09.10.2012
Hafta - 3

MATEMATİKSEL MODEL VE SİSTEM DİNAMİĞİ

Doğrusal Sistemler ve Doğrusal Olmayan Sistemler

Matematiksel model denklemleri doğrusal sistemlere doğrusal sistemler denir. Doğrusal diferansiyel denklemler ise sabit katsayılı veya yalnızca bağımsız değişkenin fonksiyonları olan denklemlerdir. Doğrusal sistemlerin en önemli özelliği kendilerine üst üste katlama (superposition) ilkesinin uygulanabilmesidir. Üst üste katlama ilkesi iki farklı giriş fonksiyonunun aynı anda uygulanmasından ortaya çıkan cevap fonksiyonun, bu iki fonksiyonun ayrı ayrı uygulanmasından ortaya çıkan cevap fonksiyonu toplamına eşit olduğunu gösterir.

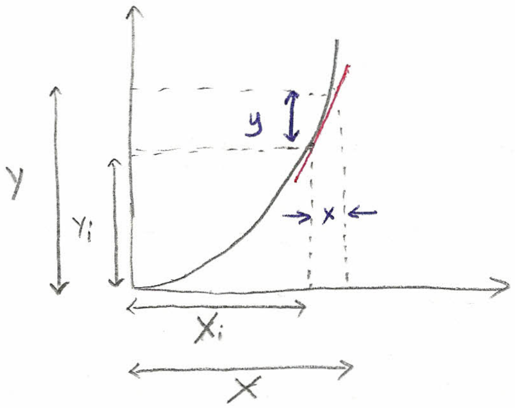
- Doğrusal Olmayan Sistemlerin Doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan denklemlerle gösterilen sistemler doğrusal olmayan sistemler adını alır.

$y = \sin x$

$z = x^2$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A\sin wt$



bağımsız değişken veya giriş değişkeni : $x(t)$

bağımlı değişken veya çıkış değişkeni : $y(t)$

$y = f(x)$

Eğer normal çalışma koşulu x_i, y_i'ye karşılık geliyorsa

$$y = f(x_i) + \frac{df}{dx}(x - x_i) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x - x_i) + \ldots\ldots$$

$\frac{df}{dx}$ $\frac{d^2f}{dx^2}$ türevleri $x = x_i$'de hesaplanması gereken değerlerdir.

$(x - x_i)$ değişimi çok küçük ise $(x - x_i)$'nin yüksek dereceden ifade ihmal edilebilir.

$y = y_i + K(x - x_i)$ / $y - y_i = K(x - x_i$

$y_i = f(x)$ $K = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_i}$

Doğrusal olmayan bir sisteme ait $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şeklinde n adet bağımsız değişkenin fonksiyonu olan y fonksiyonu için

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$y = y_i + K_1(x_1 - x_i) + K_2(x_2 - x_{2i}) + \ldots + K_n(x_n - x_{ni})$$

$$y = f(x_i, x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{ni})$$

$$K_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{x_1 = x_i,\ x_2 = x_{2i},\ \ldots,\ x_n = x_{ni}}$$

$$K_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\bigg|_{x_1 = x_i,\ x_2 = x_{2i},\ \ldots,\ x_n = x_{ni}}$$

$$K_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{x_1 = x_i,\ x_2 = x_{2i},\ \ldots,\ x_n = x_{ni}}$$

$$\Delta y = y - y_i \, \Delta X_1 = X_1 - X_i \, \Delta X_2$$

Transfer Fonksiyonları:

Transfer fonksiyonu bir doğrusal sistemin tüm başlangıç koşullarının sıfır olduğu varsayımı altında çıkış fonksiyonu lablace dönüşümünün giriş fonksiyonu lablace dönüşümüne oranı olarak tanımlanır.

$$T.F = \frac{\text{Çıkış}}{\text{Giriş}} \quad \text{veya} \quad T.F = \frac{\text{Çıkış fonksiyonu L.D. (sıfır başlangıç koşullarında)}}{\text{Giriş fonksiyonu L.D (sıfır başlangıç koşullarında)}}$$

$(n \geq m)$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

$y = y(t)$ çıkış

$x = x(t)$ giriş

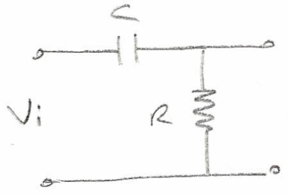
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$\text{Transfer fonksiyonu} = \frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

Transfer Fonksiyonun Özellikleri

a-) Transfer fonksiyonu sistem parametreleri cinsinden bir doğrusal sistemin çıkış ve girişini oranlayan bir ifade ve sistemin bizzat kendisine ait bir özelliktir. Sisteme uygulanan giriş veya uyarı fonksiyonundan bağımsızdır.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

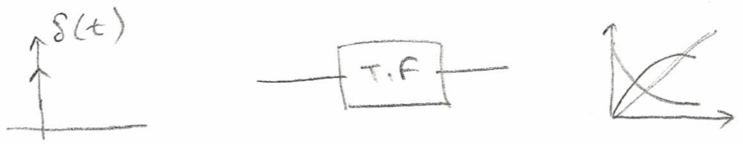


$$\frac{V_o - V_i}{\frac{1}{sC}} + \frac{V_R}{0} = 0$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{sRC}{1+sRC}$$

* Devrenin girişine sinüs versek bile transfer fonksiyonu değişmez. Bağımsızdır.

b-) Bir sistemin tranfer fonksiyonu o sistemin ani darbe giriş fonksiyonu cevabının lablace dönüşümüdür.



$$h(t) = e^{-at}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

c-) Sistem transfer fonksiyonu tüm sıfır başlangıç koşulları altında sisteme ait diferansiyel denklemin lablace dönüşümünü almak suretiyle elde edilir. Eğer giriş fonksiyonu $X(s)$ ve çıkış fonksiyonu $Y(s)$ ise

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$ transfer fonksiyonudur.

d-) Transfer fonksiyonunda s değişkeni yerine $D = \frac{d}{dt}$ ile tanımlanan D diferansiyel operatörünü koymak suretiyle sistemin diferansiyel denklemi elde edilebilir.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+s+1} \Rightarrow Y(s)s^2 + Y(s)s + Y(s) = X(s)$$

$$s = \frac{d}{dt} = D$$

$$YD^2 + YD + Y = X$$

$$\frac{d^2y}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = x$$

e-) Doğrusal sistemin kararlılığı transfer fonksiyonun paydası olan özyapısal (karekteristik) fonksiyondan saptanabilir. Transfer fonksiyonun paydası sıfıra eşitlenerek özyapısal denklem elde edilir. ve bu denklemin kökleri de sistemin kutupları adını alır. Sonuç olarak paydanın tüm kökleri negatif gerçek kısımlara sahipse sistem kararlı olur. Aksi takdirde paydanın köklerinden bir tanesi dahi pozitif gerçek kısımlara sahipse sistem kararsız olur.

f-) paydanın kökleri transfer fonksiyonunun kutupları payın kökleri de transfer fonksiyonun sıfırları adını alır.

$$G(s) = \frac{K(S+Z_1)(S+Z_2)\dots(S+Z_m)}{(S+P_1)(S+P_2)\dots(S+P_n)}$$

Z_m : Transfer fonksiyonun sıfırları

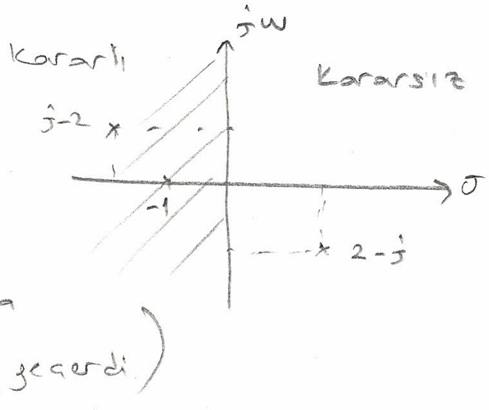
P_n : " " kutupları

g-) Transfer fonksiyonunun sıfırlar ve kutuplar cinsinden ifadesi yerine sistemin zaman sabitleri cinsinden ifadesi sonucu sistem kazancı, transfer fonksiyonu payına sabit bir çarpan olarak gelir.

$$G(s) = \frac{K(T_{z_1}s+1)(T_{z_2}s+1)\dots(T_{z_m}s+1)}{(T_{p_1}s+1)(T_{p_2}s+1)\dots(T_{p_n}s+1)}$$

e-) $$\frac{1}{(s+1)(s-2+j)}$$

$s=-1$ $\quad s=2-j$



(s = j-2 olursa
kararlı hale geçerdi)

Transfer Fonksiyonun Yapısına Göre Sistemler

1- Kazanç tipi : $G(s) = K$ (Kazanç K)

2- İntegral tipi : $G(s) = \dfrac{1}{T_i \cdot S}$; temel parametresi integral zaman sabiti $T_i(s)$

3. Zaman sabiti tipi : $G(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$; " " zaman sabiti $T(s)$

4. Titreşim tipi : $G(s) = \dfrac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$ $(0 < \xi < 1)$;

temel parametreleri doğal frekans $w_n(rad/s)$ ve sönüm oranı ξ

Oranti tipi Sistem ve Dinamik Davranışı

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \quad (sabit)$$

İntegral Tipi

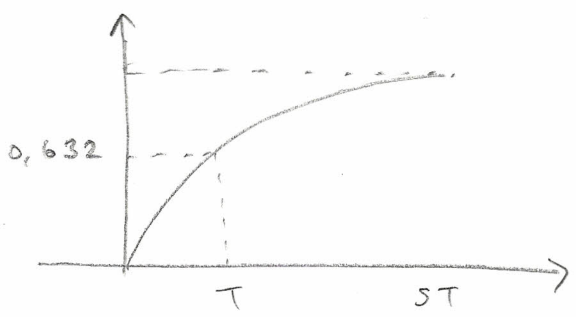
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T_i S} \qquad C(s) = \frac{1}{T_i S} \cdot \frac{1}{S}$$

$$R(s) = \frac{1}{S}, \quad r(t) = U(t) \qquad C(t) = \frac{1}{T_i} t$$

Zaman Sabiti veya Birinci Dereceden Gecikmeli Sistemler

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{TS+1} \qquad C(s) = \frac{1}{(TS+1)} R(s) = \frac{1}{(TS+1)} \frac{1}{S}$$

$$R(s) = \frac{1}{s}, \quad r(t) = U(t) \qquad C(t) = 1 - e^{-t/T}$$



Titreşim Tipi veya 2. Dereceden Gecikmeli Sistemler

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

$$\zeta = \frac{\text{Gerçek sönüm katsayısı}}{\text{Kritik sönüm katsayısı}}$$

$\zeta < 1$ durumunda sistemin dinamik davranışı sönümlü salınımlı veya sönümlü titreşimlidir denir.

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \mp w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$