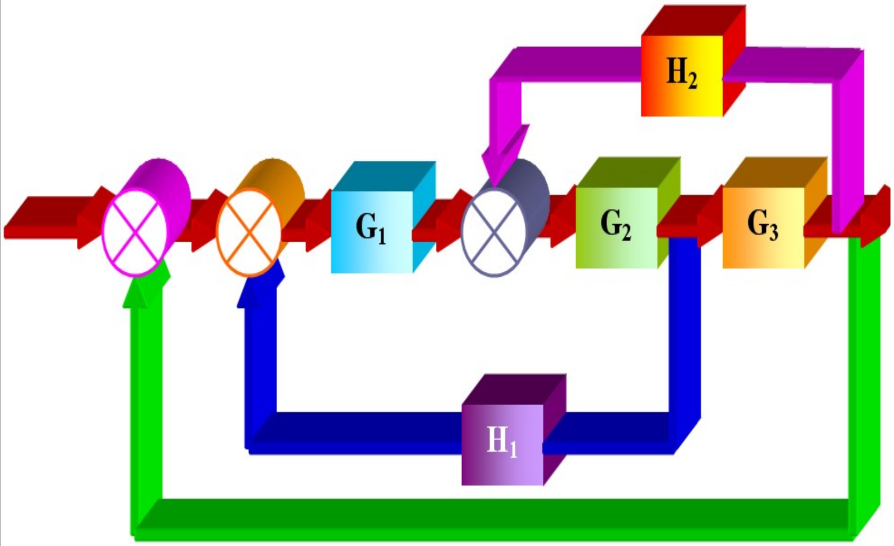
بســـم الله الرحــــمن الرحـــيم



نظرية التحكم في الأنظمة الميكانيكية

يشرح المقال هذا بعض أهم المفاهيم و المواضيع النظرية للتحكم ، هذه المفاهيم و المواضيع ذات أهمية بالغة في بعض فروع الهندسة ، كالهندسة الكهربائية و الميكانيكية. تظهر أهمية مطالعة نظرية التحكم للأنظمة الميكانيكية عند تصميم نظام تحكمي لوسائل (كالصواريخ و الطائرات و السفن و غيرها) يحافظ على إستقرار هذه الوسائل نتيجة تغير الشرائط المؤثرة عليها في كل لحظة زمنية . في هذا المقال حاولت قدر الإمكان تبسيط مفاهيم التحكم و إعطاء أمثلة توضيحية بسيطة و حلها يدوياً و من خلال محيط MTLAB الهدف منها تسريع إستذكارها لدارسيها و تفهيمها لمبتدئيها.

أهم المواضيع التي سنتناول بحثها هي :

- بعض أهم إصطلاحات نظرية التحكم
- تحويلات لابلاس
- موضع جذور المعادلة
- طريقة روث في مطالعة إستقرار الأنظمة
- قاعدة ميسون في مطالعة إستقرار الأنظمة
- معيار نيكوست

بعض أهم إصطلاحات نظرية التحكم

نظام التحكم (control system) عبارة عن أداة أو مجموعة من الأدوات للإدارة و القيادة و التحكم بسلوك الأجهزة و الأنظمة الأخرى المرتبطة مباشرتاً بهذا النظام .

أنواع التحكم :

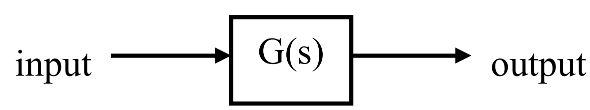
تحكم منطقي (logic control)

تحكم قطع - وصل (on-off control)

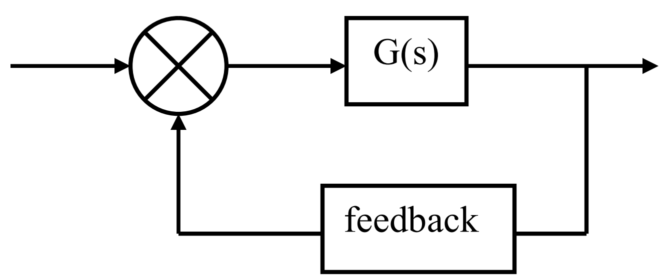
تحكم نسبي (proportional control)

تحكم خطي (linear control)

المدخل (input) و المخرج (output) عبارة عن أوامر بصورة أعداد أو دوال أو قيم أو متغيرات تعطى في حالة (input) أو تأخذ في حالة (output) من نظام ما .



التغذية الإسترجاعية (feedback) من خصائص الأنظمة المغلقة تسمح لمقايسة ما يخرج (output) من النظام الى ما يدخل (input) إليه .



الحلقة المفتوحة (open-loop) في الأنظمة التحكمية التي تحكم النظام فيها مستقل عن ما يخرج من النظام . مثلا الأنظمة الفاقدة للتغذية الإسترجاعية .

الحلقة المغلقة (closed-loop) في الأنظمة التحكمية التي تحكم النظام فيها غير مستقل عن ما يخرج من النظام . تحكم النظام في هذا النوع من الأنظمة يرتبط بما يخرج من النظام ، يرتبط بال (output) . مثلا الأنظمة ذات التغذية الإسترجاعية .

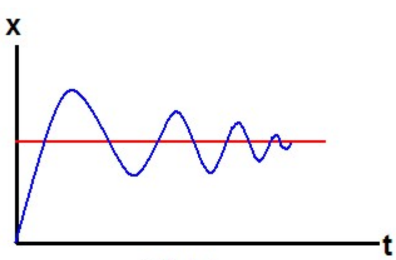
أنظمة التحكم التناظري أو القياسي (analog control systems) هي الأنظمة التي يتم التحكم فيها ببيانات مستمرة (continuous-data)

أنظمة التحكم الرقمي (digital control systems) هي الأنظمة التي يتم التحكم فيها ببيانات غير مستمرة أو منفصلة(discrete-data)

الإستقرار (stability) يرجع إستقرار أي نظام الى المداخل و الى الأضطرابات التي تؤثر على ذلك النظام . النظام المستقر هو النظام الذي يبقى في حالة ثابتة ، أو عند إزالة المؤثرات الخارجية عنه يرجع لحالته الثابتة .

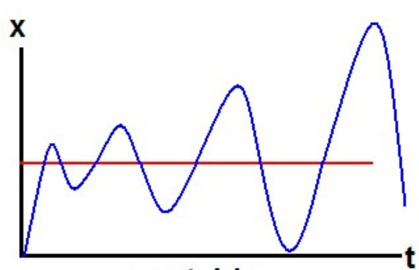
أنظمة مستقرة

stable

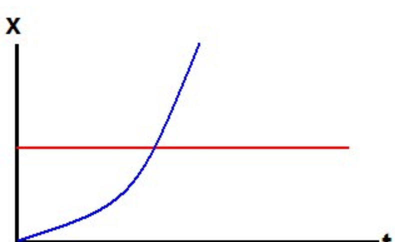


Stable

أنظمةغير مستقرة



unstable



unstable

في نظرية تحكم الأنظمة (control system theory) توجد عدة طرق و معاير لمطالعة إستقرار الأنظمة منها :

- مكان جذور المعادلة
- معيار روث
- قاعدة ميسون
- معيار نيكوست

تستخدم في نظرية التحكم عدة نماذج لأنمذجة المسائل التحكمية من هذه الأنمذجة

- الأنمذجة الرياضياتية و فيها يستعان بالمعادلات التفاضلية التي تحكم على النموذج و العمل عليها في فضاء لابلاس بعد التحويلات .
- المخططات الصندوقية (block diagram) و فيها يتم تحويل العناصر المؤثرة الى كيانات مرتبطة ببعضها من خلال مداخل (inputs) و مخارج (outputs)
- مخطط سريان الإشارات (signal flow graph)

للبحث في إستقرار و عدم إستقرار الأنظمة نقوم بالخطوات التالية :

1- تعين العوامل المؤثرة على النظام و تعين ما يدخل و ما يخرج إليه

2- كتابة المعادلات التفاضلية المؤثرة

3- كتابة المعادلات التفاضلية في فضاء لابلاس

4- تحويل جميع روابط فضاء لابلاس الى صناديق و ربطها بصورة منطقية في مخطط صندوقي مع مدخل و مخرج

5- إستنتاج دالة التحويل (transfer function) و المعادلة المميزة (characteristic equation) من المخطط الصندوقي

6- الإستعانة بأحد المعايير مثلا معيار نيكوست لتعين إستقرار النظام أو عدم إستقراره أو الشرائط اللازمة لإستقراره .

تحويلات لابلاس

تحويلات لابلاس من أسهل و أسرع الطرق لحل الكثير من المعادلات التفاضليه العادية الخطية ذات الشرائط البدائية . يستعان بهذه التحويلات لحل الكثير من المعادلات التفاضلية التي تنتج عن تحليل أنظمة التحكم .تعتمد هذه الطريقة على بعض المحاولات الرياضية البسيطة مع الإستعانة ببعض الروابط التحويلية التي يمكن الحصول عليها من جداول خاصة بتحويلات لابلاس .

تعريف : تحويلات لابلاس دالة $f(t)$ عبارة عن $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ و يكتب بهذه الصورة :

$$L\left[f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

مثال : ما هو تحويل لابلاس هذه الدالة $f(t) = t$

$$L\left[t\right] = \int_0^\infty e^{-st} t dt$$

من جداول التكاملات

$$\int_0^\infty e^{-st} t dt = \frac{\Gamma(2)}{s^{1+1}}$$

كذلك من دالة غاما $\Gamma(n+1) = n!$ نستنتج $\Gamma(2) = 1$

إذن :

$$\int_0^\infty e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}$$

إذن تحويل لابلاس هذه الدالة هو :

$$L\left[t\right] = \frac{1}{s^2}$$

في الصفحة القادمة جدول لأهم تحويلات لابلاس

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ ، $s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ ، $s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$u_c(t)=\begin{cases}1 & t\le c\\ 0 & t<c\end{cases}$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
$\delta(t-c)$	e^{-ct}

تحويلات لابلاس إشتقاق رتبة n لداله $f(t)$ نكتبها بهذه الصورة $f^{(n)}(t)$ عبارة عن :

$$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f^{(1)}(0)-s^{n-3}f^{(2)}(0)-\cdots-s^{n-n}f^{(n-1)}(0)$$

مثال : المطلوب حل المعادلة التفاضلية :

$$y''+y=\sin 2t$$

الشرائط البدائية لهذه المعادلة هي $y(0)=0$ و $y'(0)=1$

الحل :

تحويلات لابلاس لطرفين هذه المعادلة هو :

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=\frac{2}{s^2+4}$$

نضع الشرائط البدائية في هذه الرابطة و نبسطها تصبح النتيجه

$$Y(s)=\frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

نكتب هذا التساوي بهذا الشكل

$$Y(s)=\frac{\frac{5}{3}}{s^2+1}-\frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}$$

توجد طرق خاصة لتحويل و تبسيط الكسور .

معكوس لابلاس لهذه الرابطة هو جواب المعادلة و يساوي :

$$y(t)=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t$$

في بعض الأنظمة نستعين بتحويلات لابلاس بهذا الشكل :

$$x \overset{L}{\mapsto} X(s)$$

$$\dot{x} \overset{L}{\mapsto} sX(s)$$

$$\ddot{x} \overset{L}{\mapsto} s^2 X(s)$$

تحويلات لابلاس L

$$L[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$$

$$L[f(\frac{t}{\alpha})] = \alpha F(\alpha s)$$

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

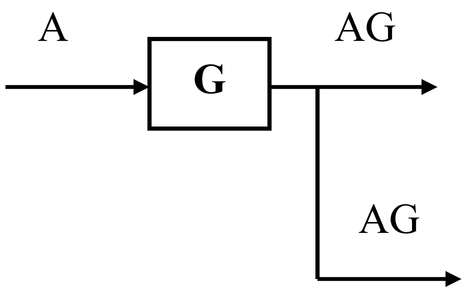
$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

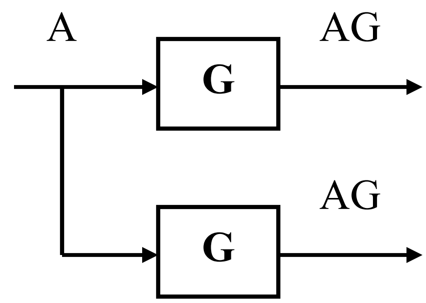
$$L[\frac{d^n}{dt^n} f(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

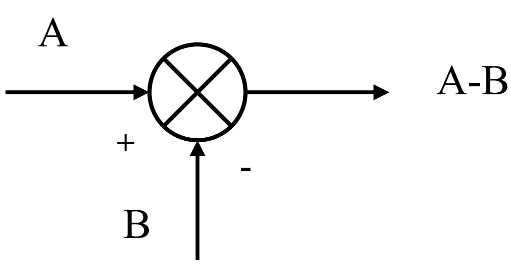
f' إشتقاق رتبة أولى و f'' إشتقاق رتبة ثانية و f''' إشتقاق رتبة ثالثة و هكذا

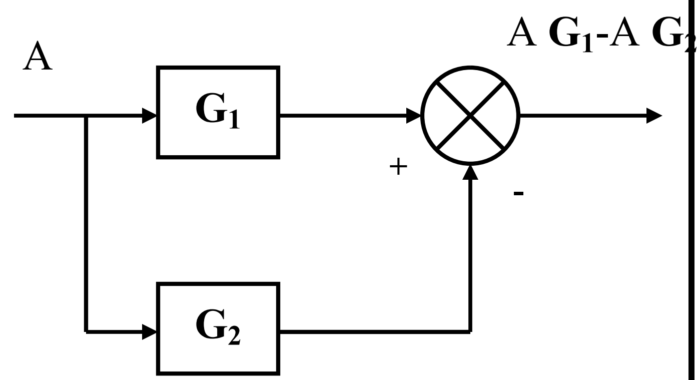
$f^{(n-1)}$ إشتقاق رتبة $n-1$

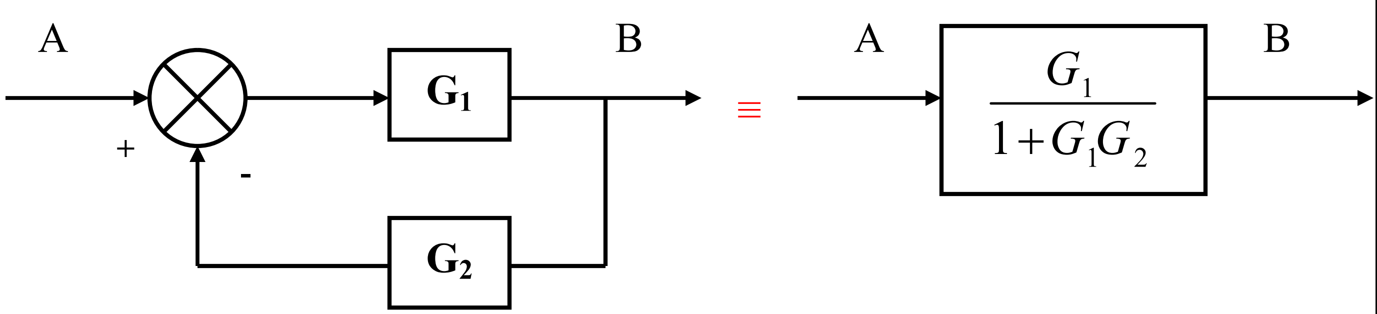
المخطط الصندوقي – block- diagram



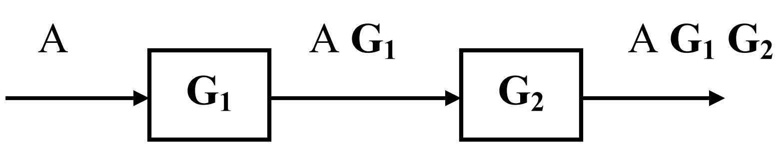




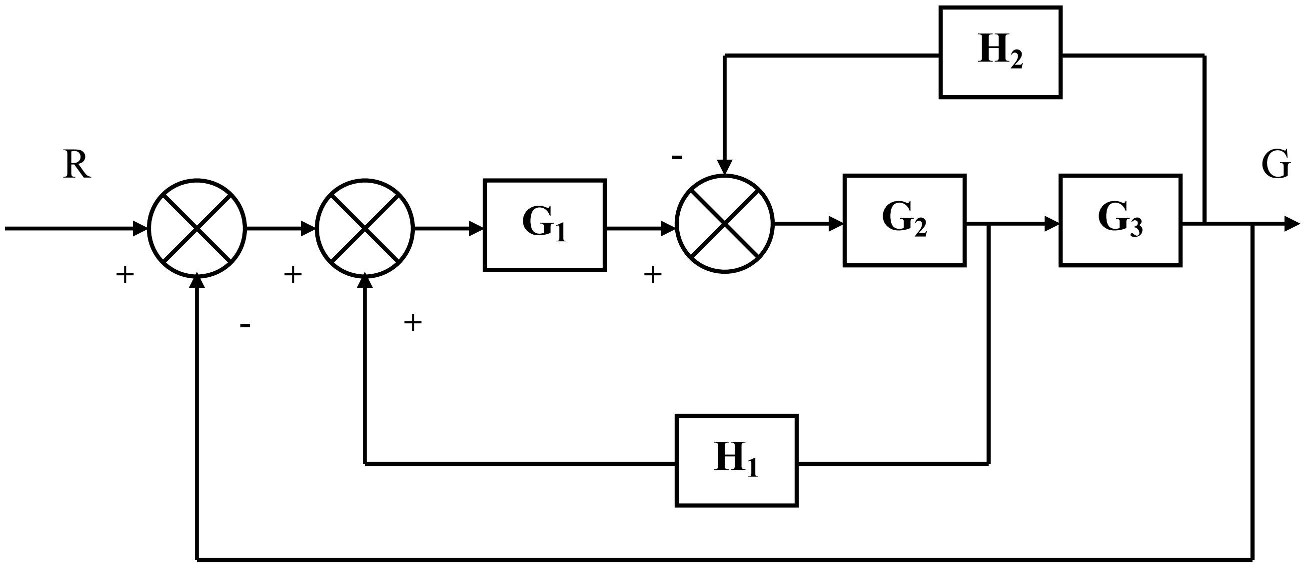




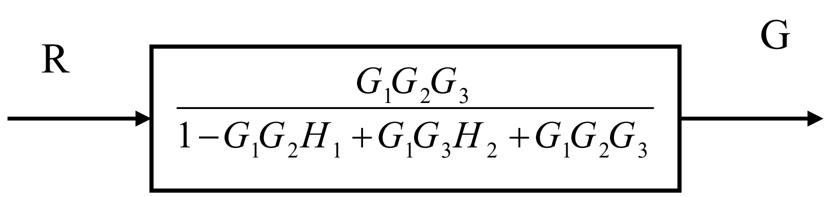
تغذية إسترجاعية G_2



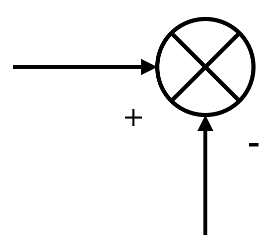
مثال : المطلوب تبسيط المخطط الأسفل



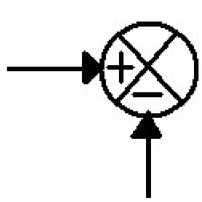
قيمة التغذية الإسترجاعية هنا واحد



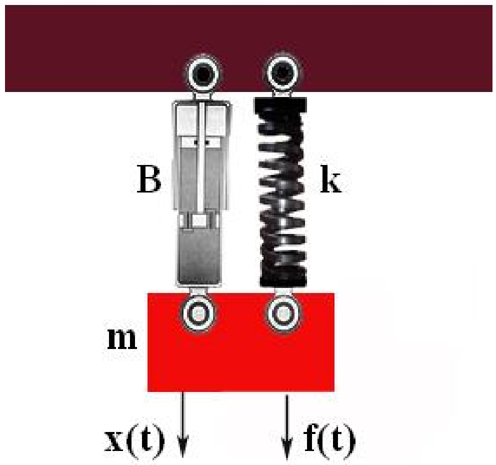
في هذه المخططات



شبيهة للعلامة



من خلال هذا المثال البسيط سنلاحظ كيف يمكن كتابة المخطط الصندوقي لنظام من نابض و مُخمد .



$$f(t) = m\ddot{x} + B\dot{x} + kx$$

$$F(s) = (ms^2 + Bs + k)X(s)$$

من تحويلات لابلاس :

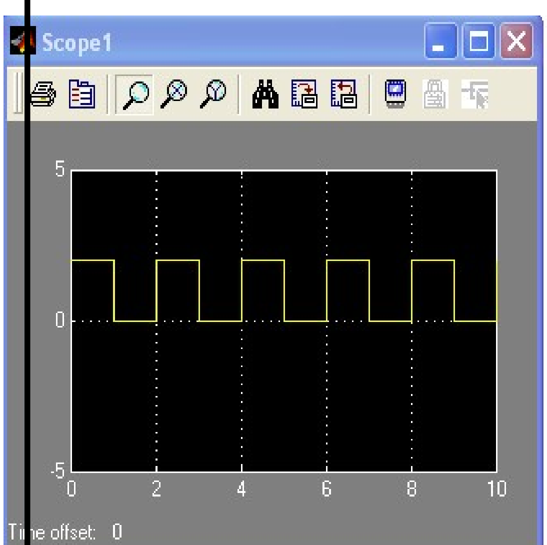
$$\ddot{x} \mapsto s^2X(s) \text{ ، } \dot{x} \mapsto sX(s) \text{ ، } x \mapsto X(s)$$

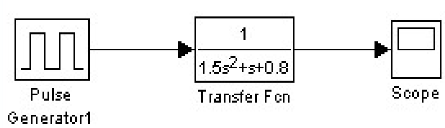
$$\frac{X(s)}{F(x)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k}$$

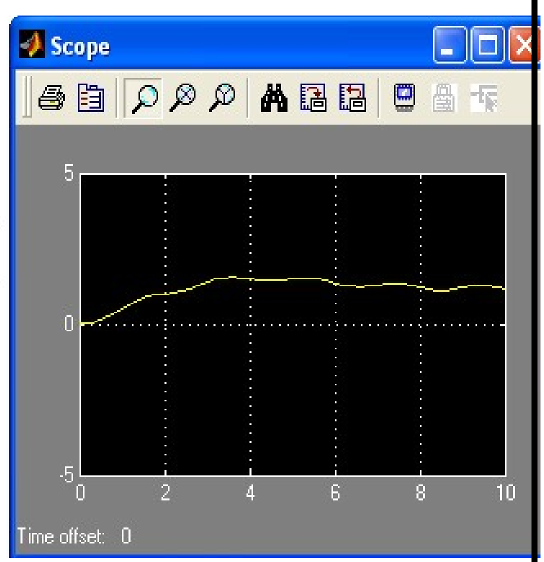
ثم نكتب المخطط الصندوقي بهذا الشكل :

$$F(x) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{ms^2 + Bs + k}} \longrightarrow X(s)$$

ننتخب هذه المقادير $m = 1.5$, $B = 1$, $k = 0.8$ و نرسم هذا المخطط في محيط MATLAB لدالة المدخل pulse (نبضات) .





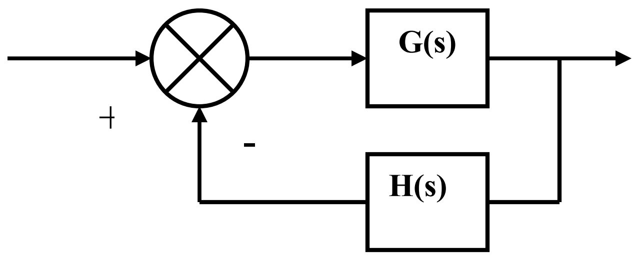


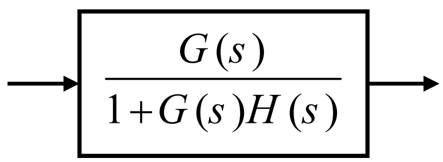
دالة المدخل

دالة المخرج

موضع جذور المعادلة – Root Locus

أحد الطرق المتداولة في موضوع إستقرار الأنظمة هو البحث في مكان موضع جذور المعادلة المميزة في الصفحة العُقدية (المحور الأفقي حقيقي و القائم خيالي) لذلك النظام.



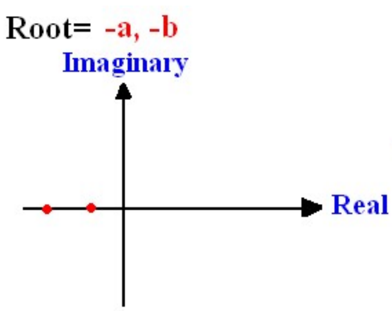


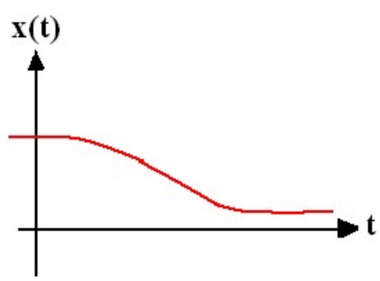
المعادلة المميزة التي يجب البحث عن جذورها في هذا المخطط $1+G(s)H(s)=0$

المواضع التي يمكن أن تظهر فيها هذه الجذور و نوع إستقرار النظام هي :

جذور المعادلة عددين سالبين و حقيقيين .

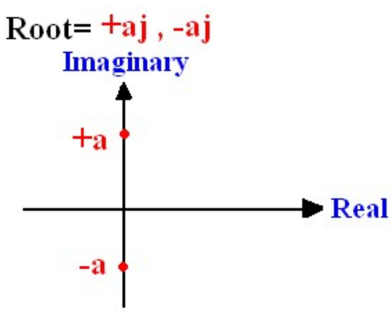
النظام مستقر

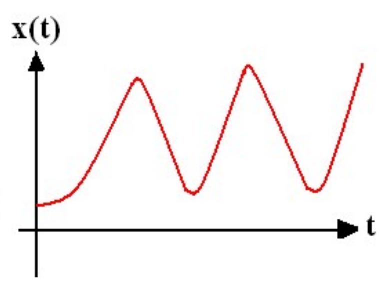




جذور المعادلة عددين خياليين .

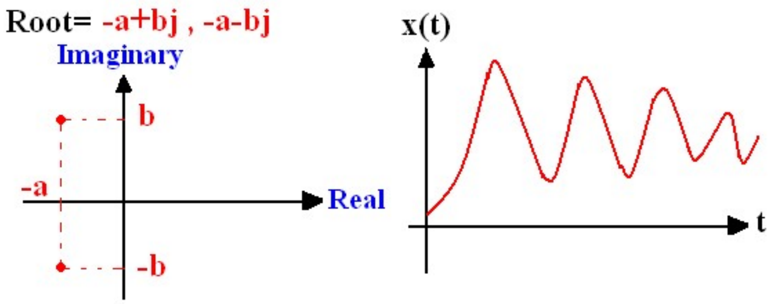
النظام متذبذب



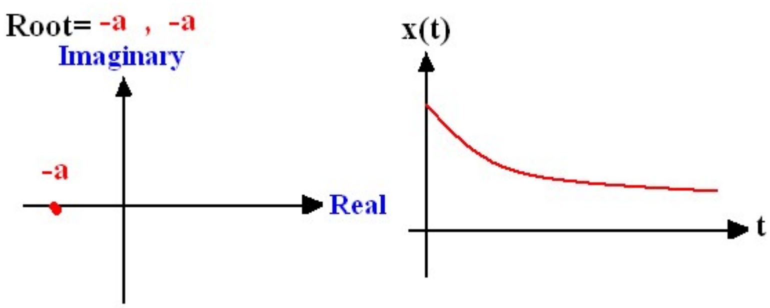


جذور المعادلة أعداد عُقدية العدد الحقيقي فيها موجب .

النظام ذو ذبذبة متحللة .

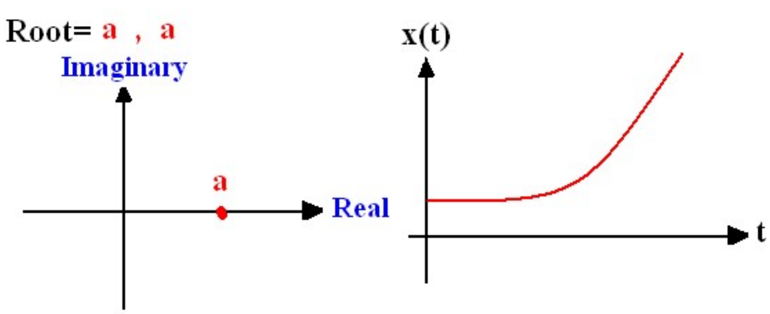


جذور المعادلة أعداد حقيقية سالبة ومتراكبة.



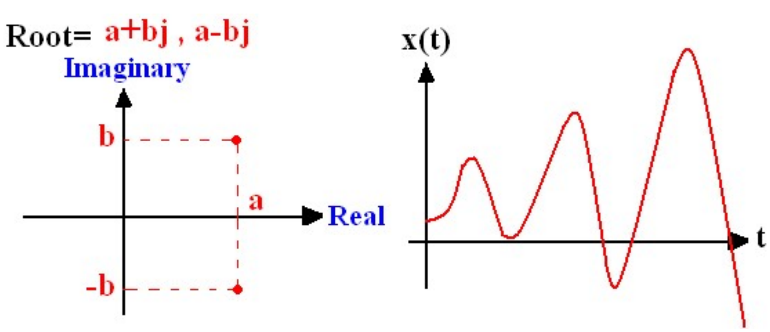
جذور المعادلة أعداد حقيقية موجبة و متراكبة .

النظام غير مستقر



جذور المعادلة أعداد عُقدية و الجزء الحقيقي موجب .

النظام غير مستقر و ذو حركة تذبذبية غير منتهية و في نموّ.



طريقة روث في إستقرار الأنظمة

متى يصبح النظام مستقر و إذا كان غير مستقر كيف نجعله يصبح مستقراً ؟ إذا كانت جذور المعادلة المميزة لذلك النظام في الجهة اليسرى من إحداثيات الصفحة العُقدية أو مركبة فذلك النظام مستقر . معادلة التحويل لهذا النظام :

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0S^m+b_1S^{m-1}+b_2S^{m-2}+\cdots+b_{m-1}S^1+b_m}{a_0S^n+a_1S^{n-1}+a_2S^{n-2}+\cdots+a_{n-1}S^1+a_n}$$

في هذه المعادلة $m \le n$ و المعامل a و b هي معامل ثابتة .

لتعين إستقرار النظام من خلال طريقة روث (Routh) المعادلة المميزة لهذا النظام :

$$a_0S^n+a_1S^{n-1}+a_2S^{n-2}+\cdots+a_{n-1}S^1+a_n=0$$

نكتب معامل المعادلة بهذه الصورة :

S^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$
S^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$
S^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
S^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$
S^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	$\cdots$
. . .					
S^2	e_1	e_2			
S^1	f_1				
S^0	g_1				

تحسب هذه المعامل هكذا :

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

و هكذا حتى يصبح المعمل b مساوي صفر

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

و هكذ

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

و هكذا

عدد جذور المعادلة $a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \cdots + a_{n-1} S^1 + a_n = 0$ التي فيها الجزء الحقيقي موجب ، يساوي تعداد تغير العلامات من الموجب الى السالب و بالعكس في العمود الأول من جدول الصفحة السابقة (العمود الأصفر)

يعتبر النظام مستقراً إذا كانت مقادير العمود الأول في الجدول السابق موجبة أي جذور المعادلة في الطرف الأيسر من الصفحة العُقدية .

مثال : نظام يخضع لهذه المعادلة المميزة من الدرجة الثالثة و التي جميع معاملها أكبر من الصفر (موجبة) ، عين إستقرار النظام من خلال معيار روث .

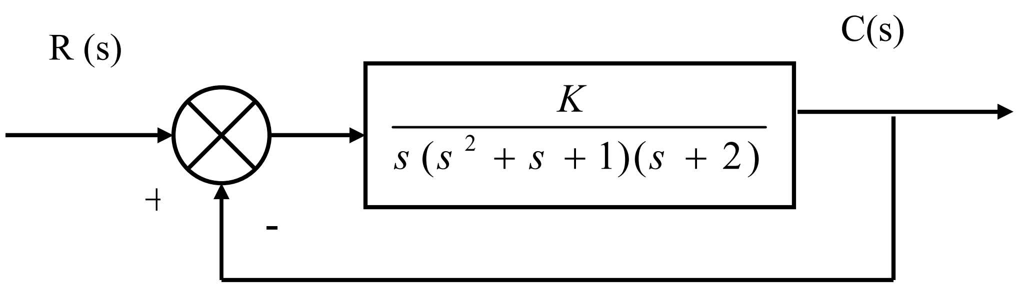
$$a_0S^3 + a_1S^2 + a_2S + a_3 = 0$$

S^3	a_0	a_2
S^2	a_1	a_3
S^1	$\dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	
S^0	a_3	

شرط إستقرار النظام هو : $a_1a_2 > a_0a_3$

حالة خاصة : إذا كانت أحد معامل السطر الأول في الجدول مساوية للصفر و المعامل الأخرى مخالفة للصفر ، نستبدل الصفر بعدد موجب صغير جداً مثل **ε** و نستمر بالبحث في إستقرار النظام .

مثال : المطلوب قيمة المتغير K ليصبح النظام مستقراً



دالة التحويل :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

المعادلة المميزة :

$$s^4+3s^3+3s^2+2s+K=0$$

طريقة روث :

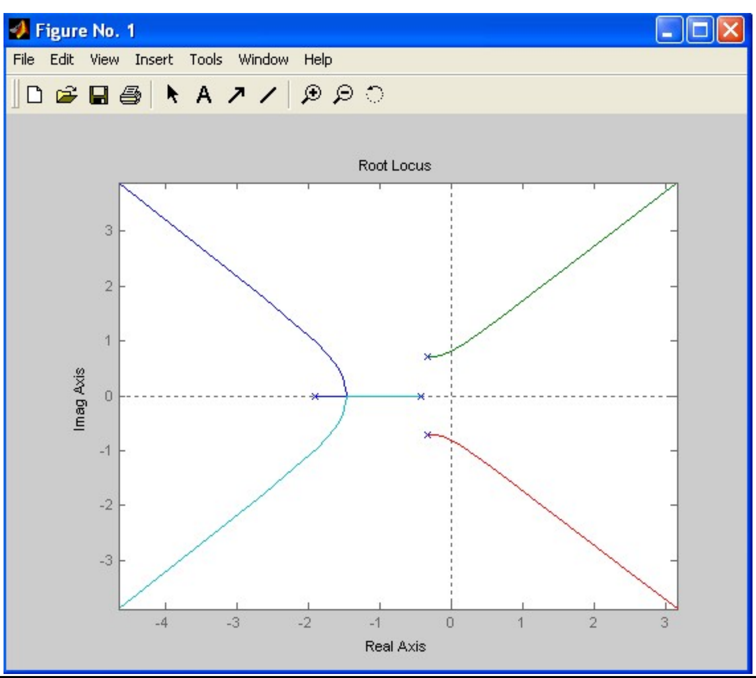
S^4	1	3	K
S^3	3	2	0
S^2	$\frac{7}{3}$	K	
S^1	$2-\frac{9}{7}K$		
S^0	K		

لكي يصبح النظام مستقراً يجب أن تكون K و جميع معامل العمود الأول موجبة لذلك :

$$\frac{14}{9}>K>0$$

إذا كانت $K=\frac{14}{9}$ النظام متذبذب

نرسم دالة التحويل $\frac{K}{s^4+3s^3+3s^2+2s+K}$ ببرنامج MATLABبإزاء $K=1$



أكواد رسم دالة التحويل هذه ببرنامج MATLAB هي :

```
>> num=[1];
>> den=[1 3 3 2 1];
>> rlocus(num,den)
```

كما تلاحظون موضع الجذور في الطرف الأيسر و النظام بإزاء هذا المقدار من K=1 مستقر .

قاعدة ميسون – Mason's rule

يعتمد تحليل الأنظمة و البحث في إستقرارها على المعادلات (التفاضلية) التي تتحكم بالنظام من ثم تحويلها الى مخطط صندوقي و تبسيطه و الحصول على المعادلة المميزة للبحث في إستقرار النظام من خلالها ، لكن تبسيط المخطط الصندوقي دائماً لا يتمّ بسهولة و أحياناً المخطط الصندوقي مُعقد و لا يمكن تبسيطه . تعتبر قاعدة ميسون من القواعد المهمة في تبسيط المخطط و الحصول على المعادلة المميزة للنظام بسرعة .

إذا كانت الدالة الداخلة R(s) و الدالة الخارجة C(s) في هذه الحالة معادلة النظام إستناداً على قاعدة ميسون :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k \Delta_k$$

P_k ثمرة المسير k

Δ = 1 – (مجموع ثمرة جميع الحلقات) + (مجموع حاصل ضرب ثمرة كل حلقتين) – (مجموع حاصل ضرب كل ثلاثة حلقات) + ...

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots$$

$\sum_a L_a$ مجموع ثمرة جميع الحلقات

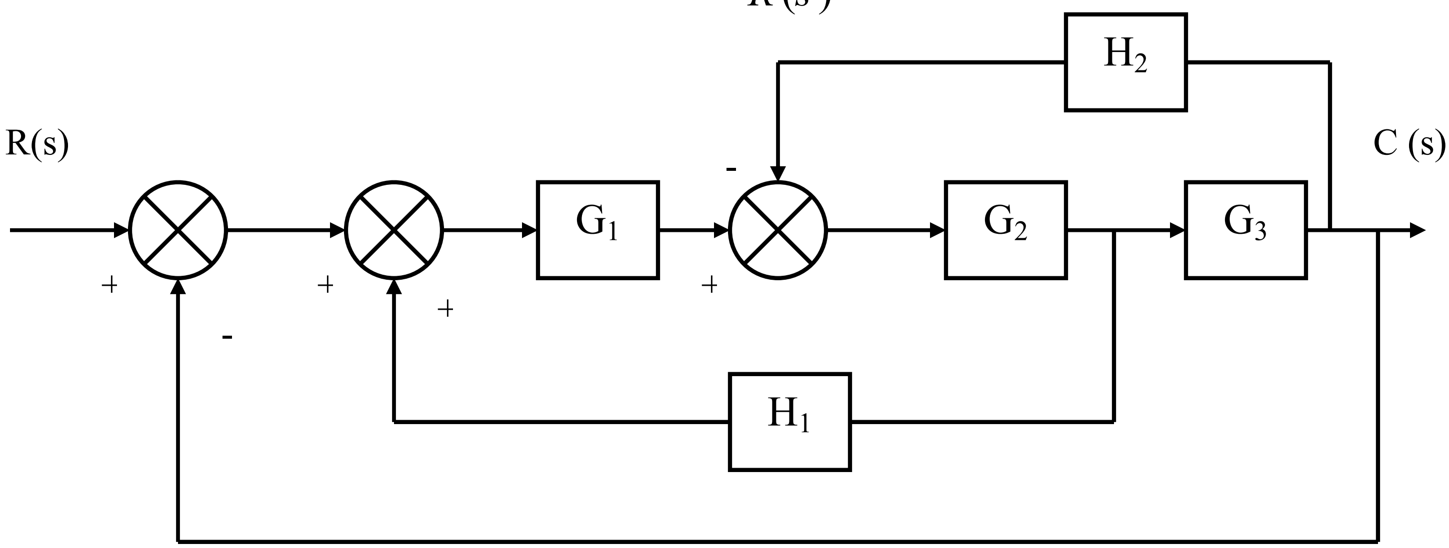
$\sum_{b,c} L_b L_c$ مجموع حاصل ضرب ثمرة كل حلقتين

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ مجموع حاصل ضرب ثمرة كل ثلاثة حلقات

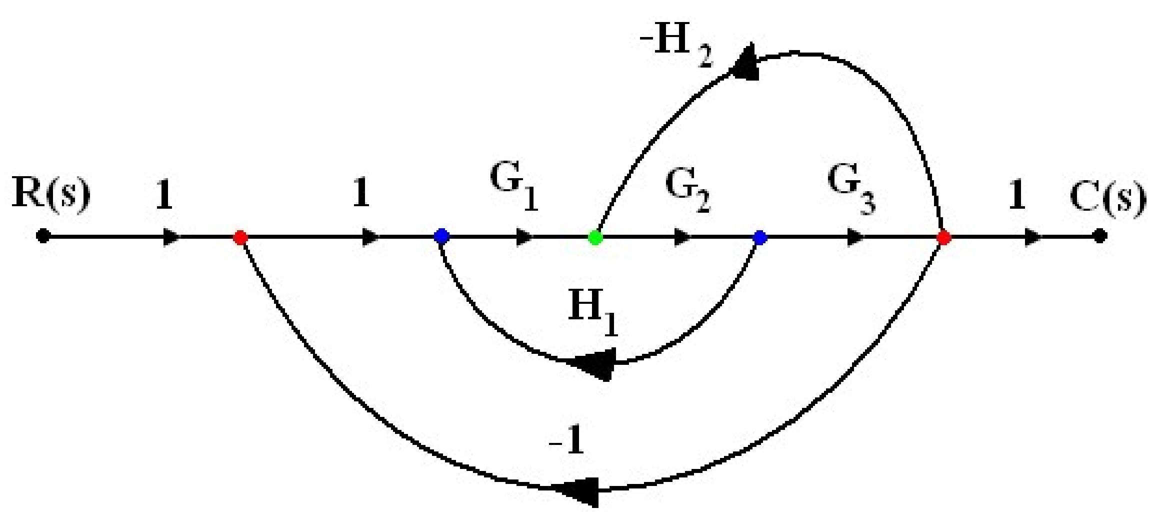
Δ_k المعامل المساعد (cofactor) لمحددة المسير k

نشرح هذه القاعدة بهذا المثال :

من خلال قاعدة ميسون المطلوب $\frac{C(s)}{R(s)}$ للمخطط الأسفل



يصبح هذا المخطط بهذه الصورة

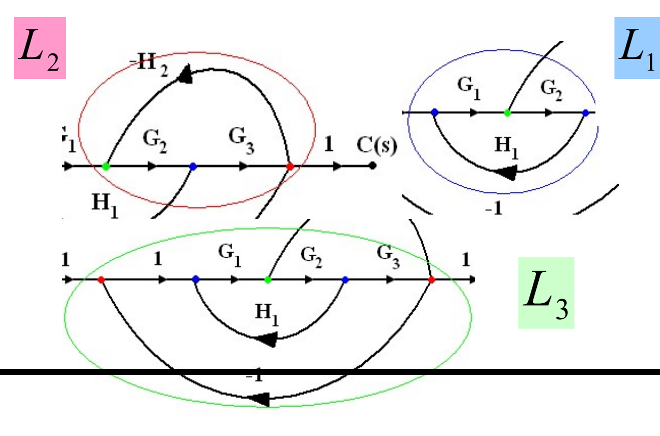


في هذه الدارة ثلاثة حلقات مغلقة و منفردة ثمرة كل منها :

$L_1 = G_1 G_2 H_1$

$L_2 = -G_2 G_3 H_2$

$L_3 = -G_1 G_2 G_3$



محددة هذه الدارة :

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) \Rightarrow \Delta = 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3$$

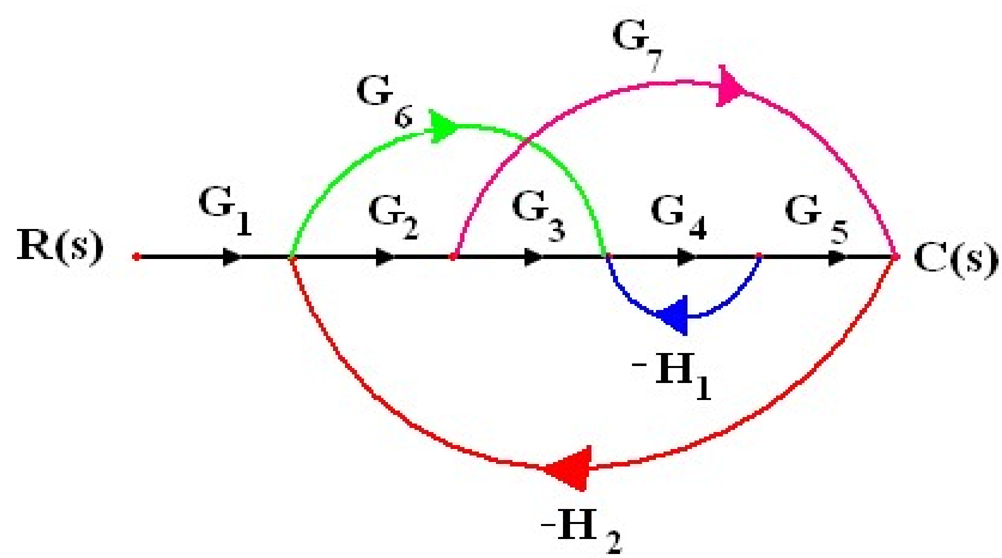
و $\Delta_1 = 1$

لذلك الثمرة النهائية بين ما يدخل و يخرج من هذا النظام هو

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$$

مثال : المطلوب دالة $\frac{C(s)}{R(s)}$ لنظام الدارة فيه كما في الشكل الأسفل :



عدد المسارات من $R(s)$ الى $C(s)$ ثلاثة و هي :

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$$

$$P_2 = G_1G_6G_4G_5$$

$$P_3 = G_1G_2G_7$$

أربعة حلقات مغلقة و منفردة في هذه الدارة و هي :

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

$L_1 L_2$ حلقاتهما غير متقاطعتان

المحددة Δ تساوي :

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

حذف L_1 و L_2 و L_2 و $L_1 L_2$ نحصل :

$$\Delta_1 = 1$$

كذلك :

$$\Delta_2 = 1$$

حذف L_2 و L_3 و $L_1 L_2$ نحصل على :

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

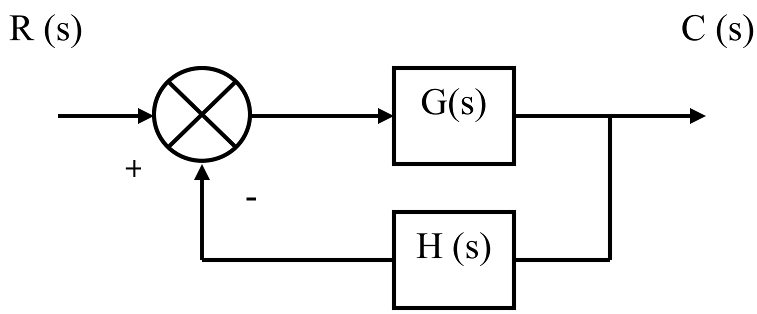
لذلك :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{1}{\Delta}(P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2}$$

معيار نيكوست – Niquist criteria

دالة التحويل لحلقة مغلقة كما في الشكل الأسفل هي :



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

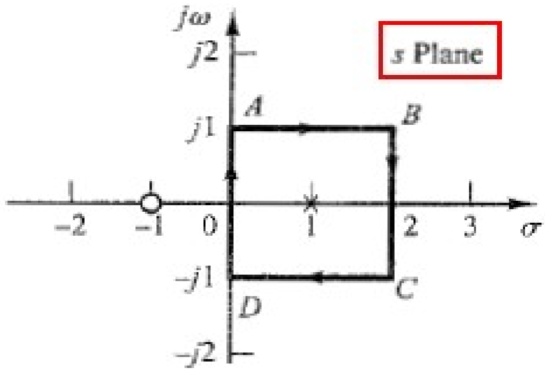
لكي يصبح النظام مستقر يجب أن تكون جذور المعادلة $1+G(s)H(s)=0$ في الجهة اليسرى من إحداثي الصفحة العُقدية . معيار نيكوست يربط جواب توتر الحلقة المغلقة $G(j\omega)H(j\omega)$ بعدد أصفار و أقطاب المعادلة المميزة $1+G(s)H(s)$ الموجودة في الجهة اليمنى من الصفحة العُقدية أو الصفحة s. من خلال هذا المعيار يمكن بسهولة تعين إستقرار الأنظمة . نكتب المعادلة المميزة بهذا الشكل :

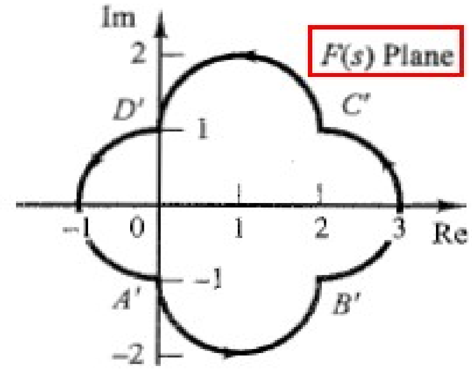
$$F(s)=1+G(s)H(s)=0$$

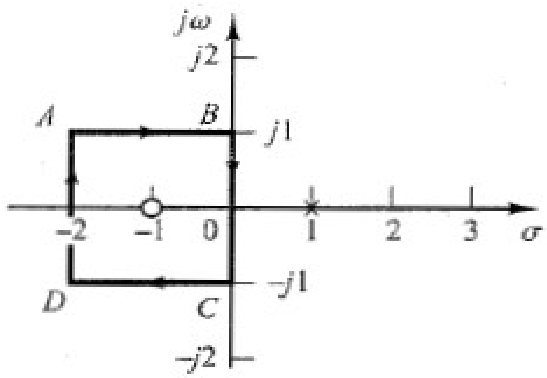
يوجد تناظر واحد الى واحد بين نقاط الصفحة s و الصفحة $F(s)$ عدى النقاط المنفردة (singular point) مثلاً للتابع $G(s)H(s)=\dfrac{6}{(s+1)(s+2)}$ النقطة $1+2j$ في الصفحة s تناظرها النقطة $1.12-5.77j$ من الصفحة $F(s)$ لأن :

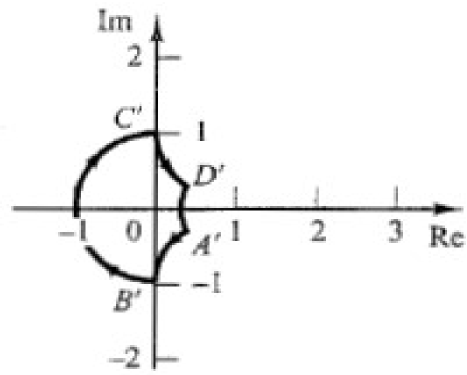
$$F(1+2j)=1+\frac{6}{(2+2j)(3+2j)}=1.12-5.77j$$

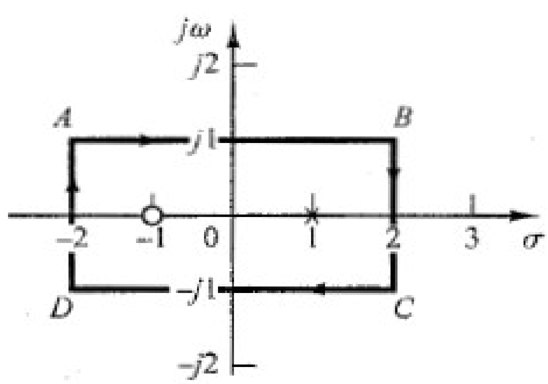
يكمن مشاهدة التطابق بين الرسومات البيانية المرسومة في الصفحة s و الصفحة $F(s)$ في هذه الأشكال :

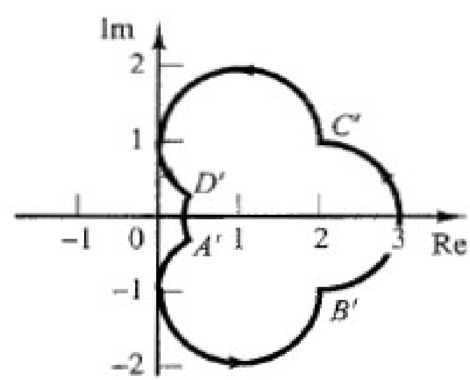


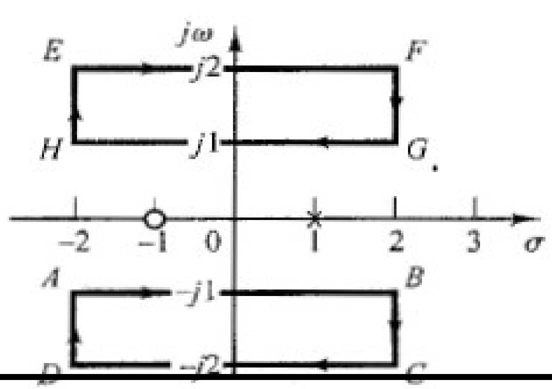


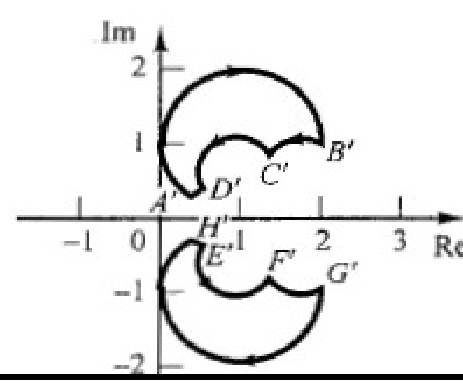






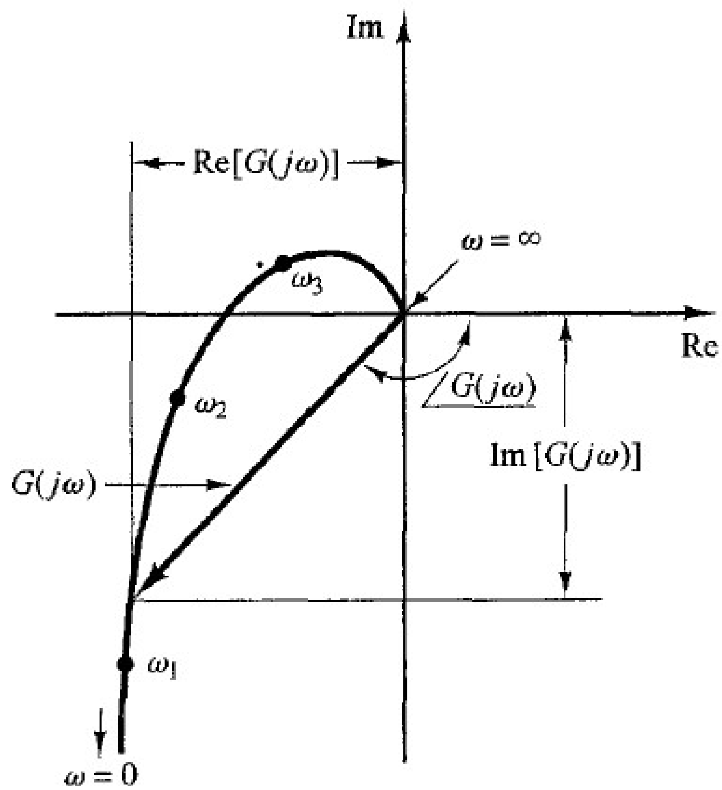






البياني القطبي

في البياني القطبي لتابع التحويل $G(j\omega)$ عند تغير ω من الصفر الى مالانهاية نحصل على قيمة $G(j\omega)$ حسب زاوية الطور (phase) . و الزاوية الموجبة هي الزاوية التي جهتها خلاف دوران عقارب الساعة و دورانها حول المحور الحقيقي كما في الشكل :



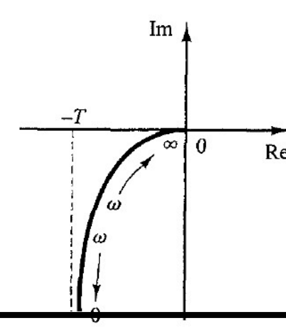
يعرف البياني القطبي هذا ببياني نيكوست (Nyquist diagram).

مثال : المطلوب رسم البياني القطبي لدالة التحويل هذه : $G(s)=\dfrac{1}{s(Ts+1)}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega T)}\Rightarrow G(j\omega)=\frac{T}{1+\omega^2T^2}-j\frac{1}{\omega(1+\omega^2T^2)}$$

$\lim\limits_{\omega\to 0}G(j\omega)=-T-j\infty$ ، -90° الزاوية ∞ القيمة

$\lim\limits_{\omega\to \infty}G(j\omega)=0-j0$ ، -180° الزاوية 0 القيمة



يمكن تلخيص معيار نيكوست هكذا :

$$Z = N + P$$

Z عدد أصفار $1+G(s)H(s)$ في النصف الأيمن من الصفحة S

N عدد دورات الموضع في جهة عقارب الساعة حول النقطة $-1+j0$

P عدد أقطاب $G(s)H(s)$ في النصف الأيمن من الصفحة S

في نظام مستقر إذا كانت $P \neq 0$ يجب $Z = 0$ أو $N = -P$ أي موضع (مسير المنحني $(G(j\omega)H(j\omega)$ يجب أن يدور أو يلتف P مرة حول النقطة $-1+j0$ في جهة عكس دوران عقارب الساعة .

إذا $G(s)H(s)$ ليس لها أي قطب في النصف الأيمن من الصفحة S في هذه الحالة $Z = N$ لذلك لكي يصبح النظام مستقر يجب أن لا يلتف الموضع حول النقطة $-1+j0$

عند مطالعة الأنظمة عن طريق معيار نيكوست يمكن أن نواجه هذه الحالات :

1- الموضع لا يدور حول $-1+j0$ و $G(s)H(s)$ ليس لها قطب في النصف الأيمن من الصفحة S النظام مستقر و إلا فالنظام غير مستقر .

2- الموضع مرة أو عدة مرات يدور حول النقطة $-1+j0$ في جهة عكس دوران عقارب الساعة في هذه الحالة إذا كان عدد دوران عكس عقارب الساعة يساوي عدد أقطاب $G(s)H(s)$ في النصف الأيمن من الصفحة S النظام مستقر و إلا فالنظام غير مستقر .

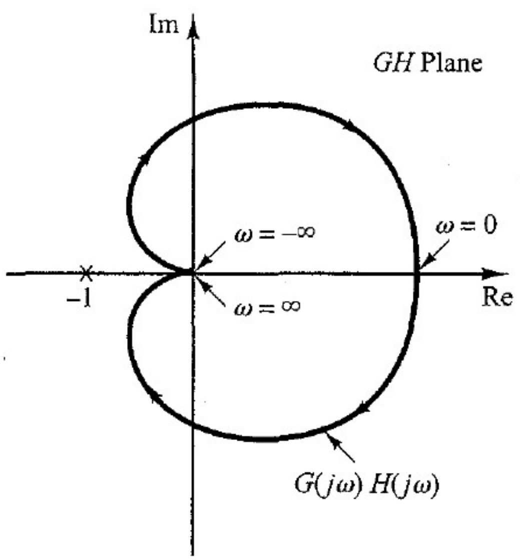
3- الموضع مرة أو عدة مرات يدور حول النقطة $-1+j0$ في جهة دوران عقارب الساعة في هذه الحالة النظام غير مستقر .

مثال :

في نظام حلقة مغلقة دالة التحويل لحلقة مفتوحة هو :

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

أبحث في إستقرار النظام إذا كانت K ثمرة النظام و T_1 و T_2 ثوابت زمنية كلها مقادير موجبة .



منحني $G(j\omega)H(j\omega)$ كما في الشكل :

$G(s)H(s)$ ليس لها قطب في النصف الأيمن من الصفحة S و مسير المنحني $G(j\omega)H(j\omega)$ لا يدور حول النقطة $-1+j0$ لذلك النظام لهذه المقادير مستقر ، K و T_1 و T_2 ثوابت موجبة .

مثال :

في نظام دالة التحول لحلقة مفتوحة :

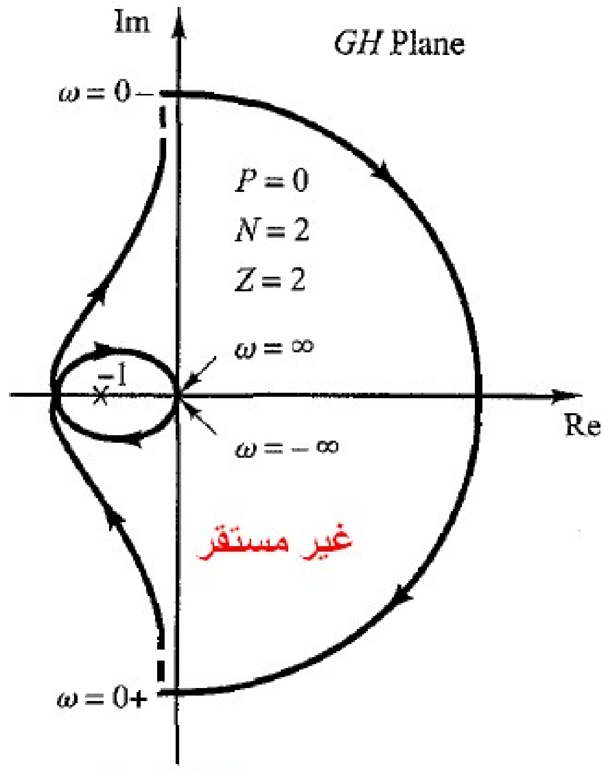
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

إبحث في إستقرار النظام لهذه الحالتين :

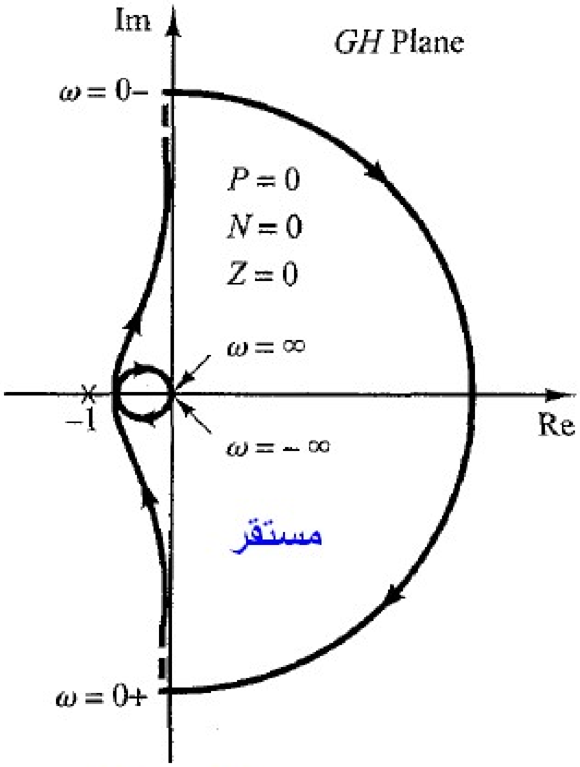
1- قيمة ثمرة النظام K صغيرة

2- قيمة ثمرة النظام K كبيرة

في الشكل الأسفل بياني نيكوست لهذه الحالتين :



K كبيرة



K صغيرة

عدد أقطاب $G(s)H(s)$ في النصف الأيمن من الصفحة S صفر ، لذلك لكي يصبح النظام مستقر يجب $Z = N = 0$ أي يجب أن لا يدور موضع $G(s)H(s)$ حول النقطة $-1 + j0$ لذلك :

- لمقادير K صغيرة الموضع لا يدور حول النقطة $-1 + j0$ و النظام مستقر
- لمقادير K كبيرة الموضع يدور حول النقطة $-1 + j0$ و النظام غير مستقر

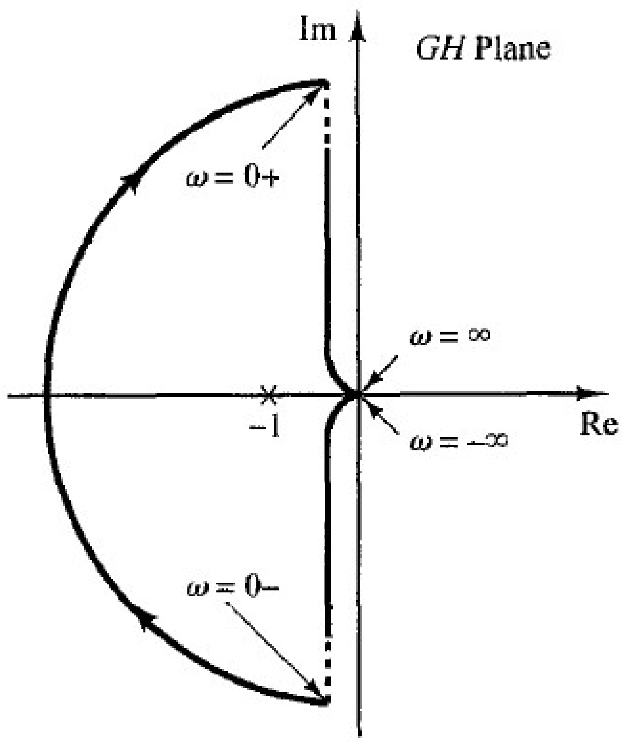
مثال :

دالة التحويل لنظام حلقة مغلقة هو :

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(Ts-1)}$$

هل النظام مستقر؟

عدد أقطاب الدالة $G(s)H(s)$ في النصف الأيمن من الصفحة S يساوي واحد ، القطب هو $s=\frac{1}{T}$ لذلك $P=1$ و المنحني $G(s)H(s)$ يدور حول النقطة $-1+j0$ دورة واحدة في جهة دوران عقارب الساعة كما في الشكل الأسفل ، لذلك $N=1$ و بما أن $Z=N+P$ أي $Z=2$ و هذا يعني نظام حلقة مغلقة في الجهة اليمنى من الصفحة S له قطبان و النظام غير مستقر .

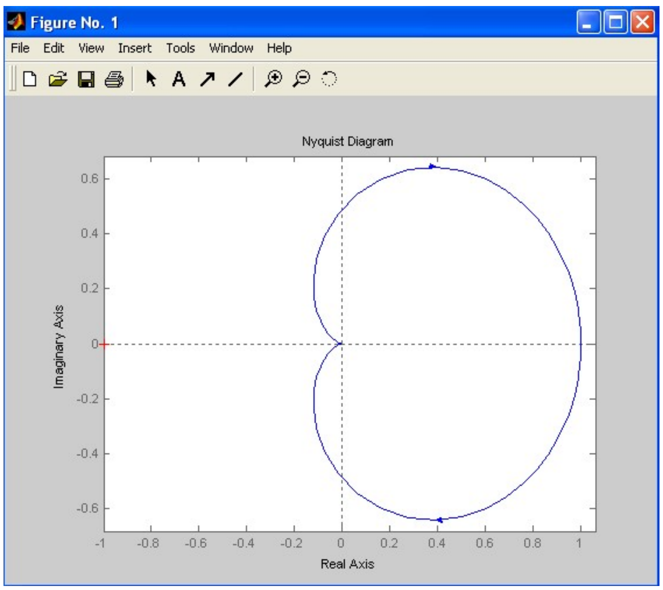


من هذا المثال أتضح لنا مفهوم القطب .

يمكن رسم بياني نيكوست من خلال برنامج MATLAB . نرسم بياني نيكوست لدوال الأمثلة السابقة في محيط MATLAB لكن لمقادير عددية نقوم بإنتخابها .

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\Rightarrow G(s)H(s)=\frac{1}{(2s+1)(3s+1)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{1}{6S^2+5S+1}$$



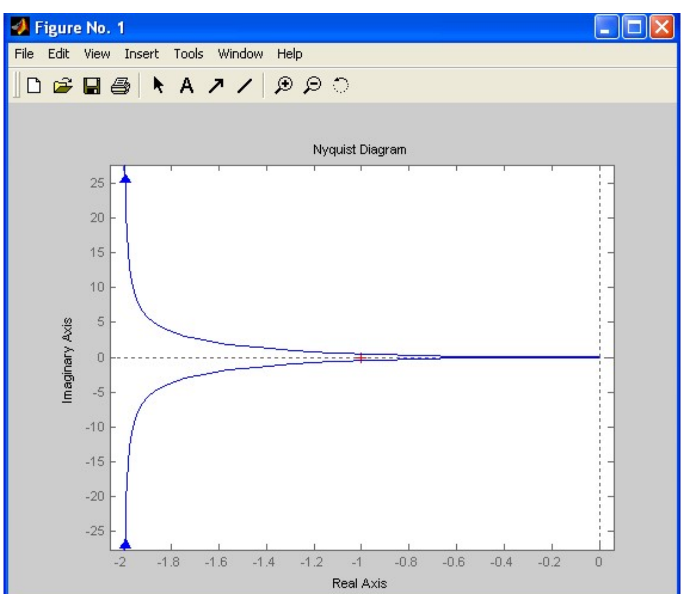

```
>> num=[1];
>> den=[6 5 1];
>> h=tf(num,den)

Transfer function:
      1
---------------
6 s^2 + 5 s + 1

>> nyquist(h)
```

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}\Rightarrow G(s)H(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+1)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s}$$

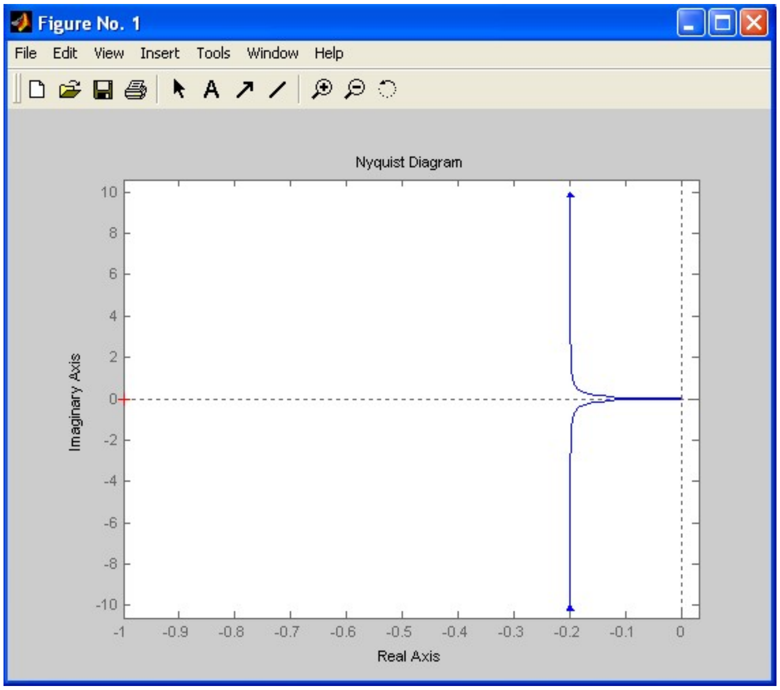


مقدار K=1 نسبتاً كبير

```
>> num=[1];
>> den=[1 2 1 0];
>> h=tf(num,den)

Transfer function:
      1
---------------
s^3 + 2 s^2 + s

>> nyquist(h)
```



مقدار K=0.1 نسبتاً صغير

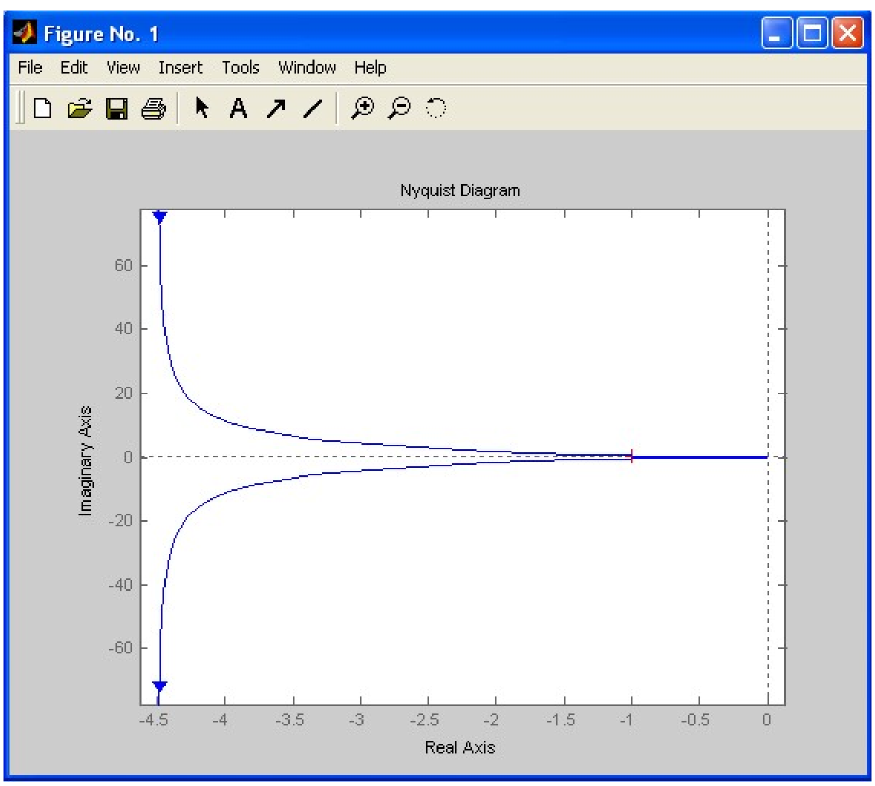
```
>> num=[0.1];
>> den=[1 2 1 0];
>> h=tf(num,den)

Transfer function:
      0.1
---------------
s^3 + 2 s^2 + s

>> nyquist(h)
```

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(Ts-1)} \Rightarrow G(s)H(s)=\frac{1.5}{s(3s-1)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{1.5}{3s^2-s}$$




```
>> num=[1.5];
>> den=[3 -1 0];
>> h=tf(num,den)

Transfer function:
   1.5
---------
3 s^2 - s

>> nyquist(h)
```

في محيط MATLAB تكتب دالة التحويل بهذا الشكل :

$$G(s)H(s)=\frac{a_0s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots a_{n-2}s^2+a_{n-1}s^1+a_n}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots b_{n-2}s^2+b_{n-1}s^1+b_n}$$

المصفوفات بهذا الشكل :

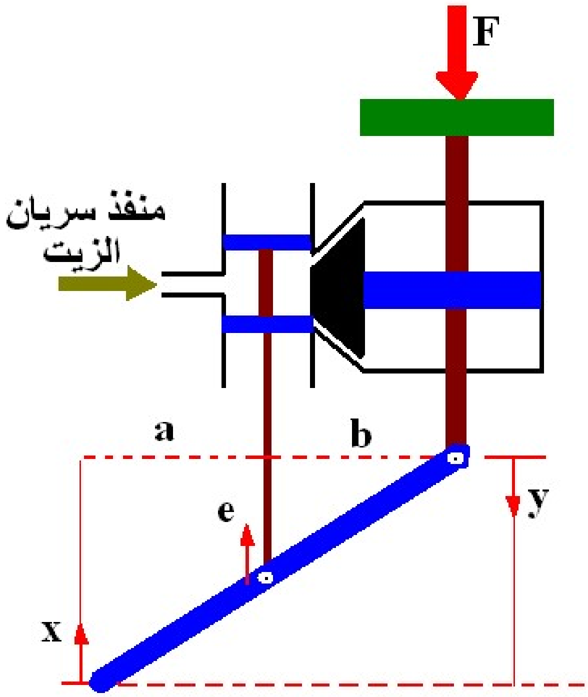
>> num=[a_0 a_1 a_2 ... a_{n-2} a_{n-1} a_n];
>> den=[b_0 b_1 b_2 ... b_{n-2} b_{n-1} b_n];
>> h=tf(num,den)

Transfer function:

$a_0s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots a_{n-2}s^2+a_{n-1}s^1+a_n$

$b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots b_{n-2}s^2+b_{n-1}s^1+b_n$

>> nyquist(h)



مثال :

يوضح هذا المثال بعض المفاهيم العملية لنظرية التحكم .

في هذا المحرك الآلي (servo motor) الهيدروليكي تقاس x و y بالنسبة الى حالة التوازن .

$$dE = e \quad و \quad dY = y \quad و \quad dX = x$$

$$E = E(x, y) \Rightarrow dE = \frac{\partial E}{\partial X} dX + \frac{\partial E}{\partial Y} dY$$

$$e = \left.\frac{\partial E}{\partial X}\right|_{-} x + \left.\frac{\partial E}{\partial Y}\right|_{-} x$$

القصد من هذه هو بالنسبة لحالة التوازن

من تشابه المثلثات في الشكل :

$$\frac{\partial E}{\partial Y} = \frac{-e}{y} = \frac{a}{a+b} \quad و \quad \frac{\partial E}{\partial X} = \frac{e}{x} = \frac{b}{a+b}$$

في حالة $a = b$ إذن :

$$e = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

تدفق سريان الزيت متناسب مع e إذن :

$$q = c \cdot e$$

$$q = A \frac{dy}{dt}$$

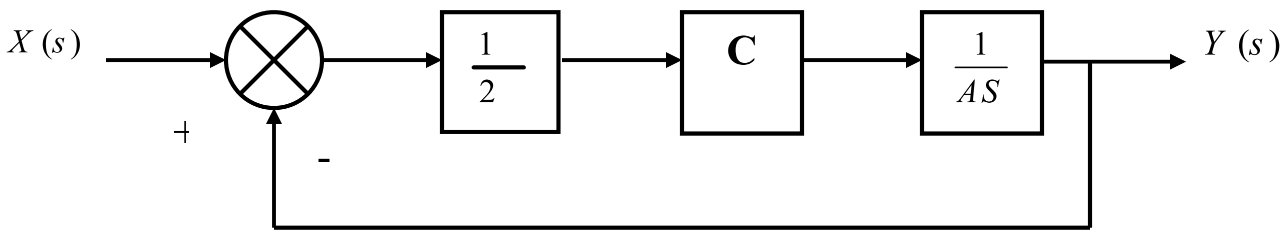
لابلاس هذه المعادلات :

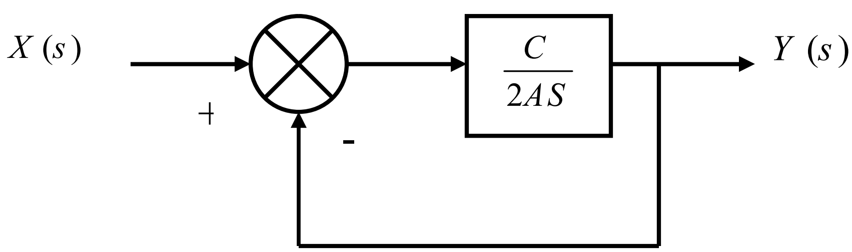
$$E(s)=\frac{1}{2}(X(s)-Y(s))$$

$$Q(s)=c\cdot E(s)$$

$$Q(s)=A\cdot S\cdot Y(s)$$

المخطط الصندوقي لهذه المعادلات :





$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{1+\frac{2A}{C}s}\Rightarrow\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{1+\tau s}$$

إذا كانت قيمة الدالة الداخلة لهذا النظام معينة يمكن تعين قيمة الدالة الخارجة منه .

$$x(t)=x_f u(t)\Rightarrow X(s)=\frac{x_f}{s}$$

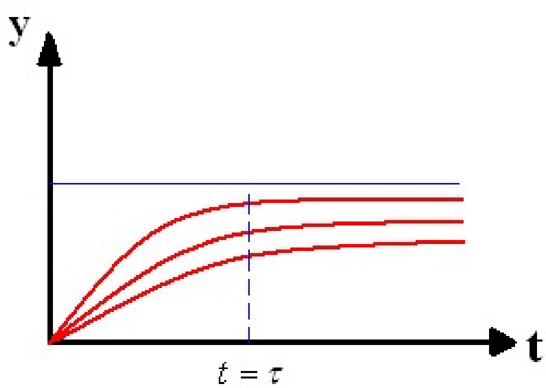
نفرض : $\alpha=x_f$ و $\beta=-\tau x_f$

$$Y(s)=\frac{x_f}{s}\times\frac{1}{1+\tau s}\Rightarrow Y(s)=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{1+\tau s}\Rightarrow Y(s)=x_f\left(\frac{1}{s}-\frac{\tau}{1+\tau s}\right)$$

لابلاس هذه المعادلة $Y(s)=x_f\left(\frac{1}{s}-\frac{\tau}{1+\tau s}\right)$ يساوي :

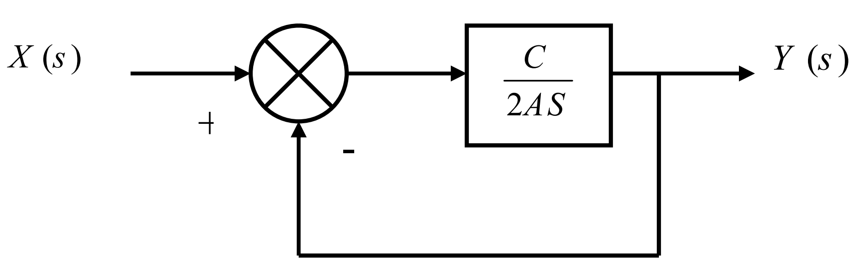
$$y(t)=x_f[u(t)-e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)]$$

$$y(t)=x_f(1-e^{\frac{-t}{\tau}})u(t)$$



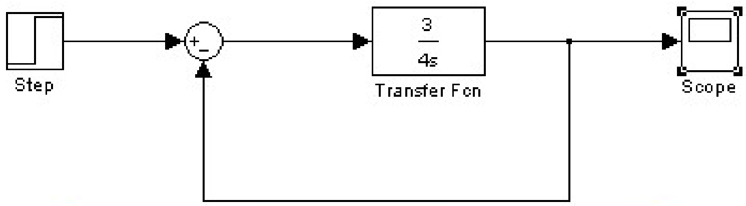
الدالة الداخلة لهذا النظام هي $u(t)$ و من هذه الدالة المعينة و المعلومة في أي زمن مثل t يمكن تعين دالة خروجي النظام في ذلك الزمن .

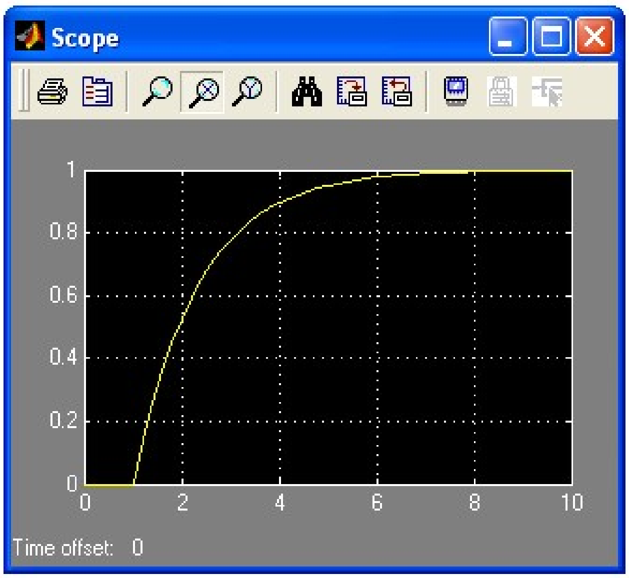
يمكن حل هذا المثال في محيط MATLAB لبعض الحالات العددية و لبعض المداخل الخاصة على سبيل المثال ننتخب A = 2 و C = 3 لهذا المخطط الصندوقي :



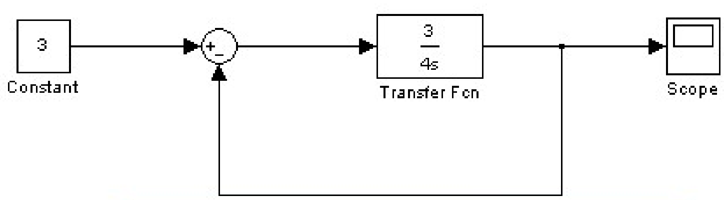
يمكن مشاهدة دالة المخرج في البياني المرسوم أسفل كل مخطط لأنواع المداخل

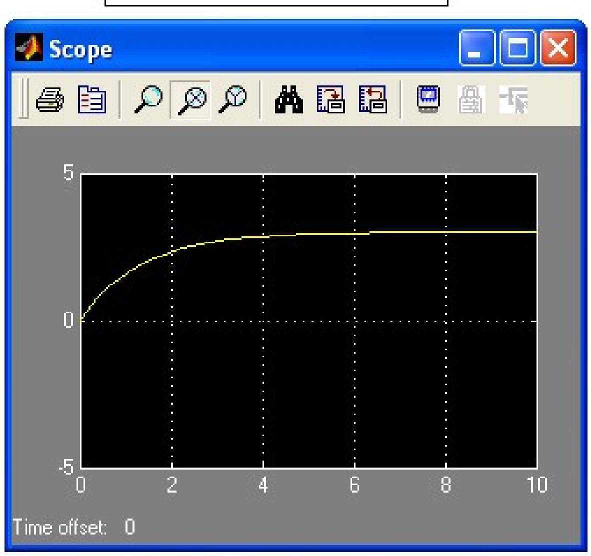
- المدخل دالة سلمية



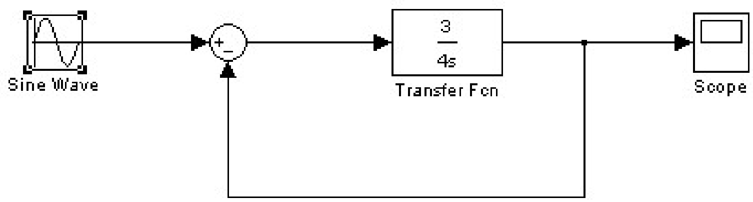


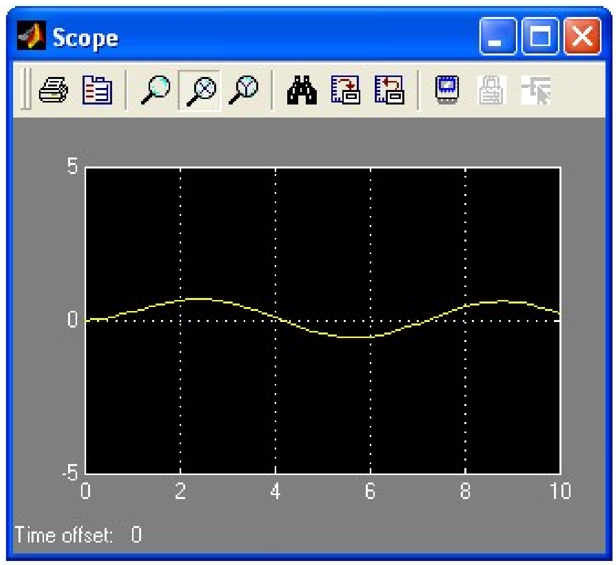
- المدخل قيمة ثابتة تساوي 3





- المدخل دالة الجيب





المصادر

MODERN CONTROL ENGINEERING, FOURTH EDITION, KATSUHIKO OGATA

ـ كنترل ـ كاتسو هيكو اگاتا ـ ترجمه علی كافی ـ نشر دانشگاهی

ـ المعادلات و الأنظمة اللا خطية ، جلال الحاج عبد . على الرابط :

http://www.jalalalhajabed.com/nonlinear_systems.pdf

جلال الحاج عبد

2010 - 2 – 13

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com