Kontrol (Denetim) Sistemlerine Giriş (Introduction to Control Systems)

Bu bölümün temel amacı (The main objectives of this chapter are);

- Kontrol sistemlerinin tanıtılması (Introduction to control systems)
- Kontrol sistemlerinin gerekliliğinin anlatılması (Explaining the necessity of control systems)
- Kontrol sisteminin temel elemanlarının tanıtılması (Introduction of the basic elements of the control system)
- Kontrol sistemi uygulamalarına örnek verilmesi (Giving examples of control system applications)
- Geri beslemenin kontrol sistemlerindeki önemi (The importance of feedback in control systems)
- Kontrol sistemi tiplerinin tanıtılması (Introduction of control system types)

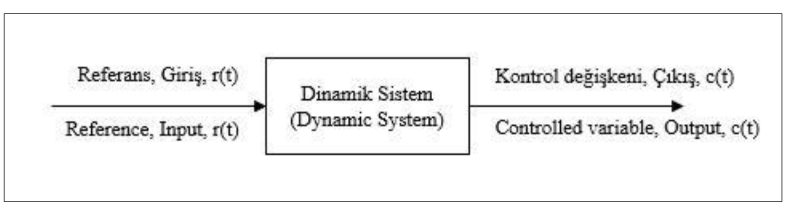
Kontrol Sistemi Nedir (What is Control System)?

Çevremizde Mekanik, Elektrik, Isıl, Akışkan Biyolojik, Ekonomik veya bunların birleşiminden oluşan birçok sistem vardır. Bu sistemlerden önceden belirlenmiş bir işlemi istenilen bir şekilde gerçekleştirmesi beklenir. Sistemlerin istediğimiz cevabı vermesi, bizim belirlediğimiz şekilde davranmaları kontrol sistemleri sayesinde elde edilir.

(There are many systems in our environment consisting of Mechanical, Electrical, Thermal, Fluid, Biological, Economic or a combination of these. These systems are expected to perform a predetermined process in the desired way. The systems that give the answer we want and behave in the way we determine are obtained by the control systems).

Kontrol Sistemi: Kendisini veya bir diğer sistemi kumanda etmek, yönlendirmek veya ayarlamak üzere birleştirilen sistemler kümesidir.

(**Control System:** It is a set of systems that are combined to control, direct or adjust itself or another system).



Bir kontrol sisteminin temel elemanları (Basic elements of a control system)

Sistemler temel olarak iki şekilde kontrol edilebilirler (Systems can basically be controlled in two ways);

Elle Kontrol (Manuel Control) ve (and) Otomatik Kontrol (Automatic Control)

Elle Kontrol (Manuel Control)

- Bir insanın gaz pedalını kullanarak otomobili istenilen hızda tutması (A person holding the car at the desired speed using the gas pedal).
- İşçilerin üretim hattında parçaları elle monte etmeleri (Workers assemble parts by hand on the production line).
- Bir askerin roketatar ile hedefi vurması (A soldier hitting the target with a rocket launcher).
- Bir valfin el ile çevrilerek istenilen su debisinin sağlanması (Providing the desired water flow by turning a valve manually).
- Oda sıcaklığını pencereyi açıp kapayarak ayarlamak (Adjusting the room temperature by opening and closing the window).

Otomatik Kontrol (Automatic Control)

- Otomobil Hız Sabitleyici sistemi (Automobile Cruise Control system).
- Robot kolları tarafından üretim hatlarında montaj işlemlerinin yapılması (Assembly operations on production lines by robot arms).
- Füze güdüm sistemleri (Missile guidance systems).
- Servo-valf ile otomatik su debisi kontrolü (Automatic water flow control with servo-valve).
- Termostat kontrollü ısıtma ve havalandırma sistemleri (Thermostat controlled heating and ventilation systems).

Otomasyon (Automation)

Otomasyon, verilen bir işlemi yönetmek için programlanmış komutları kullanan bir teknoloji olarak tanımlanabilir ve komutların uygun bir şekilde gerçekleştirildiğini belirlemek için geri besleme bilgisi ile birleştirilebilir.
(Automation can be defined as a technology that uses programmed commands to operate a given process and can be combined with feedback information to determine if the commands are properly executed).

Bir sistemde denetim faaliyetlerinin insan girişimi olmaksızın önceden belirlenen bir amaca göre yürütülmesidir.
(It is the execution of control activities in a system according to a predetermined purpose without human intervention).

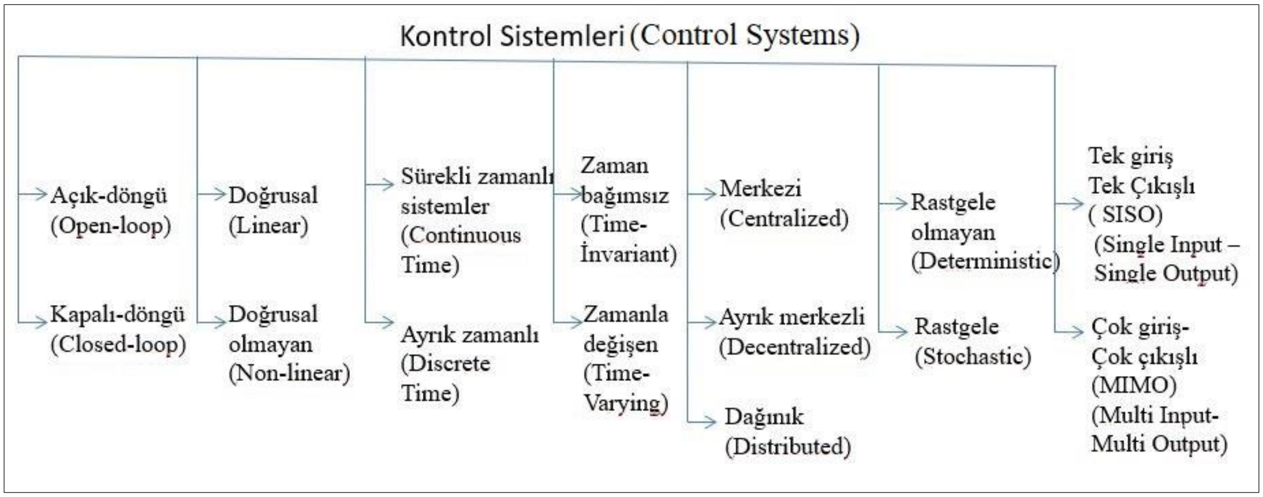
Otomatik kontrollü sistemlerin çoğu işlevlerini elle denetimli sistemlerden daha hassas doğrulukla ve daha kısa zamanda yerine getirirler.
(Most of the automatically controlled systems perform their functions more precisely and in a shorter time than manually controlled systems).

Otomobil montaj hatları gibi bazı sistemler hem otomasyon hem de elle yürütülen işlemlerden oluşur. Bunlara yarı-otomatik sistemler denilir.
(Some systems, such as automobile assembly lines, consist of both automation and manual operations. These are called semi-automatic systems).

Kontrol Sistemlerinin Sınıflandırılması (Classification of Control Systems)

Otomatik kontrol sistemleri kullanım amacına ve sistemlerin çalışma şekline göre çeşitli şekillerde sınıflandırılabilirler. Örneğin çıkış sinyalinin kontrol girişi üzerindeki etkisine göre kontrol sistemleri açık-döngü veya kapalı-döngü sistemleri olarak sınıflandırılabilir. Kontrol sistemleri için diğer sınıflandırma yöntemleri:

(Automatic control systems may be classified in a number of ways, depending upon the purpose of the classification. For instance, according to the effect of the output on the control action, control systems are classified as **open-loop control systems** and **closed-loop control systems.** There are many other ways of classifying control systems):

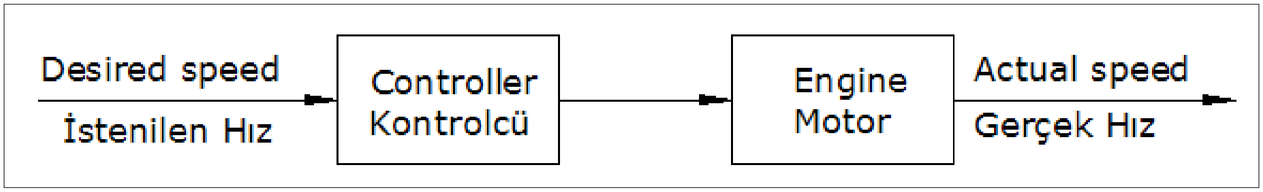


Kontrol sistemleri ayrıca tasarım şekline göre de sınıflandırılabilirler:
Akıllı (İntelligent) Kontrol, Uyarlamalı (Adaptive), Gürbüz (Robust), Optimal Kontrol, vb.

(Control Systems can also be classified based on the control design strategy such as Intelligent Control, Adaptive Control, Robust Control, Optimal Control, etc.)

Açık döngü ve Kapalı Döngü (Çevrim) Kontrol Sistemleri
(Open-Loop and Closed-Loop Control)

Açık Döngü (Çevrim) Kontrol Sistemleri (Open-Loop Control Systems)



Basit bir Açık Döngü kontrol sistemi: Kontrol işlemi çıkış değerinden bağımsızdır. Geri besleme yoktur (Basic open-loop control system: control action is independent of the output. No measurement is fed back).

Çıkış değişkeninin kontrol girişi üzerinde hiçbir etkisi olmayan sistemlerdir

(Systems in which the output quantity has no effect upon the input quantity are called open loop control systems).

- Kontrol işlemi çıkış değerinden bağımsızdır.
  (Control action is independent of the output).

- Çıkış değişkeninin kontrol girişi üzerinde hiçbir etkisi yoktur.
  (system in which the output quantity has no effect upon the input quantity are called open-loop control systems).

- Verilen bir giriş için sistemden belirli bir çıkış elde edilir.
  (For a given input, the system produces a certain output).

- Eğer sisteme bir bozucu etki ederse, verilen giriş için elde edilen çıkış değeri değişir ve sistemden istenilen cevabı almak için hiçbir düzenleme yapılamaz.
  (If there are any disturbances, the output changes and there is no adjustment of the input to bring back the output to the original value.

- Çıkışın istenilen nicelikte olup olmadığını doğrulamak için hiç bir önlem alınamaz.
  (No measurements are made at the output to validate if it desired quantity).

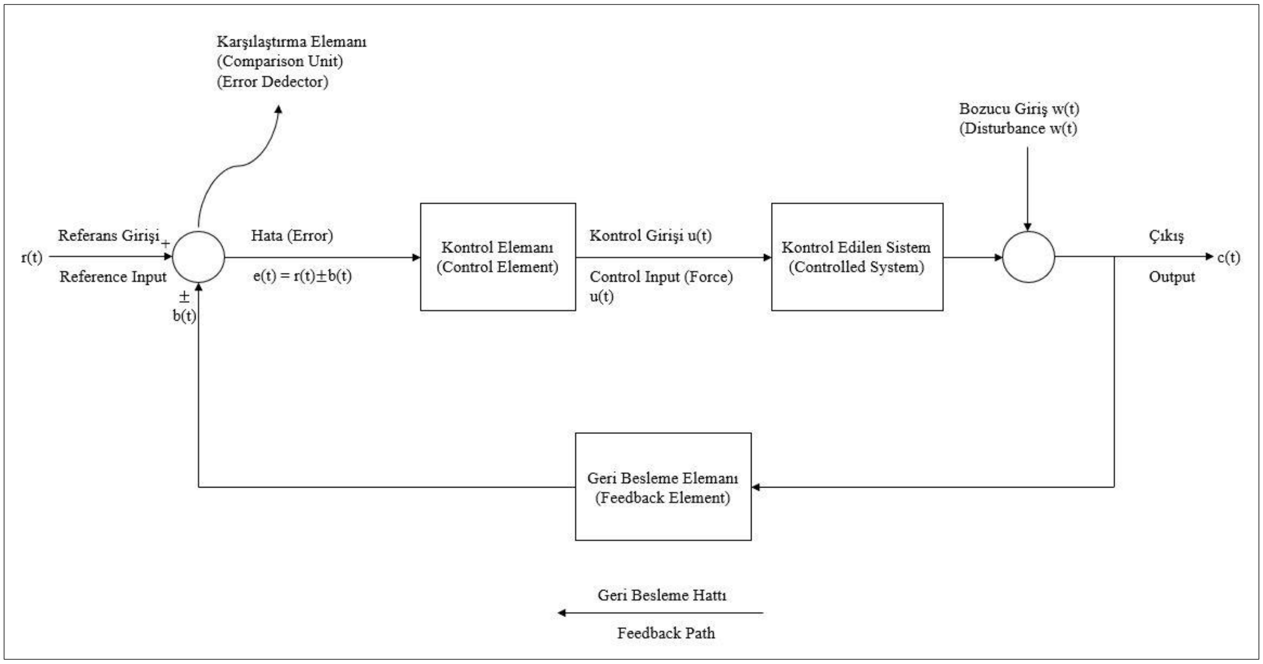
- Geri besleme yoktur.
  (No feedback).

Örnekler (Examples):

- <u>Trafik kontrol sistemleri:</u> Trafik ışıkları yanma sırası önceden belirlenen zamanlara göre ayarlanır ve trafik yoğunluğuna göre bu zaman aralıkları değişim göstermez.
  (A traffic control system is a good example of an open loop system.
  The signals change according to a preset time and are not affected by the density of traffic on any road).

- <u>Çamaşır makineleri:</u> Çamaşırlar önceden belirlenen zaman aralıklarına göre yıkanır, durulanır ve kurutulur. Bu işlemler sırasında yıkamanın kalitesi, veya çamaşırların kuruyup kurumadığı hakkında bir bilgi geri beslemesi yoktur.
  (A washing machine is another example of an open loop control system. The quality of wash is not measured; every cycle like wash, rinse and dry cycle goes according to a preset timing).

Kapalı Döngü (Geri Beslemeli) Kontrol Sistemleri
(Closed-Loop (Feedback) Control Systems)



Kapalı döngü kontrol sistemi temel elemanları (Basic elements of closed loop control system)

- Kontrol girişini, kontrol edilen değişken ve referans girişi arasındaki hatayı kullanarak üreten kontrol sistemidir.
  (A system which maintains a prescribed relationship between the controlled variable and the reference input, and uses the difference between them as a signal to activate the control, is known as a feedback control system).

- Sistemin çıkışı bir sensör aracılığı ile ölçülerek geri beslenir ve istenilen referans sinyali ile karşılaştırılır. Elde edilen hata kontrolcü algoritmasına girerek istenilen çıkış değerine ulaşılmaya çalışılır.
  (The output or the controlled variable is measured and compared with the reference input and an error signal is generated. This is the activating signal to the controller which, by its action, tries to reduce the error. Thus the controlled variable is continuously fed back and compared with the input signal. If the error is reduced to zero, the output is the desired output and is equal to the reference input signal).

r(t) : Referans girişi (Reference input)
e(t) : Hata (Error)
u(t) : Kontrol girişi (Control input)
w(t): Bozucu giriş (Disturbance)
c(t) : Çıkış, Kontrol edilen değişken (Output, Controlled variable)
b(t) : Geri besleme sinyali (Feedback signal)

Geri beslemeli kontrol sistemleri (Closed-loop systems):

- Açık-döngü sistemlere göre çok daha komplekstir, daha çok elemandan oluşurlar (are more complex, use more number of elements to build and are costly)

- Açık-döngü kontrole oranla dış bozuculara ve sistemdeki parametre değişikliklerine karşı dayanıklıdır, diğer bir deyişle kontrol tasarımı bu etkileri telafi edecek şekilde tasarlanabilir (are insensitive to external disturbances and variations in parameters).

- Açık-döngü sistemlere göre bakımları daha zor ve maliyetlidir (maintenance is more difficult than open loop systems).

Kontrol Mühendisliği disiplinler arası bir mühendisliktir. Her alanda kontrol uygulamalarını görmek mümkündür. Bazı örnekler aşağıda verilmiştir:

(Control Engineering is an interdisciplinary engineering. It is possible to see control applications in every field. Some examples are given below):

Havacılık ve Askeri Uygulamalar:

- Uçuş kontrol sistemleri (Otopilot sistemleri, iniş ve kalkış kontrolü)
  (Flights (Autopilot Control Applications,Take off and Landing control)

- Uzay araçları (Yörünge takip sistemleri, iniş ve kalkış kontrolü)
  (Space Shuttles (Orbit Tracking Control Applications, Take off and Landing, etc.)

- İnsansız araçlar
  (Unmanned vehicles)

- Füze güdüm sistemleri
  (Missile guidance and control, etc)

Gürültü ve Titreşim Kontrolü:

- Aktif veya pasif kontrollü depreme dayanıklı binalar
  (Earthquake protection using active or semi-active vibration control)

- Uçak kanatları ve helikopter pervanelerinde titreşimin sönümlenmesi
  (Vibration suppression in aero plane wings and helicopter blades)

- Otomobil süspansiyonlarının aktif kontrol sistemleri
  (Automobile suspensions)

- Kulaklıklarda gürültü yok etme kontrol sistemleri
  (Noise canceling headphones)

Bilgisayar Sistemleri:

- Yazıcılardaki konum kontrol sistemleri
  (Position control systems for printers)

- CD/DVD sürücülerindeki konum, hız kontrolü ve veri akış transferi kontrolü
  (Position, speed control and data flow control on CD/DVD drives)

- Ağ ve İnternet trafiği kontrolü
  (Network and Internet traffic control)

Robot Sistemleri:

- Robotik kolların konum, hız ve kuvvet kontrolü
  (Position, speed and force control for Assembly robots)

- İnsansı robotların denge ve hareket kontrolü
  (Balancing and motion control of humanoid robots)

- Tıbbi uygulamalar için cerrahi robotlar
  (Precision control of Robots for Medical operations)

- Mobil robotlar (bomba tespit ve imha robotları, mikro boyuttaki hayvansı robotlar, etc.)
  (Mobile robots (bomb detection and destruction robots, micro-sized animal robots, etc.)

Biyolojik Sistemler:

- Şeker hastaları için insülin seviyesi kontrolü
  (Insulin delivery control systems)

- Tümör büyüme kontrolü
  (Tumor growth control)

- Yapay uzuvlar, protezler
  (Artificial limbs, prosthetics,etc)

Otomotiv Endüstrisi:

- Fren kilitlenmesini önleyici sistem
  (Anti-Lock brake system)

- Otomatik araç park etme sistemi
  (Automatic car parking assistance)

- Sabit hızda yolculuk için hız kontrol sistemi
  (Cuise control).

Üretim Sistemleri:

- CNC’ler (CNC’s)

- Otomatik paketleme makineleri
  (Automatic packing machines)

- Otomasyonlu montaj hatları
  (Assembly lines)

Proses kontrolü (Process control):

- Kimyasal üretim hatları
  (Chemical processes)

- Nükleer santraller
  (Nuclear power plants)

- Karmaşık üretim süreçleri
  (Complex manufacturing processes)

Güç Sistemleri (Power Systems):

- Enerji üretim sistemlerinde voltaj regülasyonu (Hidrolik, Termik, Rüzgar türbini,..)
  (Voltage regulation in power networks for safe electricity delivery)

- Evlere güvenli elektrik dağıtımı için şebeke geriliminin düzenlenmesi
  (Regulation of mains voltage for safe electricity distribution to homes)

Temel Kavramlar ve Tanımlamalar (Basic Concepts and Definitions)

Sistem, G: Kontrol edilecek sistemdir. Bu bir mekanik aparat, fırın, kimyasal reaktör veya bir uzay aracı olabilir. Bu sadece fiziksel sistemlerle sınırlı değildir. Biyolojik ekonomik ve bunun gibi dinamik olaylar olabilir.

- Kontrolcü tasarımı için kontrol edilecek sistemin matematiksel modelini elde etmemiz gerekir.

(**Proses (Plant), G:** The system to be controlled. A plant may be a piece of equipment, perhaps just a set of machine parts functioning together, the purpose of which is to perform a particular operation such as a mechanical device, a heating furnace, a chemical reactor, or a spacecraft. Since a system is a combination of components that act together and perform a certain objective, the word of system is not limited to physical ones. The concept of the system can be interpreted to imply physical, biological, economic, and the like dynamic phenomena).

- We need to have a mathematical model describing the plant.

Referans Giriş, r(t): Sistemden istenilen çıkış değerini kontrolcüye tanıtmak için belirtilen sinyaldir. Ayar noktası ve/veya Ayar değeri olarak da adlandırılır.
(**Reference input, Desired output, r(t):** Also known as the set-point or desired output, is an external signal applied in order to indicate a desired steady value for the plant output).

Sistem Çıkışı, c(t): Kontrol etmek istediğimiz sistem değişkenidir.
(**System output, Controlled variable, c(t):** Also known as the controlled output, is the signal obtained from the plant which we wish to measure and control. Normally, the controlled variable is the output of the system).

Karşılaştırıcı veya Hata seçici: Referans giriş sinyali ile geri besleme sinyalini karşılaştırıp bir hata sinyali üreten elemandır.
(**Comparison unit, Error detector:** Compares the value of the controlled variable to the desired value, and then signals an error if a deviation exists between the actual and desired values. The ***error*** signal, ***e,*** is the difference between the reference input r and the feedback signal b. (i.e.))

Kontrolcü veya Denetim organı D: Denetlenen sisteme uygulanacak denetim sinyalini üreten elemandır.
(**Controller, D:** is the element which ensures that the appropriate control signal is applied to the plant. In many cases it takes the error signal as its input and provides an actuating signal as its output).

Kontrol veya Denetim Sinyali, u(t): Denetim elemanında hesaplanıp sisteme uygulanan sinyaldir. Bazen ayarlanan değişken m(t) olarak da adlandırılır. Bu sinyal genellikle kuvvetlendirilerek bir eyleyiciye (actuator) gönderilir. Eyleyici ise sistemin denetlenmek istenen değişkeninde düzeltme hareketi oluşturur.
(**Control input, u(t):** also known as the actuating signal, manipulated variable m(t) (control action or control signal) is applied to the plant G and is provided by the controller *D* operating on the error *e*. The *manipulated* variable is the quantity or condition that is varied by the controller so as to affect the value of the controlled variable. Note that computing the necessary controller action is based on *controller error*, or the difference between the set point and the measured process variable, i.e. $e(t) = r(t) – b(t)$ (error = set point – measured process variable)

İleri besleme Yolu: Hata sinyalinden sistem çıkışına kadar olan ve kontrolcü ve sistemi de kapsayan iletim yoludur.
(Forward path: is the path from the error signal ***e*** to the output *c*, and includes ***D*** and **G**)

Bozucu, w: Sistemin denetlenen çıkışı üzerinde arzu edilmeyen yönde etki yapan girişlerdir. Bu bozucu sistemin kendi içinden kaynaklanabileceği gibi dışarıdan da gelebilir.
(**Disturbance, w,** or noise is a signal which enters the system at a point other than the reference input and has the effect of undermining the normal system operation. A disturbance is a signal that tends to adversely affect the value of the output of a system. If a disturbance is generated within the system, it is called internal, while an external disturbance is generated outside the system and is an input.

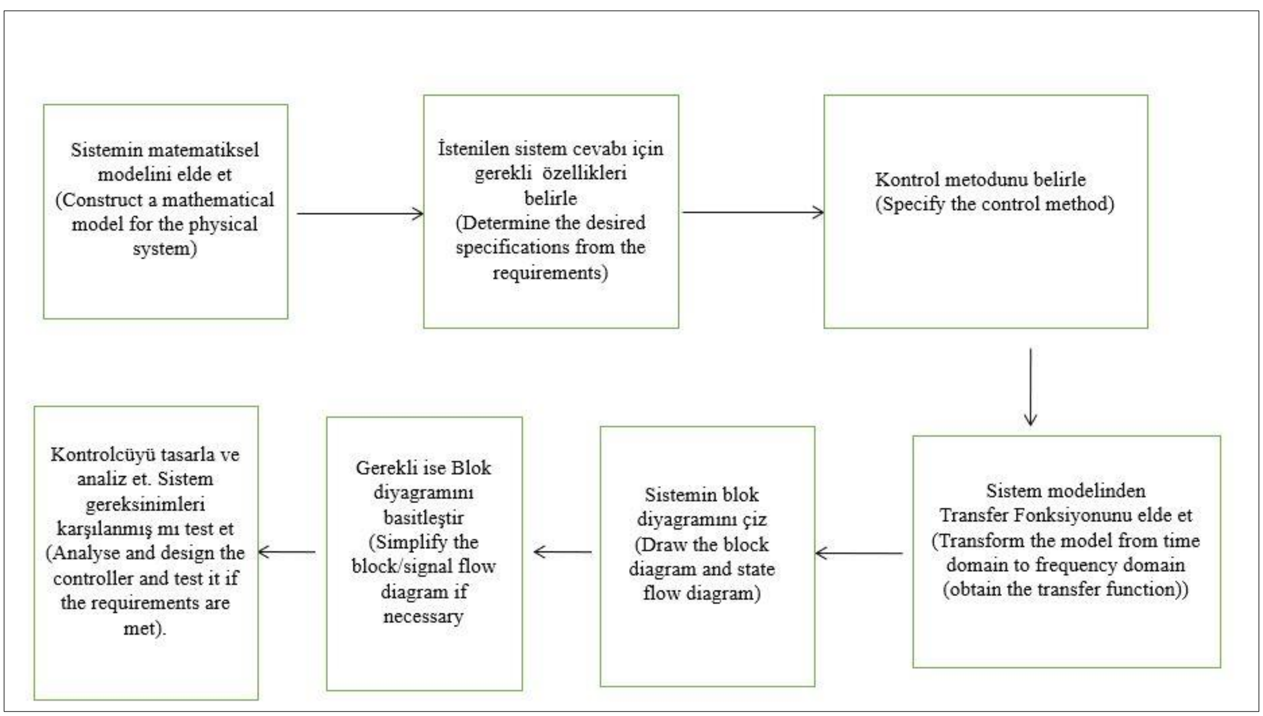
Geri besleme elemanı, H: Ölçüm cihazının karakteristiğini belirtir. Sistemin herhangi bir yerindeki değişimi ölçer. Geri besleme elemanları özellikle denetlenen değişken ile referans sinyalinin farklı fiziksel yapıda olduğu durumlarda bir dönüştürücüden (Transducer) ibarettir.
(**Feedback element, Sensor, H:** can represent the characteristics of the measurement device)

Geri besleme Yolu (): Denetlenen çıkış sinyalinden geri besleme sinyaline kadar uzanan iletim yoludur.
(**Feedback path:** is the path from the output *c*, through H).

Servo sistemler: Çıkışı mekaniksel konum, hız veya ivme olan geri beslemeli denetim sistemidir. Servo sistemlerde çıkış değeri giriş değerini takip eder. Daha çok güç yükseltilmesi gerekli sistemlerdir ve kalıcı durum hatası sıfırdır.
(**Servo Systems:** In feedback control, it applies only to systems where the feedback or error-correction signals help control mechanical position, speed or other parameters. The system reference input is variable, and the output follows the reference input).

Düzenleyici sistemler: Referans girişin uzun zaman aralıkları içerisinde belli bir çalışma koşulu için değişmez veya sabit tutulduğu geri beslemeli denetim sistemidir. Düzenleyici sistemlerde sisteme etki eden bozucu girişlere rağmen çıkışın arzu edilen değerde tutulması esastır.
(**Regulator Systems**: A regulator or regulating system is a feedback control system in which the reference input or command is constant for long periods of time, generally for the entire time interval during which the system is operational. Such an input is known as set point. The main objective is to maintain the actual output at the desired value in the presence of disturbances).

Kontrol Sistemi Tasarım Süreci (Control System Design Process)



Sistemlerin Matematiksel Modellenmesi-Laplace Dönüşümleri
(Mathematical Modeling-Laplace Transforms)

Hedefler

Bu bölümün hedefleri:

1. Kompleks değişkenlerin tanıtılması.
2. Laplace Transformasyonun tanıtılması.
3. Laplace Transformasyonu ile doğrusal adi diferansiyel denklemlerin çözümü.

Objectives

The main objectives of this chapter are:
1.To introduce the fundamentals of complex variables.
2.To introduce the fundamentals of Laplace transforms.
3.To demonstrate the applications of Laplace transforms to solve linear ordinary differential equations.

Laplace Dönüşümü

Bir sistemden istenilen cevabın alınabilmesi için kontrol sistemi tasarımında ilk adım sistemin matematiksel bir modelinin oluşturulmasıdır. Fizik kurallarının (Newton yasası veya Kirchoff yasası) sistemlere uygulanmasıyla elde edilen modeller diferansiyel denklemler şeklindedir (Zaman alanı). Fakat doğrusal adi diferansiyel denklere Laplace transformasyonu uygulanarak sistemin Transfer fonksiyon modeli (Frekans alanı) elde edilebilir. Transfer fonksiyonu gösterimi ile diferansiyel denklem çözümüne gerek olmaksızın sistemin dinamik analizi yapılabilir.

Laplace dönüştürme yöntemi aşağıdaki iki cazip özelliğe sahiptir;

1. Laplace transformasyonu ile diferansiyel denklemler s değişkeninde cebirsel denklemlere dönüştürülürler. Bu sayede basit cebirsel kuralların uygulanması ve s alanından ters Laplace transformasyonu uygulanarak tekrar t (zaman) alanına geçilmesi ile diferansiyel denklemlerin çözümü elde edilebilir.

2. Birçok temel fonksiyonun Laplace transformasyonunu önceden hazırlanmış tablolarda bulmak mümkündür. Böylece ekstra işlem yapmaya gerek kalmaz.

Doğrusal zaman-bağımsız sistemlerin analizinde Laplace transformasyonun getirdiği diğer avantajlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

3. Homojen denklem ve integral işlemi tek bir operasyon ile çözülür.

4. Çözüm başlangıç ve sınır değerleri direk olarak içerir.

5. Yapılan işlemler sistematiktir.
6. Sürekli olmayan girişler ile çalışılmasına olanak sağlar.

7. Sistemin Geçici ve Durağan durum çözümleri eş zamanlı olarak elde edilir.

8. Sistemin diferansiyel denklemini çözmeden grafiksel metotlarla sistem dinamiğinin analizinin yapılmasını sağlar.

The Laplace Transform

In control systems theory, a mathematical model of the system is required to design a controller in order to obtain the desired response. When we apply the laws of physics, we obtain the mathematical model of the system in terms of differential equations (Time domain). In this course we will use the Laplace transform to obtain the transfer function (Frequency domain) of the system from the differential representation. The transfer function representation will also help us to analyze the system dynamics without solving the differential equation. We will talk about concept of Transfer Function in the following chapter.

The Laplace transform method has the following two attractive features:

1. The Laplace transform converts the differential equation into an algebraic equation in s. It is possible to manipulate the algebraic equation by simple algebraic rules to obtain the solution in the s-domain. The final solution is obtained by taking the inverse Laplace transform.

2. The use of a table of transforms reduces the labor required.

The other advantages the Laplace transform method for the analysis of linear-time-invariant systems are the following:

3. The homogeneous equation and the particular integral are solved in one operation.

4. It includes the boundary or initial conditions.

5. The work is systematized.

6. Discontinuous inputs can be treated.

7. The transient component and steady-state component of the solution can be obtained simultaneously.

8. It allows the use of graphical techniques for predicting the system performance without actually solving system differential equations.

Kompleks Sayılar

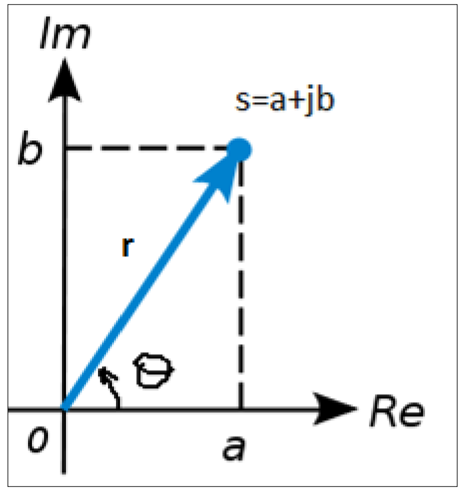
Laplace Transformasyonun tanıtılmasından önce Kompleks sayılar hakkında kısa hatırlatma yapacağız.

$s = a + jb$

a: Gerçek kısım

b: Sanal kısım

j: Sanal eleman ($j = \sqrt{-1}$, Bazı kaynaklarda $i = \sqrt{-1}$ kullanılır.)



Kompleks bir sayının grafiksel gösterimi

Kartezyen Koordinatlar:

$s = a + jb$

Polar Koordinatlar:

$|s| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Büyüklüğü)

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (Açısı)

Üssel gösterim:

Şekilden;

$a = r\,cos\theta$ ve $b = r\,sin\theta$

$s = a + jb \rightarrow \; s = rcos\theta + jrsin\theta = r(cos\theta + jsin\theta)$

Euler teoreminden;

$e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$

Böylece,

$s = re^{j\theta}$ ve θ periyodik olduğundan dolayı

$s = re^{j\theta} = re^{j(2\pi k+\theta)}, (k = 0,1,2,\cdots,n)$

Laplace Dönüşümünün tanımı:

$f(t)$: Zamana bağlı bir fonksiyon $t < 0$ için $f(t) = 0$.

s : Kompleks bir değişken

$\mathcal{L}[\ ]$: Laplace Transform operatörü

$f(t)$ nin Laplace transformu:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Burada $s = \sigma + j\omega$, kompleks bir değişkendir.

Laplace transformasyonu bir İntegral transformasyonudur ve doğrusal diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemlerin analizinde birçok kolaylık sağlar. Bu kolaylıkların başlıcası Türev ve İntegral işlemlerini s değişkeni ile çarpma ve bölme işlemine dönüştürür. Bu sayede diferansiyel ve integral denklemler çözümü kolayca yapılabilen cebirsel polinomlara dönüştürülür.

Complex Numbers

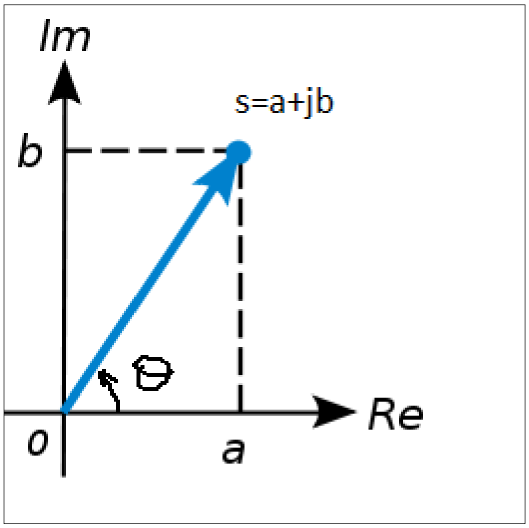
Before introducing the Laplace transform, we shall give a brief background for complex numbers.

$s = a + jb$

a: real part

b: Imaginary part

j: Imaginary unit ($j = \sqrt{-1}$, i can be used in some references)



Graphical representation of a complex number

In Cartesian coordinates:

$s = a + jb$

In Polar coordinates:

$|s| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Magnitude, Length)

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (Angle)

Exponential representation:

$a = r\ cos\theta$ and $b = r\ sin\theta$

$s = a + jb$ then $s = rcos\theta + jrsin\theta = r(cos\theta + jsin\theta)$

From Euler's theorem we have $e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$, hence

$s = re^{j\theta}$ and since θ is periodic then we have

$s = re^{j\theta} = re^{j(2\pi k+\theta)}, (k = 0,1,2,\cdots,n)$

Definition of the Laplace Transform:

Let us define;

$f(t)$: a function of time t such that $f(t) = 0$ for $t < 0$

s : a complex variable

$\mathcal{L}[\ \ ]$: an indicator of the Laplace transform

Then the Laplace transform of $f(t)$ is given by

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

The variable s is referred to as the Laplace operator, which is a complex variable, s,

$s = \sigma + j\omega$

where $j = \sqrt{-1}$, σ is the real part and ω is the imaginary part, as shown in Figure

This integral transform has a number of properties that make it useful for analyzing linear dynamical systems. The most significant advantage is that differentiation and integration become multiplication and division, respectively, with s. (This is similar to the way that logarithms change an operation of multiplication of numbers to addition of their logarithms.) This changes integral equations and differential equations to polynomial equations, which are much easier to solve.

Laplace Dönüşümünün Özellikleri ve Önemli Teoremler

1. Doğrusal bir dönüşümdür

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$$
$$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$
$$\mathcal{L}[f_3(t)] = F_3(s)$$

2. Ters Laplace dönüşümü de doğrusaldır

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = f_1(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = f_2(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] = f_3(t)$$

3. Sabit ile çarpım

$$\mathcal{L}[af(t)] = aF(s) \qquad\qquad \mathcal{L}^{-1}[aF(s)] = af(t)$$

4. Toplama ve Çıkarma

$$\mathcal{L}[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s)$$
$$\mathcal{L}^{-1}[aF_1(s) \pm bF_2(s)] = af_1(t) \pm bf_2(t)$$

5. Türev

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) \ldots - f^{(n-1)}(0^-)$$

Burada $\qquad f^{(n)}(0^-) = \left.\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right|_{t=0^-}$

6. İntegrasyon

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_n}\int_0^{t_{n-1}} \ldots \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau dt_1 \ldots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

7. Başlangıç değer teoremi

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

8. Son değer teoremi

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

9. Zaman ölçeklemesi

$$\mathcal{L}\left[f\left({}^{t}/_{a}\right)\right] = aF(as)$$

10. Frekans ölçeklemesi

$$\mathcal{L}^{-1}[F({}^{s}/_{a})] = af(at)$$

11. Zamanda öteleme

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)$$

12. Üstel Öteleme

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

Important Theorems of the Laplace Transform

1. Laplace is a linear transform

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$$
$$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$
$$\mathcal{L}[f_3(t)] = F_3(s)$$

2. Inverse Laplace transformations is a linear transform

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = f_1(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = f_2(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] = f_3(t)$$

3. Multiplication by a constant

$$\mathcal{L}[af(t)] = aF(s) \qquad \mathcal{L}^{-1}[aF(s)] = af(t)$$

4. Addition and Subtraction

$$\mathcal{L}[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s)$$
$$\mathcal{L}^{-1}[aF_1(s) \pm bF_2(s)] = af_1(t) \pm bf_2(t)$$

5. Differentiation

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) \ldots - f^{(n-1)}(0^-)$$

Here, $f^{(n)}(0^-) = \left.\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right|_{t=0^-}$

6. İntegration

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_n}\int_0^{t_{n-1}} \ldots \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau dt_1 \ldots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

7. Initial-value theorem

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

8. Final-value theorem

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

9. Time scaling

$$\mathcal{L}[f(t/a)] = aF(as)$$

10. Frequency scaling

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s/a)] = af(at)$$

11. Shift in time

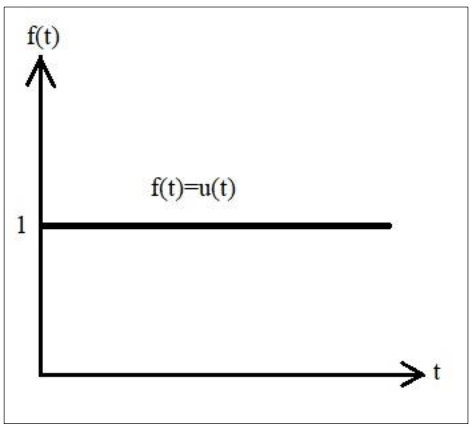
$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)$$

12. Exponantial shift

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

Standart Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri
(Laplace Transform of Standart Functions)

1. Basamak Fonksiyonu (Step Function)



$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

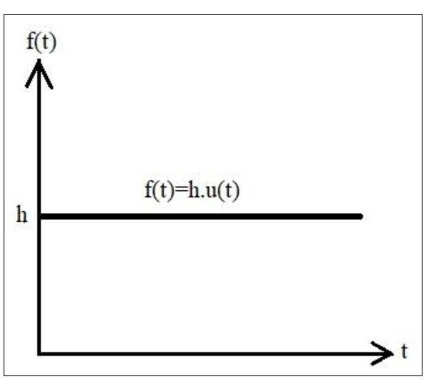
$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty 1.e^{-st}\,dt$$

$$-st = u$$

$$-sdt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{-s}$$

$$\int e^u \frac{du}{-s} = -\frac{1}{s}\int e^u du = -\frac{1}{s}e^u = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}[e^{-\infty} - e^0] = -\frac{1}{s}\left[\frac{1}{\underbrace{e^\infty}_{0}} - 1\right] = \frac{1}{s}$$

Örnek (Example)



$$\mathcal{L}[f(t)] = ?$$

$$t < 0 \ \rightarrow f(t) = 0$$
$$t > 0 \ \rightarrow f(t) = h.u(t)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[h.u(t)] = \int_0^\infty h.u(t).e^{-st}\,dt$$

$u(t) = 1$ Birim basamak fonksiyonudur (Step unit function)

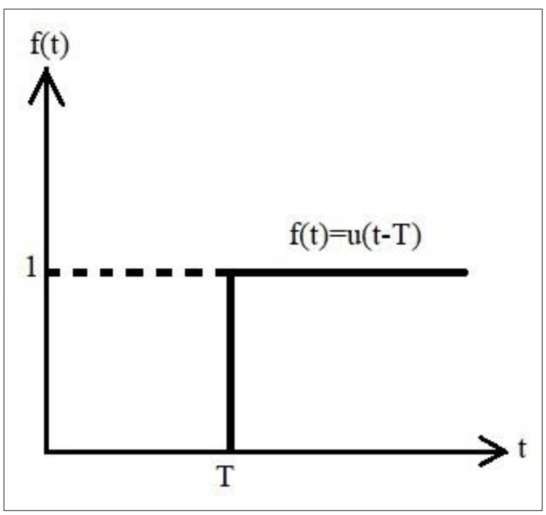
$$\int_0^\infty h.u(t).e^{-st}\,dt = h\int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

$$-st = u$$

$$-sdt = du => dt = \frac{du}{-s}$$

$$h\int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{h}{s}e^{-st}\Bigg|_0^\infty = -\frac{h}{s}[e^{-\infty} - e^0] = -\frac{h}{s}\left[\underbrace{\frac{1}{e^\infty}}_{0} - 1\right] = \frac{h}{s}$$

Örnek (Example)



$\mathcal{L}[f(t)] = ?$

$t < T \;\rightarrow f(t) = 0$
$t > T \;\rightarrow f(t) = u(t-T)$

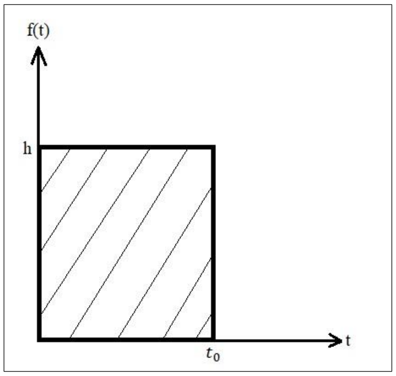
$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-T)] = \int_T^\infty \underbrace{u(t-T)}_{1}.e^{-st}\,dt = \mathcal{L}[f(t)] = \int_T^\infty 1.e^{-st}\,dt$$

$$-st = u$$

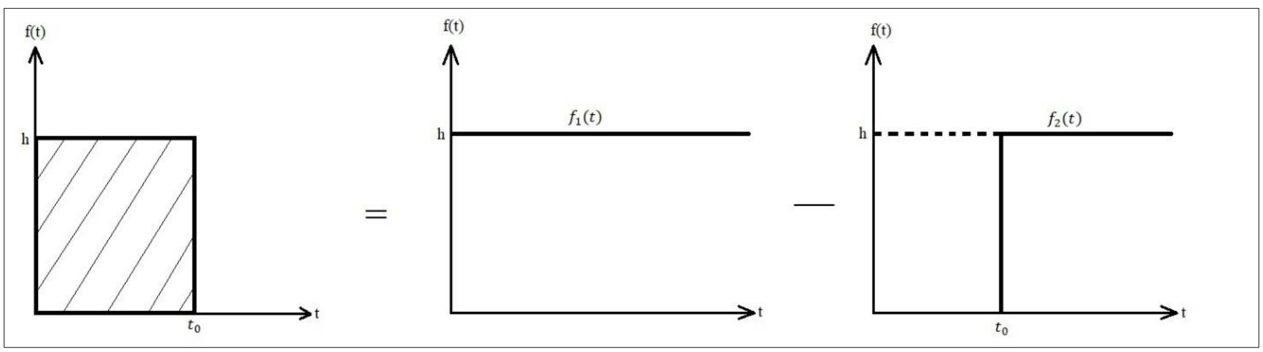
$$-sdt = du => dt = \frac{du}{-s}$$

$$\int e^u \frac{du}{-s} = -\frac{1}{s}\int e^u du = -\frac{1}{s}e^u = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_T^{\infty} = -\frac{1}{s}[e^{-\infty} - e^{-sT}] = -\frac{1}{s}\left[\frac{1}{\underbrace{e^{\infty}}_{0}} - e^{-sT}\right] = \frac{e^{-sT}}{s}$$

2. a) Darbe Fonksiyonu (Impulse Function)



$\mathcal{L}[f(t)] = ?$



$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$

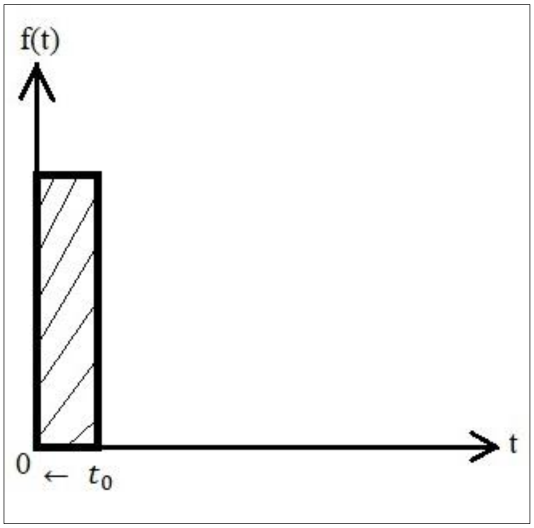
$f_1(t) = h.u(t)$

$f_2(t) = h.u(t - t_0)$

$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t) - f_2(t)] = \mathcal{L}[h.u(t) - h.u(t - t_0)]$

$$= \frac{h}{s} - h\frac{e^{-t_0 s}}{s} = h\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-t_0 s}}{s}\right]$$

b) Ani Darbe Fonksiyonu (Sudden Impulse Function)



t_0: Sıfıra çok yakın (so near to zero)

$$I = h.t_0$$

Eğer (for)

$I = 0$

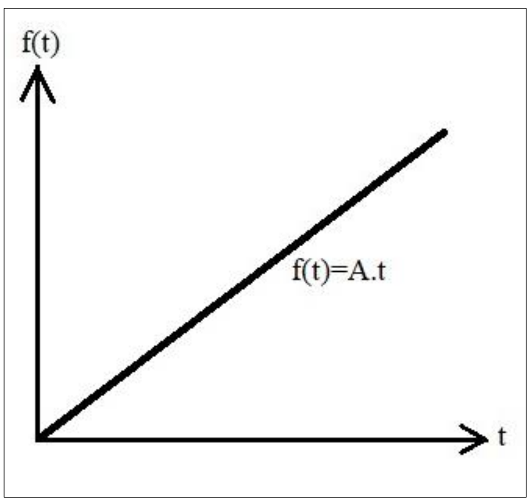
Birim ani darbe (Unit sudden impulse)

Bu durumda sembolü (symbol in this situation)

$\delta(t)$ (Delta)

$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

3. Rampa Fonksiyonu (Ramp Function)



$\mathcal{L}[f(t)] = ?$

A sabit bir değerdir (A is constant value)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \underbrace{A.t}_{u}\,.\,\underbrace{e^{-st}dt}_{dv}$$

$$u = A.t \quad \rightarrow \quad du = A.dt$$

$$e^{-st}dt = dv \quad \rightarrow \quad \int e^{-st}dt = \int dv \quad \rightarrow \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty A.t.e^{-st}dt = uv - \int vdu$$

$$= A.t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty -A.\frac{e^{-st}}{s}dt = -A.t\left(\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_0^\infty - \left(\frac{A}{s^2}e^{-st}\right)\Bigg|_0^\infty \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{s^2}$$

4. Genel Kural (General Rule)

$f(t) = t^n \qquad (n = 1,2,3, \dots, n)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

5. Sinüs-Cosinüs Fonksiyonları (Sinusoidal-Cosinusodial Functions)

Euler teoremine göre (From Euler's Theorem)

$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \qquad e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \qquad \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri (Laplace Transform of Some Functions)

Fonksiyon (Function)	f(t)	F(s)
Basamak (Step)	**A.u(t)**	$\frac{A}{s}$
Rampa (Ramp)	**A.t**	$\frac{A}{s^2}$
Polinom (Polynomial)	**t^n**	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Üstel (Exponential)	**e^{-at}**	$\frac{1}{s+a}$

Sinüs (Sinusoidal)	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cosinüs (Cosinusoidal)	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
Sönümlü Sinüs (Damped Sinusoidal)	$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Sönümlü Cosinüs (Damped Cosinusoidal)	$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
Tekrarlı Kök (Repeated Root)	te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
Tekrarlı Kökler (Repeated Roots)	$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Ters Laplace Dönüşümü
(Inverse Laplace Transformation)

s (frekans) bölgesinde işlemler yapıldıktan sonra t (zaman) bölgesine dönme işlemine Ters Laplace dönüşümü denir. Frekans bölgesindeki $F(s)$ fonksiyonuna aşağıdaki integral işlemi ile tanımlanan ters laplace dönüşümü uygulanarak zaman bölgesindeki $f(t)$ fonksiyonu elde edilir.

(The process of returning to the t (time) domain after operations in the s (frequency) domain is called the Inverse Laplace transform. By applying the inverse Laplace transform defined by the following integral operation to the function F (s) in the frequency domain, the function f (t) in the time domain is obtained).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Burada σ reel (gerçek), sabit bir sayıdır ve $F(s)$'in tanımsız yapan tüm değerlerin reel kısımlarından büyüktür. Yukarıdaki denklem s düzleminde değerlendirilen bir çizgisel integraldir ve çözümü bazı basit fonksiyonlar dışında zordur. Çoğu zaman bir fonksiyonun ters Laplace transformunu bulmak için Laplace tablolarından faydalanabilir.

(Where σ is a real constant that is greater than the real parts of all the singularities of $F(s)$. This equation represents a line integral that is to be evaluated in the s-plane. For most engineering purposes the inverse Laplace transform operation can be done simply by referring to the Laplace transform table)

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Eğer (if)

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + \cdots + F_n(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \cdots + f_n(t)$$

Elde edilir (obtained).

Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemi (Partial Fraction Expansion)

Sistemlerin transfer fonksiyonları s değişkeninin rasyonel fonksiyonu şeklindedir.

(When the Laplace transform solution of a differential equation is a rational function in s, it can be written as)

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Burada A(s) ve B(s) s değişkenine bağlı polinomlardır. Zaman cevabına geçmek için transfer fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü, Laplace dönüşüm tabloları kullanılarak kolayca elde edilebilir. Fakat bunun için transfer fonksiyonunun kısmı kesirlere ayırarak basit fonksiyonların toplamı şeklinde ifade edilmesi gereklidir.

(Where A(s) and B(s) are polynomials of s. It is assumed that the order of $A(s)$ in s is greater than that of $B(s)$. Note that a rational function is basically a division of two polynomial functions. That is, it is a polynomial divided by another polynomial. The polynomial $A(s)$ and $B(s)$ may be written)

$$B(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Kontrol sistemlerinde A(s)'in mertebesi B(s)'in mertebesinden büyüktür, $(n > m)$ bu nedenle basit kesirlere ayırma yöntemi ile F(s) rasyonel fonksiyonu elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Bu sayede F(s) fonksiyonunu kolaylıkla entegre edilebilen daha basit kesirlerin toplamı şekline dönüştürmüş oluruz.

Burada $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ and $b_0, b_1, ..., b_{m-1}$ gerçek katsayılardır, $n > m$)

(In control systems, the order of A (s) is greater than the order of B (s), $(n > m)$ therefore, the rational function F (s) can be expressed in terms of elementary functions with simple fractionation method. In this way, we convert the function F (s) into simpler form of sum of fractions that can be easily integrated.)

(where $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ and $b_0, b_1, ..., b_{m-1}$ are real coefficients, $n > m$)

Rasyonel bir fonksiyon için kutuplar (poles) ve sıfırlar (zeros) kavramı çok önemlidir. Rasyonel bir fonksiyon kutupları ve sıfırları ile karakterize edilir. Bir sistemin kutupları ve sıfırları o sistemin kararlı olup olmadığını ve performansının ne kadar iyi olduğunu gösterir. Kontrol sistemleri tasarımı da sisteme yeni kutuplar ve sıfırlar atanarak yapılır.

F(s) fonksiyonunu sıfır yapan s değerlerine sistemin **sıfır**ları (zero) denir.
F(s) fonksiyonunu sonsuz yapan s değerlerine de sistemin **kutup**ları (pole) denir.

(A rational function is specified in terms of its poles and zeros. Mathematically speaking, poles are the points at which the denominator of a rational function are zero, $A(s) = 0$. Zeros are the points at which the numerator is zero, $B(s) = 0$. In other words, **Poles** and **Zeros** of a rational function are the s values for which the value of the rational function becomes infinity or zero, respectively. The values of the poles and the zeros of a system determine whether the system is stable, and how well the system performs. Control systems, therefore, can be designed simply by assigning specific values to the poles and zeros of the system).

ÖRNEK (EXAMPLE)

Aşağıdaki fonksiyonun kutuplarını ve sıfırlarını bulunuz.
(Determine the poles and zeros of the system whose function is given by)

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s+5)(s-4)^2(s^2+1)}$$

$s=-3$ 'de sistemin bir adet sıfırı vardır.

$s=+1,-5,+4,+4,+j,-j$ sistemin kutuplarıdır. F(s) toplam 6 kutuba sahiptir, 2 si basit kutup. 2 si katlı kutup ve 1 çift kompleks eşlenik kutup vardır.

($s=-3$ is the zero of the system, F(s) has only one simple zero.
$s=+1,-5,+4,+4,+j,-j$ are the poles of the system. F(s) has total 6 poles, 2 of them simple poles, a pair of multiple poles of degree 2, and a pair of complex conjugate poles).

Kısmi kesirlere ayırma yöntemini, Basit kutuplar, Katlı kutuplar ve Eşlenik kutuplar hali için ayrı ayrı ele alalım.

(The methods of partial fraction expansion will now be given for the cases of simple poles, repeated poles, and complex poles of F(s)).

1) Basit Kutuplar Hali (Farklı Gerçek Kök Durumu) (Simple Poles Case)

$$F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n}$$

$K_1, K_2, \ldots, K_n$ sabitlerdir ve bu sabitler aşağıdaki gibi hesaplanır (are constants and they calculated as follow):

$$K_i = (s-s_i)F(s)\Big|_{s=s_i} \qquad \Big|_{s=s_i} = \lim_{s\to s_i}$$

Laplace dönüşüm tablosu kullanılarak ters Laplace dönüşümü yapılır (Apply inverse Laplace transformation using Laplace transform table)

$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t}$

Elde edilir (obtained).

2) Katlı Kutuplar Hali (Katlı veya Tekrarlı Kök Durumu) (Repeated Poles Case)

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s-a)^3}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s-a} + \frac{K_2}{(s-a)^2} + \frac{K_3}{(s-a)^3}$$

$$K_3 = (s-a)^3 F(s) \Big|_{s=a}$$

$$K_2 = \frac{d}{ds}(s-a)^3 F(s) \Big|_{s=a}$$

$$K_1 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}(s-a)^3 F(s) \Big|_{s=a}$$

ÖRNEK (EXAMPLE)

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)(s+2)^3} \qquad f(t) = ?$$

$$F(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_3}{(s+2)^3}$$

$$A = (s+3)F(s) \Big|_{s=-3} = \lim_{s\to-3}(s+3)\frac{1}{(s+3)(s+2)^3} = \lim_{s\to-3}\frac{1}{(s+2)^3} = \frac{1}{(-3+2)^3} = -1$$

$$B_3 = (s+2)^3 F(s) \Big|_{s=-2} = \lim_{s\to-2}(s+2)^3\frac{1}{(s+3)(s+2)^3} = \lim_{s\to-2}\frac{1}{(s+3)} = \frac{1}{(-2+3)} = 1$$

$$B_2 = \frac{d}{ds}(s+2)^3F(s)\Bigg|_{s=-2} = \lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\left[(s+2)^3\frac{1}{(s+3)(s+2)^3}\right] = \lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+3)}\right]$$

$$= \lim_{s\to -2}\left[\frac{0.(s+3)-1.1}{(s+3)^2}\right] = \lim_{s\to -2}\frac{-1}{(s+3)^2} = \frac{-1}{(-2+3)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$B_1 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}(s+2)^3F(s)\Bigg|_{s=-2} = \frac{1}{2!}\lim_{s\to -2}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+2)^3\frac{1}{(s+3)(s+2)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{s\to -2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{(s+3)}\right] = \frac{1}{2!}\lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\left[\frac{-1}{(s+3)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{s\to -2}\left[\frac{0.(s+3)^2-(-1).2.(s+3).1}{((s+3)^2)^2}\right] = \frac{1}{2!}\lim_{s\to -2}\left[\frac{2.(s+3)}{(s+3)^4}\right]$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{s\to -2}\left[\frac{2}{(s+3)^3}\right] = \frac{1}{2!}\frac{2}{(-2+3)^3} = \frac{1}{2}\frac{2}{1^3} = 1$$

$A = -1, B_1 = 1, B_2 = -1, B_3 = 1,$

$$F(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_3}{(s+2)^3}$$

$$F(s) = \frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3}$$

Laplace dönüşüm tablosu kullanılarak ters Laplace uygulanırsa

(Using the inverse transform on each of these component fractions (looking up the Laplace transforms table)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -e^{-3t} + e^{-2t} - te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t}$$

Elde edilir (Obtained).

ÖRNEK (EXAMPLE)

$$F(s) = \frac{11s + 28}{(s+2)^2(s+5)} \qquad f(t) = ?$$

$$F(s) = \frac{A}{s+5} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$

$$A = (s+5)F(s)\Big|_{s=-5} = \lim_{s\to-5}(s+5)\frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)} = \lim_{s\to-5}\frac{11s+28}{(s+2)^2} = \frac{11.(-5)+28}{(-5+2)^2}$$
$$= \frac{-27}{9} = -3$$

$$B_2 = (s+2)^2F(s)\Big|_{s=-2} = \lim_{s\to-2}(s+2)^2\frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)} = \lim_{s\to-2}\frac{11s+28}{(s+5)} = \frac{11.(-2)+28}{(-2+5)}$$
$$= \frac{6}{3} = 2$$

$$B_1 = \frac{d}{ds}(s+2)^2F(s)\Big|_{s=-2} = \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)}\right] = \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left[\frac{11s+28}{(s+5)}\right]$$
$$= \lim_{s\to-2}\left[\frac{11.(s+5)-(11s+28).1}{(s+5)^2}\right] = \lim_{s\to-2}\frac{27}{(s+5)^2} = \frac{27}{(-2+5)^2} = \frac{27}{9} = 3$$

$$A = -3, B_1 = 3, B_2 = 2$$

$$F(s) = \frac{A}{s+5} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$
$$F(s) = \frac{-3}{s+5} + \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -3e^{-5t} + 3e^{-2t} + 2te^{-2t}$$

Elde edilir (Obtained).

ÖRNEK (EXAMPLE)

$$F(s) = \frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s^2+4s+2)} \qquad f(t) = ?$$

For

$s^2 + 4s + 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4.1.2 = 8$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$s_1 = -3{,}414$ $\qquad$ $s_2 = -0{,}586$

$$F(s) = \frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s^2+4s+2)} = F(s) = \frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s+3{,}414)(s+0{,}586)}$$

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s+3{,}414)} + \frac{C}{(s+0{,}586)}$$

$$A_2 = (s+1)^2 F(s) \Bigg|_{s=-1} = \lim_{s\to -1} (s+1)^2 \frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s+3{,}414)(s+0{,}586)}$$

$$= \lim_{s\to -1} \frac{10(s+5)}{(s+3{,}414)(s+0{,}586)} = \frac{10(-1+5)}{(-1+3{,}414)(-1+0{,}586)}$$

$$= \frac{40}{(2{,}414)(-0{,}414)} = -40.024$$

$$A_1 = \frac{d}{ds}(s+1)^2 F(s) \Bigg|_{s=-1} = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 \frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s+3{,}414)(s+0{,}586)}\right]$$

$$= \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left[\frac{10(s+5)}{(s^2+4s+2)}\right] = \lim_{s\to -1}\left[\frac{10.(s^2+4s+2) - 10(s+5).(2s+4)}{(s^2+4s+2)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{10.[(-1)^2+4(-1)+2] - 10(-1+5).(2(-1)+4)}{[(-1)^2+4(-1)+2]^2}\right]$$

$$= \frac{10(1-4+2) - 10.4.2}{(1-4+2)^2} = \frac{-10-80}{(-1)^2} = \frac{-90}{1} = -90$$

$$B = (s+3{,}414)F(s)\Big|_{s=-3{,}414} = \lim_{s\to -3{,}414}(s+3{,}414)\frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s+3{,}414)(s+0{,}586)}$$

$$= \lim_{s\to -3{,}414}\frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s+0{,}586)} = \frac{10(-3{,}414+5)}{(-3{,}414+1)^2(-3{,}414+0{,}586)}$$

$$= \frac{15{,}86}{(-16{,}480)} = -0{,}962$$

$$C = (s+0{,}586)F(s)\Big|_{s=-0{,}586} = \lim_{s\to -0{,}586}(s+0{,}586)\frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s+3{,}414)(s+0{,}586)}$$

$$= \lim_{s\to -0{,}586}\frac{10(s+5)}{(s+1)^2(s+3{,}414)} = \frac{10(-0{,}586+5)}{(-0{,}586+1)^2(-0{,}586+3{,}414)} = \frac{44{,}14}{(0{,}485)}$$

$$= 91{,}010$$

$A_1 = -90 \quad A_2 = -40.024 \quad B = -0{,}962 \quad C = 91{,}010$

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s+3{,}414)} + \frac{C}{(s+0{,}586)}$$

$$F(s) = \frac{-90}{s+1} + \frac{-40.024}{(s+1)^2} + \frac{-0{,}962}{(s+3{,}414)} + \frac{91{,}010}{(s+0{,}586)}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -90e^{-t} - (40.024)te^{-t} - (0{,}962)e^{-(3{,}414)t} + (91{,}010)e^{-(0{,}586)t}$$

Elde edilir (Obtained).

3) Karmaşık (Kompleks) Eşlenik Kök Hali (Compex Poles Case)

Bu durum için 2 farklı çözüm yöntemi bulunmaktadır. Birinci çözüm yolu basit kök hali ve tekrarlı kök hali ile benzerdir. İkinci yöntem ise aşağıdaki gibidir;

(We have 2 methods for this case. The first method is similar with simple poles and repeated poles. The other method as follow);

$$F(s) = \underbrace{\frac{K_c}{s+a-jb} + \frac{K_{-c}}{s+a+jb}}_{\substack{Karmaşık\ Eşlenik\ Kök\ Hali \\ (Complex\ Poles)}} + \underbrace{\frac{A_1}{s+P_1} + \frac{A_2}{s+P_2} + \cdots + \frac{A_n}{s+P_n}}_{\substack{Basit\ kök\ veya\ tekrarlı\ kök\ hali \\ (Simple\ poles\ or\ Repeated\ Poles)}}$$

$$K_c = \lim_{s\to -a+jb} [(s+a-jb).F(s)]$$

$$K_{-c} = \lim_{s\to -a-jb} [(s+a+jb).F(s)]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \underbrace{K_c.e^{(-a+jb)t} + K_{-c}.e^{(-a-jb)t}}_{\substack{Bu\ ifadeyi\ sinüs,\ \ cosinüs\ türünden\ yazarsak; \\ (We\ should\ write\ as\ sinus, cosinus)}} + A_1 e^{-P_1 t} + A_2 e^{-P_2 t} + \cdots + A_n e^{-P_n t}$$

$$K_c.e^{(-a+jb)t} + K_{-c}.e^{(-a-jb)t} = \frac{1}{b}|K(a+jb)|.e^{at}.\sin(bt+\alpha)$$

<u>ÖRNEK (EXAMPLE)</u>

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+5)} \qquad f(t) = ?$$

$s_1 = 0$

<u>For</u>

$s^2 + 4s + 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4.1.5 = -4$

$$s_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-1.4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{j^2.4}}{2} = \frac{-4 \pm 2j}{2} = -2 \pm j$$

$s_2 = -2 + j \qquad\qquad s_3 = -2 - j$

I. Method

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2-j)} + \frac{C}{(s+2+j)}$$

$$A = s.F(s)\Bigg|_{s=0} = \lim_{s\to 0} s\frac{10}{s(s^2+4s+5)} = \lim_{s\to 0}\frac{10}{(s^2+4s+5)} = \frac{10}{(0^2+4.0+5)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$B = (s+2-j).F(s)\Bigg|_{s=-2+j} = \lim_{s\to -2+j}(s+2-j)\frac{10}{s(s+2-j)(s+2+j)}$$

$$= \lim_{s\to -2+j}\frac{10}{s(s+2+j)} = \frac{10}{(-2+j)(-2+j+2+j)} = \frac{10}{(-2+j).2j} = \frac{5}{(-2+j).j}$$

$$= \frac{5}{j^2-2j} = \frac{5}{-1-2j} = \frac{-5+10j}{1+2j-2j-4j^2} = \frac{-5+10j}{1-4j^2} = \frac{-5+10j}{1-4.(-1)}$$

$$(-1+2j)$$

$$= \frac{-5+10j}{1+4} = \frac{-5+10j}{5} = -1+2j$$

$$C = (s+2+j).F(s)\Bigg|_{s=-2-j} = \lim_{s\to -2-j}(s+2+j)\frac{10}{s(s+2-j)(s+2+j)}$$

$$= \lim_{s\to -2-j}\frac{10}{s(s+2-j)} = \frac{10}{(-2-j)(-2-j+2-j)} = \frac{10}{(-2-j).(-2j)}$$

$$= \frac{5}{(-2-j).(-j)} = \frac{5}{j^2+2j} = \frac{5}{-1+2j} = \frac{-5-10j}{1-2j+2j-4j^2} = \frac{-5-10j}{1-4j^2}$$

$$(-1-2j)$$

$$= \frac{-5-10j}{1-4.(-1)} = \frac{-5-10j}{1+4} = \frac{-5-10j}{5} = -1-2j$$

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2-j)} + \frac{C}{(s+2+j)}$$

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-1+2j}{(s+2-j)} + \frac{-1-2j}{(s+2+j)}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 + (-1+2j)e^{-(2-j)t} + (-1-2j)e^{-(2+j)t}$$

$$= 2 + e^{-2t}\left[(-1+2j)e^{jt} + (-1-2j)e^{-jt}\right]$$

$$= 2 + e^{-2t}[(-1+2j)(\cos(t) + j\sin(t)) + (-1-2j)(\cos(t) - j\sin(t))]$$

$$= 2 + e^{-2t}[-\cos(t) - j\sin(t) + 2j\cos(t) + 2j^2\sin(t) - \cos(t) + j\sin(t) - 2j\cos(t) + 2j^2\sin(t)]$$

$$= 2 + e^{-2t}[-2\cos(t) - 4\sin(t)]$$

$$f(t) = 2 - 2e^{-2t}\cos(t) - 4e^{-2t}\sin(t)$$

Veya (or)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 + (-1+2j)e^{-(2-j)t} + (-1-2j)e^{-(2+j)t}$$

$$= 2 + e^{-2t}\left[(-1+2j)e^{jt} + (-1-2j)e^{-jt}\right]$$

$$= 2 + e^{-2t}\left[-e^{jt} + 2je^{jt} - e^{-jt} - 2je^{-jt}\right]$$

$$= 2 + e^{-2t}\left[-\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) + 2j\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)\right]$$

$$\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \qquad \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$$f(t) = 2 + e^{-2t}[-2\cos(t) + 4j^2\sin(t)]$$

$$f(t) = 2 + e^{-2t}[-2\cos(t) - 4\sin(t)]$$

$$f(t) = 2 - 2e^{-2t}\cos(t) - 4e^{-2t}\sin(t)$$

<u>II. Method</u>

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{K_c}{(s+2-j)} + \frac{K_{-c}}{(s+2+j)}$$

$s_1 = 0$

$s_2 = -2 + j$

$s_3 = -2 - j$

$$f(t) = A + \frac{1}{b}|K(a+jb)|.e^{at}.\sin(bt+\alpha)$$

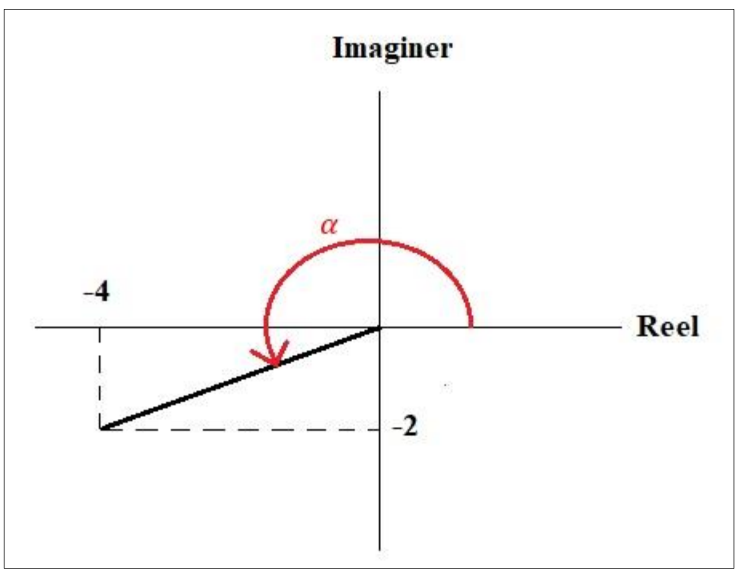
$$A = s.F(s)\Bigg|_{s=0} = \lim_{s\to 0} s\frac{10}{s(s^2+4s+5)} = \lim_{s\to 0}\frac{10}{(s^2+4s+5)} = \frac{10}{(0^2+4.0+5)} = \frac{10}{5} = 2$$

$a + jb = -2 + j \Rightarrow \quad a = -2 \qquad\qquad b = 1$

$$K(a+jb) = (s^2+4s+5)F(s)\Bigg|_{s=-2+j} = \lim_{s\to -2+j}(s^2+4s+5)\frac{10}{s(s^2+4s+5)} = \frac{10}{s}$$

$$= \frac{10}{-2+j}\,(-2-j) = \frac{10(-2-j)}{4-2j+2j-j^2} = \frac{10(-2-j)}{4-j^2} = \frac{10(-2-j)}{5} = -4-2j$$

$$|K(a+jb)| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \cong 4{,}472$$



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{-4}\right) = 26{,}565°$$

Ancak a+jb ifadesi III. bölgede olduğu için bu değere 180° eklenir.

(But a+jb is in III. Region end so we must addition 180° to it)

$\alpha = 26{,}565 + 180 => \ \alpha = 206{,}565°$

Ancak denklemde kullanılacak ifade radyan olmalıdır. Bu yüzden bulunan ifade radyana çevrilir.

(However, the expression to be used in the equation must be in radians. Therefore, the expression found is converted to radians).

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} => R = \frac{D.\pi}{180} = \frac{(206{,}565)\pi}{180} => R \cong 3{,}605$$

$\alpha_R = 3{,}605$

$$f(t) = A + \frac{1}{b}|K(a + jb)|.e^{at}.\sin(bt + \alpha)$$

$$f(t) = 2 + \frac{1}{1}(4{,}472).e^{-2t}.\sin(t + 3{,}605)$$

Trigonometriden (From trigonometry)

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$f(t) = 2 + (4{,}472).e^{-2t}[\sin(t)\cos(3{,}605) + \sin(3{,}605)\cos(t)]$$

$$f(t) = 2 - 4e^{-2t}\sin(t) - 2e^{-2t}\cos(t)$$

ÖRNEK (EXAMPLE)

Solve the following differential equation using the Laplace transform at the given boundary condition.

(Aşağıda verilen diferansiyel denklemi verilen sınır şartında Laplace dönüşüm yolu ile çözünüz).

$$\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = e^{-4t}\,; \qquad x(0) = 3$$

Türevin Laplace özelliğinden faydalanarak **Laplace** alınırsa;
(Using differentiation Laplace transformation)

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}[5x(t)] = 5X(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{-4t}] = \frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] + \mathcal{L}[5x(t)] = \mathcal{L}[e^{-4t}] \qquad\qquad x(0) = 3$$

$$\left(sX(s) - \underbrace{x(0)}_{3}\right) + 5X(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$(s+5)X(s) - 3 = \frac{1}{s+4}$$

$$(s+5)X(s) = 3 + \frac{1}{s+4} \Rightarrow (s+5)X(s) = \frac{3s+13}{s+4} \Rightarrow X(s) = \frac{3s+13}{(s+4)(s+5)}$$

$$X(s) = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+5}$$

$$A = (s+4)X(s)\Big|_{s=-4} = \lim_{s\to -4}(s+4)\frac{3s+13}{(s+4)(s+5)} = \lim_{s\to -4}\frac{3s+13}{(s+5)} = \frac{3.(-4)+13}{(-4+5)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$B = (s+5)X(s)\Big|_{s=-5} = \lim_{s\to -5}(s+5)\frac{3s+13}{(s+4)(s+5)} = \lim_{s\to -5}\frac{3s+13}{(s+4)} = \frac{3.(-5)+13}{(-5+4)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$X(s) = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+5}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{2}{s+5}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = e^{-4t} + 2e^{-5t}$$

ÖRNEK (EXAMPLE)

Find the solution of the differential equations given in below using the Laplace transform **under zero initial conditions**.

(Aşağıda verilen diferansiyel denklemi **sıfır başlangıç koşullarında** Laplace dönüşümü yolu ile çözümünü bulunuz).

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 7y(t) = \sin(2t)$$

Türevin Laplace özelliğinden faydalanarak **Laplace** alınırsa;
(Using differentiation Laplace transformation)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - s\,\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{\dot{y}(0)}_{0}$$

$$\mathcal{L}\left[3\frac{dy(t)}{dt}\right] = 3\left[sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0}\right]$$

$$\mathcal{L}[7y(t)] = 7Y(s)$$

$$\mathcal{L}[\sin(2t)] = \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 7y(t) = \sin(2t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + \mathcal{L}\left[3\frac{dy(t)}{dt}\right] + \mathcal{L}[7y(t)] = \mathcal{L}[\sin(2t)]$$

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 7Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s)[s^2+3s+7] = \frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2+3s+7)(s^2+4)}$$

For

$s^2 + 3s + 7$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.1.7 = 9 - 28 = -19$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(-1)19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{j^2 19}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm j\sqrt{19}}{2} \Rightarrow s_{1,2} = -1.5 \pm 2.18j$$

For

$s^2 + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4.1.4 = -16$

$$s_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{-16}}{2.1} = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm\sqrt{(-1)16}}{2} = \frac{\pm\sqrt{j^2 16}}{2}$$

$$s_{3,4} = \pm 2j$$

Kutuplar (Poles): $s_{1,2} = -1.5 \pm 2.18j$ $s_{3,4} = \pm 2j$
Sıfırlar (Zeros): Yok (None)

$$Y(s) = \frac{K_{c1}}{s + 1.5 - 2.18j} + \frac{K_{-c1}}{s + 1.5 + 2.18j} + \frac{K_{c2}}{s - 2j} + \frac{K_{-c2}}{s + 2j}$$

Karmaşık sayı kök çiftinin Laplace dönüşümü için $\frac{1}{b}|K(a + jb)|e^{at}\sin(bt + \alpha)$ yazarız.
(Write $\frac{1}{b}|K(a + jb)|e^{at}\sin(bt + \alpha)$ for complex poles)

Burada (Where);

$a_1 = -1.5,$ $b_1 = 2.18;$ $a_2 = 0,$ $b_2 = 2$

$$K_1(a + jb) = \lim_{s \to -1.5+2.18j} (s^2 + 3s + 7)\frac{2}{(s^2 + 3s + 7)(s^2 + 4)} = \lim_{s \to -1.5+2.18j} \frac{2}{(s^2 + 4)}$$

$$= \frac{2}{(-1.5 + 2.18j)^2 + 4} = \frac{2}{2.25 - 6.54j + 4.75\underbrace{j^2}_{-1} + 4} = \frac{2}{1.5 - 3.27j} = \frac{2}{1.5 - 6.54j}\,(1.5 + 6.54j)$$

$$= \frac{3 + 13.08j}{45.02} \Rightarrow K_1(a + jb) = \frac{3}{45.02} + \frac{13.08}{45.02}j$$

$$K_2(a + jb) = \lim_{s \to 2j} (s^2 + 4)\frac{2}{(s^2 + 3s + 7)(s^2 + 4)} = \lim_{s \to 2j} \frac{2}{(s^2 + 3s + 7)}$$

$$= \frac{2}{(2j)^2 + 3(2j) + 7} = \frac{2}{4\underbrace{j^2}_{-1} + 6j + 7} = \frac{2}{3 + 6j}\,(3 - 6j) = \frac{6 - 12j}{45} \Rightarrow K_2(a + jb) = \frac{6}{45} - \frac{12}{45}j$$

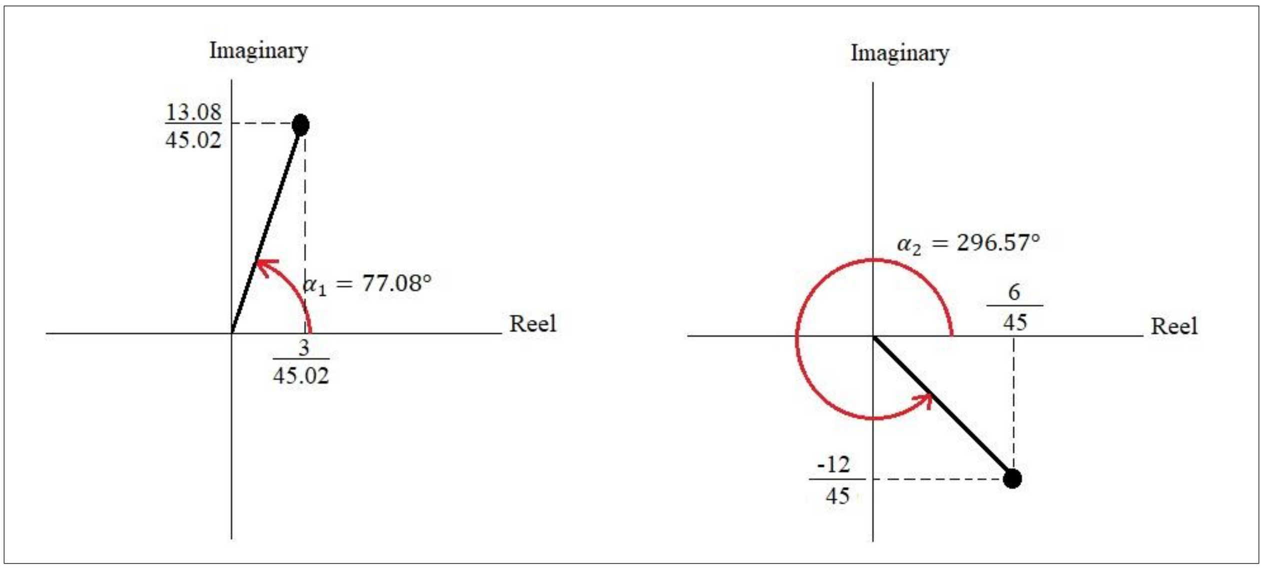
Modüller (Moduls);

$$|K_1(a + jb)| = \sqrt{\left(\frac{3}{45.02}\right)^2 + \left(\frac{13.08}{45.02}\right)^2} = 0.3; \qquad |K_2(a + jb)| = \sqrt{\left(\frac{6}{45}\right)^2 + \left(-\frac{12}{45}\right)^2} = 0.3$$

Faz açıları (Phase Angles);

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{13.08}{45.02}}{\frac{3}{45.02}}\right) = 77.08° ; \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{12}{45}}{\frac{6}{45}}\right) = -63.43° = 296.57°$$

1. denklemin reel ve sanal kısımları pozitif olduğu için 1. bölgededir.
2. denklemin reel kısmı pozitif ve sanal kısım negatif olduğu için 4. bölgededir.
(The first equation is in Region 1 (because the real part and the imaginary part are positive)
(The second equation is in Region 4 (because the real part is positive but the imaginary part is negative)



Ancak açılar radyan cinsinden olmalıdır. Bu yüzden her iki açıyı da radyan a çevirelim. (But, angles must be in radian. Converting from degree to radian)

$$\alpha_1 = 77.08° = 1.345\, rad\, ; \qquad \alpha_2 = 296.57° = 5.176\, rad$$

$$y(t) = \frac{1}{b_1}|K_1(a+jb)|e^{a_1 t}\sin(b_1 t + \alpha_1) + \frac{1}{b_2}|K_1(a+jb)|e^{a_2 t}\sin(b_2 t + \alpha_2)$$

$$y(t) = \frac{1}{2.18}(0.3)e^{-1.5t}\sin(2.18t + 1.345) + \frac{1}{2}(0.3)e^{-0t}\sin(2t + 5.176)$$

Elde edilir (Obtained) ve (and) $\sin(a+b) = \sin a * \cos b + \cos a * \sin b$ bilindiğine göre;

$$\begin{aligned}\sin(2.18t + 1.345) &= \sin(2.18t)\cos(1.345) + \cos(2.18t)\sin(1.345)\\ &= (0.447)\sin(2.18t) + (0.975)\cos(2.18t)\end{aligned}$$

$$\sin(2t + 5.176) = \sin(2t)\cos(5.176) + \cos(2t)\sin(5.176)$$
$$= (0.447)\sin(2t) - (0.894)\cos(2t)$$

Bulunan bu ifadelerde yerine yazılırsa (Writing finding values);

$$y(t) = \frac{1}{2.18}(0.3)e^{-1.5t}[(0.447)\sin(2.18t) + (0.975)\cos(2.18t)]$$
$$+ \frac{1}{2}(0.3)1[(0.447)\sin(2t) - (0.894)\cos(2t)]$$

$$y(t) = (0.062)e^{-1.5t}\sin(2.18t) + (0.134)e^{-1.5t}\cos(2.18t) + (0.067)\sin(2t)$$
$$- (0.134)\cos(2t)$$

BASİT SİSTEM ELEMANLARI ve EMPEDANS

(PRIMARY SYSTEM VARIABLES and IMPEDANCE)

1. Hedefler

1. Sistemlerin temel elemanlarının tanıtılması.
2. Fizik kanunları kullanılarak sistemlerin matematiksel modellerinin elde edilmesi.
3. Basit fiziksel modeller için hareket denklemlerinin yazılabilmesi.
4. Mekaniksel bir sistemin elektriksel karşılığının incelenmesi.

Fiziksel sistemler:

- Elektrik sistemleri
- Mekanik Sistemler
- Akışkan Sistemleri
- Isıl Sistemler

olmak üzere 4 kısımdır. Bu bölümde bu Mekanik ve Elektriksel sistemlere ait basit elemanlardaki neden-sonuç (giriş-çıkış) bağıntıları incelenecektir.

1. Objectives

1.To define the system and its primary components.

2.To formulate the mathematical model using fundamental necessary assumptions based on physical laws.

3.To develop the ability to write the equations of motion for models of simple physical systems.

4. To investigate a mechanical system by means of an electrical analogy.

Main physical systems are classified as

- Electrical Systems
- Mechanical Systems
- Fluid Systems
- Thermal Systems

In each case we shall first discuss physical models, and then derive the equations of motion. The principal feature that distinguishes the study of one physical system from that of another is, of course, the specific cause-and-effect phenomena exhibited by its elements. In addition, the kinds of approximations made in physics modeling will be different; the details of selecting variables and writing equilibrium relations will also depend on the system. There is much in common, however, in the process of deriving equations of motion, as we shall note repeatedly in our studies.

2. Doğrusal (Linear) ve Doğrusal olmayan (Non-linear) Modeller

Doğrusal sistemler süperpozisyon ilkesinin uygulanabildiği sistemlerdir. Eğer bir sisteme süper pozisyon ilkesi uygulanamıyorsa bu sistem doğrusal değildir. Bu sebepten dolayı, doğrusal olmayan bir sistemin iki farklı giriş sinyaline verdiği cevap, o sistemin her bir giriş sinyaline ayrı ayrı verdiği cevapların toplamı ile bulunamaz. Bu doğrusal sistemlerin analizinde büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Pratikte neredeyse bütün sistemlerin değişkenleri arasında doğrusal olmayan ilişkiler vardır. Örneğin bir elemanın çıkışı büyük giriş sinyalleri için doyma gösterebilir. Buna en güzel örnek bir elektrik motorunun üzerine uygulanan giriş gerilimi artırılsa bile motor milinin maksimum bir hızda dönüş yapabilmesidir. Esnek bir yayın belli aralıklarda doğrusal davranış göstermesine karşın bu aralıktan fazla oranda esnetilmesi durumunda deforme olması da doğrusal olmayan davranışa örnek olarak verilebilir.

Sistemler, analizlerinin kolaylaştırılması açısından bir denge noktası etrafındaki belli çalışma aralıklarında doğrusal kabul edilebilirler. Bunun için sistemin doğrusal olmayan matematiksel modeli o nokta etrafında doğrusallaştırılabilir. Fakat denge noktası etrafındaki çalışma aralığı artırılırsa, doğrusal matematiksel model gerçek sistemin dinamiğini ifade etmeyebilir. Böyle bir durumda doğrusal model gerçek sistemin dinamiğinin analizi ve kontrol uygulamaları için kullanılamaz.

2. Linear and Nonlinear Models

A system is nonlinear if the principle of superposition does not apply. Thus, for a nonlinear system the response to two inputs cannot be calculated by treating one input at a time and adding the results (This is the advantage of linear systems).

In practice, most electromechanical, hydraulic, pneumatic systems and so on, involve nonlinear relationships among the variables. For example the output of a component may saturate for large input signal such as actuators can operate between certain limits of inputs (Force, voltage, etc.) or springs can be deformed after some excess force applications.

In order to simplify analysis, systems can be considered linear in limited operating ranges. If the global mathematical model of the system is nonlinear, we can linearize it around the operating conditions which give us a good approximation of the global behavior around that operating point. However, if the operating range increases, the linear model does not represent the dynamical behavior of the system and cannot be used for the analysis and control design anymore.

3. Doğrusal olmayan matematiksel modellerin doğrusallaştırılması
(3. Linear approximation of Nonlinear Mathematical Models)

Doğrusal olmayan bir sistemin doğrusal matematiksel modelini elde etmek için, sistem değişkenlerinin belli bir çalışma koşulundan çok az bir sapma gösterdiği kabul edilir. Bağımsız değişkeni veya giriş değişkeni $x(t)$ ve çıkış değişkeni $y(t)$ olan bir sistem ele alalım.

(To obtain a linear mathematical model for a nonlinear system, we assume that the variables deviate only slightly from some operating condition. Consider a system whose input is $x(t)$ and output is $y(t)$. The relationship between the input and output of the system can be represented mathematically as)

$$y = f(x) \tag{3.1}$$

Eğer normal çalışma koşulu $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ ise, (3.1) denklemine bu nokta etrafında Taylor serisi açılımı uygulanabilir:

(If the normal operating condition corresponds to $\bar{x}$ and $\bar{y}$, then Eq. (3.1) may be expanded into a Taylor series about this point as follows):

$$y = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x-\bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x-\bar{x})^2 + \cdots \tag{3.2}$$

Eğer $x-\bar{x}$ küçük ise yüksek mertebeden terimleri $(x-\bar{x})^n \approx 0, n \geq 2)$. ihmal edebiliriz ve denklem (3.2) aşağıdaki hali alır.

(If the variation $x-\bar{x}$ is small, we may neglect the higher order terms $((x-\bar{x})^n \approx 0, n \geq 2)$. The derivative $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$ is evaluated at the operating point. Equation (3.2) may be written as)

$$y = \bar{y} + K(x-\bar{x}) \tag{3.3}$$

Burada (where),

$$K = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \text{ ve } \bar{y} = f(\bar{x})$$

Denklem (3.3) tekrar düzenlenirse (hence),

$$y-\bar{y} = K(x-\bar{x}) \tag{3.4}$$

Denklem (3.4) $y-\bar{y}$ ile $x-\bar{x}$ arasında doğrusal bir orantı olduğunu göstermektedir.
(which indicates that $y-\bar{y}$ is proportional to $x-\bar{x}$ (linear relationship))

Doğrusallaştırma işlemi çok değişkenli sistemlere de uygulanabilir.
(This procedure can also be implemented to multi-input systems).

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.5}$$

Eğer denklem (3.5) çalışma noktaları $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ etrafında Taylor serisine açılırsa

(If we expand the above term around the operating points $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ using Taylor series)

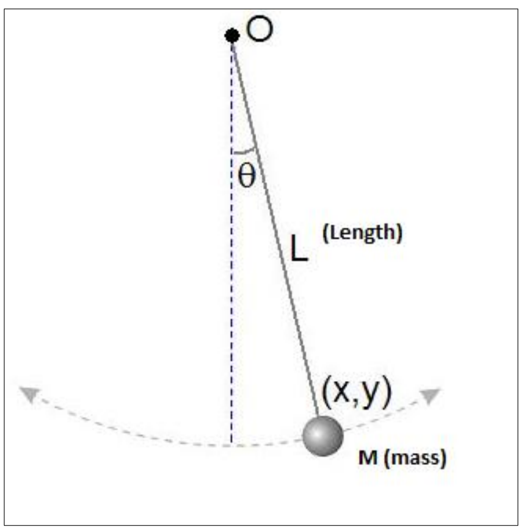
$$y = y_i + K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + K_n(x_n - \bar{x}_n) \qquad (3.6)$$

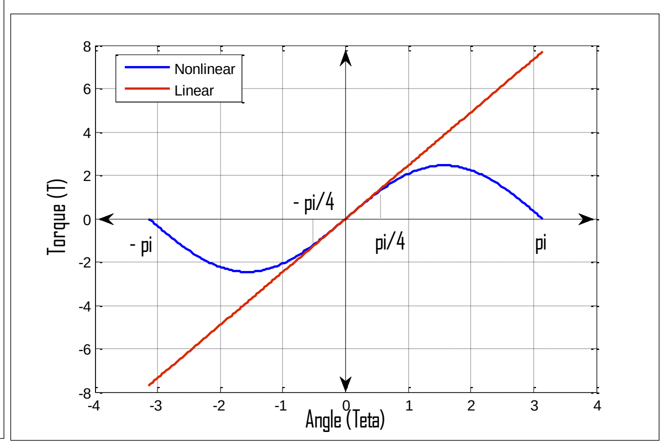
Burada (where),

$$y_i = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \text{ ve } K_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2, \dots, x_n=\bar{x}_n,} \qquad \text{for} \quad i = 1,2,\dots,n$$

Örnek (Example):

Şekil (3.1a)'da ki salınım yapan sarkacın matematiksel modelini elde ediniz ve doğrusallaştırınız.





Şekil 1a. Sarkaç sistemi (Pendulum Oscillator) Şekil 1b. Doğrusal ve doğrusal olmayan davranış (Linear vs nonlinear behavior)

Kütle üzerindeki tork (Torque on the mass M is):

$$T = MgLsin\theta$$

g: yerçekimi ivmesi (is the gravity constant).

Kütle için denge noktası $\bar{\theta} = 0^o$'dır. T ile θ arasındaki doğrusal olmayan ilişki Şekil (1b)'de gösterilmiştir. Taylor serilerini kullanarak,

(The equilibrium condition for the mass is $\bar{\theta} = 0^o$. The nonlinear relationship between T and θ is shown in Fig. (1b). Using Taylor series expansion).

$$T \cong \bar{T} + MgL \frac{d(sin\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=\bar{\theta}} (\theta - \bar{\theta})$$

Burada $\bar{T} = 0$. Böylece, (Where $\bar{T} = 0$. Then we have),

$$T = MgL(\cos 0^o)(\theta - 0^o) = \ MgL\theta$$

Bu yaklaşımın $-{}^{\pi}/_{4} \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{4}$ arasında iyi sonuç verdiği Şekil (3.1b)'den görülmektedir.

(This approximation is reasonably accurate for $-{}^{\pi}/_{4} \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{4}$)

4. Transfer Fonksiyonları

Transfer fonksiyonları, doğrusal sistemlerin (zaman-bağımsız, LTI) giriş-çıkış bağıntılarını karakterize etmek için kullanılır. Bir doğrusal sistemin transfer fonksiyonu tüm başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek çıkış değişkeninin Laplace dönüşümünün giriş değişkeninin Laplace dönüşümüne oranı ile elde edilir.

Aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilen doğrusal sistemi ele alalım;

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Burada, $n \geq m$ şartı sağlanmalıdır ve y = y(t) sistemin çıkışı, x = x(t) sistemin girişi veya uyarı fonksiyonudur. Bu sistemin transfer fonksiyonunu elde etmek için başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Burada G(s) transfer fonksiyonudur. Transfer fonksiyonunun özellikleri:

1. Transfer fonksiyonu sistemin kendine ait bir özelliktir, sisteme dışarıdan uygulanan giriş sinyalinden bağımsızdır. Sistemin giriş ve çıkışı arasındaki oransal ifadeyi verir fakat sistemin fiziksel özellikleri hakkında bir bilgi içermez. Bu sebepten farklı sistemler aynı transfer fonksiyonuna sahip olabilir.
2. Bir sistemin transfer fonksiyonu sisteme uygulanan birim ani darbe girişinden elde edilen çıkışın Laplace dönüşümüdür.
3. Bir doğrusal sistemin kararlılığı transfer fonksiyonunun paydası olan özyapısal denklemin (Characteristic Equation) sıfıra eşitlenip köklerinin bulunması ile bulunabilir. Bunlara sistemin kutupları (poles) adı verilir. Sonuç olarak transfer fonksiyonunun paydasının tüm kökleri negatif ise sistem kararlıdır. Eğer kutuplardan bir tanesi bile pozitif gerçek kısma sahipse sistem kararsızdır.
4. Transfer fonksiyonunda payın kökleri ise sistemin sıfırları (zeros) olarak adlandırılır. Bunlar transfer fonksiyonunu sıfır yapan değerlerdir. Eğer transfer fonksiyonu çarpanlarına ayrılırsa

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Burada,

z_m: Transfer fonksiyonunun sıfırları

p_n: Transfer fonksiyonunun kutupları

Sistemin sıfırlarının karmaşık düzlemdeki yeri sistemin dinamiğine etki eder fakat kararlılığına etki etmez.

5. Sistemin transfer fonksiyonu biliniyorsa sistemin farklı giriş sinyallerine vereceği cevaplar kolayca çalışılabilir. Eğer bilinmiyorsa da gerçek sisteme bilinen sinyaller uygulanarak

sistemin çıkışı elde edilir ve buradan sistemin belirli bir çalışma koşulunda transfer fonksiyonu modeli elde edilebilir (System Identification).

4. Transfer Functions of Systems

Transfer functions are used to characterize the input-output relationships of Linear Time-Invariant (LTI) systems. The transfer function of a LTI system can be obtained from the ratio of the Laplace transform of the system output to the Laplace transform of the input under the assumption of all the initial conditions are zero. Let us consider the LTI system given in the differential equation form

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Here $n \geq m$, y(t) is the output variable and x(t) is the input variable or a test signal. The transfer function of this system is

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Some properties of Transfer functions are

1. The transfer function is a property of a system itself, independent of the magnitude and nature of the input.
2. The transfer function includes the units necessary to relate the input to the output; however it does not contain any information related to the physical structure of the system. Hence, many physically different systems may have identical transfer functions.
3. The transfer function of a system may also be represented in the following way

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)}$$

where $p_i, i = 1,2, \ldots, n$ are the poles and $z_i, i = 1,2, \ldots, m$ are the zeros of the system. Poles of the system determine the stability of a system, whereas the zeros have effect on the performance of the system only not the stability. We can say that the system is stable if all the system poles are negative and if the system has even one positive pole, the system shows unstable dynamics.

4. If the transfer function of a system is known, the output of the system can be studied for a view toward understanding the nature of the system by using various input signals. However, if the transfer function is unknown, it may be established by using some known inputs such as impulse input, etc. This process is called as System Identification.

Örnek (Example): Bir önceki örnekte ele alınan sarkaç sisteminin hareket denklemini çıkaralım. T_c sisteme dışarıdan uygulanan moment olsun (sistem girişi) ve çıkış ise sistemin açısal konumu olarak kabul edilsin. Newton yasasını kullanarak dönel sistemin hareket denklemi elde edilebilir.

(Consider the pendulum system given in the previous example. T_c is the external torque applied to the system (the input) and the output is the angle of the mass θ. The equation of motion of the pendulum can be found by applying Newton's law for rotational systems)

$$\sum T = I\ddot{\theta}\,,$$

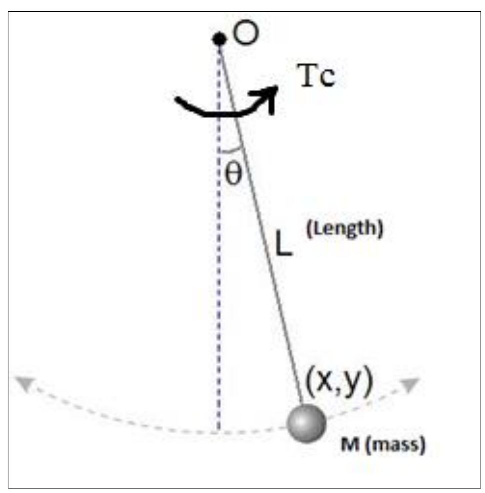
burada I dönme merkezine göre atalet momentidir. Burada asılı kütle için $I = ML^2$ yerine konursa sistemin hareket denklemi

(where I is the moment of inertia about the pivot points. for hanging mass $I = ML^2$. As it can be seen we have a nonlinear system, however we have linearized the system's nonlinear term for small oscillations so that the linearized system is).

$$T_c - MgL\theta = ML^2\ddot{\theta}$$

Başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

(This is the mathematical model of the system in the differential equation form. If we take the Laplace transform of both sides assuming that all the initial conditions are zero),



Şekil 2. Sarkaç dış moment etkisinde

(Pendulum oscillator with an external applied Torque)

$$\frac{T_c(s)}{ML^2} - \frac{g}{L}\theta(s) = s^2\theta(s)$$

Sistemin çıkışının Laplace dönüşümünün sistemin girişinin Laplace dönüşümüne oranı ile sarkaç sisteminin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:
(The transfer function is the ratio of the Laplace transform of the output to the Laplace transform of the input, therefore the transfer function of the pendulum system is):

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T_c(s)} = \frac{\frac{1}{ML^2}}{s^2 + \frac{g}{l}}$$

5. Sistem değişkenlerinin sınıflandırılması ve Temel sistem elemanları

(5. Classification of System variables and Basic System Elements)

Tüm bu sistemlerde enerjiyi yutan veya dağıtan direnç elemanı, enerjiyi kapasitif etkiyle depolayan kapasite elemanı ve enerjiyi indüktif etkiyle depolayan indüktans elemanı gibi 3 basit eleman bulunmaktadır. Direnç, kapasite ve indüktans elemanları olarak gruplanan bu iki uçlu elemanlarda **uç değişken** ve **iç değişken** olmak üzere iki temel değişken tanımlanır.

(The dynamic behavior of physical systems results from the interchange of energy between potential and kinetic forms and from the loss of energy through dissipation. Almost every physical system**,** just like electrical systems, can be modeled by passive components including resistance, capacitance, and inductance. Each of these physical elements is associated with an **element-across variable** and an **element- through variable)**.

Uç değişken (e, effort): Bir elemanın iki ucu arasında bir fark değer olarak ölçülen değişkendir. Uç değişken ilgili elemanın uçları arasına bir ölçü aleti yerleştirilerek ölçülür. Buna göre elektrik sistemlerinde potansiyel farkı, mekanik sistemlerde öteleme veya dönme hızı, akışkan sistemlerde basınç farkı ve ısıl sistemlerde sıcaklık farkı birer uç değişkendir.

Element-across variable (e, effort): An across variable, **e**, is measured between distant entries, and it is not necessary to make any severing entry into the system. That is, variables that are measured with a gauge connected in parallel to an element. Potential difference in electrical systems; Translational velocity or rotational velocity in mechanical systems, pressure difference in fluid systems and Temperature difference in Thermal systems are element-across variable.

İç değişken (r, rate, flow): Bir elemanın boyunca her bir noktasında aynı değerde ölçülen değişkendir. İç değişken, bir fiziksel sistemde ilgili fiziksel devre açılıp araya bir ölçü aleti yerleştirilerek ölçülür. Buna göre elektrik sistemlerinde akım, mekanik sistemlerde kuvvet veya moment, akışkan sistemlerde debi ve ısıl sistemlerde ısıl debi birer iç değişkendir.

Element-through variable (r, rate, flow): A through variable, **r**, is measured at one subsystem entry only, and to measure such a variable directly we must sever the system at that entry and insert the measuring instrument between the entry and the remainder of the system. That is, variables that are measured with a gauge connected in series to an element. Current in electrical systems; Force or Torque (moment) in Translational/Rotational mechanical systems; Flow rate in Fluid systems; and heat flow rate in Thermal systems are element-through variable.

İki eleman arasındaki enerji akışı, çarpımlarının sonucunun her zaman güç olduğu iki değişkenle karakterize edilir. Uç ve iç değişkenin çarpımı her zaman Güç'dür. Böyle bir çift değişkene güç eşlenik değişkenler diyoruz. Örneğin, elektrik şebekeleri için gerilim ve akım, mekanik (öteleme) sistemler için kuvvet ve hız kullanılır.

(The flow of energy between two elements is always characterized by two variables, of which the product is power. The product of **Across** and **Through** is always **Power**. We call such a pair of variables *power conjugated variables*. For example voltage and current are used for electrical networks and force and velocity are used for mechanical (translational) systems).

Tablo 3.1. Sistemlerin uç ve iç değişkenleri

Sistem (System)	**Uç değişken (Across variable)**	**İç değişken (Through Variable)**
Elektriksel (Electrical)	e (Gerilim, Voltage, Potential)	I (Akım, Current)
Öteleme Mekanik (Translational Mechanical)	v (Hız, velocity)	F (Kuvvet, Force)
Dönel Mekanik (Rotational Mechanical)	ω (Açısal hız, angular velocity)	T (Moment, Torque)
Akışkan (Fluid)	P (Basınç, pressure)	q (Debi, Flow rate)
Isıl (Thermal)	θ (Sıcaklık, temperature)	q_t (Isıl debi, Heat Flow rate)

Uç değişken ve iç değişken tanımına dayanarak değişik mühendislik sistemleri için temel büyüklük olan **güç** ifadesini

(Using the definition of across variables and through variables, we express the power, which is the basic quantity for different engineering systems).

Güç = Uç değişken x İç değişken (Power = across variable x through variable)

$$P = er$$

şeklinde yazabiliriz. Çeşitli sistemlerde basit elemanların değişkenleri arasındaki fiziksel bağıntıların benzer olması bu elemanlara ait matematiksel modelinde aynı olmasını sağlamaktadır. Bu durum sistemler arasındaki temel benzerlikleri ortaya koymaktadır. Basit elemanların seri ve paralel olarak bağlanmasıyla ortaya çıkan karmaşık sistemlerin matematiksel modelleri de kolayca elde edilmektedir. Burada ele alınan sistem elemanları idealleştirilmiş elemanlar olup gerektiğinde çalışma bölgesi içinde doğrusallaştırılmıştır. Enerji ifadesi bir zaman aralığında harcanan gücün toplamı olduğundan

(With the exception of thermal systems, the product of the effort and rate variables e and r is power P. For example, electrical power is the product of voltage and current; mechanical power is the product of force and velocity. So, except for thermal systems, “We could have chosen entropy flow rate as the rate variable in thermal systems since its product with temperature does give power. However, this choice has rarely been used in practice”. Since energy is the time interval of power, we have);

$$E = \int P\,dt = \int e\,r\,dt \qquad (3.8)$$

Örneğin bir yayın kuvvet-deplasman ilişkisi $F = k\,x$. Buradan, uç değişken $\mathrm{e} = \mathrm{v} = \mathrm{dx/dt}$ ve iç değişken $\mathrm{r} = \mathrm{F}$ kullanılarak bir yayda depolanan potansiyel enerji:

(For example, the force-deflection relation of a linear mechanical spring is $F = k\,x$. Hence, with effort, $e = v = dx/dt$ and rate, $r = F$ (3.8) gives the expression for the potential energy PE stored in the spring)

$$PE = \int F \frac{dx}{dt}\, dt = k \int x\, dx = \frac{1}{2} k\, x^2 \tag{3.9}$$

Benzer bir şekilde hareket eden bir kütlenin kinetik enerjisi $e = v$, $r = F$, ve $F = m(dv/dt)$ ton's uç ve iç değişkenleri kullanılarak ve Newton'un hareket kanunundan:

(Similarly, the expression for the kinetic energy KE stored in a mass m moving with velocity v can also be found from (3.8). By using $e = v$ and $r = F$, and $F = m(dv/dt)$ from Newton's law, we obtain);

$$KE = \int F\, v\, dt = \int m\, v \frac{dv}{dt} dt = \frac{1}{2} m\, v^2 \tag{3.10}$$

Elektriksel bir direncin harcadığı güç

(The power expression (3.7) can also be used to compute the power dissipation in a system. For an electrical resistor, the effort e is the applied voltage v, and the rate is the current i. So the power dissipated by a resistor is):

$$P = i\, v = i^2\, R \tag{3.11}$$

Burada v elektriksel gerilim, i akımdır ve (where, v is voltage and i is current) $v = i\,R$.

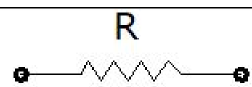
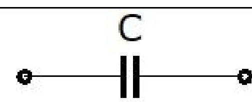
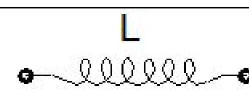
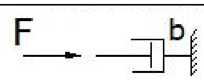
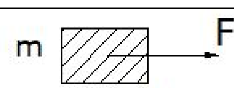
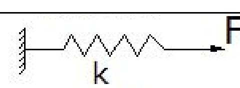
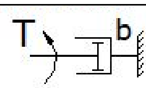
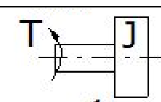
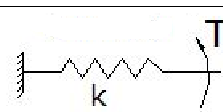
Kinetik, potansiyel enerji ve harcanan güç bağıntıları diğer sistemler için benzer şekilde bulunabilir. Aşağıda bazı sistemlerin uç ve iç değişkenleri tablo olarak verilmiştir.
Görülmektedir ki sistemlerin değişkenleri ve fiziksel modellenmeleri arasında benzerlikler vardır. Bu durum örneğin üzerinde çalışılacak olan büyük, pahalı ve karmaşık bir mekaniksel sistemin elektriksel karşılığı şeklinde modellenmesine olanak sağlayarak sistemin analizini kolaylaştırır.

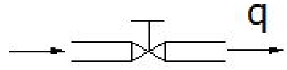
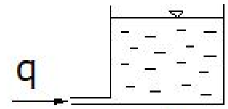
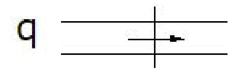
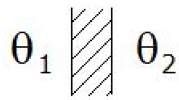
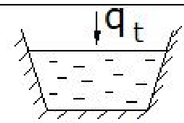
Aşağıdaki tabloda elektriksel, mekanik, akışkan ve ısıl sistem elemanlarının transfer fonksiyonları verilmiştir.

(Expressions for potential and kinetic energy storage and power dissipation can be obtained for other system types in a similar way.

It is readily observable that many similarities exist between electrical and mechanical systems in terms of the equations considered and this makes possible the investigation of a mechanical system by means of an electrical analogy or vice versa. One big advantage of employing the mechanical to electrical analogy is that the mechanical network under consideration may well be large, expensive and potentially dangerous whereas its electrical analog will most likely be a cheap bench-top exercise with the inherent safety that that affords.

Methods are considered in which variables from one system type can be regarded as being analogous to those from another system type, showing how the study of control systems brings together the various engineering and physical disciplines by means of a common mathematical toolbox. The table shows the elements of systems and their transfer functions).

Systems (Sistemler)	Resistance (Direnç)	Capacity (Kapasite)	Inductance (İndüktans)
Electrical (Elektriksel)	 $e = R\,i$	 $e = \frac{1}{Cs}\,i$	 $e = L\,s\,i$
Translational Mechanic (Öteleme Mekanik)	 $v = \frac{1}{b}F$	 $v = \frac{1}{ms}F$	 $v = \frac{1}{k}\,s\,F$
Rotational Mechanic (Dönel Mekanik)	 $\omega = \frac{1}{b}T$	 $\omega = \frac{1}{Js}T$	 $\omega = \frac{1}{k}\,s\,T$

Fluid (Akışkan)	 $p = R_H q$	 $p = \frac{1}{C_H s} q$	 $p = L_H s q$
Thermal (Isıl)	 $\theta = R_t q_t$	 $\theta = \frac{1}{C_t s} q_t$	

Enerji depolamayan ve sönümlemeyen sistem elemanları:

Bu elemanlar sadece enerjiyi bir formdan başka bir forma dönüştürürler. Örneğin, mekanikten dönel hareketin veya elektriksel enerjiden mekanik enerji elde edilmesi gibi.

Elektriksel değiştiriciler (Transformatörler)

Mekaniksel değiştiriciler (dişli takımları)

Elektro-Mekanik değiştiriciler (Elektrik motorları)

Sinyal değiştiriciler (Transducer, sensörler)

System Elements not storing and dissipating energy:

These are elements which just transform or convert the form of an energy into another form, such as translational mechanical to rotational mechanical, electrical to mechanical, electrical to electrical and so on.

Electrical Transformers (elektriksel değiştiriciler) (transformatörler)

Mechanical Transformers (mekaniksel değiştiriciler) (dişli takımları)

Electro-mechanical Transformers (Elektrik motorları)

Signal Transformers (Transducer, sensor)

6. Elektriksel Sistem Elemanları (Electrical System Elements)

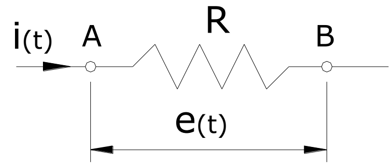
İki uçlu basit elektriksel elemanlar olarak direnç, kapasite ve indüktansı sayabiliriz. Bunlar enerjiyi yutan veya depolayan elemanlardır. Elektriksel sistemlerde ayrıca enerjiyi module eden kuvvetlendiriciler ve başka enerji türünü elektriksel enerjiye dönüştüren (transducer) şeklinde çok uçlu elemanlarda vardır.

(Basic laws governing electrical circuits are Kirchhoff's current law and voltage law. Kirchhoff's current law (node law) states that the algebraic sum of all currents entering and leaving a node is zero. (This law can also be stated as follows: The sum of currents entering a node is equal to the sum of currents leaving the same node.) Kirchhoff's voltage law (loop law) states that at any given instant the algebraic sum of the voltages around any loop in an electrical circuit is zero. (This law can also be stated as follows: The sum of the voltage drops is equal to the sum of the voltage rises around a loop.) A mathematical model of an electrical circuit can be obtained by applying one or both of Kirchhoff's laws to it).

6.1. Direnç Elemanı (Resistive Elements):

Bir direnç elemanının uçlarına bir gerilim farkı (e) uygulandığında, bir elektriksel akım (I) meydana gelir.

(Resistance is a property that opposes the flow of current. Circuit model of a resistor is shown in)



Şekil 3. Direnç elemanı (Fig. 3 Circuit model of a resistor).

Bir direncin matematiksel modeli Ohm yasasından bulunur:

(For a wide variety of materials and conditions, the electrical resistance does not depend on the amount of current through or the potential difference (voltage) across the object, meaning that the resistance R is constant for the given temperature and material. Mathematical model of a resistor is given by the Ohm's law):

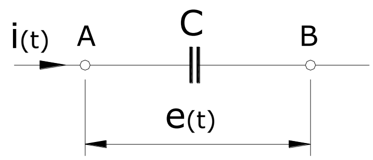
$$e(t) = i(t) * R$$

İdeal direnç elemanında R direnci sabittir ve akım ile gerilim farkından bağımsızdır. Bir direnç elemanın üzerine giriş olarak akım uygulanırsa çıkış olarak gerilim farkı alınır. Bu durumda direnç elemanının transfer fonksiyonu yukarıdaki denklemin Laplace dönüşümü alınarak bulunabilir:

(If we apply current on a resistor as an input we obtain voltage as an output, which can be represented in the transfer function format as):

$$G(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = R$$

6.2. Kapasite Elemanı (Capacitive Element):



Şekil 4. Kapasite elemanı (Fig. 4 Circuit symbol of a capacitor)

Şekil 3.4 ile verilen ideal bir kondansatörün uçlarına bir potansiyel farkı uygulanırsa meydana gelen elektrik yükü (q, coulomb) ile kapasite C (farad) arasındaki bağıntı.

(A capacitor (formerly known as condenser) is a passive two-terminal electrical component used to store energy in an electric field. Circuit symbol of a capacitor is shown in Fig 4. When there is a potential difference (voltage) e(t), the relationship between the electric charge q(t) (coulomb) and capacitance C is given as):

$$q(t) = C * e(t)$$

Her iki tarafın türevi alınacak olursa (If we take the derivative of both sides with respect to time)

$$\frac{dq}{dt} = i(t) = C\frac{de}{dt}$$

Veya (or)

$$e(t) = \frac{1}{C}\int i\, dt$$

elde edilir ve burada birim zamanda akan elektrik yükü $i=dq/dt$ akımı verir.

Akımın sistem girişi olduğu durumda kapasite elemanın transfer fonksiyonu başlangıç değerler sıfır kabul edilerek sistem modelinin Laplace dönüşümü alınarak bulunur.

(Here the electric charge flowing in unit time gives $i=dq/dt$ current. Transfer function for the capacitive element when current is input is given as)

$$G(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

Benzer şekilde sistem çıkışı akım alınırsa transfer fonksiyonu

(Similarly when the voltage is input and current is output, the transfer function becomes)

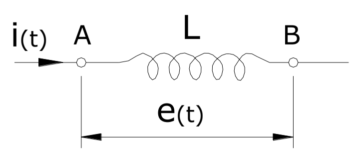
$$G(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = Cs$$

olur.

6.3. İndüktans elemanı (Inductive Element):

İletken bir telden meydana gelmiş bir sargıdan bir akım geçirilecek olursa bir mıknatıs alanı oluşur ve akım zamanın fonksiyonu olarak değiştirilince de mıknatıs alanının yoğunluğu da zamana bağlı olarak değişir. Lenz yasasına göre, değişen mıknatıs alanı ise iletken sargı içinde akım değişimine karşı koyacak yönde bir gerilim farkı meydana getirir. İdeal bir indüktans şekil 3.5'te verilmiştir.

(An **inductor** or a **reactor** is a passive electrical component that can store energy in a magnetic field created by the electric current passing through it. An inductor's ability to store magnetic energy is measured by its inductance L, in units of Henries. Inductance can be thought of as the property that allows the storage of kinetic energy. Typically, an inductor is a conducting wire shaped as a coil, the loops helping to create a strong magnetic field inside the coil due to Ampere's Law. Circuit symbol of a capacitor is shown in Fig. 5)



Şekil 5. İndüktans elemanı (Fig. 5. Circuit representation of an inductor)

İdeal bir indüktansın dinamiği,

(Due to the time-varying magnetic field inside the coil, a voltage is induced),

$$e(t) = L\frac{di}{dt}$$

veya (or)

$$i(t) = \frac{1}{L}\int e(t)\,dt$$

ifade edilir. L: Henry cinsinden sargının indüktansıdır.

(L: It is the inductance of the coil in Henry type)

Gerilim farkının çıkış ve akımın giriş olduğu durumda indüktans elemanın transfer fonksiyonu

(Transfer function for the capacitive element when voltage is output is given as)

$$G(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = Ls$$

Akımın çıkış ve gerilim farkının giriş olduğu durumda ise transfer fonksiyonu

(Similarly when the current is output and voltage is input, the transfer function becomes)

$$G(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Ls}$$

Olur (obtained).

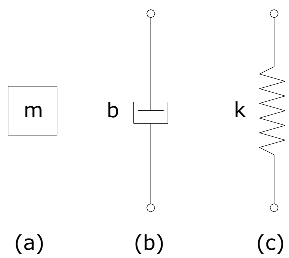
7. Mekaniksel Sistemler (Mechanical Systems)

Mekaniksel sistemlerin hareket denklemleri Newton yasası kullanılarak elde edilir. Mekaniksel sistemler Öteleme ve Dönel Mekanik sistemler olarak ikiye ayrılır. Öteleme hareketinde sönümleyici (damper), kütle ve yay, dönel mekanik sistemlerde ise dönel sönümleyici, eylemsizlik momenti (atalet) ve burulma yayı basit sistem elemanlarıdır. Şekil 3.6.'da basit mekaniksel sistem elemanları gösterilmiştir.

(Mechanical systems obey Newton's law that the sum of the forces equals zero; that is, the sum of the applied forces must be equal to the sum of the reactive forces. Mechanical systems can be divided into two basic systems.

(a) Translational systems and (b) Rotational systems

We will consider these two systems separately and describe these systems in terms of three fundamental linear elements. Symbolically, this element is represented by a block as shown in Fig. 6)



Şekil 6. Öteleme hareketi yapan basit mekanik sistem elemanları (a) Kütle (b) Damper (c) Yay. (Fig. 6. Passive linear elements of translational motion (a) Mass (b) Dashpot (c) Spring).

3.7.1. Direnç (sönümleme) Elemanı (Resistive Elements):

Burada ele alınacak sönümleme elemanları doğrusal davranış gösteren, viskoz sürtünmenin geçerli olduğu damperlerdir. Durağan veya Coloumb sürtünmesi gibi doğrusal olmayan sönüm şekilleri kapsam dışındadır.

(The following analysis includes only linear functions which is the damping, or viscous, friction. Static friction, Coulomb friction, and other nonlinear friction terms are not included).

(a) *Öteleme Mekanik (Translational systems):*

İdeal Damper:

Damper adı verilen mekaniksel sönümleyiciler üzerlerine uygulanan hareketi ısıya dönüştürerek mekaniksel enerjiyi sönümlerler. Sürtünme hareketi viskoz olduğu durumda sürtünme kuvveti hızla doğru orantılıdır. İdeal bir damperin hareket denklemi

(A damper or dashpot is a mechanical element that dissipates energy in the form of heat instead of storing it (shown in Fig 3.6b). When the friction is viscous friction, the frictional force is proportional to velocity, v(t). This force is also known as damping force and written as)

$$F_b = bv = b\frac{dx}{dt}$$

olarak elde edilir. Burada b (N.s/m) sürtünme veya sönüm katsayısıdır. Yukarıdaki denklemin Laplace transformu alındığında sönüm elemanının transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

(where b is the damping coefficient (N.s/m). The transfer function is):

$$G_1(s) = \frac{V(s)}{F_b(s)} = \frac{1}{b} \quad veya \quad G_2(s) = \frac{X(s)}{F_b(s)} = \frac{1}{bs}$$

Mekanik direnç (and mechanical resistance is):

$$R_m = \frac{1}{b}$$

(b) *Dönel Sistemler (Rotational systems):*

İdeal Dönel Damper:

Dönme hareketine ters yönde tepki vererek hareketi sönümlemeye yarayan dönel damperin denklemi aşağıda verilmiştir.

(Rotational dashpot creates a frictional torque which opposes the rotational motion is given by);

$$T_b = b_t\omega = b_t\frac{d\theta}{dt}$$

Burada b_t dönel sönüm katsayısı, ω açısal hız ve θ ise açısal yer değiştirmedir. Dönel sönümleyicinin transfer fonksiyonu

(Where b_t is the rotational damping coefficient, ω is the angular velocity and θ is the angular displacement. Transfer function for rotational systems is);

$$G_1(s) = \frac{\omega(s)}{T_b(s)} = \frac{1}{b_t} \quad veya \quad G_2(s) = \frac{\theta(s)}{T_b(s)} = \frac{1}{b_t s}$$

olarak bulunur. Mekanik direnç (and mechanical resistance is):

$$R_m = \frac{1}{b_t}$$

7.2. Kapasite Elemanları (Capacitive Elements):

(a) Öteleme Mekanik sistemler (Translational systems):

İdeal Kütle:

Sönümleme ve yay etkisi ihmal edilen bir katı cisim ideal bir kütle elemanı olarak modellenebilir. Kütle enerjiyi kapasitif etki ile depolayan elemandır. Hareket denklemi Newton yasasının uygulanması ile aşağıdaki gibi bulunur.

(*Mass:* This represents an element which resists the motion due to inertia. Inertia may be defined as the change in force (torque) required to make a unit change in acceleration (angular acceleration). According to Newton's second law of motion, the inertia force is equal to mass times acceleration).

$$F_m = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Burada *a* ivme, *v* hız ve *x* ise kütlenin yer değiştirmesidir. Kütle elemanının uç ve iç değişken türünden transfer fonksiyonu:

(Where a, v and x denote acceleration, velocity and displacement of the body, respectively. Symbolically, this element is represented by a block as shown in Fig. 3.6(a). The transfer function in terms of across and through variable (V(s) , F_m(s)) and in terms of X(s) and F_m(s) are):

$$G_1(s) = \frac{V(s)}{F_m(s)} = \frac{1}{ms} \quad veya \quad G_2(s) = \frac{X(s)}{F_m(s)} = \frac{1}{ms^2}$$

Mekanik kapasite (and mechanical capacity is:

$$C_m = m$$

(b) Dönel sistemler (Rotational systems):

İdeal Dönel Kütle:

Dönel sistemlerde kapasitif eleman dönen cismin eylemsizlik momentidir J (kg*m^2). Dönel cisme bir moment uygulandığında sistem üzerindeki net moment Newton yasası kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

(The capacitive element in rotational systems is called moment of inertia, J ($kg*m^2$) of rotating mass. Equation of motion for rotational mass is given by)

$$T_m = J\alpha = J\frac{d^2\theta}{dt^2} = J\frac{d\omega}{dt}$$

Burada α (rad/s^2) açısal ivmedir. Dönel kütle için transfer fonksiyonu

(Where α (rad/s^2) is the angular acceleration. The transfer function of the equation for rotational mass system is)

$$G_1(s) = \frac{\omega(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{Js} \quad veya \quad G_2(s) = \frac{\theta(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

olarak bulunur. Mekanik kapasite (and mechanical capacity is):

$$C_m = J$$

7.3. İndüktans Elemanları (Inductive Element):

(a) *Öteleme sistemleri (Translational systems):*

İdeal Yay: Kütlesi ve sönümleyiciliği ihmal edilen ve bir kuvvet karşısında kuvvete orantılı geçici şekil değişikliğine uğrayan katı cisimlere yay denir. Yaylar mekaniksel enerjiyi potansiyel enerji şeklinde depolar. Eğer üzerlerine fazla bir yük uygulanırsa yaylar doğrusal olmayan davranış gösterirler. Doğrusal bir yay için hareket denklemi:

(A spring is an elastic object used to store mechanical energy in terms of potential energy (shown in Fig. 6c). The restoring force of a spring is proportional to the displacement in linear springs. However, in practice most of the springs behave nonlinearly after a certain deformation. For linear spring)

$$F_k = kx$$

Burada k yayın esneklik sabitidir. İdeal bir yayın transfer fonksiyonu ise

(where k is the stiffness of the spring or simply spring constant. The transfer function for spring element is):

$$G_1(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{s}{k} \quad veya \quad G_2(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{k}$$

olarak bulunur. Mekanik indüktans (and mechanical inductance is):

$$L_m = \frac{1}{k}$$

(b) *Dönel Sistemler (Rotational systems):*

İdeal Dönel Yay: Öteleme yayının dönel sistemlerdeki karşılığı dönel yaydır ve hareket denklemi

(Rotational counterpart of spring element is torsional or rotational spring. Equation of motion for torsional spring is)

$$T_k = k_t \theta$$

olarak verilir. Dönel yayın transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir (and its transfer function is).

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{T_k(s)} = \frac{s}{k_t} \quad veya \quad G(s) = \frac{\theta(s)}{T_k(s)} = \frac{1}{k_t}$$

Mekanik indüktans (and mechanical inductance is):

$$L_m = \frac{1}{k_t}$$

8. EMPEDANS KAVRAMI (IMPEDANCE)

Şu ana kadar, fiziksel elemanların kendi özelliklerini tartıştık. Bu bölümde, tam bir sistemin fiziksel modelini oluşturmak için elemanların birbiriyle nasıl ilişkilendirilebileceğini açıklayacağız.

(So far, we have discussed properties of individual physical elements. In this section we will explain the way in which the elements can be interrelated to form the physical model of a complete system).

8.1. Giriş

Sistemlerin giriş değişkeni **iç değişken** ve çıkış değişkeni de **uç değişken** ise bu ikisi arasındaki ilişkiyi **s** bölgesinde (domeninde) gösteren transfer fonksiyonuna Empedans denir.

Elektrik sistemlerinde voltajın akıma oranı olarak tarif edilebilir. En basit anlamda empedans, **R** direncidir. Genel anlamda empedans ise **Genelleştirilmiş Direnç** olarak bilinir.

(If the through and across variables correspond to the system input and output variables respectively, the impedance of a system is defined to be the ratio of the Laplace transform of the output to the Laplace transform of the input, under the assumption that all initial conditions are zero.

The magnitude of the impedance Z acts just like resistance, giving the drop in voltage amplitude across an impedance Z for a given current I).

- Direnç (Resistance) $e(t) = R\,i(t)$ $E(s) = R\,I(s)$ $Z_R(s) = R$
- Kapasitör (Capacitance) $e(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$ $E(s) = \dfrac{1}{C\,s}I(s)$ $Z_C(s) = \dfrac{1}{C\,s}$
- İndüktans (Inductance) $e(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ $E(s) = L\,s\,I(s)$ $Z_L(s) = L\,s$

Basit sistemler için Transfer fonksiyonu (Transfer Function)

$T(s) = G(s) = Z(s) = \frac{uç\ değişken\ (across\ variable)}{iç\ değişken\ (through\ variable)}$ dir.

Basit elemanların seri veya paralel bağlanması sonucu sistemler oluşur. Eleman gruplarının, sistemlerin incelenmesinde uç değişken **E** ve iç değişken **I**'yı birbirine **E = Z I** olarak bağlayan bağıntıda **Z** empedanstır.

(Components of an electrical circuit can be connected in many different ways. The two simplest of these are called **series** and **parallel** and occur very frequently. A circuit composed solely of components connected in series is known as a **series circuit**; likewise, one connected completely in parallel is known as a **parallel circuit.** The total impedance of many simple networks can be calculated using the rules for combining impedances in series and parallel).

8.1. Elektriksel Empedans Analizi (Electrical Impedance Analysis)

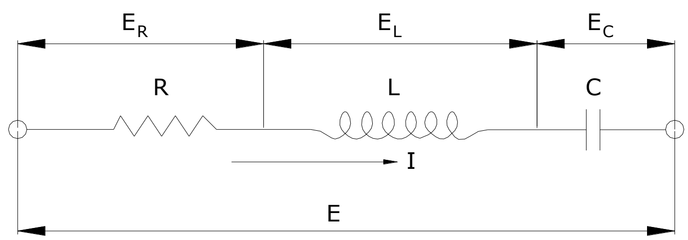
Seri Bağlama (Series Connection):

Tek bir devre boyunca seri olarak bağlanan bileşenler için, her devre elemanından geçen akım aynıdır; toplam empedans basitçe bileşen empedanslarının toplamıdır. Seri bir devrede, bileşenlerin her birinden geçen akım aynıdır ve bileşenlerdeki voltaj, her bir bileşendeki voltajların toplamıdır.

Şekil 7'de gösterilen elektrik devresini ele alalım. Devre, bir endüktans L (Henry), bir direnç R (ohm) ve bir kapasitans C (farad) içerir. Kirchhoff'un voltaj yasasını sisteme uygulayarak aşağıdaki denklemleri elde ederiz

(For components connected in series along a single path, the current through each circuit element is the same; the total impedance is simply the sum of the component impedances. In a series circuit, the current through each of the components is the same, and the voltage across the components is the sum of the voltages across each component.

Consider the electrical circuit shown in Figure 7. The circuit consists of an inductance L (Henry), a resistance R (ohm), and a capacitance C (farad). Applying Kirchhoff's voltage law to the system, we obtain the following equations):



Şekil 7. Seri bağlama (Fig. 7. Series Connection).

Seri bağlantıda (In series connection);

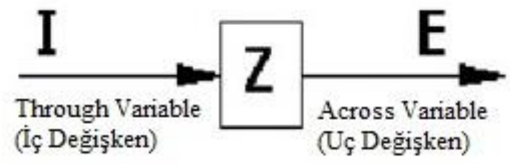
- Her elemandaki iç değişken aynıdır (Through variable is same for each component)
- Her elemandaki uç değişken farklıdır (Across variable is different for each component)

$$E = E_R + E_L + E_C$$

Seri bağlamada I akımı iç değişken olan bu basit elemanların her birinde aynıdır. Uç değişken olan E potansiyel farkı ise bu elemanların her birinde farklıdır.

(Total potential difference across the nodes of the circuit in Fig. 3.7 is)

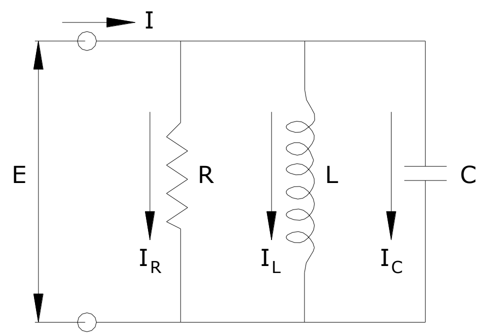
$$E = \left(R + Ls + \frac{1}{Cs} \right) I \qquad Z = R + Ls + \frac{1}{Cs} \qquad Z = Z_R + Z_L + Z_C$$



Paralel Bağlama (Parallel Conneciton):

Paralel bağlanan bileşenler için, her devre elemanındaki voltaj aynıdır; Akımların herhangi iki elemandan geçen oranı, empedanslarının ters oranıdır. Paralel bir devrede, bileşenlerin her birindeki voltaj aynıdır ve toplam akım, her bir bileşenden geçen akımların toplamıdır.

(For components connected in parallel, the voltage across each circuit element is the same; the ratio of currents through any two elements is the inverse ratio of their impedances. In a parallel circuit, the voltage across each of the components is the same, and the total current is the sum of the currents through each component).



Şekil 8. Paralel bağlama (Fig. 8. Parallel Connection)

Paralel bağlantıda (In parallel connection);

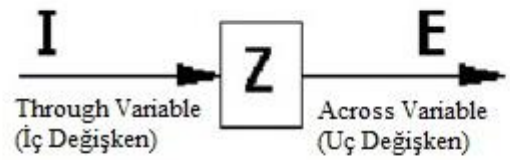
- Her elemandaki uç değişken aynıdır (Across variable is same for each component)
- Her elemandaki iç değişken farklıdır (Through variable is different for each component)

Hence the inverse total impedance is the sum of the inverses of the component impedances:

$$I = I_R + I_L + I_C$$

$$I = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs \right) E \qquad E = \left(\frac{1}{1/R + 1/Ls + Cs} \right) E$$

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs} = \frac{1}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}} \qquad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}$$



Transfer Fonksiyonu Türleri **(Types of Transfer Functions)**

a) Kazanç Tipi (Gain Type)

$$G(s) = K$$

K: Sabit (Constant)

b) İntegral Tipi (Capacitive Type)

$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$

T: Zaman sabiti (Time constant)

c) Zaman Sabiti Tipi (Time Constant Type)

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

T: Zaman sabiti (Time constant)

d) Titreşim Tipi (Vibration Type)

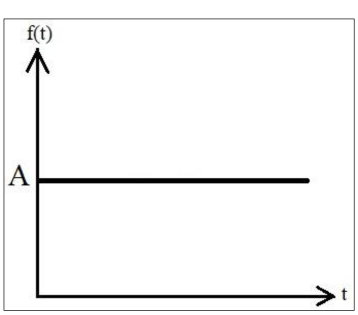
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\tau\omega_n s + \omega_n^2}$$

τ: Sönüm oranı (Damping ratio)

ω_n: Doğal frekans (Naturel frequency)

Transfer Fonksiyonlarının Dinamik Davranışlarının Parametreleri **(Dynamical Parameters of Transfer Functions)**

a) Kazanç Tipi (Gain Type)



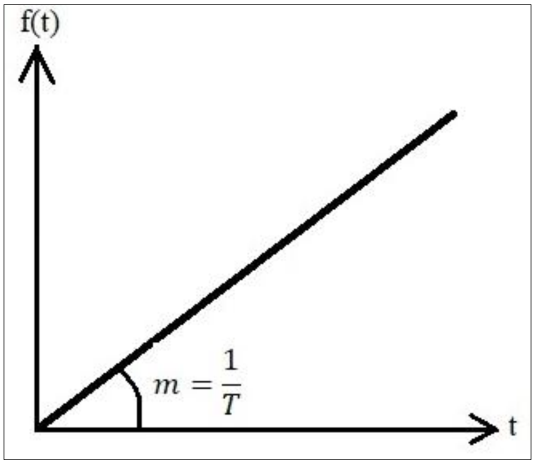
Giriş (Input): $r(t) = Au(t) => R(s) = \frac{A}{s}$

Çıkış (Output): $C(s) = G(s) * R(s)$

$$C(s) = K\frac{A}{s}$$

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{AK}{s}\right] => \ C(t) = AKu(t)$$

b) İntegral Tipi (Capacitive Type)



$$r(t) = u(t) => R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = G(s) * R(s) = \frac{1}{Ts} * \frac{1}{s} = \frac{1}{Ts^2}$$

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Ts^2}\right] => \; C(t) = \frac{1}{T}t$$

c) Zaman Sabiti Tipi (Time Constant Type)

$$r(t) = u(t) => R(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

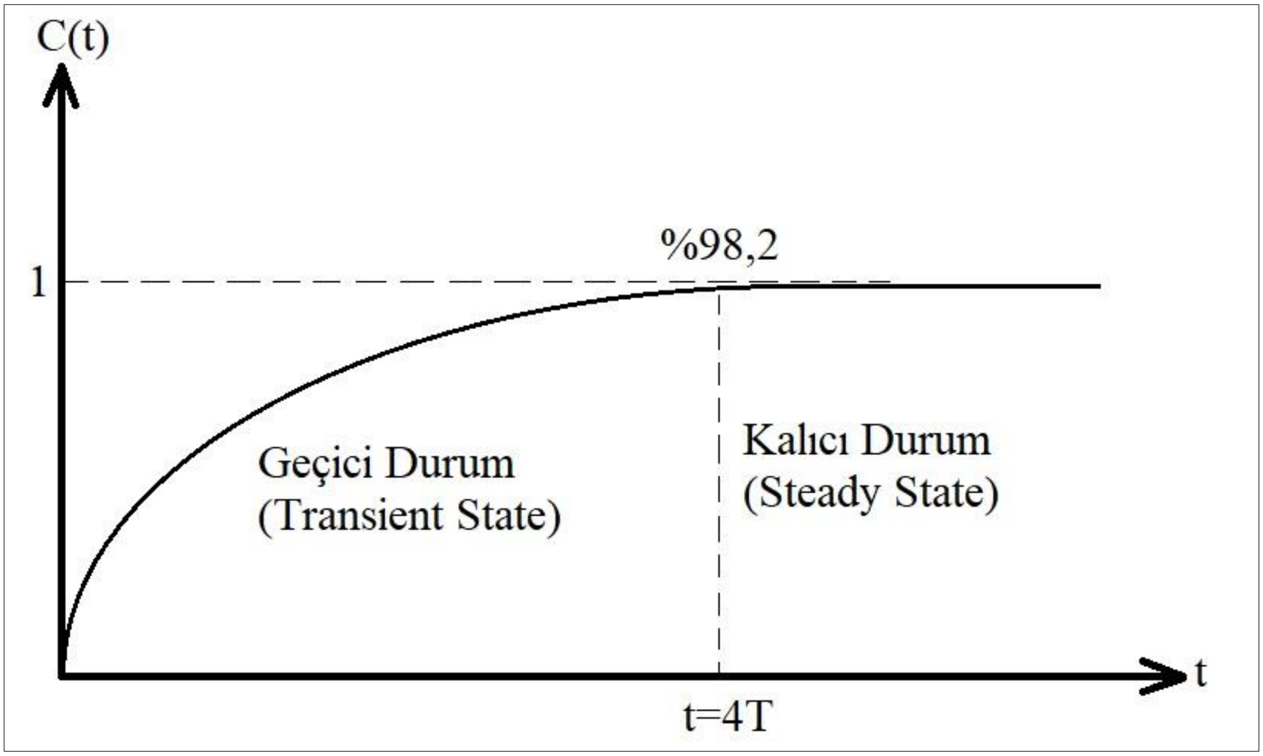
$$C(s) = G(s) * R(s) = \left(\frac{1}{Ts+1}\right) * \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts+1}$$

$$A = \lim_{s\to 0} s * C(s) = \lim_{s\to 0} s * \left(\frac{1}{Ts+1}\right) * \left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

$$B = \lim_{s\to -\frac{1}{T}} (Ts+1) * C(s) = \lim_{s\to -\frac{1}{T}} (Ts+1) * \left(\frac{1}{Ts+1}\right) * \left(\frac{1}{s}\right) = -T$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{T}{T\left(s+\frac{1}{T}\right)} => C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t}$$



d) Titreşim Tipi (Vibration Type)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{\underbrace{s^2 + 2\tau\omega_n s + \omega_n^2}_{\text{Öz yapısal denklem (Characteristic Equation)}}}$$

τ: Sönüm oranı (Damping ratio)

ω_n: Doğal frekans (Naturel frequency)

$$r(t) = u(t) => R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = G(s) * R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\tau\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Öz yapısal denkleme göre 3 farklı durum söz konusudur

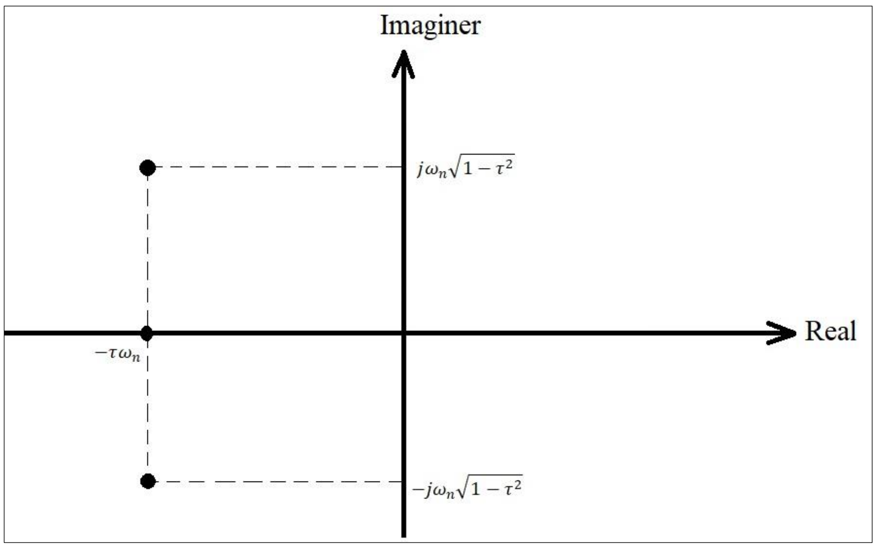
(For characteristic equation we have 3 different situation)

1) if $\quad 0 < \tau < 1$

$$s_{1,2} = -\tau\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\tau^2}$$

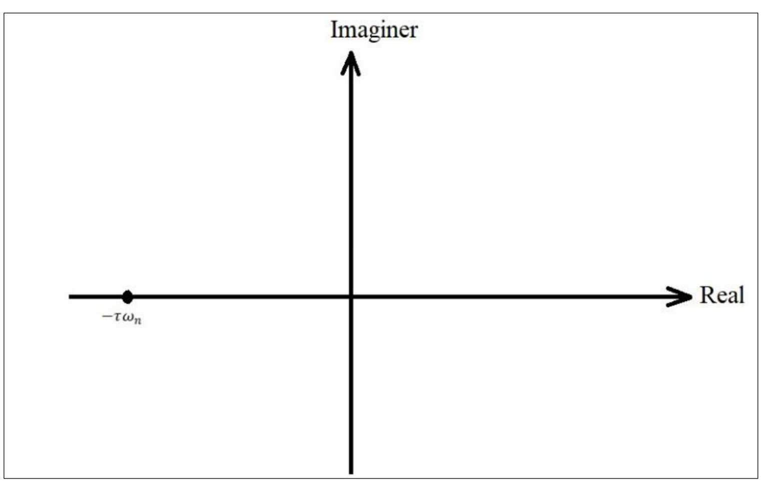
Kökler sol yan düzlemde ise sistem sönümlü titreşimlidir.

(If roots are in left plane system is damped vibration type).



2) if $\quad \tau = 1$

$$s_{1,2} = -\tau\omega_n$$



Sistem kritik sönümlüdür.

(System is critical damped)

3) if $\tau > 1$

$$s_{1,2} = -\tau\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\tau^2 - 1}$$

Sistem titreşimsiz, aşırı sönümlü sistemdir.

(The system is a nonvibrating, overdamped system).

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s) * R(s)] = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\tau^2 - 1}}\left(\frac{e^{-P_1 t}}{P_1} - \frac{e^{-P_2 t}}{P_2}\right)$$

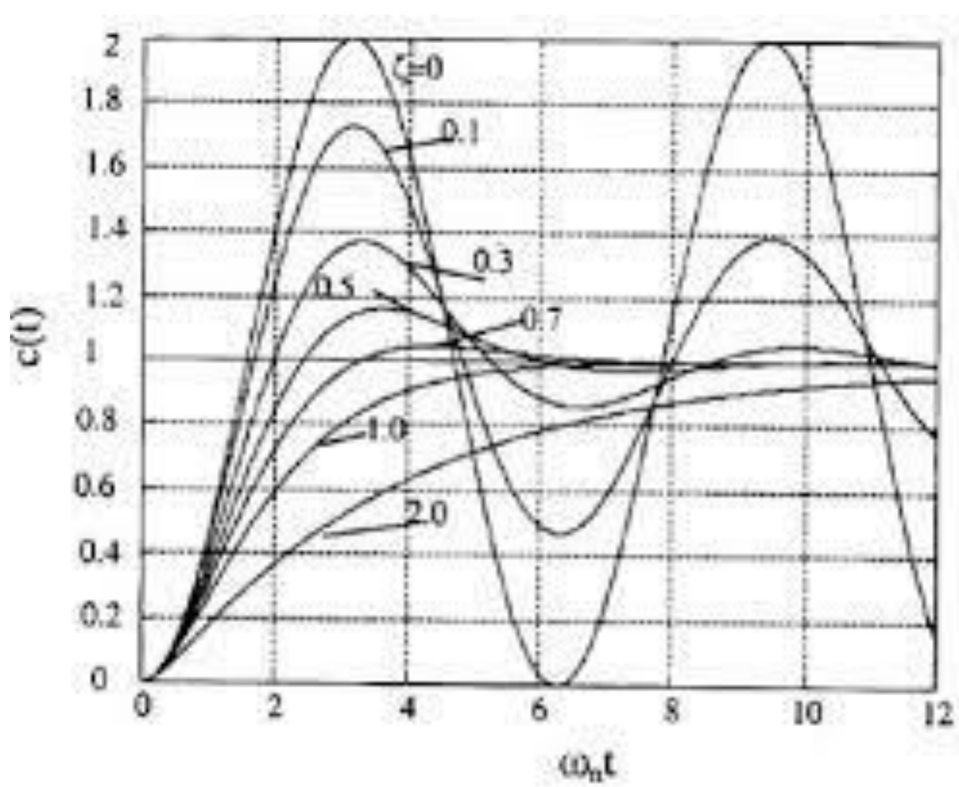
$P_1 = \omega_n\left(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}\right)$ $\qquad$ $P_2 = \omega_n\left(\tau - \sqrt{\tau^2 - 1}\right)$

if $\tau = 0$

$$s_{1,2} = -\tau\omega_n$$

Sistem sönümsüz titreşimlidir (System is undamped system)

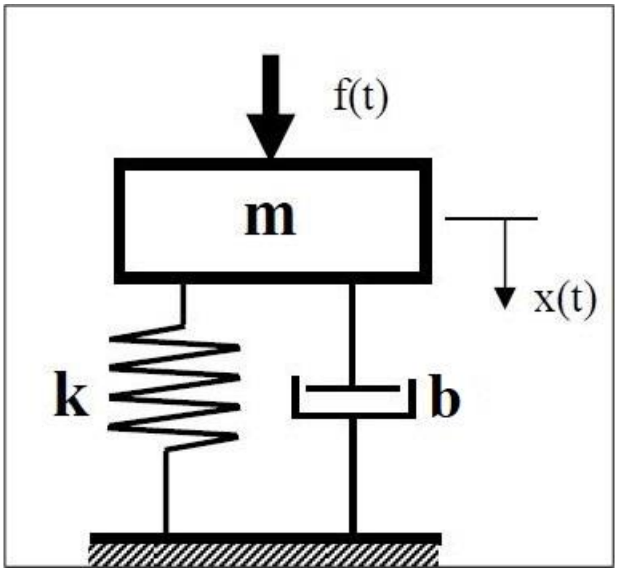
$$C(t) = 1 - \sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos(\omega_n t)$$



Örnek (Example)

Aşağıdaki sistemin temel denklemlerini yazarak transfer fonksiyonunu bulunuz, temel sabitleri çıkarınız.

(Find the transfer function by writting basic equations of following system, find basic constants).

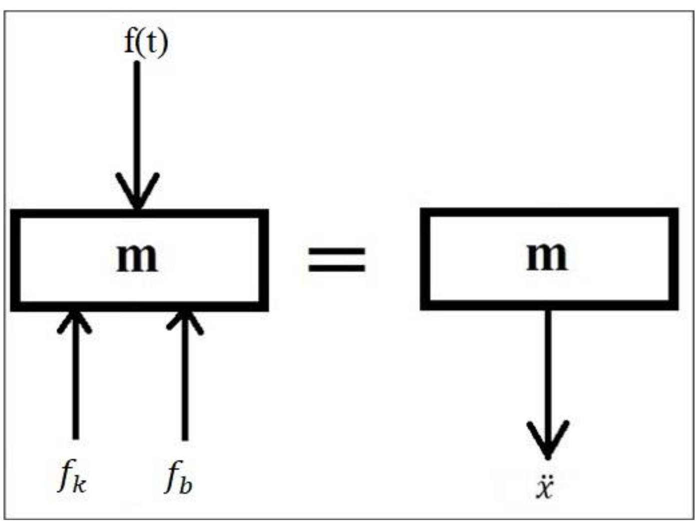


$$M = 12{,}5\ kg$$

$$k = 0{,}2\ \frac{N}{m}$$

$$b = 0{,}035\ \frac{Ns}{m}$$

Serbest cisim diyagramını çizelim (Draw free body diagram)



$$\sum f(t) = ma = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$f(t) - f_b - f_k = ma$$

$$f(t) - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$f(t) = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$

$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0$

Laplace alınırsa (Laplace Transform)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[m\ddot{x}] + \mathcal{L}[b\dot{x}] + \mathcal{L}[kx]$$

$$F(s) = ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s)$$

$$F(s) = (ms^2 + bs + k)X(s)$$

$$TF = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{X(s)}{(ms^2 + bs + k)X(s)} = \frac{1}{\underbrace{ms^2 + bs + k}_{\text{öz yapısal denklem (Characteristic equation)}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{\frac{1}{k}\overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega_n^2}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{A\omega_n^2}{s^2 + 2\tau\omega_n s + \omega_n^2} \qquad A = \frac{1}{k}$$

A: Kazanç (Gain)

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} => \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0,2}{12,5}} => \ \omega_n = 0,126\ r/s$$

$$2\tau\omega_n = \frac{b}{m} => \tau = \frac{b}{2m\omega_n} = \frac{0,035}{2 * (12,5) * (0,126)} => \tau = 0,011$$

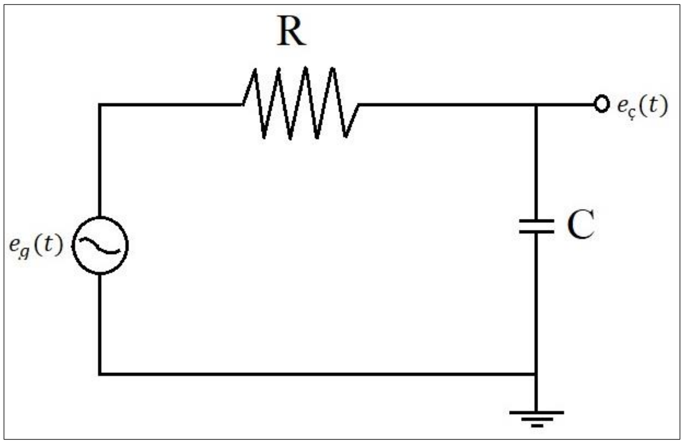
$$A = \frac{1}{k} = \frac{1}{0,2} => A = 5$$

$$G(s) = \frac{A\omega_n^2}{s^2 + 2\tau\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{5 * (0,126)^2}{s^2 + 2 * (0,011) * (0,126) * s + (0,126)^2}$$

$$G(s) = \frac{0,08}{s^2 + 0,0028s + 0,016}$$

$\tau = 0,011 < 1$ olduğundan sönümlü titreşimli (This system is damped vibration type)

Örnek (Example)



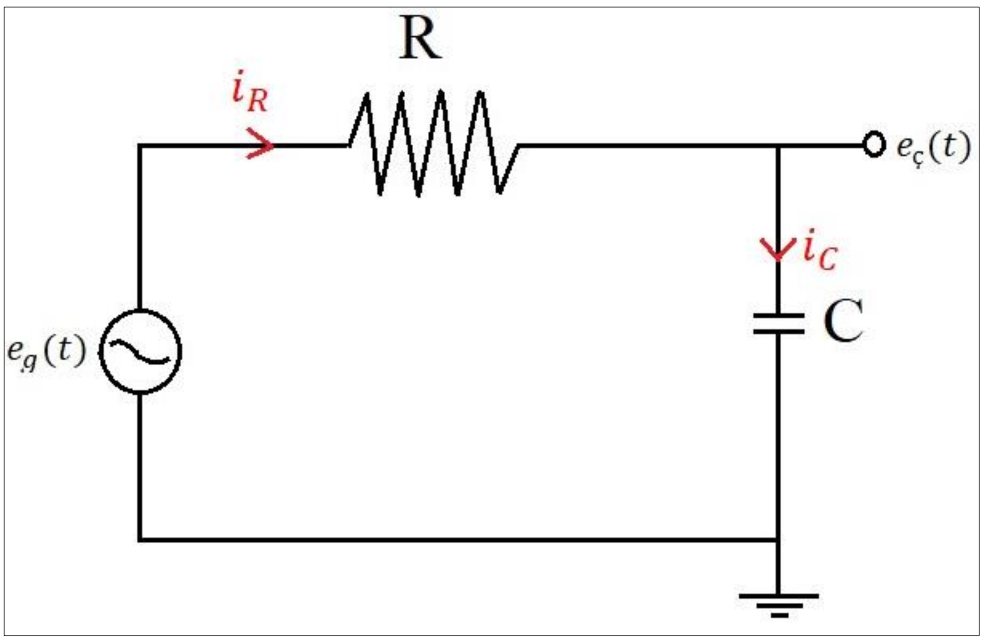
Sistem parametrelerini ve dinamik davranışı bulunuz.

(Find system parameters and dynamical behaviors)

$R = 3{,}3\ k\Omega$

$C = 0{,}47\mu F$

$G(s) = \dfrac{E_ç(s)}{E_g(s)} = ?$



$i_C = C\dfrac{dV_C}{dt}$ $\qquad\qquad$ $i_C = i_R$

Kirşof kanununu uygularsa (Kirchoof Law);

$e_g(t) = e_R(t) + e_C(t)$

$e_C(t) = e_ç(t)$

$e_g(t) = e_R(t) + e_ç(t)$

$$e_g(t) = CR\frac{dV_C}{dt} + e_ç(t)$$

$$e_g(t) = CR\frac{de_C}{dt} + e_ç(t)$$

$$e_g(t) = CR\frac{de_ç}{dt} + e_ç(t)$$

Laplace transformation

$$E_g(s) = CRsE_ç(s) + E_ç(s)$$
$$E_g(s) = (CRs + 1)E_ç(s)$$

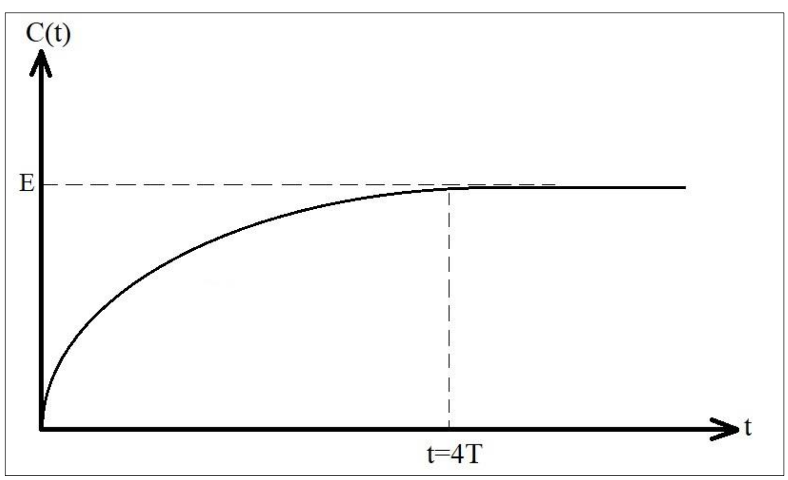
$$G(s) = \frac{E_ç(s)}{E_g(s)} = \frac{1}{CRs + 1} = \frac{\frac{1}{CR}}{s + \frac{1}{CR}}$$

1. dereceden sistem (first order system)

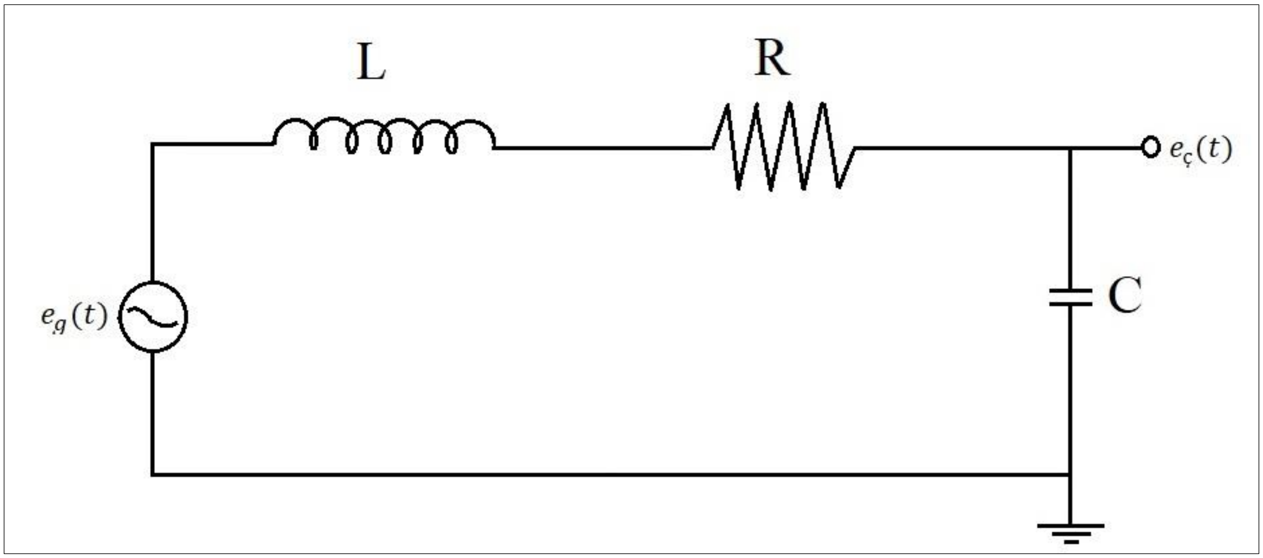
$$\tau = \frac{1}{CR} \qquad Time\ constant\ (Second)$$

$$4\tau = \frac{4}{CR} = \frac{4}{(0{,}47) * 10^{-6} * (3{,}3) * 10^{3}} = 2578{,}98\ second$$

Sistem 4τ değerinde kararlı olur (System is stable at 4τ)

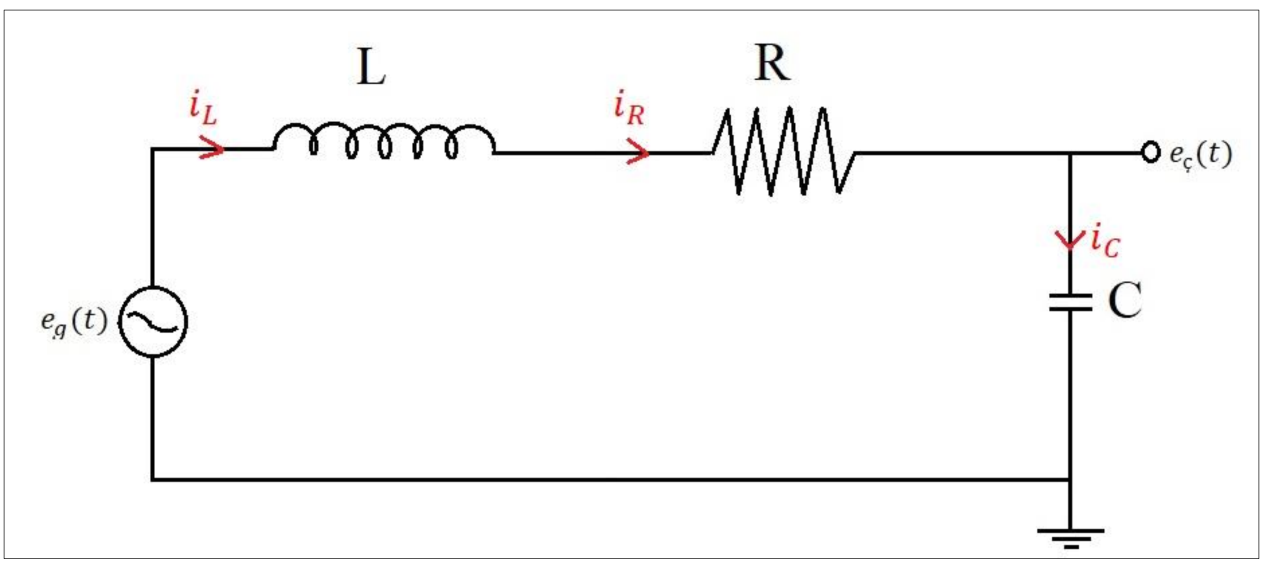


Örnek (Example)



$L = 0{,}003\ H$ $\quad R = 5\Omega$ $\quad C = 150\mu F$

$$G(s) = \frac{E_ç(s)}{E_g(s)} = ?$$



$$e_L = V_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Kirşof kanunundan (Kirchoof Law)

$$e_g(t) = V_L(t) + V_R(t) + V_C(t)$$

$$e_g(t) = e_L(t) + e_R(t) + e_C(t)$$

$$i_L = i_R = i_C$$

$$e_C = e_ç$$

$$e_g(t) = L\frac{di_L}{dt} + i_L R + e_ç$$

$$e_g(t) = L\frac{di_C}{dt} + i_C R + e_ç$$

$$V_C = e_C = e_ç$$

$$e_g(t) = LC\frac{d^2e_ç(t)}{dt^2} + RC\frac{de_ç(t)}{dt} + e_ç(t)$$

$$\mathcal{L}\left[e_g(t)\right] = \mathcal{L}\left[LC\frac{d^2e_ç(t)}{dt^2} + RC\frac{de_ç(t)}{dt} + e_ç(t)\right]$$

$$E_g(s) = LCs^2E_ç(s) + RCsE_ç(s) + E_ç(s)$$

$$E_g(s) = (LCs^2 + RCs + 1)E_ç(s)$$

$$G(s) = \frac{E_ç(s)}{E_g(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{\underbrace{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}_{\text{öz yapısal denklem (Characteristic equation)}}}$$

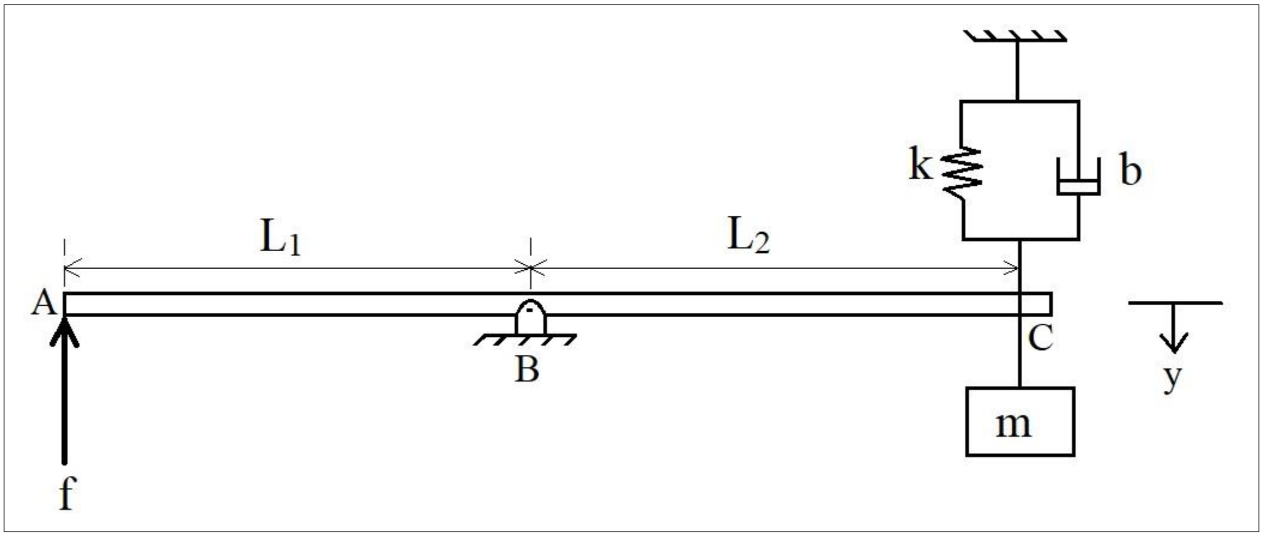
$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = s^2 + 2\tau\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(0{,}003) * 150 * 10^{-6}}} => \omega_n = 1492\ r/s$$

$$\tau = \frac{R}{2\omega_n L} = \frac{5}{2 * 1492 * (0{,}003)} => \tau = 0{,}559 < 1$$

Sistem 2. Dereceden sönümlü titreşimlidir (System is second order damped vibration type)

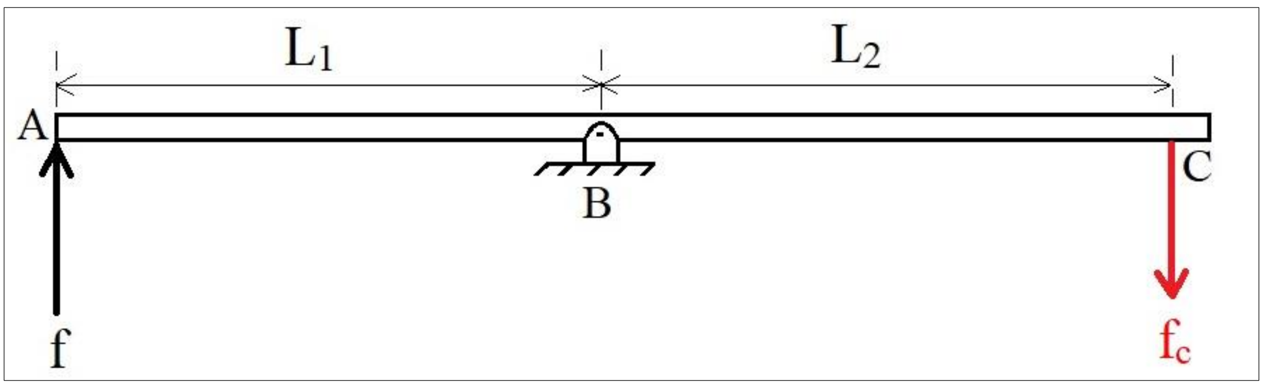
Örnek (Example)



$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = ?$$

A noktasında etki eden f kuvvetinin C noktasında oluşturacağı kuvveti bulalım.

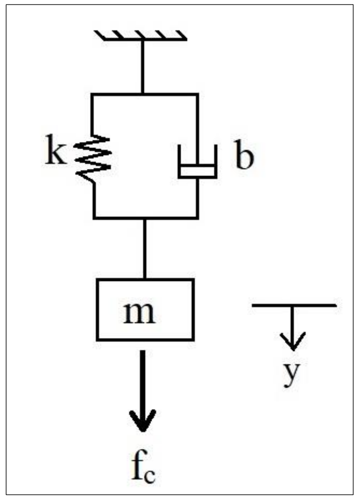
(Let's find the force that f acting on point A will create at point C).



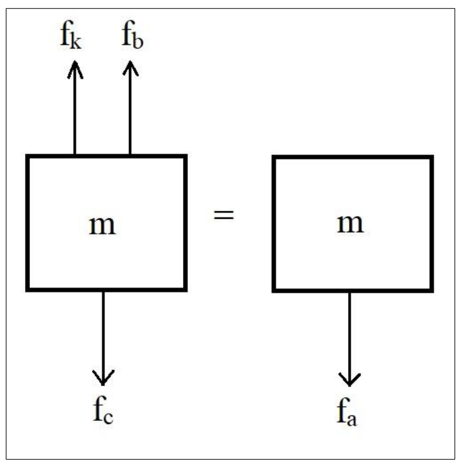
$$f * L_1 = f_c * L_2 => f_c = f\frac{L_1}{L_2}$$

Sağ tarafta kalan sistemi ele alalım

(Let's take the system on the right).



Serbest cisim diyagramını çizelim (Draw free body diagram)



$$f_c - f_b - f_k = f_a$$

$$f_c = f\frac{L_1}{L_2} \qquad f_b = b\dot{y} \qquad f_k = ky \qquad f_a = m\ddot{y}$$

$$f\frac{L_1}{L_2} = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky$$

Laplace dönüşümü (Laplace transformation)

$$\mathcal{L}\left[f\frac{L_1}{L_2}\right] = \mathcal{L}[m\ddot{y} + b\dot{y} + ky]$$

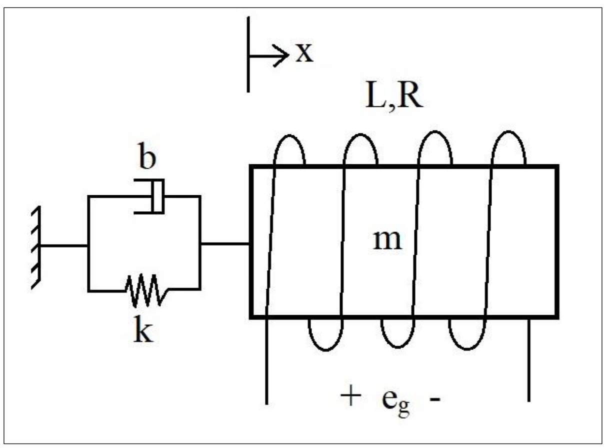
$$F(s)\frac{L_1}{L_2} = ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s)$$

$$F(s)\frac{L_1}{L_2} = (ms^2 + bs + k)Y(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\frac{L_1}{L_2}}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{L_1}{mL_2}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{D\omega_n^2}{s^2 + 2\tau\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \tau = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

Örnek (Example)



$$G(s) = \frac{X(s)}{E_g(s)} = ?$$

$f_m(t) = K_m i(t)$

f_m: Mıknatıs kuvveti (Magnet Force)

K_m: Mıknatıs Sabiti (Magnet Constant)

Elektriksel (Electrical)

$$e_g(t) = L\frac{di}{dt} + Ri$$

Laplace dönüşümü (Laplace transformation)

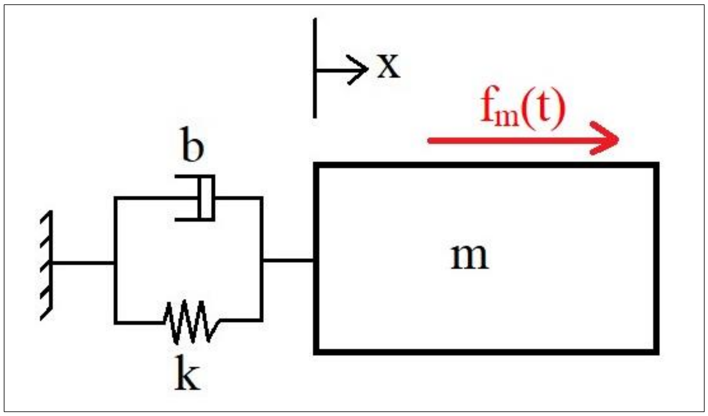
$$E_g(s) = LsI(s) + RI(s)$$

$$I(s) = \frac{E_g(s)}{Ls + R}$$

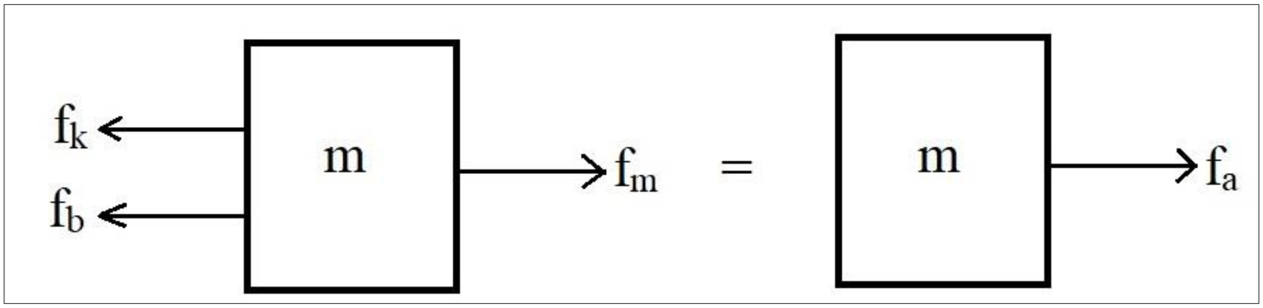
$$f_m(t) = K_m i(t)$$

$$F_m(s) = K_m I(s) \Rightarrow F_m(s) = K_m \frac{E_g(s)}{Ls + R}$$

Mekaniksel (Mechanical)



Serbest cisim diyagramını çizelim (Draw free body diagram)



$$f_m = K_m i(t) \qquad f_b = b\dot{x} \qquad f_k = kx \qquad f_a = m\ddot{x}$$

$$f_m - f_b - f_k = f_a$$

$$K_m i(t) - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$K_m i(t) = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

Laplace dönüşümü (Laplace transformation)

$$K_m I(s) = ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s)$$

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{K_m}{ms^2 + bs + k}$$

$$I(s) = \frac{E_g(s)}{Ls + R}$$

$$\frac{X(s)}{\frac{E_g(s)}{Ls+R}} = \frac{K_m}{ms^2+bs+k}$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{E_g(s)} = \frac{K_m}{(Ls+R)(ms^2+bs+k)}$$

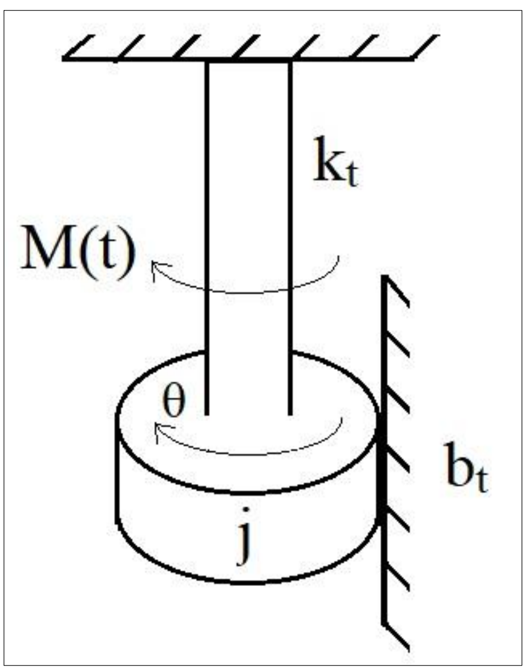
$$G(s) = \frac{\frac{K_m}{R.m}}{\left(\frac{L}{R}s+1\right)\left(s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}\right)}$$

$\frac{L}{R}$: Elektriksel kısmın zaman sabiti (Time constant of electrical)

$\tau = \frac{b}{2\sqrt{km}}$: Mekaniksel kısmın zaman sabiti (Time constant of mechanical)

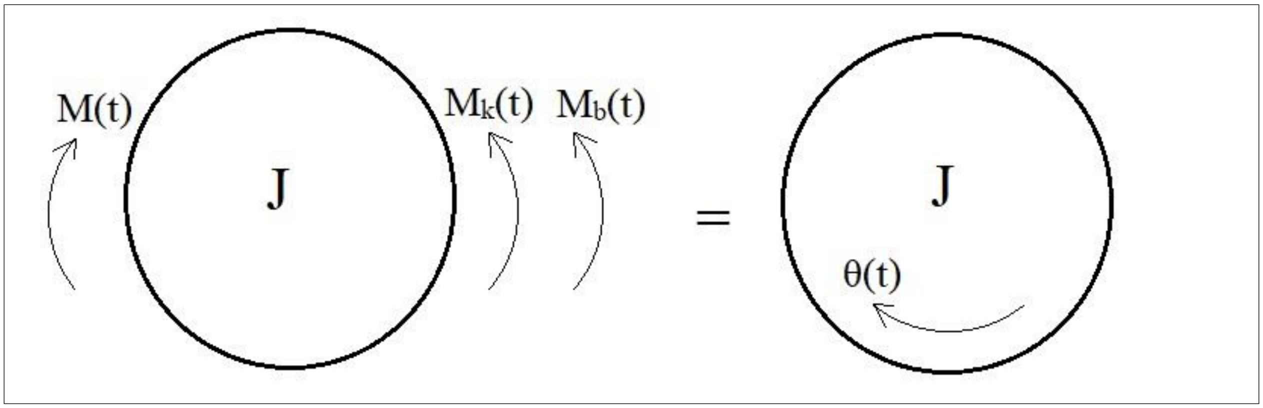
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Örnek (Example)



$$G(s) = \frac{\theta(s)}{M(s)} = ?$$

Serbest cisim diyagramını çizelim (Draw free body diagram)



$$\sum M = T^a$$

$$M(t) - M_k(t) - M_b(t) = T^a$$

$$T^a = J\ddot{\theta}(t) \qquad M_b(t) = b_t\dot{\theta}(t) \qquad M_k(t) = k_t\theta(t)$$

$$M(t) - k_t\theta(t) - b_t\dot{\theta}(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

$$M(t) = J\ddot{\theta}(t) + b_t\dot{\theta}(t) + k_t\theta(t)$$

Laplace dönüşümü (Laplace transformation)

$$M(s) = Js^2\theta(s) + b_ts\theta(s) + k_t\theta(s)$$

$$M(s) = (Js^2 + b_ts + k_t)\theta(s)$$

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js^2 + b_ts + k_t} = \frac{\frac{1}{J}}{s^2 + \frac{b_t}{J}s + \frac{k_t}{J}}$$