

# Ayrık Zamanlı Sistemlerde Transfer Fonksiyonu

Ayrık zamanlı sistemler

→ Fark denklemi

→ Transfer fonksiyonu

→ Durum Uzay gösterimi ile gösterilebilirler.

$x(n) \rightarrow$  giriş  $y(n) \rightarrow$  çıkış  
Z-dönümlü

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \left. \vphantom{\frac{Y(z)}{X(z)}} \right\} \text{Sistemin transfer fonksiyonu}$$

(Başlangıç koşulları sıfır)

Eğer bu sistemin fark denklemini göz önüne alırsak

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$Z \{ \underbrace{a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N)}_{(\text{devamı})} \} =$$

$$Z \{ b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) \}$$

$$Y(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

(1)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$y_{zs} = h(n) * x(n)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

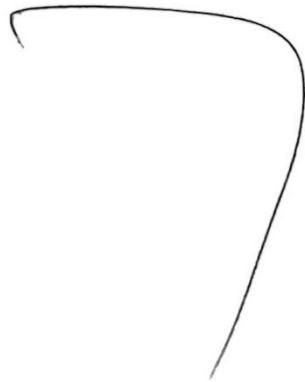
Burada  $H(z)$  Birim örnek cevabının  $z$ -domenindeki karşılığıdır.

### ÖRNEK

LZDAZ bir sistemde  $x(n)$  giriş ve  $y(n)$  ise çıkıştır. Sistemin girişine birim basamak ( $u(n)$ ) uygulandığında başlangıç şartları sıfır iken

$$y(n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \text{ çıkışı alınmıştır. Buna göre}$$

- Transfer fonksiyonunu bulunuz?
- Birim örnek cevabını bulunuz ( $h(n)$ )
- $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$  giriş için çıkışı elde ediniz



a)  $x(n) = u(n) \rightarrow$  Giriş

$y_{zs}(n) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n)$  (çıkış cerebı)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X(z) = z \{u(n)\} = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = z \{y(n)\} = 2 \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

(\*)

$$H(z) = \frac{2 \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{3}}}{\frac{z}{z-1}} = 2 \cdot \frac{z-1}{z-\frac{1}{3}} \quad \text{olark transfer fonksiyonun buluruz}$$

b)  $h(n) = z^{-1} \{H(z)\}$

$$h(n) = z^{-1} \left\{ 2 \cdot \frac{(z-1)}{z-\frac{1}{3}} \right\}$$

Buradan  $\frac{H(z)}{z} = 2 \cdot \frac{z-1}{z(z-\frac{1}{3})}$   $\frac{H(z)}{z} = \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z-\frac{1}{3}}$

Buradan  $\boxed{C_1 = 6}$  ve  $\boxed{C_2 = 2(-2) = -4}$  olark buluruz

(3)

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{6}{z} - \frac{4}{z - \frac{1}{3}}$$

olark elde ederek

ters  $z$  dönüşüm işlemi

\* sonrası

$$\boxed{h(n) = 6\delta(n) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)}$$

olark elde ediyoruz

c)  $X(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$  girişi için  $y(n) = ?$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \quad H(z) = 2 \cdot \frac{z-1}{z - \frac{1}{3}}$$

Buradan

$$Y(z) = 2 \cdot \frac{z-1}{z - \frac{1}{3}} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

ters  $z$  dönüşümünü yapabilmek için

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2 \cdot z-1}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{C_1}{z - \frac{1}{3}} + \frac{C_2}{z - \frac{1}{2}}$$

Buradan  $\boxed{C_1 = 8}$  ve  $\boxed{C_2 = -6}$  olark elde edilir

(4)

$$y(z) = 8 \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{3}} - 6 \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

Yani  $y_{zs}(n) = \left[ 8 \left( \frac{1}{3} \right)^n - 6 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] u(n)$   
 olarak elde ederiz

### ÖRNEK

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = x(n) \text{ fark}$$

denklemini verilen sistemin

a) Transfer fonksiyonunu

b) Birim örnek cevabını

c) Birim basamak cevabını bulunuz.  
 (sistem nedenseldir)

a)  $h(n) = 0$ ,  $n < 0$  (nedensel sistemler için)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$z \{y(n)\} - \frac{3}{4} z \{y(n-1)\} + \frac{1}{8} z \{y(n-2)\} = z \{x(n)\}$$

$$Y(z) - \frac{3}{4} z^{-1} Y(z) + \frac{1}{8} z^{-2} Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \quad (*)$$

okarck  
elde edilir.

b)  $z^{-1}\{H(z)\} = h(n)$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{c_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{c_2}{z - \frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow \boxed{c_1 = 2, c_2 = -1}$$

$$h(n) = \left[ 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u(n) \quad (*)$$

c)  $x(n) = u(n) \Rightarrow y(n) = ?$

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$= \frac{z^2}{\left(z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}\right)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{\left(z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}\right)(z-1)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{4}}$$

Buradan  $c_1 = \frac{8}{3}$  ,  $c_2 = -2$  ,  $c_3 = +\frac{1}{3}$

olark elde edilir.

$$Y(z) = \frac{8}{3} \frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

ters z dönüşümü ile

(\*)

$$y(n) = \left( \frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \right) u(n) \text{ olark elde edilir.}$$