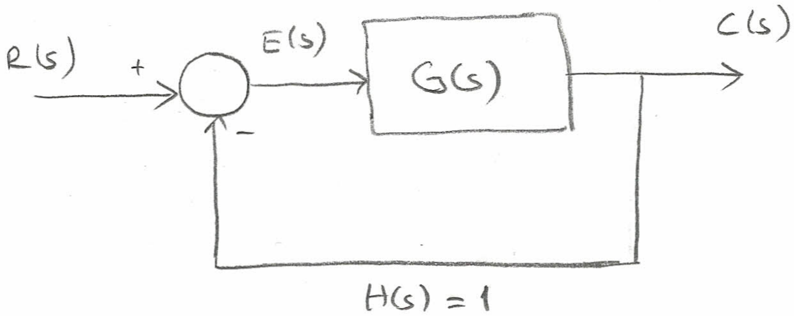
ÖR



$$C(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \cdot R(s)$$

a-) $r(t) = u(t)$ girişi için sistemin kararlı hal hatasını belirleyiniz.

b-) Konuma bağlı hata katsayısı K_p 'yi bulunuz.

Çözüm :

a-) $$C(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$A = 1$, $B = -2$, $C = 1$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow c(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

$$e(t) = r(t) - c(t) = 1 - (1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$e_{ss} = e(\infty) = \frac{2}{e^{\infty}} - \frac{2}{e^{\infty}} = 0$$ (kararlı hal hatası)

b-) $$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

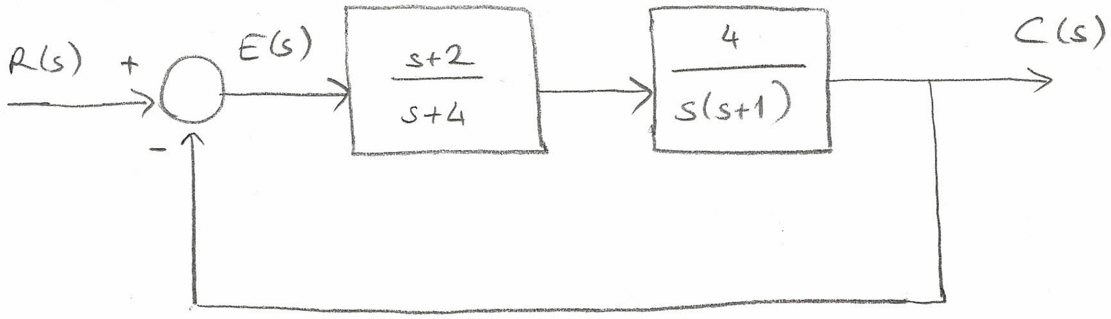
$$2 + 2G(s) = s^2 G(s) + 3s G(s) + 2G(s)$$

$$G(s) = \frac{2}{s^2+3s} = \frac{2}{s(s+3)}$$

$$K_p = G(s)H(s)\Big|_{s=0} = \frac{2}{s(s+3)} \cdot 1 \Big|_{s=0} = \infty$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

ÖR



Blok diyagramı verilen kontrol sistemi için;

a-) K_p, K_v ve K_a hata katsayılarını bulunuz.

b-) $r(t) = u(t)$ girişi için sistemin kararlı hal hatasını bulunuz

Doğrusal Geri Beslemeli Sistemlerin Kararlılığı

Bir doğrusal sistemin kararlı olması demek onun ani darbe (impuls) cevabının zaman sonsuza giderken sıfıra ulaşması demektir. Eğer sistem cevabı zamana bağlı olarak sürekli artıyorsa veya büyüyen genlikli titreşim şeklinde ise kararsızlık söz konusudur. Doğrusal sistemlerin kararlı olup olmadığını incelenmesini sağlayan çeşitli yöntemler vardır. Bunlar;

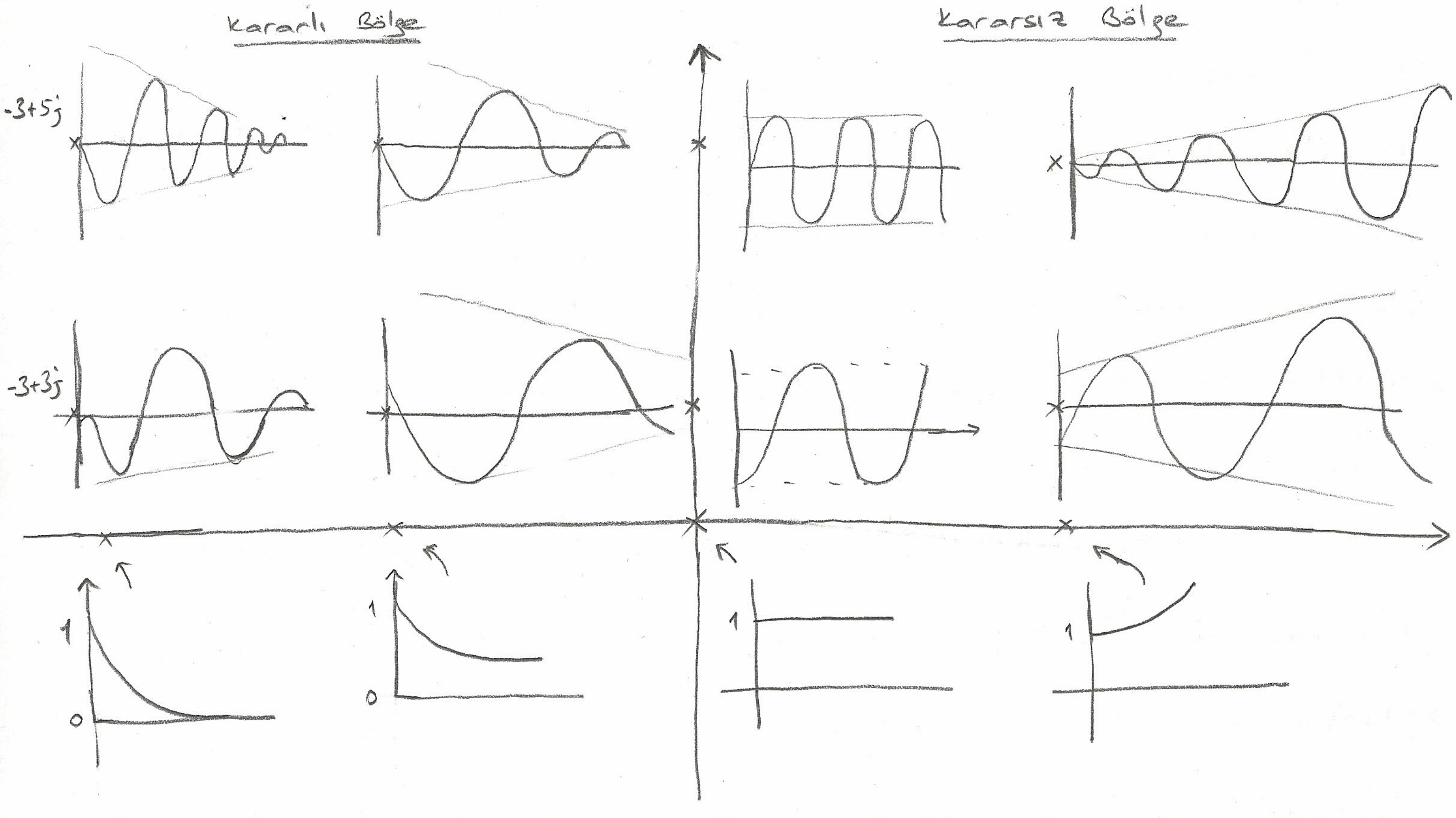
i-) Karmaşık s-düzlemi yaklaşımı

ii-) Zaman alanı yaklaşımı

iii-) Frekans alanı yaklaşımı

Karmaşık Düzlemde Kararlılık Gözümlemesi

Bir geribeslemeli sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart sistemin transfer fonksiyonu kutuplarının negatif gerçek kısımlara sahip olması gereklidir. Transfer fonksiyonu kutuplarının karmaşık düzlemdeki yeri sistemin kararlılığı yanında sistemin dinamik davranışını da tanımlar.



Köklerin s düzlemindeki yerlerine göre değişen çeşitli ani darbe cevap eğimleridir.

ROUTH-HURWITZ KARARLILIK ÖLÇÜTÜ

Routh-Hurwitz ölçütü bir polinom denkleminin pozitif gerçel kısımlı köklerinin bulunup bulunmadığını denklemi çözmeden belirlemeye yarar. Routh-Hurwitz ölçütü özellikle yüksek dereceden polinomlarda köklerin incelenmesinde kolaylık sağlar.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

bu denklemin normalize edildiği dolayısıyla $a_n > 0$ olduğu varsayılmaktadır. Routh-Hurwitz ölçütü bir doğrusal sistemin kararlılığı için gerek ve yeterlilik kurallarını ileri koyar.

i-) Gereklilik Şartı: Polinom denkleminin gerçel negatif kısımlı köklere sahip olması, dolayısıyla kararlı olabilmesi için denklemin tüm a_i, $i=0,1,2\ldots n$ katsayılarının pozitif ve sıfırdan farklı olması gerekir. Aksi takdirde sistem ya kararsız ya da sınırlı (nötr) kararlı olur. Yalnız bu kural kararlılık için gerek şarttır, yeter şart değildir.

ii-) Yeterlilik Şartı: Pozitif değerli katsayılara sahip bir sistemin kararlılığının kesin olarak belirlenebilmesi için Routh tarafından ileri sürülen Routh tablosu kullanılır. Polinomun katsayıları cinsinden Routh tablosu aşağıdaki biçimde gösterilen satır ve sütunlardan oluşur.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\cdots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$
s^3	d_1	d_2	0		
s^2	e_1	e_2	0		
s	f_1	0			
s^0	g_1				

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-6} - a_n\, a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1\, a_{n-3} - b_2\, a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1\, a_{n-5} - b_3\, a_{n-1}}{b_1}$$

Tablonun 1. sütununda yer alan elemanlar sistemin kararlılığının belirlenmesinde kullanılır. Polinom denkleminin pozitif gerçel kısımlı köklerinin sayısı tablonun 1. sütunundaki elemanların işaret değiştirme sayısına eşittir. Gereklilik şartını sağlayan bir sistemin kararlı olabilmesi için routh tablosunun 1. sütunundaki elemanlardan hiçbirinin işaret değiştirmemesi gerekir.

ÖR Özyapısal denklemi

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 2 = 0$$

s^4	1	1	2
s^3	2	4	0
s^2	-1	2	
s^1	8	0	
s^0	2		

1. sütunda +2 'den -1 'e geçerken ve birde -1 'den +8 'e geçerken olmak üzere 2 işaret değişimi vardır. Buna göre sistemin sağ yarı düzlemde 2 kökü vardır. Sistem KARARSIZDIR.

ÖR $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (a_3 > 0)$

s^3	a_3	a_1
s^2	a_2	a_0
s^1	$\dfrac{a_1 a_2 - a_3 a_0}{a_2}$	0
s^0	a_0	

Sistemin kararlı olması için $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$

1. sütunda hiçbir işaret değişimi olmaması için $a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$ olmalıdır

Özel Durumlar

i-) 1. Sütunda Yalnızca Tek Bir Elemanın 0 (Sıfır) Olarak Çıkması

Bu durumda 0 yerine sonlu küçük bir pozitif ε değeri konur. ve tablonun diğer elamanlarının oluşturulması sağlanır. Tablo tamamlandıktan sonra $\varepsilon \to 0$ yapılır. Bu durumda 1. sütunda sıfırın altında ve üstündeki elamanlarda bir işaret değişimi yoksa sistemin bir sanal kök çifti mevcuttur. Eğer 1. sütunda işaret değişimi varsa işaret değişimi sayısı kadar sağ yarı düzlende kök var demektir.

ÖR

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \cong \varepsilon & 0 \\ s^0 & \frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2 & \end{array}$$

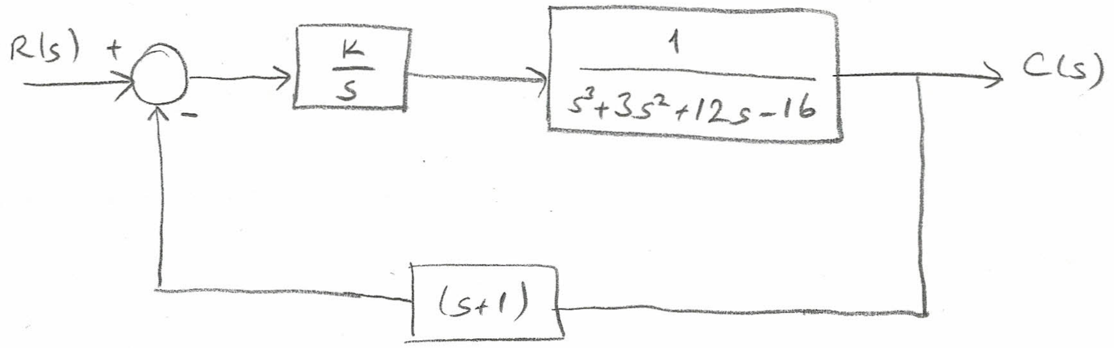
$\varepsilon \to 0$ yaparsak bunun altında +2 olduğu gözükür. $\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2\right)$ Buna göre polinomun bir sanal çifti mevcuttur. ve sağ yarı düzlende kökü yoktur.

ii-) Routh Tablosunda Aradaki Bir Satırın Tüm Elamanlarının 0 (Sıfır) Olması

Bu durumda sistem ya kararsız ya da sınırlı kararlı olur. Tüm elemanları sıfır olan bir satır orjine göre simetrik olarak yerleşmiş köklerin varlığını gösterir.

Routh-Hurwitz Ölçütünün Denetim Sistemlerine Uygulanması

ÖR



Şekilde verilen kapalı döngü sistemin kararlı çalışmasını sağlayan K değerini veya değerlerini bulunuz.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^3+3s^2+12s-16)+K(s+1)}$$

Özyapısal denklem ;

$$s^4+3s^3+12s^2+(K-16)s+K=0$$

s^4	1	12	K
s^3	3	K-16	0
s^2	$\frac{52-K}{3}$	K	
s^1	$\frac{-K^2+59K-832}{52-K}$		
s^0	K		

1. sütunda işaret değişimi olmasını sağlayan koşullar ;

s^2 'li ifadeden $52-K>0$ veya $K<52$

s^1 'li ifadeden $\frac{-K^2+59K-832}{52-K}>0$

$$-K^2 + 59K - 832 > 0$$

$$K_1 = 23{,}3 \qquad K_2 = 35{,}7$$

$$23{,}3 < K < 35{,}7$$

Sonuç olarak $K > 23{,}2$ ve $K < 35{,}7$ ara değerlerinde olabilmektedir. Bu haliyle sistem koşullu kararlıdır. Mutlak kararlı olamaz.