Z - Dönüşümü

Ayrık zamanlı sistemler için kullanılan ve önemli analizlerde yardımcı olan bir dönüşümdür. Sürekli zamanlı sistemlerdeki Laplace dönüşümünün ayrık zamanlı sistemlerdeki karşılığıdır. Laplace dönüşümü ile matematiksel olarak ilişkilidir.

$$Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}}$$

Burada z kompleks bir sayı olup
$z = \sigma + j\omega$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} \rightarrow \text{iki yönlü } z\text{-dönüşümü}$$

$$\left.\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{0} x(n).z^{-n} \\ X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n} \end{aligned}\right\} \text{Tek yönlü } z\text{-dönüşümü}$$

Geometrik Seri: Elemanları arasında belirli bir oran bulunan seri türüdür.

a_n serinin genel terimi olmak üzere sonsuz bir geometrik seri aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \quad (r: \text{Geometrik oran})$$

$S \rightarrow$ toplam olmak üzere;

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

2 terim için toplam $S_2 = a_1 + a_2$

n terim için toplam $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$a_1 = 1$
$a_2 = r$
$a_3 = r^2$
$\vdots$
$a^n = r^{n-1}$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$$

$$-\ \ r.S_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

$$S_n(1-r) = 1 - r^n \qquad \boxed{S_n = \frac{1-r^n}{1-r}}$$

$\rightarrow$ n terimli bir geometrik serinin toplamını verir.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n} \quad \rightarrow \text{sonsuz toplam}$$

Sonlu toplama dönüştürmek için;

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} \qquad |r|<1 \rightarrow \text{sonlu} \qquad |r|>1 \rightarrow \text{sonsuz}$$

Örnek; $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ sonucunu bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2.\left(\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots}_{r=\frac{1}{3}}\right) = 2.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2.\frac{3}{2}=3$$

yakınsak bir seri

Örnek; $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2\left(\frac{1}{5}\right)^n$ sonucunu bulunuz.

$$3.\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 3.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3.4}{3}-\frac{2.5}{4}=\frac{3}{2}$$

NOT: İki yakınsak serinin toplamı da yakınsaktır.
Serilerden herhangi bir ıraksak olursa bu serilerin toplamı ıraksak olur.

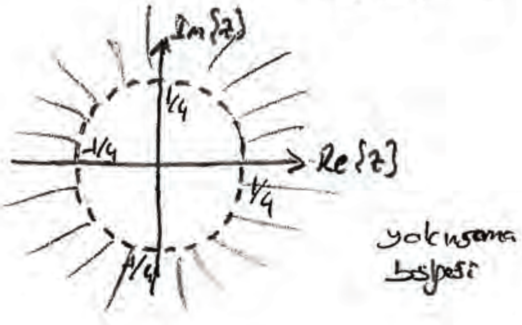
Örnek; $x(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n.u(n)$ ise $X(z)=?$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{4}.z^{-1}}_{r}\right)^n = \frac{1}{1-r} \qquad r=\frac{1}{4}z^{-1}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \qquad |r|<1$$

$$\left|\frac{1}{4}z^{-1}\right|<1 \qquad \frac{1}{4}<|z|$$ yakınsama bölgesi

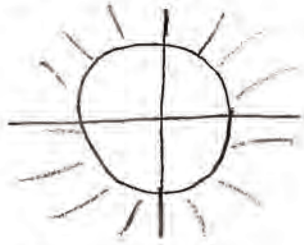


Yakınsama Bölgesinin Özellikleri

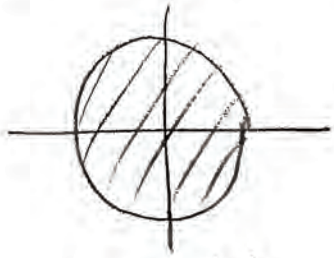
1) Sağ taraflı işaretler için yakınsama bölgesi yarıçapı işaretin türüne bağlı olarak değişen bir çemberin dışı olacaktır. (İşaretin sınırsız süreli olduğu durumda geçerlidir)

2) Sınırsız süreli sol taraflı işaretler için yakınsama bölgesi yarıçapı işaretin türüne göre değişen bir çemberin içi olacaktır.

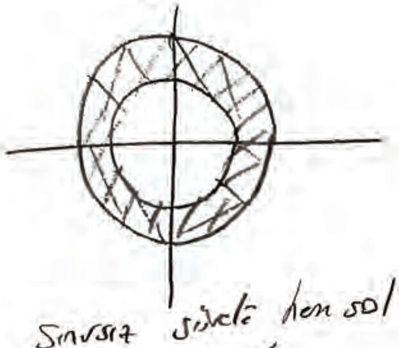
3) Hem sağ taraflı hem de sol taraflı sınırsız süreli bir işaret için varsa yakınsama bölgesi iki çemberin arasındaki halka şeklindeki bölgedir.



Sınırsız süreli sağ taraflı



Sınırsız süreli sol taraflı



Sınırsız süreli hem sol hem sağ taraflı

4) Sınırlı süreli işaretler için yakınsama bölgesi (YB);

YB, Bütün z-düzlemi $- \{ z=0 \ \wedge \ z=\infty \}$ şeklindedir

Örnek; Aşağıda verilen işaretin z-dönüşümü ve Y.B elde ediniz.

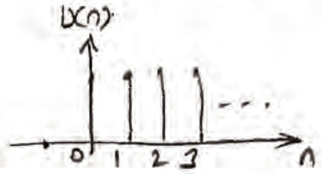
$$x(n) = \{ -1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 2, 3 \} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-1}^{2} x(n) \cdot z^{-n} = x(-1) \cdot z^{1} + x(0) \cdot z^{0} + x(1) \cdot z^{-1} + x(2) \cdot z^{-2}$$

$$X(z) = -z + 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

Y.B = Bütün z-düzlemi $- \{ z=0 \ \wedge \ z=\infty \}$ $\quad \wedge \rightarrow$ ve sembolü

Örnek; $x(n) = -a^n \cdot u(-n)$ ise $X(z) = ?$



(sol taraflı sinyal)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n) \cdot z^{-n}$$

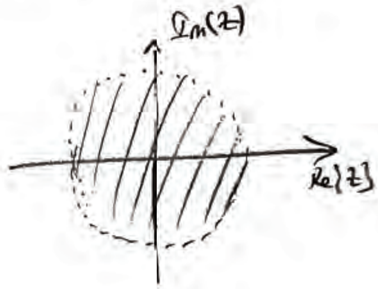
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} -a^n \cdot z^{-n} \qquad n=-k$$

$$X(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \cdot z^{k} = -\sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1} \cdot z)^k$$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \rightarrow$ geometrik seriye benziyor

$$X(z) = -\frac{1}{1-a^{-1}z} \qquad |a^{-1}z| < 1$$

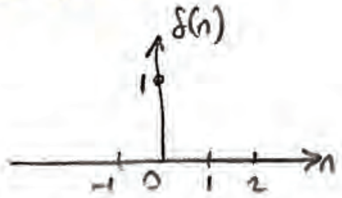
$$X(z) = -\frac{a}{a-z} \qquad |z| < a \qquad X(z) = \frac{a}{z-a}$$



Temel İşaretlerin Z-Dönüşümü

1) Birim örnek:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



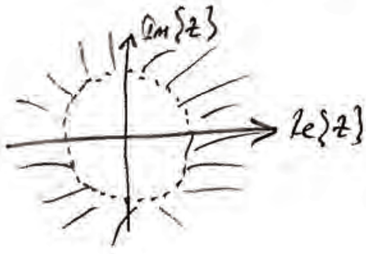
$$Z\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) \cdot z^{-n} = \delta(0) \cdot z^{-0} = 1 \qquad \boxed{Z\{\delta(n)\} = 1}$$

Y.B (Yakınsama bölgesi) = Tüm z-düzlemi

2) Birim Basamak:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad Z\{u(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

$$Z\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z^{-1}| < 1$$



$$\boxed{Z\{u(n)\} = \frac{z}{z-1}} \qquad 1 < |z|$$

Basamak işareti için; $\mathcal{Z}\{A.u(n)\} = A.\dfrac{z}{z-1}$, $|z|>1$

3) Rampa İşareti

$$r(n)=\begin{cases} nT & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

$T \rightarrow$ sabit bir katsayı
Birim rampa işareti için $T=1$ olmalıdır.

$$\mathcal{Z}\{r(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nT).z^{-n} = 0 + Tz^{-1} + (2T)z^{-2} + (3T)z^{-3} + \cdots$$

(Geometrik seri değil)

$$R(z) = T.z^{-1} + 2T.z^{-2} + 3T.z^{-3} + \cdots$$

$$z\,R(z) = T + 2T z^{-1} + 3T z^{-2} + \cdots$$

$$zR(z) - R(z) = T + Tz^{-1} + T.z^{-2} + \cdots$$

$$R(z)(z-1) = T(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots)$$

$$R(z)(z-1) = T.\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z^{-1}|<1$$

$$R(z) = T.\frac{z}{z-1}.\frac{1}{z-1} \qquad |z|>1 \qquad \boxed{R(z) = T.\frac{z}{(z-1)^2}} \qquad |z|>1$$

4) Üstel İşaretler

$$x(n) = a^n\, u(n)$$

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(az^{-1})}_{r}{}^{n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |az^{-1}|<1$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z|>a$$

Exponansiyel işaret için;

$$x(n)=\begin{cases} e^{nT} & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nT}.z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{T}.z^{-1})^n = \frac{1}{1-e^{T}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{T}} \qquad |z|>|e^{T}|$$

5) Sinüsoidal İşaretler

$$x_1(n) = \sin(\Omega n)\, u(n)$$

$$x_2(n) = \cos(\Omega n)\, u(n)$$

$$e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)$$

$$e^{j\Omega n} \cdot u(n) = \cos(\Omega n) \cdot u(n) + \sin(\Omega n) \cdot u(n)$$

$$Z\{e^{j\Omega n} \cdot u(n)\} = \frac{z}{z - e^{j\Omega}} \quad , \quad |z| > |e^{j\Omega}|$$

$$= \frac{z \cdot (z - e^{-j\Omega})}{(z - e^{j\Omega})(z - e^{-j\Omega})} \quad , \quad |z| > 1$$

$$= \frac{z^2 - z((\cos(\Omega)) + j\sin(\Omega))}{z^2 - ze^{-j\Omega} - ze^{j\Omega} + 1}$$

$$Z\{e^{j\Omega n} \cdot u(n)\} = \frac{z^2 - z\cos(\Omega) + j\, z\sin(\Omega)}{z^2 - z(e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}) + 1}$$

$$Z\{e^{j\Omega n} u(n)\} = \frac{z^2 - z\cos(\Omega) + j\, z\sin(\Omega)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\Omega) + 1} \qquad |z| > 1$$

$$\underbrace{Z\{\cos(\Omega n) \cdot u(n)\} = \frac{z \cdot (z - \cos(\Omega))}{z^2 - 2z \cdot \cos(\Omega) + 1}}$$

$$\underbrace{Z\{\sin(\Omega n)\, u(n)\} = \frac{z \cdot \sin(\Omega)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\Omega) + 1}}$$

Z-Dönüşümünün Özellikleri

1) Lineerlik Özelliği:

$$Z\{x_1(n)\} = X_1(z) \quad , \ YB_1$$

$$Z\{x_2(n)\} = X_2(z) \quad , \ YB_2$$

$$Z\{a_1 . x_1(n) + a_2 . x_2(n)\} = a_1 . X_1(z) + a_2 X_2(z) \quad YB_1 \cap YB_2 \quad (a_1, a_2 \in R)$$

NOT: Yakınsama bölgesi boş küme ise ilgilenilen ifadenin Z-dönüşümü de mevcut değildir.

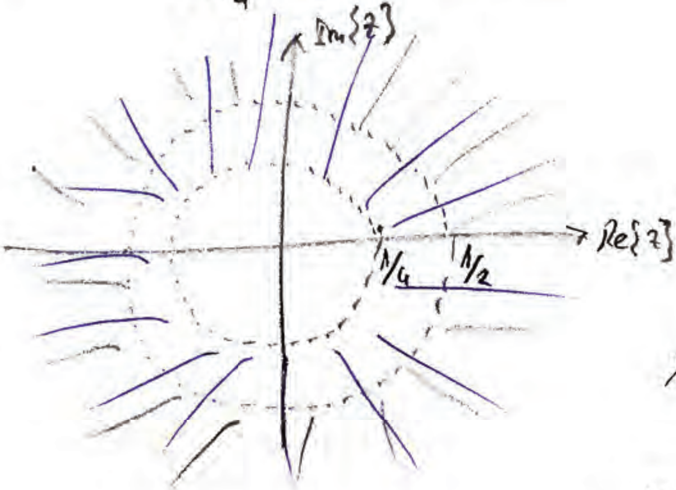
Örnek; $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$ ise $X(z)$ ve Y.B 'nı bulunuz.

$$Z\{x(n)\} = Z\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n)\right\} - Z\left\{\left(-\tfrac{1}{4}\right)^n u(n)\right\}$$

$$Z\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n)\right\} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad |z| > \tfrac{1}{2}$$

$$Z\{a^n u(n)\} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

$$Z\left\{\left(-\tfrac{1}{4}\right)^n u(n)\right\} = \frac{z}{z+\frac{1}{4}} \quad , \ |z| > \tfrac{1}{4}$$



$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z+\frac{1}{4}}$$

$$Y.B \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.