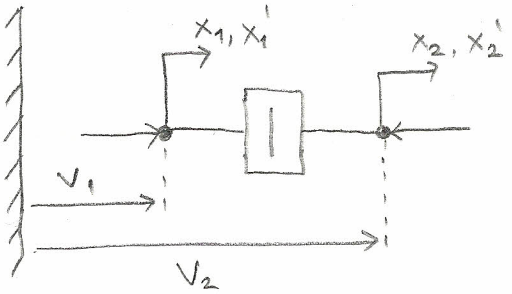
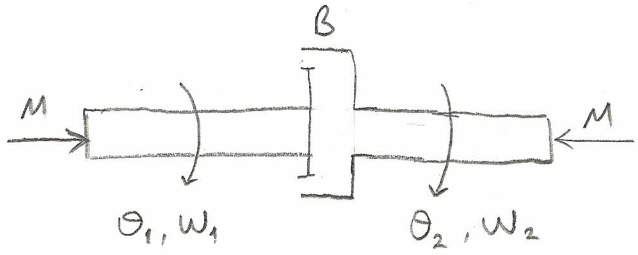
06.11.2012
Hafta-6

Mekaniksel Sistem Elemanları

a-) ideal sönümleme (yapışkanlık sürtünmesi) elemanı



(öteleme sönümleyici)



(dönel sönümleyici)

$$f = B\frac{dx}{dt} = BV$$ (öteleme sönümleyicisi için)

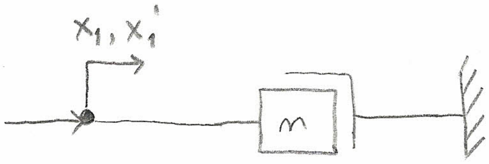
$$B = \frac{\text{Sürtünme kuvveti}, F(N)}{\text{Hız farkı}, (m/s)} \quad [N/(m/s)]$$ (B: sönüm katsayısı)

$$M = B\frac{d\theta}{dt} = Bw$$ (dönel sönümleyici için)

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{B} \quad \text{veya} \quad \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Bs}$$

$$\frac{w(s)}{M(s)} = \frac{1}{B} \quad \text{veya} \quad \frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Bs}$$

b-) İdeal kütle ve eylemsizlik elemanı

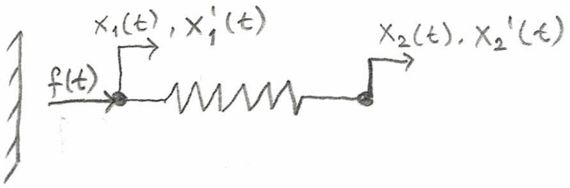


(öteleme kütlesi)

$$f = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms} \quad \text{veya} \quad \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2}$$

c-) ideal yay elemanı



$$f = k(x_1 - x_2)$$

$$\frac{df}{dt} = k\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) \quad \text{veya} \quad \frac{df}{dt} = k\frac{dx}{dt} = kV \quad , \quad V = \frac{1}{k}\frac{df}{dt}$$

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{s}{k} \quad \text{veya} \quad \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{k}$$

Dinamik Sistemlerin Modellenmesi ve Analizi

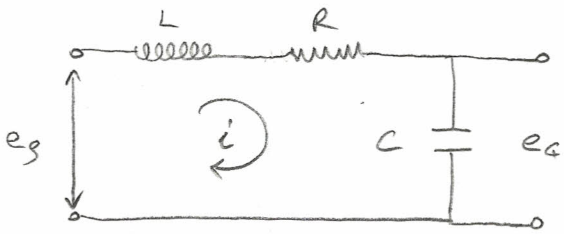
Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi :

Doğrudan Fiziksel Yasaların Uygulanması

- Mekanik Sistemlerde : Newton 'nun II. Hareket Yasası
- Elektriksel " : Kirchhoff ve Ohm Yasaları
- Akışkan " : Süreklilik Yasası
- Isıl sistemlerde : Enerjinin sakınımı yasası

Elektriksel Sistemler

- Ardışık bağlı R-L-C devresi



$$e_g = e_L + e_r + e_c$$

$$e_g = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int_0^\infty i\,dt$$

$$e_4 = \frac{1}{c}\int_0^\infty i\cdot dt$$

$$e_g = L\frac{d\left(c\frac{de_4}{dt}\right)}{dt} + RC\frac{de_4}{dt} + e_4 \Rightarrow e_g = LC\frac{d^2e_4}{dt^2} + RC\frac{de_4}{dt} + e_4$$

$$L_s I(s) + R I(s) + \frac{1}{cs} I(s) = E_g(s)$$

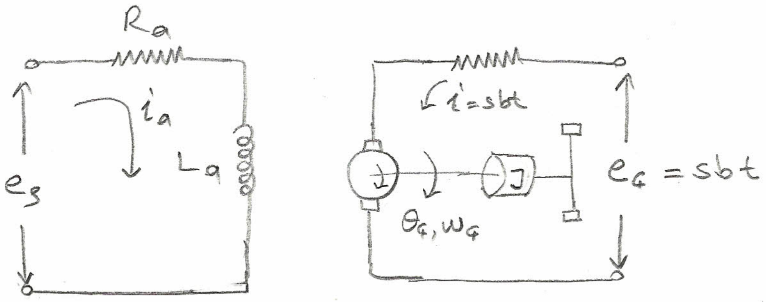
$$\frac{1}{cs} I(s) = E_ç(s)$$

$$\frac{E_ç(s)}{E_g(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$w_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \ (rad/s) \qquad \xi = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

(doğal frekans) (sönüm oranı)

Alan Sargısı Denetimli Doğru Akım Motoru :



$$e_g = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a \xrightarrow{L.D.} E_g(s) = [L_a s + R_a]$$

$$M(t) = K_m \cdot i_a$$

M: döndürme momenti

K_m [Nm/A] : motor sabiti

$$M(t) = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{L.D} M(s) = (Js^2 + Bs)\theta(s)$$

$$\frac{\theta_ç(s)}{E_g(s)} = \frac{K_m}{s(L_a s + R_a)(Js + B)}, \quad \theta(s) = \frac{w_ç(s)}{s}$$

B: yapışkanlık sürtünmesi

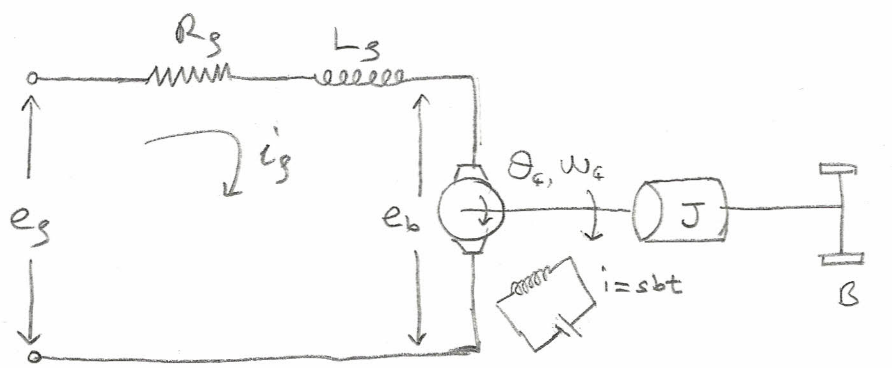
J: Sistemin eylemsizliği

$$\frac{w_ç(s)}{E_g(s)} = \frac{K_m}{(L_a s + R_a)(Js + B)}$$

$B \to [Nm/(rad/s)]$

$J \to [kgm^2]$

Göbek Sargısı Denetimli Doğru Akım Motoru



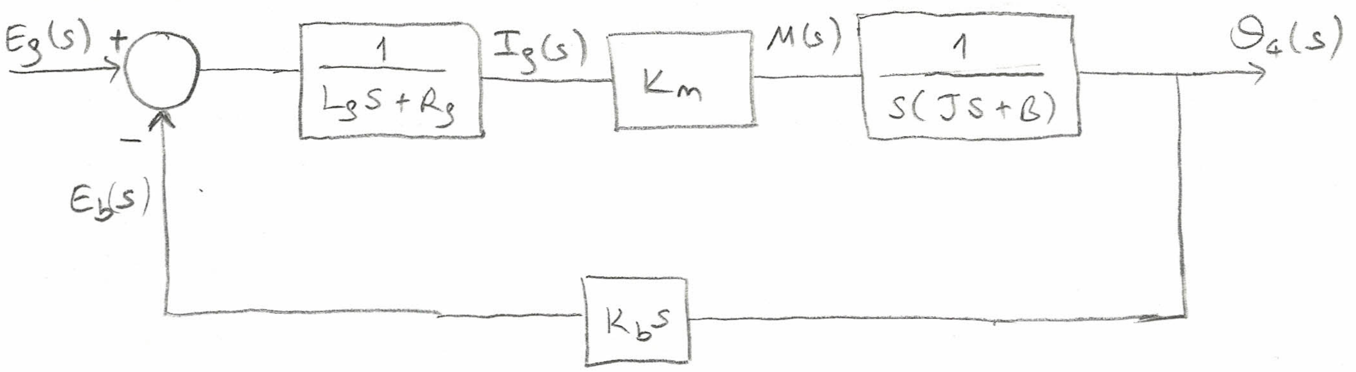
$$e_g - e_b = L_g \frac{di_g}{dt} + R_g i_g \xrightarrow{L.D.} E_g(s) - E_b(s) = (L_g s + R_g) I_g(s)$$

$$e_b = K_b \frac{d\theta_4}{dt} = K_b w_4 \xrightarrow{L.D.} E_b = K_b s \theta_4(s)$$

$$M(t) = K_m \cdot i_g \xrightarrow{L.D.} M(s) = K_m I_g(s)$$

$$M(t) = J \frac{d^2\theta_4}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{L.D.} M(s) = s(Js + B)\theta_4(s)$$

$$\frac{\theta_4(s)}{E_g(s)} = \frac{K_m}{s\left[L_g J s^2 + (L_g B + R_g J)s + R_g B + K_m K_b\right]}$$



Durum Değişkeni Modelleri

Durum değişkeni modellerinin altında yatan temel kavram, herhangi bir anda bir sistemin dinamik koşulunun o sistemin durumu yoluyla tamamen tanımlanmış olmasıdır. Durum, $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ durum takımı cinsinden ifade edilir. Herhangi girişler ile birlikte bu durum değişkenlerinin bilgisi sistemin gelecekteki durumunun durum denklemlerinden bulunmasına olanak tanır. Sistem çıkışı durum değişkenleri cinsinden tanımlanabilir. n. inci dereceden bir sistem dinamiğinin modellenebilmesi için n adet durum değişkeni ve n adet durum denklemi gerektirir.

$$\frac{d}{dt} X(t) = A\,X(t) + B\,U(t)$$

$$y(t) = C\,X(t) + D\,U(t)$$

X : durum vektörü (n- elemanlı sütün vektörü)

U : denetim vektörü (r- elemanlı sütün vektörü)

y : çıkış " (m- " satır ")

$A = n \times n$ elemanlı matris

$B = n \times r$ " "

$C = m \times n$ " "

$D = m \times r$ " "

Lablace Denklemlerinden Yararlanarak Durum Denklemlerinin Elde Edilmesi ;

$$\dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,U(t)$$

$$s\,X(s) - X(0^+) = A\,X(s) + B\,U(s)$$

$$[sI - A]\,X(s) = X(0^+) + B\,U(s)$$

$$X(s) = [sI-A]^{-1} X(0^+) + [sI-A]^{-1} B\,U(s)$$

$$[sI-A]^{-1} \triangleq \phi(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\} = \phi(t) \quad \text{(Durum geçiş matrisi)}$$

$$X(t) = \underbrace{\underbrace{\phi(t)\,X(0^+)}_{\text{öz çözüm}} + \underbrace{\int_0^t \phi(t-\tau)\,B\,U(\tau)\,d\tau}_{\text{zorlanmış çözüm}}}_{\text{tam çözüm}}$$

ÖR

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}}_{B} U(t)$$

Durum denkleni verilen devre için başlangıç koşulları

$$\begin{bmatrix} i_1(0^-) \\ i_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} (A)$$

ise öz, zorlanmış ve tam çözümleri $\phi(t)$ yardımıyla çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{di_1}{dt} = -2i_1 - 2i_2 + 10\,U(t)$$

$$\frac{di_2}{dt} = -3i_1 - 3i_2 + 20\,U(t)$$

$$\emptyset(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 3 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)-6} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{s(s+5)} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\emptyset(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\emptyset(s)\}$$

$$\emptyset_{11}(t) = \frac{s+3}{s(s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{2/5}{s+5} \Rightarrow \emptyset_{11}(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} e^{-5t} \quad (t \geq 0)$$

$$\emptyset(t) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3+2e^{-5t} & -2+2e^{-5t} \\ -3+3e^{-5t} & 2+5e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (t \geq 0)$$

* $X_{öz}(t) = \emptyset(t) \cdot X(0^-)$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3+2e^{-5t} & -2+2e^{-5t} \\ -3+3e^{-5t} & 2+5e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10+10e^{-5t} \\ -10+15e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2e^{-5t} \\ -2+3e^{-5t} \end{bmatrix} (A) = \begin{bmatrix} i_{1öz}(t) \\ i_{2öz}(t) \end{bmatrix} (A) \quad (t \geq 0)$$

* $X_{zor}(t) = \int_0^t \emptyset(t-z)\, B\, U(z)\, dz$

$$= \int_0^t \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3+2e^{-5(t-z)} & -2+2e^{-5(t-z)} \\ -3+3e^{-5(t-z)} & 2+5e^{-5(t-z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} dz$$

$$= \begin{bmatrix} -2t + \frac{12}{5}(1-e^{-5t}) \\ 2t + \frac{18}{5}(1-e^{-5t}) \end{bmatrix} (A) = \begin{bmatrix} i_{1zor}(t) \\ i_{2zor}(t) \end{bmatrix} (A)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = X_{öz}(t) + X_{zor}(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{22}{5} e^{-2t} - \frac{2}{5} e^{-5t} \\ \frac{8}{5} + 2t - \frac{3}{5} e^{-5t} \end{bmatrix} \text{(A)} \quad (t \geq 0)$$