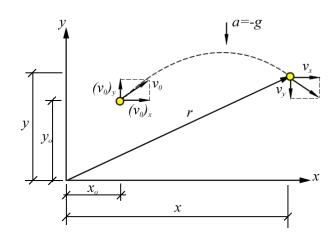
DİNAMİK (2.hafta)

EĞİK ATIŞ: Kartezyen Koordinatlar (X,Y)

Bir merminin serbest uçuş hareketi iki dik bileşen şeklinde, yatay ve dikey hareket olarak incelenir. Bu harekette hava direnci ihmal edilerek çözüm yapılır. Hava direnci ihmal edilince yatay hareket (Vx)0 ilk hızı ile sabit bir şekilde devam edecektir. Düşey hareket ise -g yerçekimi ivmesi ile hızı değişecektir. Buna göre eksenler üzerinde ivme değerleri $a_x = 0$ ve $a_y = -g$ olacaktır.



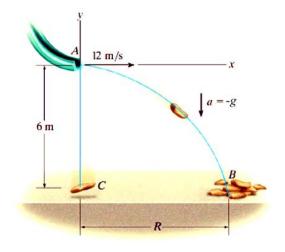
Yatay Hareket Formülleri: a _x =0 olduğundan ilk hız ile yatay bileşende hareketine devam eder.	
Sabit ivmede Genel Formüller	Eğik atışda kullanılacak formüller
$v = v_0 + a t$ $v^2 = v_0^2 + 2a (s - s_0)$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$(\rightarrow +) v_x = (v_0)_x$ $(\rightarrow +) v_x = (v_0)_x$ $(\rightarrow +) s_x = (s_0)_x + (v_0)_x t$

Düşey Hareket Formülleri: y koordinatı yukarıya doğru baktığından ay= -g olur. Buna göre düşey bileşeni oluşturan hareket formüleri aşağıdaki şekilde oluşacaktır. Sabit ivmede Genel Formüller Eğik atışda kullanılacak formüller $(\uparrow +) \quad v_{v} = (v_{0})_{v} + (-g)t$ $v = v_0 + a t$ $v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$ $(\uparrow +)$ $v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2(-g)(s_y - (s_0)_y)$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $(\uparrow +)$ $s_y = (s_0)_y + (v_0)_y t + \frac{1}{2}(-g) t^2$

Çözümlü Problemler

Örnek 1.

Bir fabrikada çuvallar bir rampadan bırakılıyor. Çuvallar rampadan yatayda 12 m/s'lik bir hızla kurtulmaktadır. Rampanın yerden yüksekliği 6 m olduğuna olduğuna göre, çuvallar havada kaç saniye uçar ve ne kadar ileri düşer.



Cözüm:

Koordinat sistemini rampanın ucuna A noktasına koyalım. Çuvalın başlangıç hızı $(V_A)_x = 12$ m/s ve $(V_A)_y =$ 0 m/s. $a_v = -g = -9.81$ m/s² dir. $(V_B)_x = 12$ m/s dir. Uçuş zamanı t ve mesafesi L yi bulalım.

Düşey uzaklık bilindiğine göre buradan t uçuş zamanını bulabiliriz. Bu süre aynı zamanda yataydaki uçuş süresidir. Düşey yükseklik s_v=-6 m. İlk düşey konum sıfırdır $(s_0)_v=0$. Düşey ilk hız sıfırdır. $(v_0)_v=0$. Buna göre zaman;

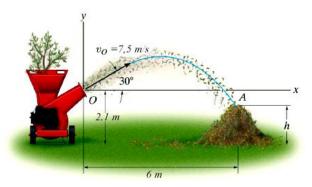
$$(\uparrow +) \quad s_y = (s_0)_y + (v_0)_y t + \frac{1}{2} (-g) t^2$$
$$-6m = 0 + 0 + \frac{1}{2} (-9.81 \, m/s^2) t^2 = \gg t = 1.11 \, s$$

Yatay uçuş süresi biliniyorsa, çuvalın ne kadar uzağa uçacağını bulabiliriz. x ekseninde ilk mesafe x0=0, ilk hız (v0)x=0 dır. Uçuş süresi t=1.11 sn olduğuna göre düşeceği nokta;

$$(\rightarrow +)$$
 $s_x = (s_0)_x + (v_0)_x t$
 $s_x = 0 + 12 \frac{m}{s} . (1.11 s) = s_x = 13.3 m$

Örnek 2.

Şekildeki gibi odunları kırıp talaşa dönüştüren makinanın bacasından talaslar 7,5 m/s hızla ve 30° açı ile püskürmektedir. Yığının tepe noktasından geçen eksen bacadan 6 m uzaklıktadır. Baca yerden 2,1 m yüksektedir. Buna göre yığının yüksekliği nedir?



Çözüm: Koordinat sistemi bacanın çıkışına konulacak olursa, baca çıkışındaki hızın yatay ve dikey olmak üzere iki bileşeni olur.

$$(v_0)_x = 7.5.\cos 30 \, m/s = 6.50 \, m/s$$

 $(v_0)_y = 7.5.\sin 30 \, m/s = 3.75 \, m/s$

Bu durumda A noktasındaki yatay ve dikey hızlar ise,

$$(v_A)_x = (v_0)_x = 6,50 \text{ m/s}$$
$$(v_A)_y =? \text{ bilinmiyor}.$$

Yatay hareket mesafesi bilindiğine göre buradan ucus süresini bulabiliriz.

$$(\rightarrow +)$$
 $s_x = (s_0)_x + (v_0)_x t$
 $6 m = 0 + 6,50 m/s.t$
 $t = 0,9231 s$

Bu uçuş süresi kullanılarak dikey almış olduğu yol hesaplanırsa yığına düştüğü noktanın bacadan ne kadar aşağıda yada yukarıda olduğu hesaplanır. Formül düştüğü konumun artı yada eksi olduğunu noktayı otomatik verecektir.

$$(\uparrow +) \quad s_A = (s_0)_y + (v_0)_y t + \frac{1}{2}(-g) t^2$$

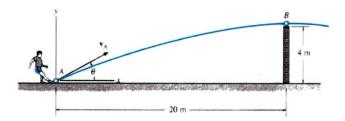
$$s_A = 0 + 3.75 \ m/s \cdot 0.9131 \ s$$

$$+ \frac{1}{2}(-9.81 \ m/s^2)(0.9131 \ s)^2$$

$$s_A = -0.7179 \ m => h = 2.1 - 0.7179 \ m = 1.38 \ m$$

Örnek 3

Şekilde görüldüğü gibi bir futbolcunun topa vurduğunda oluşan hareketler video kameraya alınıp edilmektedir. Buna göre top 20 metre uzaktaki 4 metre yüksekliğindeki duvarın üzerinde en yüksek noktaya ulaşmaktadır. Topun ayaktan çıktığı andaki hızını bulunuz.



Çözüm: Burada yatay ve dikey uçuş mesafeleri bellidir. Bunun yanında B noktasında tam tepede dikey hız sıfırdır. Fakat uçuş süresi (t), ilk hız (V_A) , ve açı (θ) belli değildir. Dolayısı üç bilinmeyen olduğu için en az üç denkleme ihtiyacımız olacaktır.

Koordinat sistemini topa vurulan A noktasına koyalım. A noktasındaki ve B noktasındaki hız değerleri şu şekilde olur.

$$(v_A)_x = V_A \cdot \cos \theta$$
$$(v_A)_x = (v_B)_x = V_A \cdot \cos \theta$$
$$(v_A)_y = V_A \cdot \sin \theta$$
$$(v_B)_y = 0$$

Yatay hareketde mesafe denklemimizi yazalım.

$$(\rightarrow +) \quad s_x = (s_0)_x + (v_0)_x t$$
$$20 \ m = 0 + V_A \cdot \cos \theta \cdot t$$
$$t = \frac{20 \ m}{V_A \cdot \cos \theta}$$

Düşey hareketde hız denklemimizi yazalım.

$$(\uparrow +) \quad (v_B)_y = (v_A)_y + (-g)t$$
$$0 = v_A \cdot \sin \theta + (-9.81) t$$
$$t = \frac{v_A \cdot \sin \theta}{9.81}$$

Bu iki denklemden t yok edilirse.

$$v_A \cdot \sin \theta \cdot v_A \cdot \cos \theta = 196,2$$

Şu anakadar üç bilinmeyenden zamanı yok ettik. Bu son elde ettiğimiz denklemde iki bilinmeyen var. Yanına bir denklem daha bulursak iki bilinmeyeni bulabiliriz.

Dikey hareketteki diğer hız denklemini yazalım.

$$(\uparrow +) \quad (v_B)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2(-g) \left(s_y - (s_0)_y \right)$$

$$0 = (V_A \cdot \sin \theta)^2 + 2(-g) \left((s_B)_y - (s_A)_y \right)$$

$$0 = (V_A \cdot \sin \theta)^2 + 2(-9.81 \, m/s^2) (4m - 0)$$

$$(V_A \cdot \sin \theta)^2 = 78.48$$

$$V_A \cdot \sin \theta = (v_A)_y = 8.85 \, m/s$$

Bu değer t nin yok edildiği önceki denklemde yerine yazılırsa

$$v_A \cdot \sin \theta \cdot v_A \cdot \cos \theta = 196,2$$

 $v_A \cdot \sin \theta \cdot v_A \cdot \cos \theta = 196,2$
 $8,85 \cdot v_A \cdot \cos \theta = 196,2$
 $v_A \cdot \cos \theta = (v_A)_x = 22,169 \text{ m/s}$

V_A hızı bileşke kuvvet olacaktır.

$$v_A = \sqrt{8.85^2 + 22,169^2} = 23,87 \text{ m/s}$$

Açıyı bulmak için Tan değeri elde ederek açıyı bulalım. Tan içinde Sin/Cos oranına ihtiyaç vardır. Bileşen hızları taraf tarafa bölelim.

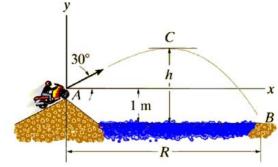
$$\frac{v_A \cdot \sin \theta}{v_A \cdot \cos \theta} = \frac{8,85 \text{ m/s}}{22,169 \text{ m/s}}$$

$$\tan \theta = \frac{8,85 \frac{m}{s}}{22,169 \frac{m}{s}} = 0,399$$

$$\theta = 21,76^0$$

Örnek 4

Şekildeki gibi bir ırmağın karşısına sürücü motorsiklet ile rampadan uçarak geçmek istiyor. Bunun için 30 açı ile ve yerden 1 yükseklikte bir rampa oluşturuyor. Havada 1,5 saniye uçtuğuna göre a)Rampadan çıkış hızı nedir? b)Rampadan çıkış noktası ile karşı kıyıda düştüğü nokta arası kaç metredir (R=?). c) En yüksek çıktığı yükseklik, ırmak yüzeyinden kaç metredir (h=?). Hava direncini ihmal edin.



Kısa Çözüm: v_A=13,4 m/s, R=17,4 m, h=3,28 m

$$(\uparrow +) \quad s_y = (s_0)_y + (v_0)_y t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$-1 \, m = 0 + V_A \cdot \sin \theta \cdot 1,5 \, sn + \frac{1}{2}\left(-9,81 \frac{m}{s^2}\right) 1,5 \, sn^2$$

$$V_A = 13,4 \, m/s$$

$$(\to +) \quad s_B = (s_A)_x + (v_A)_x t$$

$$s_B = (s_A)_x + (v_A)_x t$$

$$R = 0 + 13,4 \cos 30 \frac{m}{s} 1,5 \, sn = 17,4 \, m$$

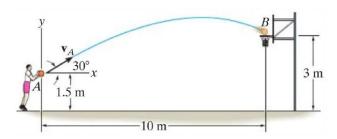
$$(\uparrow +) \quad v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2(-g)(s_y - (s_0)_y)$$

$$0 = \left(13,4 \sin 30 \frac{m}{s}\right)^2 + 2\left(-9,81 \frac{m}{s^2}\right) [(h-1m) - 0]$$

$$h = 3,28 \, m$$

Örnek 5

Şekildeki gibi bir basketbolcu 10 m uzaktan B noktasındaki potaya verilen yükseklik değerlerinde basket atmak istiyor. A noktasında topu elinden çıkarırken 30 açı ile hangi hızda topu atmalıdır?



Kısa Çözüm

$$(\rightarrow +) \quad s_x = (s_0)_x + (v_0)_x t$$

$$10 = 0 + v_A \cos 30^0 t$$

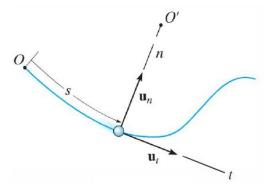
$$(\uparrow +) \quad s_y = (s_0)_y + (v_0)_y t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$3 = 1.5 + v_A \sin 30^0 t + \frac{1}{2}(-9.81) t^2$$

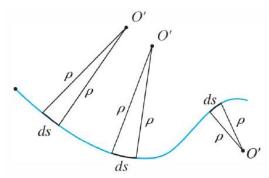
$$t = 0.9334, \ v_A = 12.4 \text{ m/s}$$

EĞRİSEL HAREKET-1: Normal ve Teğetsel Koordinatlar (n,t)

Koordinat Sistemi: Noktasal bir cisim, eğrisel bir yolun üzerinde hareket ediyorsa (daire şeklide olabilir, spline da olabilir), cismin hareketleri n (normal) ve t (teget) koordinatlar ile tanımlanır. Pozitif t ekseni hareket doğrultusunda, pozitif n ekseni ise yolun eğrilik merkezine doğru yönelmiştir.



Eğrilik Merkezi ve Yarıçapı: Yolun eğrilik merkezi ve eğrilik yarıçapı (ρ) her bölgede farklı olabilir.



Hız: Parçacığın hızı yola teğettir. Büyüklüğü yol fonksiyonun zamana göre türevinden bulunur.

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Teğetsel İvme: İvmenin teğetsel bileseni hızın zamana göre değişiminin bir sonucudur. Hız artıyorsa bu ivme pozitif, azalıyorsa negatif yöndedir. Doğrusal hareket denklemleri burada geçerlidir.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$a_t ds = v dv$$

 a_t ivmesi **sabit** ise alınan integrallerden sonra bu denklemler daha önceki konu olan ivmenin sabit olduğundaki hareket denklemleridir.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$$

$$v = v_0 + a_t t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 a_t (s - s_0)$$

Normal İvme: İvmenin normal bileşeni daima yolun eğrilik merkezine doğrudur. Bunun büyüklüğü,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Formülünden belirlenir. Eğer yol y=f(x) şeklinde x ve y bağlı olarak bir fonksiyon şeklinde ifade ediliyorsa bu durumda yolun üzerindeki herhangi bir noktadaki eğrilik varıçapı asağıdaki formülle bulunabilir.

$$\rho = \left| \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \right|$$

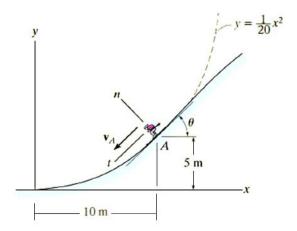
Özet: Eğrisel hareket düz yolda giden hareket ile dönme hareketinin birleşimini içeren bir harekettir. Eğer yol üzerinde giderken ivme sabitse (at ivmesi) Doğrusal hareketin sabit ivmeli formülleri kullanılır ivme değişkense doğrusal hareketin genel formülleri kullanılır.

Ayrıca dönme merkezini gösteren (ki bir çok merkez vardır, yol daire şeklinde değil, spline benzer eğri şeklindedir ve çok sayıda merkez olur) normal yönde a_n ivmesi oluşur. Bu ivme ileride göreceğimiz dairesel hareketteki merkezcil ivme ile aynı olmuş oluyor.

Cözümlü Problemler

Örnek 1

Şekildeki gibi bir kayakçı düz bir rampadan aşağıya doğru sabit 6 m/s lik hızla inmektedir. Düz rampanın sonunda yolun şekli y=x²/20 fonksiyonu ile verilen bir parabole dönüşmektedir. Kayakçı parabolun başlangıcı olan A noktasında iken ivmesi ne olur?



Öncelikle hareketin tipini belirleyelim. Kayakçının gözüyle aşağıya doğru düz bir çizgi boyunca kayıyormuş gibi gözükse de yandan bakınca, eğrisel bir yol üzerinde hareket gerçekleştmektedir. Buna göre kullanacağımız eksen takımı (t-n) koordinatları olacaktır.

Kayakç A noktasına kadar sabit 6 m/s lik iniyor parabolun başlangıcında da aynıdır. Parabol üzerinde teğetsel hız sabit olduğu için a, tegetsel ivmesi de sıfır olacaktır. A noktasından sonra parabol üzerinde kaymaya devam ettiği

için bu noktadan itibaren merkezcil normal ivme oluşmaya başlamıştır. Bu ivmeyi bulabilmek için ise parabolün eğrilik yarıçapının o noktada kaç metre olduğunu bulmamız gerekir. Merkezcil normal ivme formülü aşağıdaki şekildedir.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Eğrilik varıçapını veren formülümüz ise asağıdadır. Burada y fonksiyonun x göre birinci derece ve ikinci derece türevlerini alıp koymalıyız. Böylece ortaya cebirsel bir denklem çıkar. Yarıçapın arandığı koordinatın x ve y değerlerini yerine yazarak eğrilik yarıçapını buluruz.

$$\rho = \left| \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2 y / dx^2} \right|$$
$$y = \frac{x^2}{20} \to \frac{dy}{dx} = \frac{x}{10} \to \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{10}$$

Bu değerleri formülde yerine yazalım.

$$\rho = \left| \frac{\left[1 + \left(\frac{x}{10} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{1}{10}} \right|$$

Denklem sadece x bağlı bir fonksiyona dönüştü. Aradığımız noktanın x değerini yerine yazarsak yarıçapı buluruz.

$$\rho = \left| \frac{\left[1 + \left(\frac{8}{10} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{1}{10}} \right| = 28.4 \, m$$

Merkezcil normal ivmeyi artık bulabiliriz.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{6^2}{28.4} = 1.27 \text{ m/s}^2$$

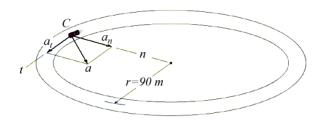
A noktasındaki ivme hem at teğetsel ivmesinin hemde an normal ivmenin bileşkesidir. at=0 idi. Buna göre A noktasındaki ivme

$$a_A = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0 + 1.27^2} = 1.27 \text{ m/s}^2$$

olur.

Örnek 2

Bir yarış otomobili, 90 m yarıçaplı dairesel bir pist üzerinde dolanmaktadır. Otomobil durağan halden başlayarak hızını 2.1 m/s²'lik sabit bir ivme ile artırmaktadır. Taşıtın üzerindeki ivmenin 2.4 m/s²'ye ulaşması için gereken zamanı bulunuz. Bu esnada hızı ne olur?



Çözüm: Öncelikle hareketin tipini ve buna bağlı olarak koordinat sistemini belirlevelim. Hareket her ne kadar dairesel bir hareket olsada eğrisel hareket formülleri ile de çözebiliriz.

Burada çizgi üzerinde giderkenki ivmeyi 2.1 m/s² olarak vermiş bu teğetsel ivmedir. 2,4 m/s² ile verdiği ivme ise bileşke ivmedir. Yani taşıtın hem teğetsel yönde hemde merkezcil yönde oluşan ivmelerinin bileşkesidir. Buna göre formülleri sondan başa doğru oluşturarak çözelim

$$a = \sqrt{(a_t^2 + a_n^2)}$$

$$2.4 = \sqrt{(2.1^2 + a_n^2)}$$

$$a_n = \sqrt{(2.4^2 - 2.1^2)}$$

$$a_n = 1.161 \, \text{m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow v = \sqrt{1.161 \, \text{m/s}^2 * 90 \, \text{m}}$$

$$v = 10.225 \, \text{m/s}$$

Aracın 2.1 m/s² lik ivme ile durağan halden bu hıza kadar çıkması düz yolda sabit ivme ile hızlanmadır. Dolayısı ile hız-zaman formülümüz aşağıdaki şekildedir.

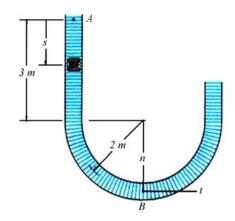
$$v = v_0 + a t$$

$$10,225 \, m/s = 0 + 2,1 \, m/s^2 \cdot t$$

$$t = 4.869 \, m/s$$

Örnek 3

Şekildeki gibi bir yatay band sisteminde kutu A noktasından ilk hızsız olarak harekete başlamış ve a_t=(0,2 t) m/s² ivmesi ile gittikce hızlanmaktadır. Kutu B konumuna ulaştığı anda ivmesi nedir?



Cözüm: Öncelikle hareketin tipini belirleyelim. Burada A noktasından başlayarak 3m yol boyunca doğrusal hareket, daha sonra dairesel hareket yapmaktadır. Her ikisini beraber düşündüğümüzde **Eğrisel** koordinatlarda çözmemiz mümkündür. Eğrisel koordinatların eksen takımı (n-t) yi ivmeyi bulmak istediğimiz B noktasına koyalım.

Soruda A noktaından B noktasına kadar tüm hareketi doğrusal hareket formülleri ile çözeceğiz. Zaten (t-n) koordinatlarında t ekseni üzerindeki çizgisel hareketler doğrusal hareket formülleri ile çözülür.

Hareketin tipi ve koordinatı belirlendikten sonra ivmeye bakmalıyız. İvme burada zamanın fonksiyonu olarak verilmiş. Genel olarak ivme zamana bağlı fonksiyon olarak verildiğinde bir kez inteğral alınıp hız denklemi, bir kez daha integral alınıp konum denklemi bulma yoluna gidilebilir. Bunun tam tersi olarak da, eğer konum denklemi zamana bağlı olarak veriliyorsa bunun türevlerini alarak önce hız denklemi sonra ivme denklemi

Burada ivmeden konuma doğru denklemlerimizi sırayla bulalım.

İvme denklemi: soruda verilmiş.

$$a_t = 0.2 t$$

Hız denklemi: İvme denkleminin bir kez integral alınması hız denklemini verir.

$$a_t = \frac{dv}{dt} \to dv = a_t dt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t a_t dt \to v = \int_0^t 0.2 t dt$$

$$v = \frac{0.2 \cdot t^2}{2} + C \to v = 0.1 \cdot t^2 + C$$

Burada C sabiti ilk değerlerden bulunabilir. İlk başlangıç olan A noktasında t=0 iken v=0 dır. Dolayısı ile bu denklem tüm yol boyunca geçerli olduğuna göre bu değerleri yerine yazarsak C=0 çıkar. Buna göre hız denklememiz;

$$v = 0.1.t^2$$

olur.

Konum denklemi: Konum denkleminin hız denkleminin bir kez integral alınması ile bulunur.

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v dt$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t v dt \rightarrow s = \int_0^t 0.1. t^2 dt$$

$$s = \frac{0.1 \cdot t^3}{3} + C \rightarrow s = 0.03333. t^3 + C$$

Benzer şekilde burada integral sabiti olan C katsayısı başlangıç şartlarından bulunur. Başlangıç konumu olan A noktasında t=0 iken s=0 dır. Bu denklemde yerine konulduğunda C=0 çıkar. Dolayısı ile konum denklemi;

$$s = 0.03333 t^3$$

olur.

A ile B arasındaki uzaklığı bulup konum denkleminde yerine yazarsak A dan B ye gelene kadar geçen süreyi bulmuş oluruz.

A ile B arası uzaklık s= 3 m + π .2² /4 = 6,14 m olur.

$$s = 0.03333 t^3 \rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{6.14}{0.03333}} = 5.689 sn$$

A dan B ye bu kadar sürede gelmiş oluyor. Artık zamanı biliyorsak ve elimizde zamana bağlı hız ve ivme denklemleri varsa, hepsini hesaplayabiliriz. B noktası için hız ve ivme değerleri,

$$v = 0.1.t^2 \rightarrow v = 0.1.5,689^2 \rightarrow v = 3.237 \text{ m/s}$$

$$a_t = 0.2 t \rightarrow a_t = 0.2.5,689 \rightarrow a_t = 1,137 \text{ m/s}^2$$

B noktasındaki bileşke ivmeyi bulmak için an ivmesini de bilmeliyiz. Cevresel hızı ve yarıçapı biliyorsak bulması kolaydır.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{3,237^2}{2} = 5,239 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1,137^2 + 5,239^2} = 5,361 \, m/s^2$$

