Shannon – Nyquist Örnekleme Teoremi

Sürekli zamanlı bir sinyal örneklenirken örtüşmenin olmaması için en az Nyquist frekansı ile örneklenmelidir. Nyquist frekansı ise örneklenen sürekli zamanlı sinüzoidal işaretin max. frekans bileşeninin en az iki ıki katı olarak tanımlanır.

$f_{max} \rightarrow$ sürekli zamanlı sinüzoidal sinyalin en büyük frekanslı bileşeni

$$f_N = 2 . f_{max}$$

Örnek: Aşağıda verilen sinüzoidal sinyallerin $f_s = 40 Hz$ örnekleme frekansı ile örneklenmesi durumunda oluşan ayrık zamanlı işaretleri elde ediniz. Örtüşme olayını inceleyiniz.

$$x_1(t) = \cos(20\pi t)$$
$$x_2(t) = \cos(100\pi t)$$

$x_1(t) = \cos(20\pi t)$ $\quad f_1 = 10 Hz$ $\quad (2\pi f_1 = 20\pi \Rightarrow f_1 = 10Hz)$ $\quad f_N = 2 . f_{max} = 2 . 10 = 20Hz$

$f_s = 40Hz$

$f_s \geq f_N$

$f_s \geq 2 . f_{max}$

$$\underline{x(t)} \xrightarrow[t = nT_s]{} \underline{x(nT_s)}$$

$x_1(n) = \cos(20\pi . n . T_s)$ $\quad T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{40}$

$x_1(n) = \cos(20 . \pi . n . \frac{1}{40}) = \cos(\frac{\pi}{2} n)$ $\quad \Omega_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ (Ω_0 ayrık açısal frekans $0-\pi$ temel frekans aralığında olduğu için örtüşme olmaz)

$x_2(t) = \cos(100\pi t)$ $\quad f_{max} = 50Hz$

$f_s = 40Hz$

$$x_2(n) = \cos(100\pi n . T_s) = \cos(100 . \pi . n . \frac{1}{40}) = \cos(\frac{5\pi}{2} n)$$

$$x_2(n) = \cos(\frac{\pi}{2} n + 2\pi n) = \cos(\frac{\pi}{2} n)$$

$x_1(t)$ sinyalinin aynısı oluştu. Dolayısıyla $x_2(t)$ sinyalindeki frekans bilgisi kayboldu. Oluşan bu bilgi kaybı örtüşme olayından meydana gelmektedir.

Örnek; $x(t) = 3.\cos(2000\pi t) + 5.\sin(6000\pi t) + 10.\cos(12000\pi t)$

analog işareti için;

a) Nyquist frekansını bulunuz.

b) $f_s = 5000$ Hz için $x(n) = ?$

c) İdeal enterpolasyon kullanılarak b şıkkı için elde edilen örneklerden hareketle tekrardan oluşturulan $x(t)$ analog işaretini bulunuz ve yorumlayınız.

a)
$f_1 = 1000$ Hz
$f_2 = 3000$ Hz $\qquad f_s = 5000$ Hz $\qquad f_N = 2.f_{max} = 2.6000 = 12000$ Hz
$f_3 = 6000$ Hz $\qquad\qquad\qquad\qquad = 12$ kHz

b) $x(n) = 3.\cos(2000\pi n T_s) + 5\sin(6000\pi n T_s) + 10.\cos(12000\pi n.T_s)$

$$T_s = 1/f_s = 1/5000 \text{ sn.}$$

$$x(n) = 3.\cos\left(2000.\pi.\frac{1}{5000}\right) + 5\sin\left(6000.\pi.n.\frac{1}{5000}\right) + 10.\cos\left(12000\pi.n\frac{1}{5000}\right)$$

$$x(n) = 3.\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 5.\sin\left(\frac{6\pi}{5}n\right) + 10.\cos\left(\frac{12\pi n}{5}\right)$$

$$x(n) = 3.\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - 5\sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right) + 10.\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

$$x(n) = 13.\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) - 5.\sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

c) $t = nT_s \Rightarrow n = \frac{t}{T_s}$

$$x(t) = 13\cos\left(\frac{2\pi}{5}.\frac{t}{T_s}\right) - 5.\sin\left(\frac{4\pi}{5}.\frac{t}{T_s}\right)$$

$$x(t) = 13.\cos\left(\frac{2\pi}{5}.5000t\right) - 5.\sin\left(\frac{4\pi}{5}.5000t\right)$$

$$x(t) = 13.\cos(2000\pi t) - \underbrace{5\sin(4000\pi t)}_{5.\sin(6000\pi t)}$$

Dolayısıyla tekrardan elde edilen analog $x(t)$ sinyali ile soruda verilen $x(t)$ sinyali aynı değildir. Bazı frekans bileşenleri kaybolmuştur. Bunun nedeni örtüşmenin meydana gelmesidir. (Örnekleme frekansı uygun değildir)

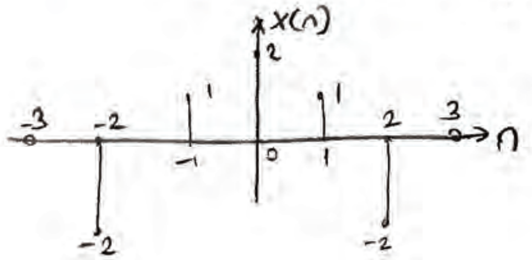
Ayrık Zamanlı Sinyallerde Teklik ve Çiftlik

Çift Simetri:

$x(n)=x[-n]$ özelliğini gösteriyorsa çift simetriktir denir.

Tek Simetri:

$x(n)=-x(-n]$ özelliğini gösteriyorsa tek simetriktir denir.



$$x(n)=\{-2,1,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{2},1,-2\}$$

$x(n)=x[-n]$ old. Çift simetriktir.

__Not!__ Bir işaret düşey eksene göre simetrik ise çift simetrik özelliğe sahiptir. Bir işaret orijine $(n=0)$ göre simetrik ise tek simetrik özelliğe sahiptir.

$$x(n)=-x(-n] \quad \text{tek simetri}$$

$$x(0)=0 \quad \text{gerek şart}$$

Ayrık zamanlı bir işaret; tek simetri, çift simetri veya hem tek hem de çift bileşenleri bulunduran bir işaret olabilir.

$$x(n)=x_e(n]+x_o(n]$$
$$x(-n)=x_e(-n]+x_o(-n)$$

$$x_e(n]=x_e[-n]$$
$$x_o(-n)=-x_o(-n)$$

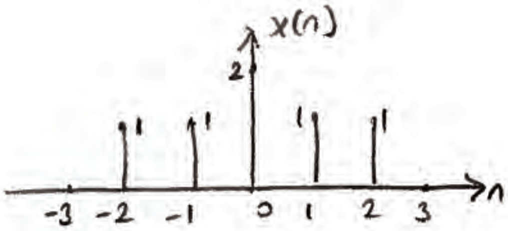
$$x(n)=x_e(n)+x_o(n]$$
$$x(-n]=x_e(n)-x_o(n]$$

$$\underbrace{x_e(n)=\frac{1}{2}\left(x(n]+x(-n]\right)} \qquad \underbrace{x_o(n)=\frac{1}{2}\left(x(n]-x(-n]\right)}$$

__Örnek:__ Aşağıda verilen ayrık zamanlı işaretleri tek ve çift simetri özellikleri açısından inceleyiniz ve tek-çift bileşenlerini bulunuz.

$$x(n)=u(n+2]-u(n-3]+\delta(n)$$

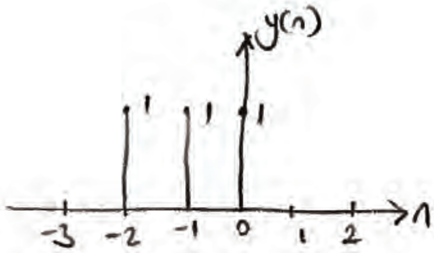
$$y(n)=u(n+2]-u(n-1)$$



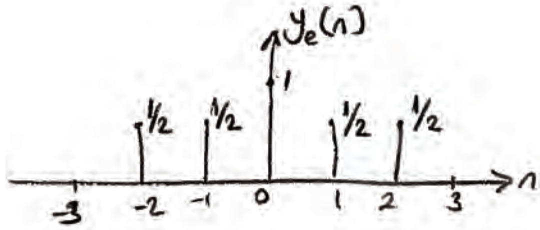
$x(n) = x(-n)$ olduğundan çift simetri özelliğine sahiptir

$x_o(n) = 0$

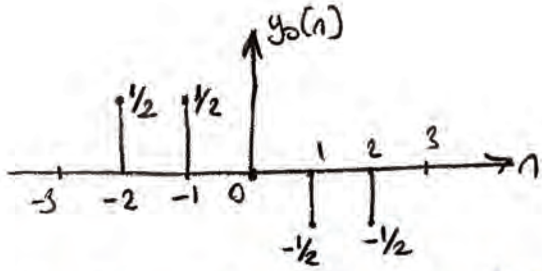
$x_e(n) = x(n)$



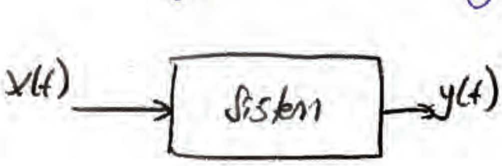
$$y_e(n) = \frac{1}{2}\left(y(n) + y(-n)\right)$$

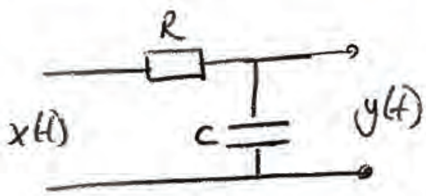


$$y_o(n) = \frac{1}{2}\left(y(n) - y(-n)\right)$$



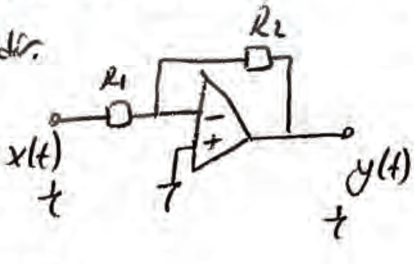
Ayrık Zamanlı Sinyallerin Özelliklerine Göre Sınıflandırılması





(a)

Burada (a)'da verilen devre kondansatörün dolumu için kullanılan bir devredir. Aynı zamanda bu devre giriş işareti $x(t)$'nin sinüzoidal sinyallerden oluştuğu durum için bir filtre devresi görevindedir.



Sürekli zamanlı bir sistem;

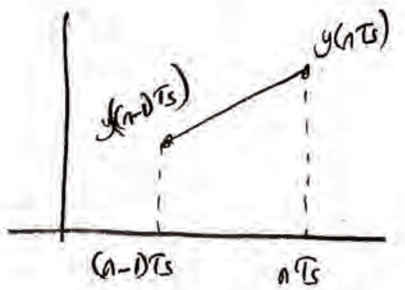
$$y(t) = -\frac{R_2}{R_1}x(t)$$

(a)'da verilen sistemin davranışı bir matematiksel denklem ile verilebilir.

$$\frac{y(t)-x(t)}{R} + C.\frac{dy(t)}{dt} = 0 \qquad \underbrace{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)}$$

Sürekli zamanlı sinyalleri modellerken;
- Diferansiyel denklemler
- Transfer fonksiyonu (s-Dönüşümü)
- Durum uzay gösterimi $\underline{\underline{(t)}}$ ile matematiksel model oluşturulur.

Ayrık zamanlı sinyalleri modellerken;
- Fark denklemleri
- Transfer fonksiyonu (z-Dönüşümü)
- Durum uzay gösterimi (ayrık zaman domeni) ile modellenebilir.



$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(nT_s)-y((n-1)T_s)}{T_s}$$

$$\frac{y(nT_s)-y((n-1).T_s)}{T_s} + \frac{1}{RC}\,y(nT_s) = \frac{1}{RC}\,x(nT_s) \qquad \underline{T_s=1}$$

$$y(n)-y(n-1)+\frac{1}{RC}\,y(n) = \frac{1}{RC}\,x(n)$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{RC}\right)y(n) - y(n-1) = \frac{1}{RC}\,x(n)}$$

Bu modelle fiziksel devreye ihtiyaç duyulmadan analizi yapılabilir. Herhangi bir giriş sinyalinin filtrelenmesini sağlar.

<u>Sistem:</u> Bazı fonksiyonları gerçekleştirmek için tasarlanmış, karşılıklı olarak birbirlerini etkileyen birim veya elemanlar topluluğudur. En temel olarak iki grupta incelenebilir. Bunlar; sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sistemlerdir.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{S.Z. sistem}} \longrightarrow y(t) \qquad x(n) \longrightarrow \boxed{\text{A.Z. Sistem}} \longrightarrow y(n)$$

Temel Sistem Özellikleri

1) Lineerlik (Doğrusallık)

a) Toplamsallık (Süperpozisyon)

b) Çarpımsallık (Homojenite)

Toplamsallık;
$$x_1(n) \rightarrow y_1(n)$$
$$x_2(n) \rightarrow y_2(n)$$
$$x_1(n)+x_2(n) \longrightarrow y_1(n)+y_2(n)$$

Çarpımsallık;
$$x(n) \rightarrow y(n)$$
$$a x_1(n) \rightarrow a y_1(n) \quad (a \in R)$$
$$b x_2(n) \rightarrow b y_2(n) \quad (b \in R)$$
$$a x_1(n) + b x_2(n) \longrightarrow a y_1(n) + b y_2(n) \quad (a,b \in R)$$

İfadeleri sağlanıyorsa sistem lineerdir (doğrusaldır) denir.

Örnek: $y(n) = n.x(n)$ sistemi lineer midir?

Toplamsallık; $x_1(n) \rightarrow y_1(n)$ $\quad$ $x_2(n) \rightarrow y_2(n)$

$y_1(n) \rightarrow n x_1(n)$ $\quad$ $y_2(n) \rightarrow n x_2(n)$

$$y_1(n)+y_2(n) = n.x_1(n) + n.x_2(n)$$
$$= n(x_1(n)+x_2(n)) \rightarrow \text{mevcut durum}$$

$y(n) = n(x_1(n)+x_2(n)) \rightarrow$ olması gereken durum

Çarpımsallık;
$$x(n) \rightarrow y(n)$$
$a.x(n) \rightarrow a.y(n)$ olması gereken
$$y(n) = n.(a.x(n))$$
$$= n.a.x(n) = a(n.x(n)) \rightarrow \text{mevcut durum.}$$

Dolayısıyla çarpımsallık ve toplamsallık özelliklerini sağladığı için sistem lineerdir.

Örnek: $y(n) = x^2(n)$ lineer mi?

$y(n) = x_1^2(n) + x_2^2(n) \rightarrow$ mevcut durum

$y(n) = (x_1(n)+x_2(n))^2 \rightarrow$ olması gereken durum

toplamsallık şartını sağlamadığı için lineer değildir.

2) Zamanla Değişmezlik

Bir sistemin girişi n_0 $(n_0 \in Z^+)$ örnek kadar geciktirildiğinde veya öne alındığında çıkış da aynı örnek kadar geciktiriliyor veya öne alınıyorsa sistem zamanla değişmezlik özelliğine sahiptir.

$$x(n) \rightarrow y(n)$$
$$x[n \mp n_0] \rightarrow y(n \mp n_0]$$

Örnek; $y(n) = n\,x(n]$ işareti zamanla değişmez midir?

$$x(n) \Rightarrow y(n]$$
$$x(n-n_0] \rightarrow y(n-n_0]$$

$y(n-n_0] = (n-n_0)x(n-n_0]$ olması gereken durum.

$y(n-n_0) = n.\,x[n-n_0]$ mevcut durum.

Dolayısıyla sistem, lineer ve zamanla değişen ayrık zamanlı bir sistemdir.

3) Nedensellik

Ayrık zamanlı bir sistemin herhangi bir $n=n_0$ anındaki çıkış, o anki ve/veya daha önceki çıkışlarına veya girişine bağlıysa sistem nedenseldir. Bu özelliği sağlamayan sistemlere de nedensel olmayan sistemler adı verilir.

Örnek; $y(n) = x^2[n+1]$ işaretini lineer, zamanla değişmezlik ve nedensellik bakımından inceleyiniz.

Lineerlik, x^2'li terimden dolayı lineer değil

Zamanla değişmezlik: Giriş n_0 kadar kaydırıldığında çıkışta n_0 kadar kaydığından zamanla değişmez

Nedensellik; çıkış değeri, girişin gelecekteki değerlerine bağlı olduğundan nedensel değildir.

Örnek; $y(n] - y[n-1] = x(n)$ sistemi nedensel midir?

Çıkışın o andaki değeri, girişin o andaki değeri ile çıkışın daha önceki değerlerine bağlı olduğundan sistem nedenseldir denir.

Sistem aynı zamanda lineer ve zamanla değişmeyen bir sistemdir.

Ayrık Zamanlı Sistemlerin Zaman Cevabı Analizi

Fark Denklemleri:

Ayrık zamanlı sistemlerin matematiksel gösterimlerinden olan fark denklemleri sürekli zamandaki diferansiyel gösterimin bir benzeridir. Lineer zamanla değişmeyen (LZD) bir sistemin fark denklemi şeklinde gösterildiğinde ortaya çıkan fark denklemi sabit katsayılı bir fark denklemi olacaktır. Fark denklemleri çözülerek bir sistemin hangi giriş için nasıl tepki vereceği bulunabilir. Sabit katsayılı bir fark denkleminin genel gösterimi aşağıdaki gibi verilebilir.

$x(n) \rightarrow$ giriş
$y(n) \rightarrow$ çıkış

$$a_N . y[n-N] + a_{N-1} . y[n-(N-1)] + \dots + a_1 y[n-1] + a_0 y[n] =$$

$$b_M x[n-M] + b_{M-1} x[n-(M-1)] + \dots + b_1 . x[n-1] + b_0 x[n]$$

$$\left(\begin{array}{l} a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N \in R \\ b_0, b_1, \dots, b_{M-1}, b_M \in R \end{array} \right)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k . y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k . x[n-k]}$$

Genel ifadesi elde edilir.

$$a_0 y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k . x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$$\underbrace{y(n) = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \right)}$$

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

$y_{zi}(n) \rightarrow$ sıfır giriş cevabı

$y_{zs}(n) \rightarrow$ sıfır durum cevabını gösterir.

Fark Denklemlerinin Çözümü

1) Sıfır Giriş Cevabının Bulunması

Sıfır giriş cevabı, girişin sıfır olduğu durumda sadece başlangıç şartlarının kullanılmasıyla ortaya çıkan çözümdür.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$x[n],\ x[n-1],\ \dots,\ x[n-k] = 0$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{N-1}\, y[n-(N-1)] + a_N\, y[n-N] = 0$$

$$\boxed{y[n] = c.\lambda^n}$$

$$a_0.c\lambda^n + a_1.c.\lambda^{n-1} + \dots + a_{N-1}.c.\lambda^{n-(N-1)} + a_N.c.\lambda^{n-N} = 0$$

$$c.\lambda^{n-N}\left(a_0.\lambda^N + a_1.\lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1}\lambda + a_N\right) = 0$$

$$\boxed{a_0.\lambda^N + a_1.\lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1}.\lambda + a_N = 0}$$

Karakteristik Denklem

a) Kökler Reel ve Farklı ise

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, birbirinden farklı

$$y_{zi}(n) = c_1.\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_{N-1}\lambda_{N-1}^n + c_N.\lambda_N^n$$

Örnek: Aşağıda verilen sistemin sıfır giriş cevabını elde ediniz.

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n]$$

$y[-1] = 1$

$y[-2] = 0$ $\qquad y_{zi}(n) = ?$

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = 0$$

$$y_{zi}(n) = c.\lambda^n$$

$$c.\lambda^{n}-3c.\lambda^{n-1}-4c.\lambda^{n-2}=0$$

$$c.\lambda^{n-2}(\lambda^2-3\lambda-4)=0$$

$$\lambda^2-3\lambda-4=0$$

$$(\lambda-4)(\lambda+1)=0 \qquad \underbrace{\lambda_1=4 \quad \lambda_2=-1}$$

$$y_{zi}(n)=c_1.\lambda_1^n+c_2.\lambda_2^n$$

$$y_{zi}(n)=c_1(4)^n+c_2(-1)^n$$

$$y(-1)=c_1(4)^{-1}+c_2.(-1)^{-1}=1 \qquad \frac{1}{4}c_1-c_2=1$$

$$y(-2)=c_1(4)^{-2}+c_2(-1)^{-2}=0 \qquad \frac{1}{16}c_1+c_2=0$$

$$c_1=\frac{16}{5} \qquad c_2=-\frac{1}{5}$$

$$y_{zi}(n)=\left[\left(\frac{16}{5}\right)(4)^n-\frac{1}{5}(-1)^n\right)u(n)$$

b) Tekrarlı (Katlı) Kök Olma Durumu

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_{r+1},\lambda_{r+2},\ldots,\lambda_N \in \mathbb{R} \quad \text{(birbirinden farklı)}$$

$$y_{zi}(n)=(c_1+c_2n+c_3n^2+\cdots+c_{r-1}n^{r-2}+c_rn^{r-1})\lambda_1^n$$

$$+c_{r+1}\lambda_{r+1}^n+c_{r+2}.\lambda_{r+2}^n+\cdots+c_N.\lambda_N^n$$

Örnek: $y(n)-\frac{5}{4}y(n-1)+\frac{1}{2}y(n-2)-\frac{1}{16}y(n-3)=x(n)$. ise $y_{zi}(n)=?$

$$y(-1)=6, \quad y(-2)=6, \quad y(-3)=-2$$

$$\lambda^3-\frac{5}{4}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{16}=0 \qquad \lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2} \quad \lambda_3=\frac{1}{4}$$

$$y_{zi}(n)=(c_1+c_2n)\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$y(-1)=6 \Rightarrow 6=(c_1-c_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+c_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

$$y(-2)=6 \Rightarrow 6=(c_1-2c_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+c_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$y(-3)=-2 \Rightarrow -2=(c_1-3c_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+c_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$

$$2c_1-2c_2+4c_3=6$$

$$4c_1-8c_2+16c_3=6$$

$$8c_1-24c_2+64c_3=-2$$

$$c_1=\frac{9}{2}, \quad c_2=\frac{5}{4}, \quad c_3=-\frac{1}{8}$$

$$y_{zi}(n)=\left(\left(\frac{9}{2}+\frac{5}{4}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u(n) \quad (n\geq 0)$$

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.