Ters Z-Dönüsümü

Ters z-dönüsümü, z-dönüsümü alınarak elde edilen ifadelerden hareketle tekrardan ayrık zaman domeynine (domain) gecis icin kullanılan bir dönüsümdür. Birden fazla yol ile ters z dönüsümü elde edilebilinir.

1) Doğrudan integrasyon – direkt kontur integrasyonu
2) Serye Acılım
3) Basit Kesirlere ayırma

Bu yöntemler arasında en cok kullanılan method basit kesirlere ayırma olduğu söylenebilinir.

NOT :

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-a} \quad |z|>|a|$$

$$-a^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-a} \quad |z|<|a|$$

Görüldüğü gibi farklı fonksiyonların z-dönüsümleri aynı olabilmekte. Burada dikkat etmeniz gereken kısım bu dönüsümleri yaparken yakınsama bölgesini dikkate almamız gerekir.

Hatırlatmalar!!! (Z dönüsümleri)

$$u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-1}$$

$$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

$$\sin(\Omega n)u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z.\sin(\Omega)}{z^2-2z\cos(\Omega)+1}$$

$$\cos(\Omega n)u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z^2-z.\cos(\Omega)}{z^2-2z\cos(\Omega)+1}$$

Z-dönüşümünde pay kısmında "z" bulunmaktadır. Eğer basit kesirlere ayırırsak

$$\frac{A}{z-p_1} + \frac{B}{z-p_2} + \cdots + \frac{k}{z-p_n}$$

şeklinde olacak ve "z" kaybolacaktır. Bu yüzden ters z-dönüşümü alınırken tablodan yapılmayacaktır. Bunun için $\frac{X(z)}{z}$ dönüşümü yapılıp "z" ile sonrasında çarpılacaktır.

$$\frac{Az}{z-p_1} + \frac{Bz}{z-p_2} + \cdots + \frac{kz}{z-p_n}$$

* Önemli: *

$$\boxed{Z^{-1}\left(\frac{z}{z-p_n}\right) = \begin{cases} p_n^{\,n}\, u(n) & |z|>|p_n| \\ -p_n^{\,n}\, u(-n-1) & |z|<|p_n| \end{cases}}$$

* (Ters z-dönüşümü) *

Basit Kesirlere Ayırma

$\frac{X(z)}{z}$'nin köklerine göre basit kesirlerine ayırma işlemi (Görüldüğü verilen sinyalin ilk başta z'ye bölümüyle basit kesirlere ayrılmıştır)

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n}$$

şeklinde olacaktır.

1) Kökler Reel ve birbirinden farklı ise

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ (birbirinden farklı)

$$x(n) = c_1 (p_1)^n u(n) + c_2 (p_2)^n u(n) + \ldots$$
$$+ c_n (p_n)^n u(n)$$

$$x(n) = \left[c_1 (p_1)^n + c_2 (p_2)^n + \ldots c_n (p_n)^n \right] u(n)$$

ÖRNEK

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$ ise aşağıda verilen

yakınsama bölgeleri için $x(n)$'i bulunuz.

a) $|z| > 2$ (2) iki , b) $|z| < 1$ (bir) c) $1 < |z| < 2$ (bir) (iki) $(1 < |z| < 2)$

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \text{ (iki)} \longrightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

z z (-2) (-1)

$$= \frac{z}{(z-2)(z-1)}$$

$$\frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z-1} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$\frac{c_1(z-1)+c_2(z-2)}{z^2-3z+2} = \frac{z}{z^2-3z+2}$$

$$c_1 . z - c_1 + c_2 z - 2c_2 = z$$

$$z(c_1+c_2) - c_1 - 2c_2 = 1 z$$

$$\cancel{c_1}+c_2=1$$
$$+\ -\cancel{c_1}-2c_2=0$$

$$-c_2 = 1 \qquad \boxed{c_2=-1}$$

$$c_1+c_2=1$$
$$c_1-1=1$$
$$\boxed{c_1=2}$$

Yani

$$\frac{2}{z-2}+\frac{(-1)}{z-1} = \frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1} = \frac{z}{z^2-3z+2}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Basit kesirlerine ayırma işlemi sonrası bu kesirli ifadeleri bu not başında anlatılan dönüşümlere benzeterek ters dönüşüm işlemini almaya çalışacağız.

a) $|z|>2$ ise

Böyle bir durumda sinyalimizin (kesirlerin her ikisi de) sağ taraflı olduğunu söyleyebiliriz)

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2-3z+2} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$ oldugunu

biliyoruz.

Buradan

$$x(z) = \underbrace{\frac{2.z}{z-2}}_{x_1(z)} - \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{x_2(z)}$$ olarak elde ederiz.

Hatırlatma

$$\boxed{a^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-a} \quad |z|>|a|}$$

Bu hatırlatmayı kullanırsak ve $|z|>2$ olduğunu da dikkate alırsak.

$$x_1(z) = \frac{2z}{z-2} \xRightarrow{\text{ters } z} 2.(2)^n u(n)$$ olarak elde ederiz

$a=2$

$$x_2(z) = \frac{-z}{z-1} \xRightarrow{\text{ters } z} (-1)(1)^n u(n)$$ olarak elde ederiz

Burası hatırlatmadan gelmedi! Zaten dönüşümün başında (−) verdi. Karıştırmayın!!

$a=1$

Yani ters dönüşümü ~~[illegible]~~

$$\boxed{x(n) = 2(2^n)u(n) \underbrace{+(-1)}_{(-)}(1)^n u(n)}$$

olarak elde ederiz.

b) $|z|<1$ olduğu durumda ters dönüşümünü bulunuz.

$$X(z) = \overset{x_1}{\frac{2z}{z-2}} - \overset{x_2}{\frac{z}{z-1}}$$ olduğunu biliyoruz.

Bu durumda her bir kesir işlemi için yakınsama bölgesinin sol taraflı olduğunu söyleyebiliriz.

Hatırlatma

$$-a^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-a} \quad |z|<|a|$$

Yani $x_1(z) = \frac{2z}{z-2} \Rightarrow \boxed{x_1(n) = -2^n u(-n-1)}$, $a=2$

$x_2(z) = \frac{-z}{z-1} \Rightarrow x_2(n) = (-1).-(1)^n.u(-n-1)$, $a=1$

$= (1)^n u(-n-1)$

$$\boxed{x(n) = -2^n u(-n-1) + (1)^n u(-n-1)}$$

c) $1 < |z| < 2$ olduğu durumda ise

$$\mathcal{X}(z) = \overbrace{\frac{2z}{z-2}}^{x_1(z)} \overbrace{- \frac{z}{z-1}}^{x_2(z)}$$ olduğunu biliyoruz.

Bu durumda $x_1(z)$ kısmı için sol taraflı $x_2(z)$ kısmı için ise sağ taraflı bir yakınsama bölgesine sahip sinyal olacaktır.

Hatırlatma !!

$$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$-a^n u(-n-1) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|<|a|$$

yani $x_1(z) = \dfrac{2z}{z-2}$ $\quad |z|<2$ olacaktır.

$a=2$

$$\boxed{x_1(n) = -2^n u(-n-1)}$$

$$x_2(z) = \frac{-z}{z-1} \qquad |z| > (1)$$

(bir)

$a=1$

$$\boxed{x_2(n) = (-1)(1)^n u(n)}$$

(iki)

Buradaki eksi hatırlatmadan gelmedi. Normal işlemden geldi. ?!

$$\boxed{\mathcal{X}(n) = -2^n u(-n-1) - (1)^n u(n)}$$

Köklerin Tekrarlı Olma Durumu
(Katlı Kök olma durumu)

$P_1, P_2, P_3 \cdots P_r \in R \quad (P_1 = P_2 = P_3 \cdots = P_r)$

$P_{r+1}, P_{r+2}, P_{r+3} \cdots P_n \in R$ (birbirinden farklı

$$\frac{X(z)}{z} = \underbrace{\frac{C_1}{(z-p_1)^r} + \frac{C_2}{(z-p_2)^{r-1}} + \cdots \frac{C_r}{(z-p_r)^1}} + \frac{C_{r+1}}{z-p_{r+1}} + \cdots + \frac{C_n}{z-p_n}$$

$$C_K = \frac{1}{(K-1)!} \frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} \left[(z-p_1)^r \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_1}$$

ÖRNEK (Kitaptan örnek)

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2} \qquad |z|>1$$

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{(z-1)^2}$$

$(z-1)^2 \quad (z-1)(z+1) \quad (z+1)$

$= c_1(z-1)^2 + c_2(z-1)(z+1) + c_3(z+1)$

$= c_1(z^2-2z+1) + c_2(z^2-1) + c_3 z + c_3$

$= c_1 z^2 - 2c_1 z + c_1 + c_2 z^2 - c_2 + c_3 z + c_3$

$= z^2(c_1+c_2) + z(-2c_1+c_3) + c_1 - c_2 + c_3$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{z^2(c_1+c_2) + z(-2c_1+c_3) + c_1 - c_2 + c_3}{(z+1)(z-1)^2}$$

$$c_1 + c_2 = 1$$
$$-2c_1 + c_3 = 0$$
$$+\ c_1 - c_2 + c_3 = 0$$

$$2c_3 = 1 \quad \boxed{c_3 = 1/2}$$

$$-2c_1 + c_3 = 0$$
$$-2c_1 + \frac{1}{2} = 0$$
$$\boxed{c_1 = \frac{1}{4}}$$

$$c_1 + c_2 = 1$$
$$\frac{1}{4} + c_2 = 1$$
$$\boxed{c_2 = \frac{3}{4}}$$

Yani

$$\frac{X(z)}{z} = \underbrace{\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}}_{x_1} + \underbrace{\frac{3}{4}\frac{1}{z-1}}_{x_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}}_{x_3} \qquad |z|>1$$

Sağ taraflı sinyal

$a_1 = -1 \rightarrow (-1)^n u(n)$ $\quad a_2 = 1 \rightarrow u(n)$ $\quad a_3 = 1 \rightarrow n\,u(n)$

Yani $x_1(z) = \frac{1}{4}\frac{z}{z+1}$ $\quad x_2(z) = \frac{3}{4}\frac{z}{z-1}$

$$x_3(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2}$$

$x_1(n) = \frac{1}{4} \cdot (-1)^n u(n) \qquad x_2(n) = \frac{3}{4} u(n)$

$x_3(n) = \frac{1}{2} n u(n)$

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{4}(-1)^n u(n) + \frac{3}{4} u(n) + \frac{1}{2} n u(n)}$$

3) Kompleks Kökler Olma Durumu

$\frac{x(z)}{z} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} \qquad |z|>1 \qquad p_1, p_2 \in I$ (Karmaşık sayı)

$c_1, c_2 \in I$ Karmaşık sayı

$p_1 = p_2^* \Rightarrow c_1 = c_2^*$

$x(n) = c_1 (p_1)^n u(n) + c_2 (p_2)^n u(n)$

(sağ taraflı olma durumunda)

$p_1 = |r| e^{j\phi} \qquad c_1 = |c| e^{j\theta}$

$x(n) = 2|c|(|r|)^n \cdot \cos(\phi n + \theta) u(n)$