{-j\Omega_0}} \qquad c_1 = c_2^*$$

$$c_1 = c\cdot H(e^{j\Omega_0})\cdot\frac{e^{j\Omega_0}-\cos(\Omega_0)}{e^{j\Omega_0}-e^{-j\Omega_0}} = c\,H(e^{j\Omega_0})\cdot\frac{j\sin(\Omega_0)}{j2\sin(\Omega_0)} = \underline{\frac{c}{2}H(e^{j\Omega_0})}$$

$$c_2 = \frac{c}{2}H(e^{-j\Omega_0})$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{c_1}{z-e^{j\Omega_0}} + \frac{c_2}{z-e^{-j\Omega_0}} \qquad c_1 = \frac{c}{2}H(e^{j\Omega_0}) \qquad c_2 = \frac{c}{2}H(e^{-j\Omega_0})$$

$$\underline{y(n) = 2\left(\frac{c}{2}\left|H(e^{j\Omega_0})\right|\right)\cdot\cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0})\right)}$$

$$\frac{c_1}{z-p_1}+\frac{c_2}{z-p_2} \qquad c_1=c_2^* \quad p_1=p_2^* \qquad c_1=|c_1|.e^{j\theta} \quad p_1=|r|.e^{j\phi} \qquad c_1=\frac{c}{2}H(e^{j\Omega_0}) \quad p_1=e^{j\Omega_0} \quad |r|=1 \quad \phi=\Omega_0$$

$$y(n)=2|c|.(|r|)^n.\cos(\phi n+\theta)$$

$$y(n)=c.\left|H(e^{j\Omega_0})\right|.\cos\left(\Omega_0 n+\angle H(e^{j\Omega_0})\right)$$

Ayrık zamanlı sistemlerde; $\quad H(e^{j\Omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$

Sürekli zamanlı sistemlerde, $\quad H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Örnek; Aşağıda verilen transfer fonksiyonundan hareketle,

a) Sistemin sinüzoidal transfer fonksiyonunu bulunuz.

b) Genlik ve faz cevaplarını bulunuz.

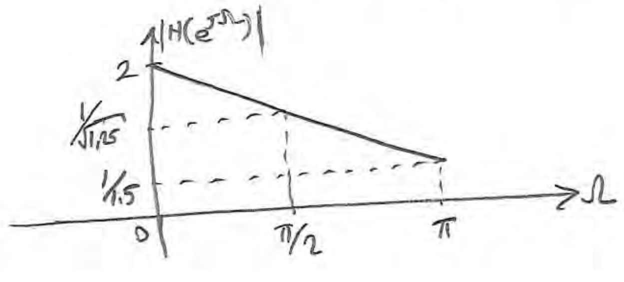
Transfer fonksiyonu; $\quad H(z)=\dfrac{1}{z-0{,}5}$

a) $\quad H(e^{j\Omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$

$$H(e^{j\Omega})=\frac{1}{e^{j\Omega}-0{,}5}=\frac{1}{\cos(\Omega)+j\sin(\Omega)-0{,}5}=\frac{1}{\cos(\Omega)-0{,}5+j\sin(\Omega)}$$

$$\left|H(e^{j\Omega})\right|=\frac{1}{\sqrt{(\cos(\Omega)-0{,}5)^2+\sin^2(\Omega)}}=\frac{1}{\sqrt{1{,}25-\cos(\Omega)}} \qquad \text{(genlik cevabı)}$$

$$\angle H(e^{j\Omega})=-\tan^{-1}\left(\frac{\sin(\Omega)}{\cos(\Omega)-0{,}5}\right) \qquad \text{faz cevabı}$$



Örnek: Birim örnek cevabı $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n . U(n)$ şeklinde verilen bir sistem için,

a) $x(n) = A\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) . U(n)$ giriş işaretinin verdiği çıkışı bulunuz.

Öncelikle sistemin transfer fonksiyonunu elde edmemiz gerekir.

$$Z\{h(n)\} = H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \qquad H(\Omega) = H(e^{j\Omega}) = H(z)\Big|_{z = e^{j\Omega}}$$

$H(\Omega) \rightarrow$ sinüzoidal transfer fonksiyonu

$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

Genel olarak; $y(n) = |H(\pi/2)| . |x(n)| . \cos\left(\frac{\pi}{2} n + \angle H(\pi/2)\right)$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\cos(\Omega)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\Omega)\right)^2}}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\Omega) + \frac{1}{4}\cos^2(\Omega) + \frac{1}{4}\sin^2(\Omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos(\Omega)}}$$

$$\angle H(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}\sin(\Omega)}{1 - \frac{1}{2}\cos(\Omega)}$$

$x(n) = A . \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) U(n)$ için $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$|H(\tfrac{\pi}{2})| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos(\frac{\pi}{2})}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \angle H(\tfrac{\pi}{2}) = -\tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}\sin(\pi/2)}{1 - \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2})} = -0,4636 \text{ radyan}$$

$$\underline{y(n) = \frac{2A}{\sqrt{5}} . \cos\left(\frac{\pi}{2} n - 0,4636\right) . U(n)}$$

b) Aynı sistemin $x(n) = 10 - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) + 20 . \cos(\pi n)$ girişine verdiği cevabı bulunuz.

$$x(n) = 10 - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) + 20\cos(\pi n)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\Omega_1 = 0 \qquad \Omega_2 = \frac{\pi}{2} \qquad \Omega_3 = \pi$$

$$|H(\Omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}} = 2 \qquad |H(\Omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-0}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad |H(\Omega_3)| = \frac{2}{3}$$

$$\angle H(\Omega_1) = 0 \qquad \angle H(\Omega_2) = -0,4636 \qquad \angle H(\Omega_3) = 0$$

$$y(n) = 10.2 - 5.\frac{2}{\sqrt{5}}.\sin\left(\frac{\pi}{2}n - 0,4636\right) + 20.\frac{2}{3}.\cos(\pi n)$$

$$y(n) = 20 - 2\sqrt{5}.\sin\left(\frac{\pi}{2}n - 0,4636\right) + \frac{40}{3}.\cos(\pi n)$$

Örnek; Aşağıda verilen LZD nedensel sisteme ait fark denkleminde olacak ve

$$y(n) = a.y(n-1) + bx(n) \quad \text{ise;}$$

a) $H(\Omega)$ 'yı elde ediniz.

b) b'nin değerini $|H(\Omega)|$ genliği maksimum 1 olacak şekilde seçiniz ve genlik-faz değişimini bulunuz. ($a=0,9$)

c) b şıkkındaki değerleri kullanarak,

$$x(n) = 5 + 12.\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 20\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$ girişi için sistem çıkışını elde ediniz.

a) 1. Yöntem;

$$y(n) = a.y(n-1) + bx(n)$$

$$Y(z) = a.z^{-1}Y(z) + b.X(z)$$

$$Y(z).(1 - az^{-1}) = b.X(z) \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1-az^{-1}} \qquad H(\Omega) = \frac{b}{1-ae^{-j\Omega}}$$

$$H(z) = \frac{b.z}{z-a}$$

2. Yöntem; $h(n) = ?$

$h(n)$: birim impuls cevabıdır.

Sistemin girişine $\delta(n)$ (birim impuls) işareti uygulandığında sistemin verdiği cevap

$$x(n) \to \delta(n) \qquad y(n) \to h(n)$$

Sistem nedensel old. için

$$h(n) = a.h(n-1) + b.\delta(n)$$

$$h(-1) = 0, \quad h(-2) = 0, \quad h(-3) = 0, \ldots$$

$n=0$ için; $\quad h(0) = a.h(-1) + b\delta(0) = b$

$n=1$ için $\quad h(1) = a.h(0) + b.\delta(1) = ab$

$n=2$ için $\quad h(2) = a.h(1) + b\delta(2) = a^2b$

$$\vdots$$

$$h(n) = a^n.b.u(n) \Rightarrow H(z) = \frac{b.z}{z-a}$$

b) $|H(\Omega)|_{max} = 1 \quad (a=0,9) \qquad H(\Omega) = \frac{b}{1-a.z^{-1}}\Big|_{z=e^{j\Omega}}$

$$H(\Omega) = \frac{b}{1-a\,e^{-j\Omega}} = \frac{b}{1-a.\cos(\Omega)+ja\sin(\Omega)}$$

$$|H(\Omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{(1-a.\cos(\Omega))^2+(a\sin(\Omega))^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{1+a^2-2a\cos(\Omega)}}$$

$\Omega=0$ için $|H(\Omega)|_{max} = 1$

$$1 = \frac{|b|}{\sqrt{1+a^2-2a}} \qquad 1 = \frac{|b|}{\sqrt{(a-1)^2}} \Rightarrow \quad 1 = \frac{|b|}{a-1} \qquad |b| = 1-a = 1-0,9 = \underline{\underline{0,1}}$$

c) $x(n) = 5 + 12.\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 20.\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$ şeklinde,

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$\Omega_1=0 \qquad \Omega_2=\frac{\pi}{2} \qquad \Omega_3=\pi$

$$H(\Omega) = \frac{0,1}{1-0,9e^{-j\Omega}} \qquad |H(\Omega)| = \frac{0,1}{\sqrt{1,81-1,8\cos(\Omega)}}$$

$$\angle H(\Omega) = -\tan^{-1}\frac{0,9.\sin(\Omega)}{1-0,9.\cos(\Omega)}$$

$\Omega_1=0 \Rightarrow |H(\Omega_1)| = 1 \qquad \angle H(\Omega_1) = 0$

$\Omega_2=\frac{\pi}{2} \Rightarrow |H(\Omega_2)| = 0,074 \qquad \angle H(\Omega_2) = -0,7328$

$\Omega_3=\pi \Rightarrow |H(\Omega_3)| = 0,053 \qquad \angle H(\Omega_3) = 0$

$$y(n) = 5 + 12.(0,074).\sin\left(\frac{\pi}{2}n - 0,7328\right) - 20.(0,053).\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

FİLTRELER

En basit tanımıyla frekans seçici devreye filtre (süzgeç) denir. Başka bir ifadeyle, arzu edilen frekansların geçmesine izin veren arzu edilmeyen frekansların ise geçişine izin vermeyen donanımların adıdır.

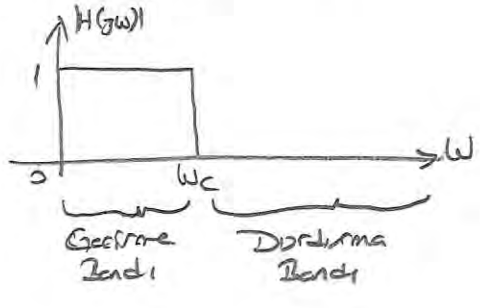
FİLTRELER

- Analog Filtreler
  - Pasif Analog Filt. (R, L, C)
  - Aktif Analog. Filt. (OpAmp - OTA)
- Sayısal Filtreler
  - FIR Filtreler (Finite Impulse Response)
  - IIR Filtreler (Infinite Impulse Response)

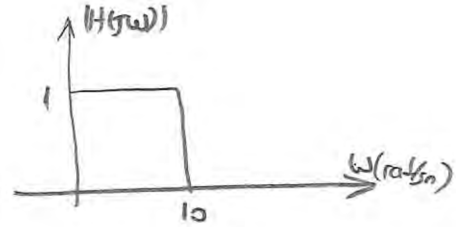
Hem analog hem de sayısal filtreler frekans cevaplarına göre beşe ayrılırlar.

- Alçak Geçiren Filtre (Low Pass Filter, AGF, LPF)
- Yüksek Geçiren Filtre (High Pass Filter, YGF, HPF)
- Band Geçiren Filtre (Band Pass Filter, BGF, BPF)
- Band Durduran Filtre (Band Stop Filter, BDF, BSF)
- Hep (Tüm) Geçiren Filtre (All Pass Filter, HGF, APF)

İdeal AGF genlik cevabı,



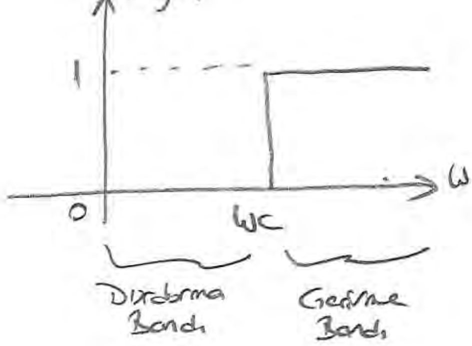
Örnek;



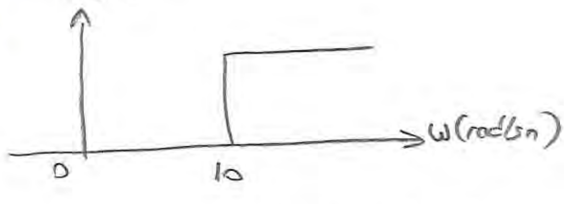
$x(t) = 20 + \sin(2t) + \cos(25t)$

$y(t) = 20 + \sin(2t)$

İdeal YGF genlik cevabı,



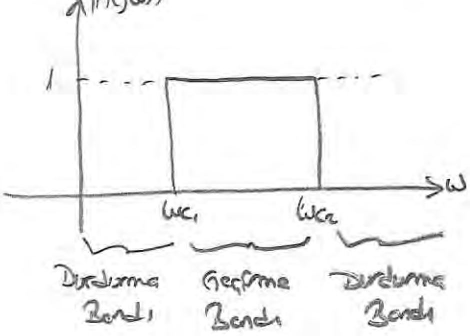
Örnek;



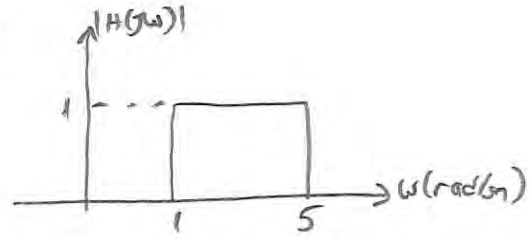
$x(t) = 20 + \sin(2t) + \cos(25t)$

$y(t) = \cos(25t)$

İdeal BGF genlik cevabı,

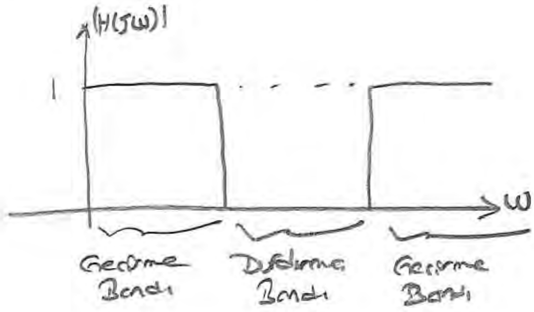


Örnek;

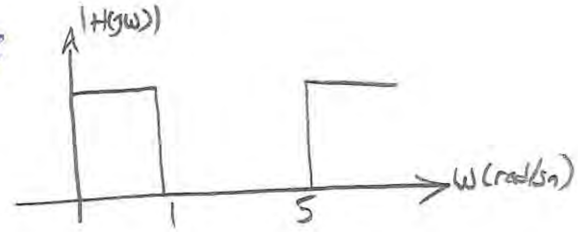


$$x(t) = 20 + \sin(2t) + \cos(25t)$$
$$y(t) = \sin(2t)$$

İdeal BDF genlik cevabı,



Örnek;



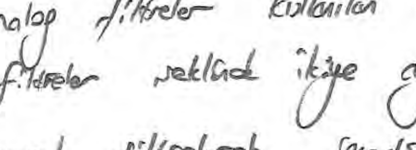
$$x(t) = 20 + \sin(2t) + \cos(25t)$$
$$y(t) = 20 + \cos(25t)$$

Analog filtreler kullanılan devre elemanlarına göre Pasif analog filtreler ve Aktif analog filtreler şeklinde ikiye ayrılırlar.

Sayısal filtrelerde impals cevaplarına göre iki grupta ayrılırlar. Sayısal bir filtre tasarlayabilmek için çok farklı yaklaşımlar vardır. Öncelikle istenen karakteristiği veren bir analog filtre tasarlanır ve çeşitli dönüşümler ile sayısal eşdeğeri (karşılığı) olan sayısal filtre elde edilir. Bu yaklaşım IIR filtreler için kullanılmaktadır. FIR filtre tasarımında ise genellikle pencereleme metodları veya değişmez impals cevabı yöntemi kullanılır.

Pasif Filtreler

1) AGF;

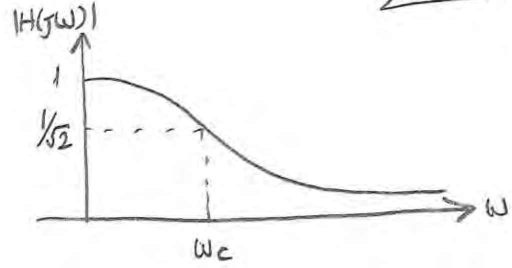


devrenin karakteristiğini inceleyebilmek için transfer fonksiyonunu elde etmemiz gerekiyor.

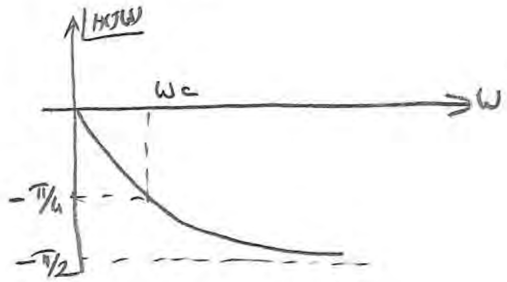
$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + s(RC)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$ (1. dereceden pasif AGF)

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s \to j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega(RC)} \qquad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

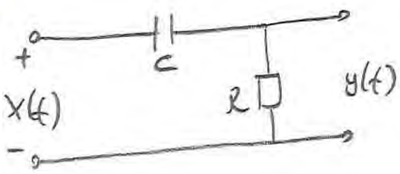


$\omega_c = \frac{1}{RC}$ $\qquad$ ω_c: kesim frekansı

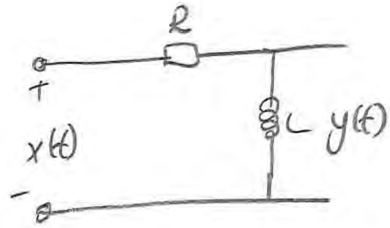


$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

2) YGF:



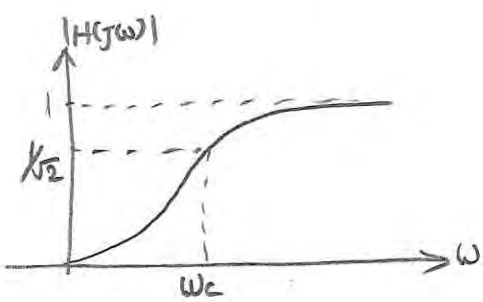
$\equiv$

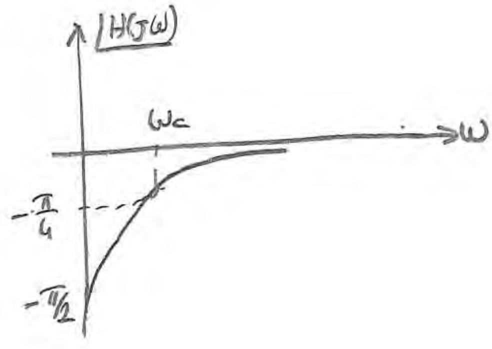


$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s(RC)}{1 + sRC} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \qquad \left(H(s) = \frac{s}{s + \omega_c} \right)$$

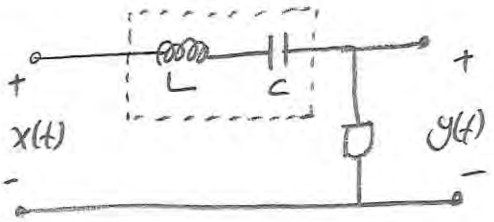
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \qquad \angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

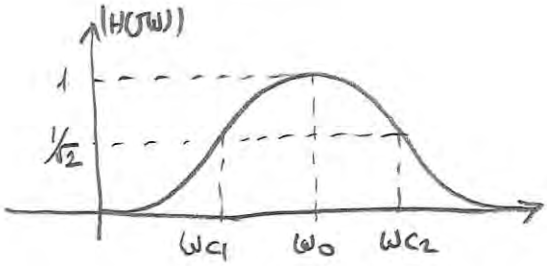




3) BGF:



Giriş, çok düşük frekanslarda çıkışa aktarılmaz. Giriş, çok yüksek frekanslarda çıkışa aktarılmaz. Rezonansta ise $X_L = X_C$ olacağından gösterecekleri direnç sıfır (0) olacak ve çıkışa x(t) (giriş) aktarılacaktır.



$$H(s) = \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s(RC)}{s(RC) + s^2(LC) + 1}$$

$$H(s) = \frac{s\,(R/L)}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}$$

$$BG = w_{c2} - w_{c1} = \frac{R}{L} \qquad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

w_0: Rezonans (merkez) frekansı

$$H(s) = \frac{B \cdot s}{s^2 + Bs + w_0^2}$$

w_{c1} ve w_{c2} frekansları $|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğu durumdaki frekansları göstermektedir.

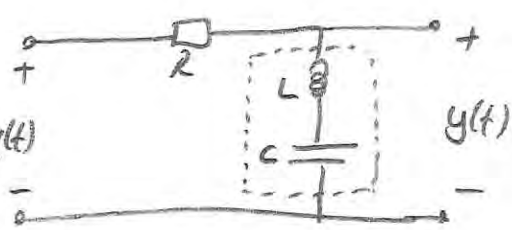
Alt kesim frekansı $\quad w_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$

Üst kesim frekansı $\quad w_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$

$$w_0 = \sqrt{w_{c1} \cdot w_{c2}}$$

$$w_{c1} = -\frac{BG}{2} + \sqrt{\left(\frac{BG}{2}\right)^2 + w_0^2} \qquad w_{c2} = \frac{BG}{2} + \sqrt{\left(\frac{BG}{2}\right)^2 + w_0^2}$$

4) BDF:



Devrenin karakteristiği değişmeyecektir. Çıkış BGF'ye göre farklı yerden alındığı için frekans cevabı değişmektedir.

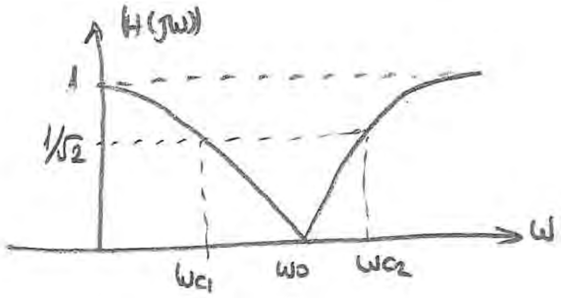
$$H(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2(LC)+1}{s^2(LC)+s(RC)+1} = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

Verilen devrede; giriş çok düşük frekanslarda çıkışa aktarılır.
giriş çok yüksek frekanslarda çıkışa aktarılır.
giriş, rezonans frekansında ise çıkış ($y(t)$) sıfır (0) olacaktır.

Dolayısıyla bu karakteristiği gösteren devreye BDF adı verilir.

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + Bs + \omega_0^2} \qquad B = \frac{R}{L} \text{ (Band genişliği)} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_0: Rezonans frekans merkez



$$\text{Band genişliği} = BG = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L}$$

$$\text{Alt kesim frekansı} = \omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\text{Üst kesim frekansı} = \omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$$

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.