

DİNAMİK (6.hafta)

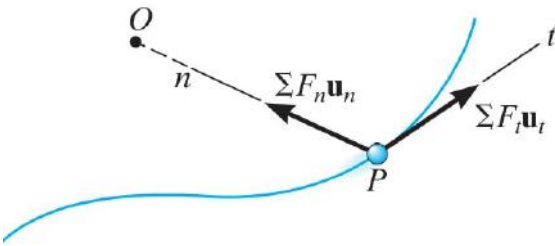
EĞRİSEL HAREKETTE KUVVET VE İVME (Normal ve Teğetsel Koordinatlar)

Bir parçacık eğrisel bir yörünge üzerinde hareket ediyorsa, hareket denklemleri normal ve teğetsel koordinatlarda yazılabilir. \vec{u}_t ve \vec{u}_n bu t ve n eksenler üzerindeki birim vektörler olursa, Bu yönlerdeki kuvvetler ile oluşan atalet kuvvetleri vektörel denklem olarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Buradaki vektörler bileşke vektörlerdir. Eksenler üzerindeki bileşenler cinsinden yazarsak.

$$\Sigma F_t \vec{u}_t + \Sigma F_n \vec{u}_n = m\vec{a}_t + m\vec{a}_n$$



Bu denklemdaki kuvvet ve ivmeleri eksenler üzerinde gösterdikten sonra vektörlerin şiddetini skaler formüller olarak ayrı ayrı yazabiliriz. Bu formüller daha önceki kinematik kısımda gördüğümüz formüllerin aynısıdır. t-eksenindeki formüllerimiz;

$$\Sigma F_t = ma_t$$

a_t değişken ise;

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad v_t = \frac{ds}{dt}, \quad a_t ds = v_t dt$$

a_t sabit ise;

$$v_t = v_{0t} + a_t t$$

$$v_t^2 = v_{0t}^2 + 2a_t (s - s_0)$$

$$s_t = s_{0t} + v_{0t}t + \frac{1}{2}a_t t^2$$

n-eksenindeki formüller ise;

$$\Sigma F_n = ma_n$$

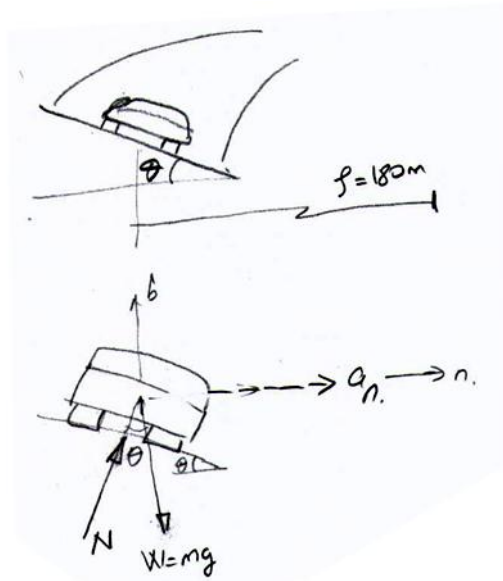
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \rho = \left| \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \right|$$

olur. ρ eğrinin bir herhangi bir noktasında ölçülen yarıçapı olup, cismin hareketi x-y eksenleri üzerindeki koordinatlara bağlı olarak verilirse, bu

formül enrinin istenen herhangi bir noktasındaki yarıçapı bize verecektir.

Örnek 1

Örnek: Şekildeki spor arabası yarıçapında giden eğimli ve virajlı yolda süratimize bağlı olarak eğimli ve yuları kaymaması isteniyor. Araba hızı 108 km/h hız yapıyor.



Hareket n, t koordinatlarında gerçekleştirilmektedir.

$$\begin{aligned} \uparrow + \\ \Sigma F_b = 0 \quad N \cdot \cos \theta - mg = 0 \\ N \cdot \cos \theta - m \cdot 9,81 = 0 \\ N \cdot \cos \theta = m \cdot 9,81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{N \cdot \sin \theta}{N \cdot \cos \theta} &= \frac{m \cdot \frac{30^2}{180}}{m \cdot 9,81} \\ \tan \theta &= 0,51 \Rightarrow \theta = 27^\circ \end{aligned}$$

Burada cismin eğime bu etkisi olmaz. n, t ekseninde Araba hareketi olduğu için ayar yolda durmaktadır.

$$\rightarrow + \sum F_n = m \cdot a_n$$

$$v = \frac{108000}{3600} =$$

$$N \cdot \sin \theta = m \cdot a_n$$

$$v = 30 \text{ m/s}$$

$$N \cdot \sin \theta = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$N \cdot \sin \theta = m \cdot \frac{30^2}{180}$$

a_t ilmesinin sabit olduğundan ve
dolanımdan ilk hızı 0 ve son hızı 5,77

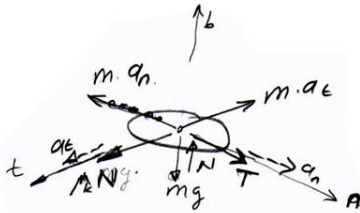
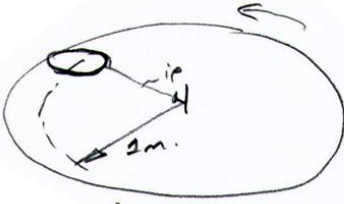
$$v = v_0 + a_t t$$

$$5,77 = 0 + 0,981 t$$

$$t = 5,89 \text{ s olur.}$$

Örnek 2

Örnek 2. Şekildeki platform 4,6 hızla bir selâlide
dönmektedir. Bu esnada 3 kg lık bir disk platformu
ortasına ipe bağlı bir selâlide platformun üzerine dur
maktadır. Diskin ipi koparsa kaç hızı bulunur.
İpik dayanabilirliği maksimum ağırlık kuvveti 100 N
diskin platform ortasına konulduğunda hızı 4,6
 $\mu_k = 0,1$ dir.



$$\sum F_b = 0 \quad N - mg = 0$$

$$N - 3 \cdot 9,81 = 0$$

$$N = 29,43 \text{ N.}$$

$$\sum F_t = m \cdot a_t \quad \mu_k \cdot N = m \cdot a_t$$

$$0,1 \cdot 29,43 = 3 \cdot a_t$$

$$a_t = 0,981 \text{ m/s}^2$$

$$\sum F_n = m \cdot a_n \quad T = m \cdot a_n = 0$$

$$100 = 3 \cdot \frac{v^2}{1} \rightarrow \left[a_n = \frac{v^2}{r} \right]$$

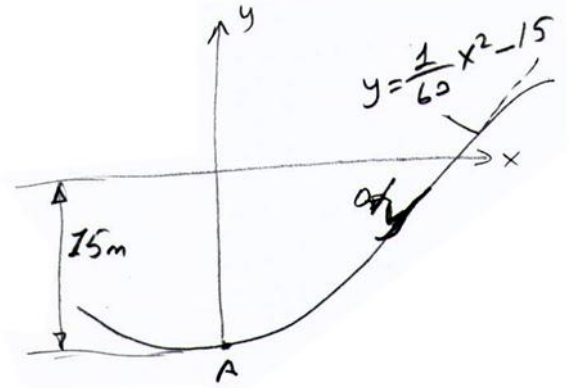
$$T = 100$$

$$v = 5,77 \text{ m/s.}$$

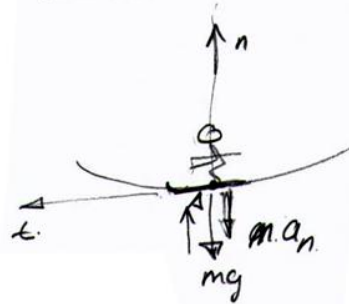
(Disk bu hızı ulaştığında
ip koparsa, platform
aşağıya doğru hızla düşer)

Örnek 3

Örnek 3 Şekildeki gibi bir kayıkta yatılı olarak
olağan parabol selâlindeki bir pütlükten aşağıya doğru
kaymaktadır. Kayığın ağırlığı 61,6 kg'dır.
en alt noktada olan A noktasına ulaştığında hızı
ve bu noktada kayığın ağırlığı kaç kg olur.



Yol eğrisel bir yol olduğundan
için n, t koordinatlarında
hareketler.



Yüköründen aşağı doğru gelen
aslında yavaşlamış düşüşün yol sonunda
bakişimle hızlanmaktadır. Tam A noktasında
yavaşlama hızı sıfır olur.
Bu nedenle tepe doğru hızla hareket eder.

$$\sum F_t = m \cdot a_t \quad 0 = m \cdot a_t \Rightarrow a_t = 0$$

$$\sum F_n = m \cdot a_n \quad N - mg = m a_n$$

$$N - 61,16 \cdot 9,81 = 61,16 \cdot a_n$$

A noktasındaki yörüngeyi eğriliğe
yarıçapı ρ hesaplayalım.

$$y = \frac{1}{60} x^2 - 15$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{30} x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{30}$$

$$\rho = \left| \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right|_{x=0} = \left| \frac{[1 + 0^2]^{3/2}}{\frac{1}{30}} \right|$$

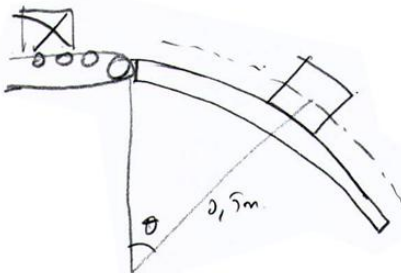
$$\rho = 30 \text{ m.}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{9 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{30} = 0,3 \text{ m/s}^2$$

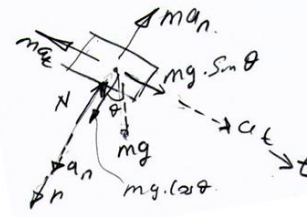
Yüköründe
yavaş yavaş
 $N = 765 \text{ N}$
 $77,98 \text{ kg}$

Örnek 4

Örnek 4 Şekildeki gibi 2 kg'lık pabucuk bir taşıyıcı
bantta 1 m/s hızla hareket ederken dairesel bir
rampa aktarılıyor. Rampanın yarıçapı 0,5 m
ise pabucuk yavaş hareketiyle başlıyor θ
açısını bulunuz.



Geral Sebati erdem duyduğum
Güle



$$\sum F_t = m \cdot a_t$$

$$mg \sin \theta = m \cdot a_t$$

$$2 \cdot 9,81 \cdot \sin \theta = 2 \cdot a_t$$

$$19,62 \sin \theta = 2 \cdot a_t \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum F_n = m \cdot a_n$$

$$-N + mg \cos \theta = m \cdot a_n \quad \left[\begin{array}{l} \text{Tam yörünge} \\ \text{ayrılma } N=0 \text{ olur} \end{array} \right]$$

$$(2) \quad 19,62 \cos \theta = 2 \cdot \frac{v^2}{0,5} \quad \left[\begin{array}{l} a_n = \frac{v^2}{0,5} \end{array} \right]$$

Bu iki denklemde θ bulunamaz var.
 θ, a_t, v eşit
Bir denkleme daha ihtiyacımız vardır.



$$ds = r \cdot d\theta \quad \left[\begin{array}{l} \theta \text{ radyan olarak seçtikçe} \\ \text{geometriden} \end{array} \right]$$

$$a_t ds = v \cdot dv \quad \text{İdi. 1 ve 3 den}$$

$$a_t (r \cdot d\theta) = v \cdot dv \quad \frac{19,62 \sin \theta}{2} = \frac{v \cdot dv}{0,5 \cdot d\theta}$$

$$a_t (0,5 \cdot d\theta) = v \cdot dv \quad \left[v \cdot dv = 4,905 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \right]$$

$$a_t = \frac{v \cdot dv}{0,5 \cdot d\theta} \quad \text{Diferansiyelinde kontrol}$$

$$\int_1^v v \cdot dv = \int_0^\theta 4,905 \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

$$\frac{v^2}{2} \Big|_1^v = -4,905 \cdot \cos \theta \Big|_0^\theta$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} = -4,905 (\cos \theta - 1)$$

$$v^2 = +9,81 (1 - \cos \theta) + 1 \quad \text{--- (3)}$$

v^2 41 (2) de yerine yazalım

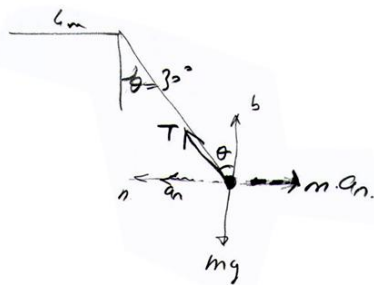
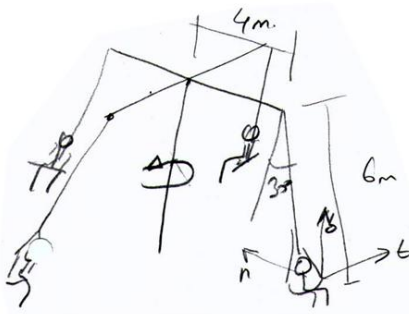
$$19,62 \cdot \cos \theta = \frac{2}{0,5} (9,81 (1 - \cos \theta) + 1)$$

$$\cos \theta = \frac{43,24}{58,86}$$

$$\theta = 42,7^\circ$$

Örnek 5

Örnek 5 Salıncaklar gibi bir yapıda zincir bir kısımdan birim dikkeyi yapıtı 90° göstermektedir. Salıncaklar birim yapıtı 80 kg ile zincire atılarak salıncaklar devri bulunur. Bu esnada zincire ne kadar kuvvet uygulanır?



$$\sum F_n = m \cdot a_n$$

$$T \cdot \sin \theta = m \cdot a_n$$

$$T \sin 30 = 80 \cdot a_n$$

$$\sum F_t = 0$$

$$T \cdot \cos \theta - mg = 0$$

$$T \cdot \cos 30 - 80 \cdot 9,81 = 0$$

$$T = 906,2 \text{ N.}$$

$$\approx 92,37 \text{ kgf}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$a_n = \frac{v^2}{4 + 6 \cdot \sin 30}$$

$$906,2 \cdot \sin 30 = 80 \cdot \frac{v^2}{(4 + 6 \cdot \sin 30)}$$

$$v = 6,30 \text{ m/s.}$$

$$v = r \cdot \omega$$

$$6,30 = (4 + 6 \cdot \sin 30) \cdot \omega$$

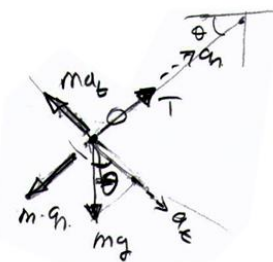
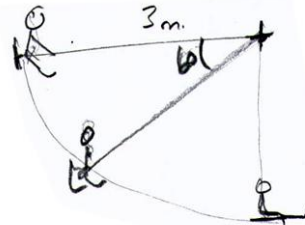
$$\omega = 0,9 \text{ rad/s.}$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \Rightarrow n = \frac{0,9 \cdot 60}{2 \cdot \pi}$$

$$n = 8,59 \text{ d/s.}$$

Örnek 6

Örnek 6 Bir çocuk parkta sallanmaktadır. Çocuğu sallarken tem bağları noluşun hızına kadar yitilmiştir. Bu çocuğu en alt noktadan geçerken ağırlığı ne olur (ipe ne kadar kuvvet uygulanır)? Çocuğun ağırlığı 30 kgf.



$$\sum F_t = m \cdot a_t$$

$$mg \cdot \cos \theta = m \cdot a_t$$

$$30 \cdot 9,81 \cdot \cos \theta = 30 \cdot a_t$$

$$\left[\begin{array}{l} a_t = g \cdot \cos \theta \\ a_t: g \text{ iken en alt noktasındadır} \end{array} \right]$$

$$a_t = 9,81 \cos \theta$$

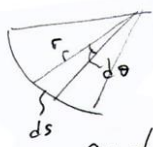
$$\sum F_n = m \cdot a_n \quad T - mg \sin \theta = m a_n$$

$$T - 30 \cdot 9.81 \cdot \sin \theta = 30 \cdot \left(\frac{v^2}{3} \right)$$

$$T - 294.3 \sin \theta = 10v^2$$

Bu ile denklemleri birleştiririz

θ, v, a_t, T buluruz



$$ds = r \cdot d\theta$$

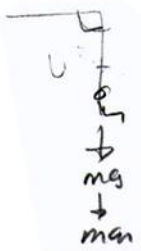
$$a_t ds = v \cdot dv$$

$$(9.81 \cdot \cos \theta) (3 \cdot d\theta) = v \cdot dv$$

$$\int_0^{90} 29.43 \cdot \cos \theta' d\theta = \int_0^v v \cdot dv$$

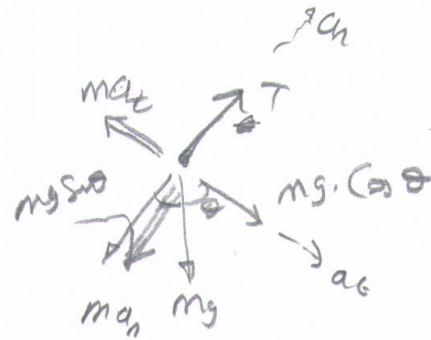
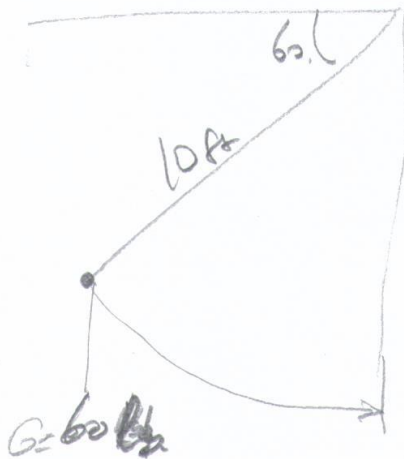
$$+ 29.43 \sin \theta \Big|_0^{90} = \frac{v^2}{2} \Big|_0^v$$

$$29.43 \cdot (\sin 90 - \sin 0) = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v = 7.67 \text{ m/s}$$



$$G = 30 \left(9.81 + \frac{7.67^2}{3} \right)$$

$$G =$$



$$a_n = r \cdot \frac{\omega^2}{3}$$

$$\sum F_t = m \cdot a_t$$

$$mg \cos \theta = m \cdot a_t \quad a_n =$$

$$60 \cdot 32.2 \cdot \cos \theta = 60 \cdot a_t$$

$$a_t = 32.2 \cos \theta$$

$$\sum F_n = m \cdot a_n$$

$$T - m \cdot g \sin \theta = m \cdot a_n$$

$$T - 60 \cdot 32.2 \sin \theta = 60 \cdot \frac{\omega^2}{10}$$

$$T - 1932 \cdot \sin \theta = 6 \omega^2$$

$$\int v \cdot d\theta = a_t \cdot ds$$

$$v dv = a_t \cdot r \cdot d\theta$$

$$v dv = 32.2 \cos \theta \cdot 10 d\theta$$

$$\int_0^{\omega} v dv = \int_{60}^{90} 322 \cos \theta \cdot d\theta$$

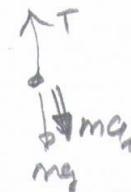
$$\frac{\omega^2}{2} \Big|_0^{\omega} = 322 \sin \theta \Big|_{60}^{90}$$

$$\omega^2 = \sqrt{2 \cdot 322 (\sin 90 - \sin 60)}$$



$$ds = r \cdot d\theta$$

$$60 = m \cdot g$$



$$T - mg = m \cdot a_n$$

$$T = m(g + a_n)$$

$$= \frac{60}{32.2} (32.2 + \frac{9.28^2}{10})$$

$$T = 76.10$$