02.10.2012
Hafta-2

# LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

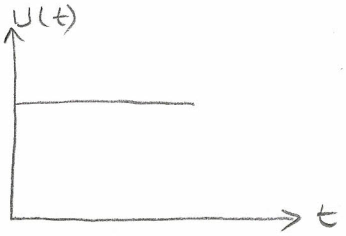
$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$\mathcal{L}$ = Laplace dönüşüm operatörü

$s$ = Laplace dönüşüm değişkeni

$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ $\qquad s = \sigma + j\omega$

## Birim Basamak Fonksiyonu




$$U(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$f(t) = K \cdot e^{-at}\, U(t)$ 'nin Laplace dönüşümü

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty K e^{-at} \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= K \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt = -\frac{K}{s+a}\, e^{-(s+a)t} \Big|_0^\infty = \frac{K}{s+a}$$

## Laplace Dönüşüm Teoremleri

Bir sabitle çarpma $\qquad \mathcal{L}\left[k \cdot f(t)\right] = k \cdot F(s)$

Toplama ve Fark alma $\qquad \mathcal{L}\left[f_1(t) \mp f_2(t)\right] = F_1(s) \mp F_2(s)$

Türev Alma $\qquad \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\left( \text{burada } f^k(0) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}\Big|_{t=0} \right)$$

İntegrasyon $\qquad \mathcal{L}\left[\int_0^t f(z)\, dz\right] = \frac{F(s)}{s}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_n} f(z)\, dz\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

Zamanda öteleme $\mathcal{L}\left[f(t-T)\,U f(t-T)\right] = e^{-Ts} F(s)$

Başlangıç değer teoremi $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Son değer teoremi $sF(s)$'in $s$ düzleminde sanal ekseni üzerinde ya da sağ yarı $s$ düzleminde kutbu bulunması halinde

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Karmaşık öteleme $\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = F(s \mp \alpha)$

Gerçek katlama $F_1(s)\,F_2(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(z)\,f_2(t-z)\,dz\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(z) f_1(t-z)\,dz\right]$

$= \mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right]$

konvolüsyon

| | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|
| (Birim ani darbe) | $\delta(t)$ | $1$ |
| (birim basamak) | $U(t)$ | $1/s$ |
| (birim ramp) | $t$ | $1/s^2$ |
| (üstel) | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| | $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| | $\sin(wt)$ | $\frac{w}{s^2+w^2}$ |
| | $\cos(wt)$ | $\frac{s}{s^2+w^2}$ |
| | $t^n_{(n=1,2\ldots)}$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| | $t^n e^{-at}$ | $n!/(s+a)^{n+1}$ |
| | $e^{-at}\sin(wt)$ | $w/(s+a)^2+w^2$ |
| | $e^{-at}\cos(wt)$ | $(s+a)/(s+a)^2+w^2$ |

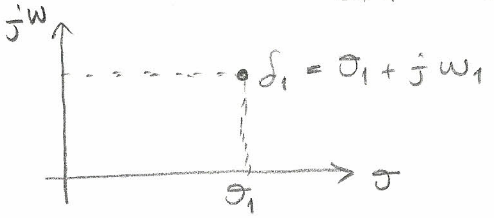
ÖR $f(t) = e^{-4t} + \sin(t-2) + t^2 e^{-2t} \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = ?$

$$\mathcal{L}[e^{-4t}] = \frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1} \quad , \quad \mathcal{L}[\sin(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3} \quad , \quad \mathcal{L}[t^2 e^{-2t}] = \frac{2}{(s+2)^3}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1} + \frac{2}{(s+2)^3}$$




## Ters Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\, ds$$

**Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemi :**

$$F(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots\ldots(s+p_n)}$$

Burada payın kökleri $-z_1, -z_2, \ldots -z_m$ $F(s)$ fonksiyonu sıfır yapan değerler olup fonksiyonların sıfırları adını alırken paydanın kökleri $-p_1, -p_2, \ldots, -p_n$ fonksiyonu sonsuz yapan değerler olup sistemin ve fonksiyonun kutupları adını alır. Fonksiyonu paydasının köklerine göre çarpanlarına ayırırsak $F(s) = \dfrac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$

a-) farklı gerçek kök durumu :

$$F(s) = \frac{A_1}{s+P_1} + \frac{A_2}{s+P_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{s+P_n}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -P_1} (s+P_1)\,F(s)$$

$$A_2 = \lim_{s \to -P_2} (s+P_2)\,F(s)$$

$$\vdots$$

$$A_n = \lim_{s \to -P_n} (s+P_n)\,F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = A_1 e^{-P_1 t} + A_2 e^{-P_2 t} + \ldots\ldots + A_n e^{-P_n t}$$

b-) Katlı veya Tekrarlı Kök Durumu :

Eğer $F(s)$ fonksiyonu paydasında $\left(F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\right)$ $D(s)$ $s=-P_r$ de $q$ kere tekrarlanan bir katlı kökü varsa

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{C_q}{(s+P_r)^q} + \frac{C_{q-1}}{(s+P_r)^{q-1}} + \ldots\ldots + \frac{C_1}{(s+P_r)^1}$$

$$C_q = \lim_{s \to -P_r} \left[(s+P_r)^q F(s)\right] \qquad C_{q-i} = \lim_{s \to -P_r} \frac{d^i}{ds^i}\left[(s+P_r)^q F(s)\right]$$

$$C_{q-1} = \lim_{s \to -P_r} \frac{d}{ds}\left[(s+P_r)^q F(s)\right] \qquad C_1 = \lim \frac{1}{(q-1)!}\,\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}\left[(s+P_r)^q F(s)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \left[\frac{C_q}{(q-1)!}\,t^{q-1} + \frac{C_{q-1}}{(q-2)!}\,t^{q-2} + \ldots\ldots C_2 t + C_1\right] e^{-P_r t} + \ldots\ldots$$

c-) Karmaşık Eşlenik Kök Durumu :

$$F(s) = \frac{K_c}{s+a-jb} + \frac{K_{-c}}{s+a+jb} + \frac{A_1}{s+P_1} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{s+P_n}$$

$$K_c e^{(-a+bj)t} + K_{-c} e^{(-a-bj)t} + A_1 e^{-P_1 t} + A_2 e^{-P_2 t} + \ldots\ldots + A_n e^{-P_n t}$$

$$K_c = \lim_{s \to -a+jb} \left[(s+a-jb)\,F(s)\right]$$

$$K_{-c} = \lim_{s \to -a-jb} \left[(s+a+jb)\,F(s)\right]$$

ÖR $F(s) = \dfrac{s^2+9s+19}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ ters laplace dönüşümünü bulunuz.

$$F(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+4)}$$

$$A_1 = \lim_{s\to -1} \left[ \cancel{(s+1)} \frac{s^2+9s+19}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+4)} \right] = \frac{11}{3}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -2} \left[ \cancel{(s+2)} \frac{s^2+9s+19}{(s+1)\cdot\cancel{(s+2)}\cdot(s+4)} \right] = -\frac{5}{2}$$

$$A_3 = \lim_{s\to -4} \left[ \cancel{(s+4)} \frac{s^2+9s+19}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+4)}} \right] = -\frac{1}{6}$$

$$F(s) = \frac{11}{3(s+1)} - \frac{5}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+4)}$$

$$f(t) = \frac{11}{3}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

ÖR $F(s) = \dfrac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)} \Rightarrow f(t) = ?$

$$F(s) = \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{C_1}{(s+2)} + \frac{A_1}{s+5}$$

$$C_2 = \lim_{s\to -2} \left[ (s+2)^2 \frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)} \right] = 2$$

$$C_1 = \lim_{s\to -2} \frac{d}{ds} \left[ (s+2)^2 \frac{11s+28}{\cancel{(s+2)^2}(s+5)} \right] = \lim_{s\to -2} \frac{11(s+5)-(11s+28)}{(s+5)^2} = 3$$

$$A_1 = \lim_{s\to -5} \left[ \cancel{(s+5)} \frac{11s+28}{(s+2)^2\cancel{(s+5)}} \right] = -3$$

$$F(s) = \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2} - \frac{3}{s+5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = 2te^{-2t} + 3e^{-2t} - 3e^{-5t} = (2t+3)e^{-2t} - 3e^{-5t}$$

ÖR $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 1+t$

$y(0) = 0$ ve $y'(0) = 1$

differansiyel denklemini başlangıç koşuluna göre laplace dönüşüm metoduyla çözünüz.

$$\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 3\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

başlangıç değerlerini yerine yazalım

$$\left[s^2Y(s) - sy(0) - 1\right] + 3\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2+3s+2)Y(s) - 1 = \frac{s+1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2(s^2+3s+2)}$$

soruda $y(t)$'nin bulunması isteniyor.

$$Y(s) = \frac{C_2}{s^2} + \frac{C_1}{s} + \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)}$$

$$C_2 = \lim_{s\to 0}\left[\cancel{s^2}\frac{s^2+s+1}{\cancel{s^2}(s+1)(s+2)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$C_1 = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[\cancel{s^2}\frac{s^2+s+1}{\cancel{s^2}(s+1)(s+2)}\right] = -\frac{1}{4}$$

$$A_1 = \lim_{s\to -1}\left[\cancel{(s+1)}\frac{s^2+s+1}{s^2\cancel{(s+1)}(s+2)}\right] = 1$$

$$A_2 = \lim_{s\to -2}\left[\cancel{(s+2)}\frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)\cancel{(s+2)}}\right] = -\frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{4}\frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}U(t) + e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-2t}$$

ÖR: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 12\dfrac{dy}{dt} + 32y = 32\,U(t)$ , $y(0)=0$ , $y'(0)=0$

başlangıç koşullarında. laplace dönüşüm metoduyla çözünüz.

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2+12s+32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+8}$$

$$K_1 = \lim_{s\to 0}\left[s\,Y(s)\right] = \frac{32}{(s+4)(s+8)} = 1$$

$$K_2 = \lim_{s\to -4}\left[(s+4)\,Y(s)\right] = -2$$

$$K_3 = \lim_{s\to -8}\left[(s+8)\,Y(s)\right] = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}$$

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})\,U(t)$$

ÖDEV

a-) $F(s) = \dfrac{s^2+9s+19}{(s+1)(s^2+6s+8)}$

b-) $F(s) = \dfrac{4e^{-5s}}{s^2}$

Verilen fonksiyonların sıfırlarını ve kutuplarını bularak karmaşık düzlemde gösteriniz. Ve ayrıca ters laplace dönüşümlerini elde ediniz.

ÖDEV

a-) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 4\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$ , $y(0)=0$ , $\dfrac{dy}{dt}(0)=0$ , $\dfrac{d^2y}{dt^2}(0)=-1$ .

b-) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = \sin t$ (tüm başlangıç koşulları sıfır)

Verilen differansiyel denklemlerin laplace dönüşümleri bulunuz. Sıfırlarını ve kutuplarını karmaşık sayı düzleminde gösteriniz. Ayrıca fonk. ters laplace dönüşümlerini bulunuz.