Z-Dönüşümü

Ayrık zamanlı sistemler için kullanılan ve önemli analizlerde yardımcı olan bir dönüşümdür.

$$\boxed{Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}}$$

bir diğer gösterimle

$$\boxed{X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}}$$

kullanarak z-dönüşümünü gerçekleştirebiliriz

Burada "z" kompleks bir sayı olup $z = \sigma + jw$ olarak gösterilebilinir.

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

(iki yönlü z dönüşümü mevcuttur)

$(-\infty, \infty)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} x(n)\, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

Tek yönlü z-dönüşümleri mevcuttur

$(0, -\infty)$ $(\infty, 0)$

Geometrik Seri

↑ Ardısık elemanlor arasında belirli bir oran olan seri türüne denir.

Mesela;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

Geometrik oran

Eğer S'yi toplam olarck tanımlorsak örnegin $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ olarck düsünürsek ve bu durumu n tane elemanın toplamı icin de düsünürsek

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ olarck yazabiliriz.

Burdaki durum

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Eğer $a_1 = 1$ dersek
$a_2 = r$
$a_3 = r^2$
$a_4 = r^3$
$\vdots$
$a_n = r^{n-1}$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_n = 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \dots + r^{n-1}$$

$$- \; r.S_n = \cancel{r} + \cancel{r^2} + r^3 + \dots + r^n$$

$$(S_n - rS_n) = 1 - r^n$$

$$S_n(1-r) = 1 - r^n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{1-r^n}{1-r}}$$

n terimli bir geometrik serinin toplamını verir!!!

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \rightarrow \text{Sonsuz toplam}$$

Yukarıdaki sonsuz toplamı sonlu toplama dönüştürmek için;

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$ olarak elde ederiz.

bunu önceden bulmuştuk

Eğer $|r|<1 \rightarrow$ sonlu

$|r| \geq 1 \rightarrow$ sonsuz

yakınsar

ıraksar

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$ sonucunu bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$$

$$= 2 . \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 2 . \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

ÖRNEK

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{1}{5}\right)^n = 4\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right) = \cancel{4} . \frac{5}{\cancel{4}} = 5$$

yakınsak bir seri

ÖRNEK

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2.\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\left(\frac{1}{4}\right)^n$$ sonucunu bulunuz?

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 2.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1.\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \cancel{2}.\frac{3}{\cancel{2}} - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \;//$$

Not iki yakınsak serinin toplamı da <u>yakınsaktır</u>.
Serilerden herhangi biri ıraksak olursa bu serilerin toplamı <u>ıraksak</u> olur.

Hatırlatma: Bir dizinin yakınsaklığı ve ıraksaklığı dizinin limiti ile hesaplanır. Eğer sonucumuz bir "sayı" çıkarsa bu diziye "yakınsak" deriz. Eğer sonucumuz "Sonsuz" çıkarsa bu diziye ise "ıraksak" deriz.

ÖR $a_n = \dfrac{n^2-3n+1}{2n+5}$ dizisini düşünürsek limitini aldığımızda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+1}{2n+5} = \infty$$ olacağını görebiliriz

Yani dizimiz $+\infty$'a doğru uzaklaşıyor ve ıraksaktır.

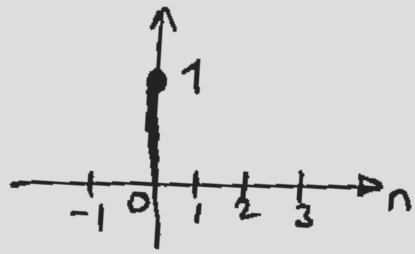
ÖR $a_n = \dfrac{2n+3}{6n-1}$ dizisinin limitini alırsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{6n-1} = \frac{2}{6}$$ olarak bulunur. Yani dizimiz <u>yakınsaktır</u>.

Temel İşaretlerin Z-Dönüşümü

1) Birim Örnek:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$



$$Z\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = \delta(0).z^{-0} = 1$$

$$\boxed{Z\{\delta(n)\} = 1}$$

Y.B (Yakınsama Bölgesi) = Tüm z-düzlemi

2) Birim Basamak:

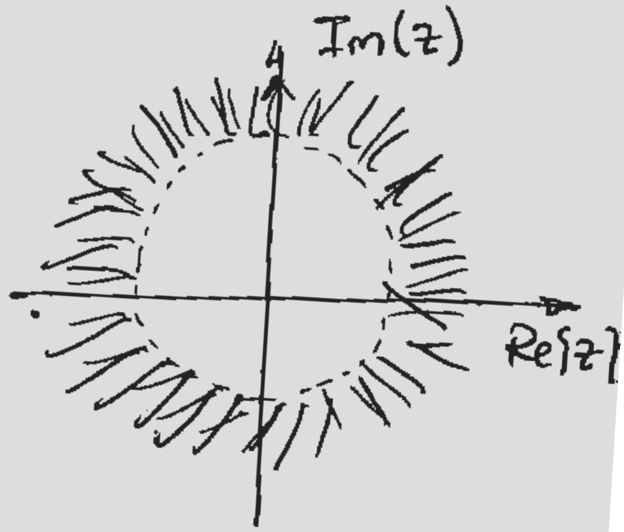
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$

$$Z\{u(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{z^{-1}}_{r})^n$$

$$Z\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |\overbrace{z^{-1}}^{r}| < 1$$

$$\boxed{Z\{u(n)\} = \frac{z}{z-1}}$$

$1<|z|$



Basamak sinyali için $Z\{A.u[n]\} = A.\frac{z}{z-1}$, $|z|>1$

3) Rampa sinyali

$$r(n) = \begin{cases} nT & n \geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

$T \rightarrow$ sabit bir katsayı

Birim rampa sinyali için $T=1$ olmalıdır.

$$Z\{r(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nT) z^{-n}$$

$$= 0 + Tz^{-1} + (2T)z^{-2} + (3T)z^{-3} + \cdots$$

(Geometrik bir seri değil!!)

$$R(z) = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \cdots$$

$$zR(z) = T + 2Tz^{-1} + 3Tz^{-2} + \cdots$$

$$zR(z) - R(z) = T + Tz^{-1} + Tz^{-2} + \cdots$$

$$R(z)(z-1) = T(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots)$$

$$R(z)(z-1) = T.\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z^{-1}|<1$$

$$R(z) = \frac{T.z}{z-1} . \frac{1}{z-1} \qquad |z|>1$$

$$\boxed{R(z) = T.\frac{z}{(z-1)^2}} \qquad |z|>1$$

4) Üstel İşaretler

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{a z^{-1}}_{r})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |\underbrace{az^{-1}}_{r}|<1$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z|>a$$

Exponensiyel işaret için

$$x(n) = \begin{cases} e^{nT} & n \geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{e^{T} z^{-1}}_{r})^n$$

$$X(z) = \frac{1}{1-e^{T}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{T}} \qquad |z|>|e^{T}|$$

5) Sinüsoidal İşaretler

$$x_1(n) = \sin(\Omega n)\, u(n)$$

$$x_2(n) = \cos(\Omega n)\, u(n)$$

$$e^{J\Omega n} = \cos(\Omega n) + J\sin(\Omega n)$$

$$e^{J\Omega n} u(n) = \cos(\Omega n).u(n) + \sin(\Omega n) u(n)$$

$$Z\{e^{j\Omega n} u(n)\} = \frac{Z}{Z - e^{J\Omega}}, \quad |z| > |e^{J\Omega}|$$

$$= \frac{z(z - e^{-J\Omega})}{(z - e^{J\Omega})(z - e^{-J\Omega})}, \quad |z| > 1$$

$$= \frac{z^2 - z(\cos(\Omega) + J\sin(\Omega))}{z^2 - z.e^{-J\Omega} - ze^{J\Omega} + 1}$$

$$Z\{e^{J\Omega n}.u(n)\} = \frac{z^2 - z\cos(\Omega) + jz.\sin(\Omega)}{z^2 - z(e^{-J\Omega} + e^{J\Omega}) + 1}$$

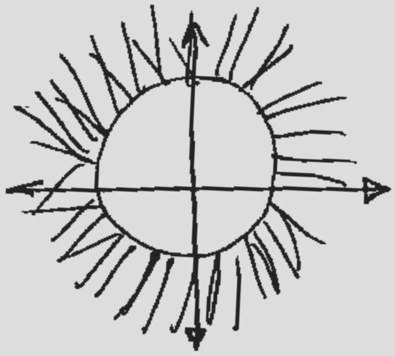
$$Z\{e^{J\Omega n} u(n)\} = \frac{z^2 - z\cos(\Omega) + Jz.\sin(\Omega)}{z^2 - 2z\cos(\Omega) + 1}$$

$$* \boxed{Z\{\cos(\Omega n) u(n)\} = \frac{z(z - \cos(\Omega))}{z^2 - 2z\cos(\Omega) + 1}}$$

$$* \boxed{Z\{\sin(\Omega) u(n)\} = \frac{z.\sin(\Omega)}{z^2 - 2z\cos(\Omega) + 1}}$$

Yakınsama Bölgesinin Özellikleri

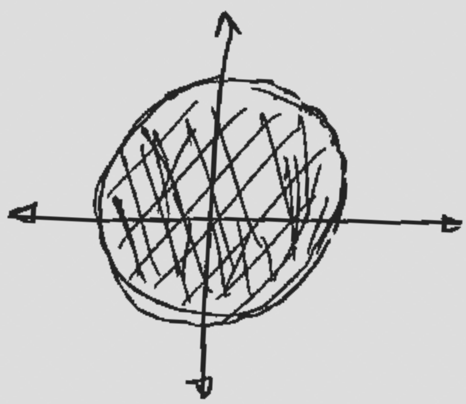
1) Sağ taraflı işaretler için yakınsama bölgesi yarıçapı işaretin türüne bağlı olarak değişen bir çemberin dışı olacaktır. (İşaretin sınırsız süreli olduğu durumda geçerlidir)



Sınırsız süreli
Sağ taraflı

(Örneğin 0'dan +∞'a giden bir sinyali sınırsız süreli sağ taraflı bir sinyal old. düşünebiliriz)

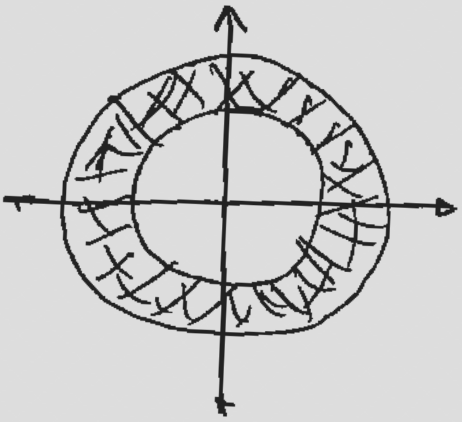
2) Sınırsız süreli sol taraflı işaretler için yakınsama bölgesi yarıçapı işaretin türüne göre değişen bir çemberin içi olacaktır.



Sınırsız süreli
Sol taraflı

(Örneğin 0'dan −∞'a giden bir sinyali sınırsız süreli sol taraflı bir sinyal old. düşünebiliriz.)

3) Hem sağ taraflı hem de sol taraflı sınırsız süreli bir isaret icin varsa yakınsama bölgesi iki cemberin arasındaki halka seklindeki bölgedir.



sınırsız süreli hem sol hem sağ taraflı isaretleri kapsar.

4) Sınırlı süreli isaretler icin yakınsama bölgesi

YB ; Bütün Z-düzlemi $- \{ z=0 \vee\!\!\wedge\ z=\infty \}$ şeklindedir

(Matematikte
$\vee$ = Veya
$\wedge$ = Ve
anlamına gelmektedir.

ÖRNEK

Asağıdaki verilen isaretin z-dönüsümünü elde edip ve yaklasım bölgesini gösteriniz.

$$x(n) = \{-1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 2, 3\}$$

Çözüm

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) . z^{-n}$$

Sınırlı bir sinyal olduğundan -1 ile 2 arasında islemimiz yapmamız gerekir.

$$x(z) = \sum_{n=-1}^{2} x(n) z^{-n} = x(-1) z^{1} + x(0) . z^{0} + x(1) . z^{-1} + x(2) z^{-2}$$

$$\boxed{x(z) = -z + 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$

Y.B = Bütün z-düzlemi $\{ z=0 \wedge z=\infty \}$ hariç

ÖRNEK $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$ ise $X(z) = ?$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \underbrace{u(n)}_{(0,\infty)} \cdot z^{-n}$$

iki

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{2} z^{-1}}_{r}\Big)^n = \frac{1}{1-r} \qquad \boxed{r = \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$|r| < 1$

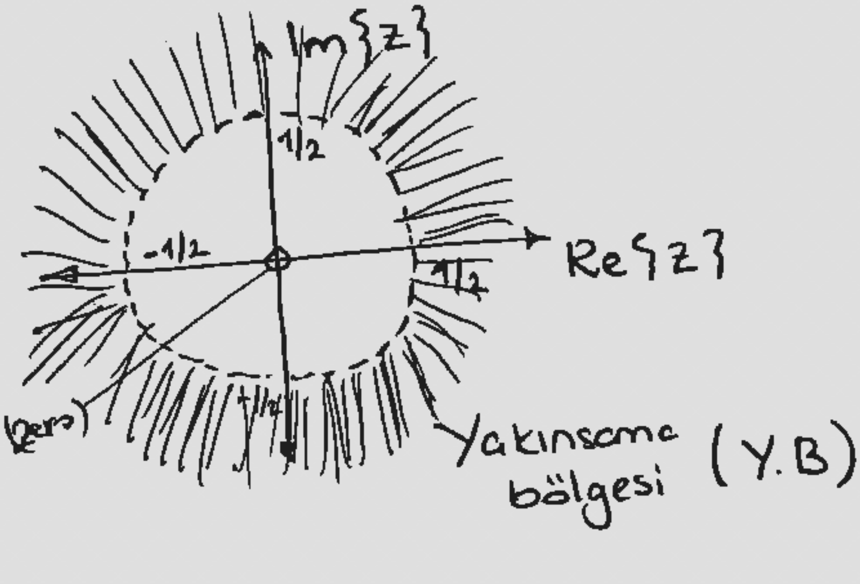
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{2}$ (iki) $\qquad \frac{1}{2}$ (iki)

$\left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1$

$\boxed{\frac{1}{2} < |z|}$

yakınsama bölgesi



- Burada $z = 0$ sıfır kısım (zero)

$z = \frac{1}{2}$ pole olarak adlandırılır

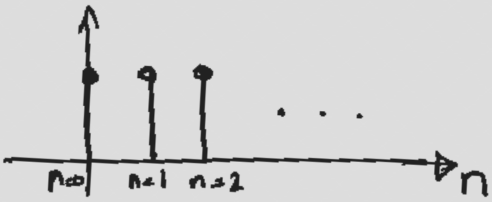
ÖRNEK $x(n) = -b^n u[-n]$ ise

$x(z) = ?$

Burada dikkat edilecek kısmı $u[-n]$ kısmıdır.

$u[n] \longrightarrow$

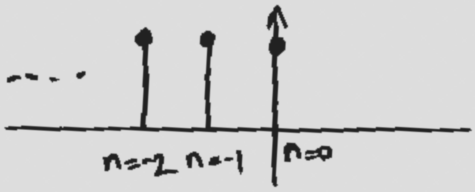
$(0, \infty)$



(Görüldüğü gibi sinyal sağ taraflı ve sınırsız sürelidir)

$u[-n] \longrightarrow$

$(-\infty, 0)$



(Görüldüğü gibi sinyal sol taraflı ve sınırsız sürelidir)

Z-dönüşüm formülü $x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -b^n u[-n] z^{-n}$

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} -b^n z^{-n} \qquad n = -k$$

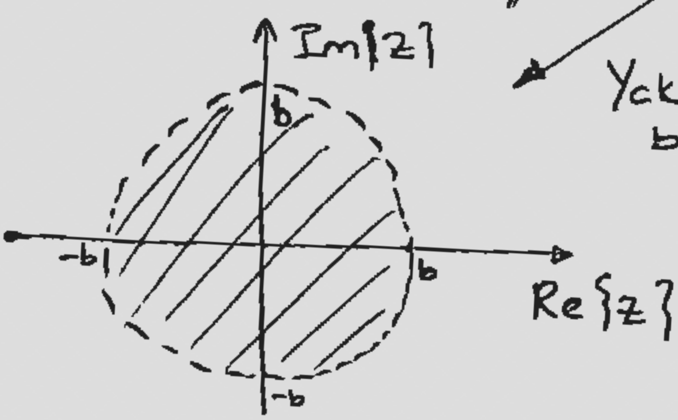
$$x(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} z^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(b^{-1} z)}_{r}^{k}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} |b^{-1} z| < 1 \\ |z| < b \end{array}}$$

$$x(z) = -\left(\frac{1}{1-r}\right) = -\frac{1}{1-b^{-1} z}$$

$$\boxed{x(z) = -\frac{b}{b-z}}$$ Eğer $|z| < b$ ise yakınsar

$$\boxed{x(z) = \frac{b}{z-b}}$$



Yakınsama bölgesi

ÖRN

$$g[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - (1/2)^n u[-n-1]$$

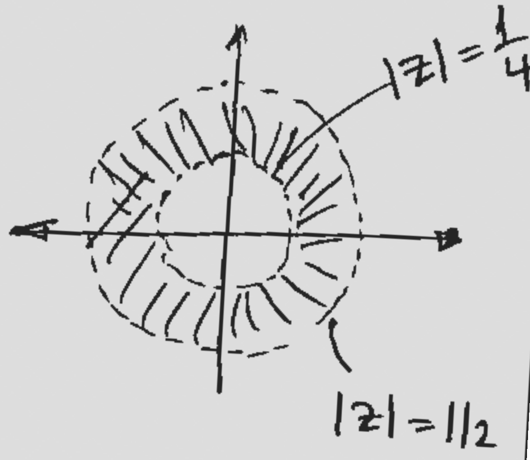
$$g(z) = ?$$

$$(1/4)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-1/4}, \quad |z| > 1/4$$

$$(1/2)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-1/2}, \quad |z| < 1/2$$

$$g(z) = \frac{z}{z-1/4} + \frac{z}{z-1/2}, \quad 1/4 < |z| < 1/2$$

$$= \frac{2z^2 - 3/4\, z}{(z-1/4)(z-1/2)},$$



ÖRN

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$X(z) = ?$ ve Y.B $= ?$

Cevap

$$X(z) = \frac{z}{z - 1/4} + \frac{z}{z + 1/2} \quad , |z| > 1/2$$

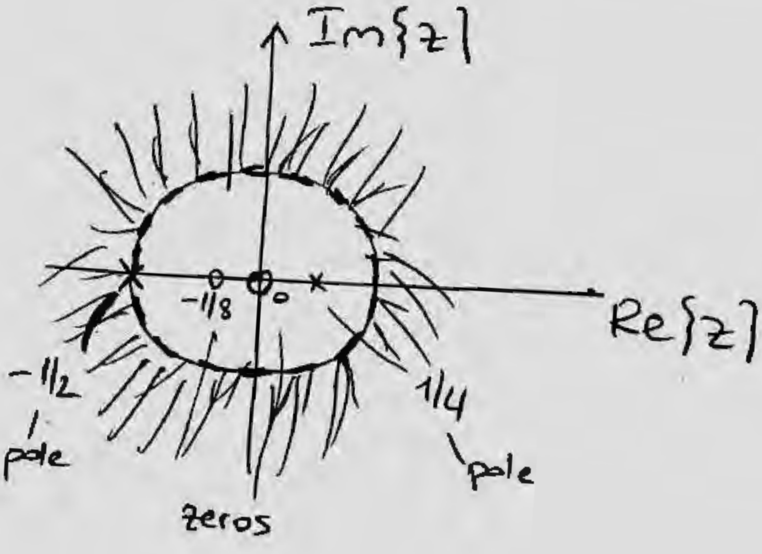
$|z| > 1/4$ $\quad$ $|z| > 1/2$

$$X(z) = \frac{z^2 + 1/2 z + z^2 - 1/4 z}{(z - 1/4)(z + 1/2)} \quad , \quad |z| > 1/2$$

$$X(z) = \frac{2z^2 + 1/4 z}{(z - 1/4)(z + 1/2)} = \frac{2z(z + 1/8)}{(z - 1/4)(z + 1/2)} \quad , |z| > 1/2$$

Zeros $\quad z = 0, -1/8$

poles $\quad z = 1/4, -1/2$



ORNEK

$$x[n] = (1/4)^n u[n] - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$X(z) = ? \quad \text{ve} \quad Y.B = ?$$

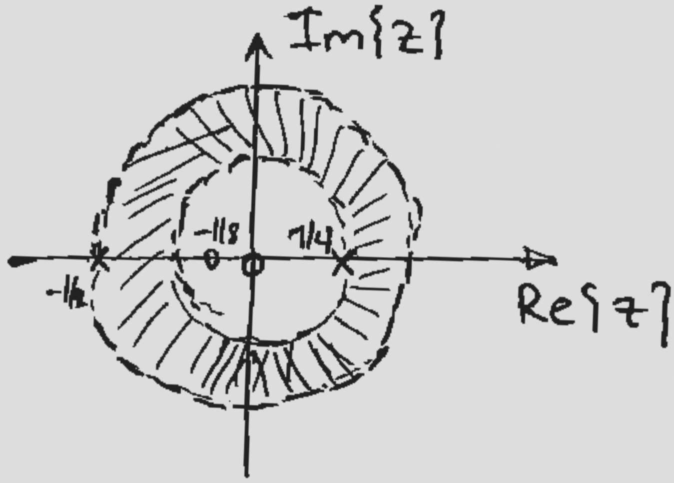
CEVAP

$$X(z) = \underbrace{\frac{z}{z-1/4}}_{|z| > 1/4} + \underbrace{\frac{z}{z+1/2}}_{|z| < 1/2} \qquad \frac{1}{4} < |z| < 1/2$$

$$X(z) = \frac{2z(z+1/8)}{(z-1/4)(z+1/2)}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 1/2$$

zeros $z = 0, -\frac{1}{8}$

poles $z = 1/4, -1/2$



ÖRN

$$x[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{diğer aralıklar} \end{cases}$$

$X(z)$ ve Y.B = ?

Cevap

$\alpha^n z^{-n} = (\alpha z^{-1})^n$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha z^{-1})^n$$

$$X(z) = \frac{1-(\alpha z^{-1})^N}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z^N - \alpha^N}{z^{N-1}(z-\alpha)}$$

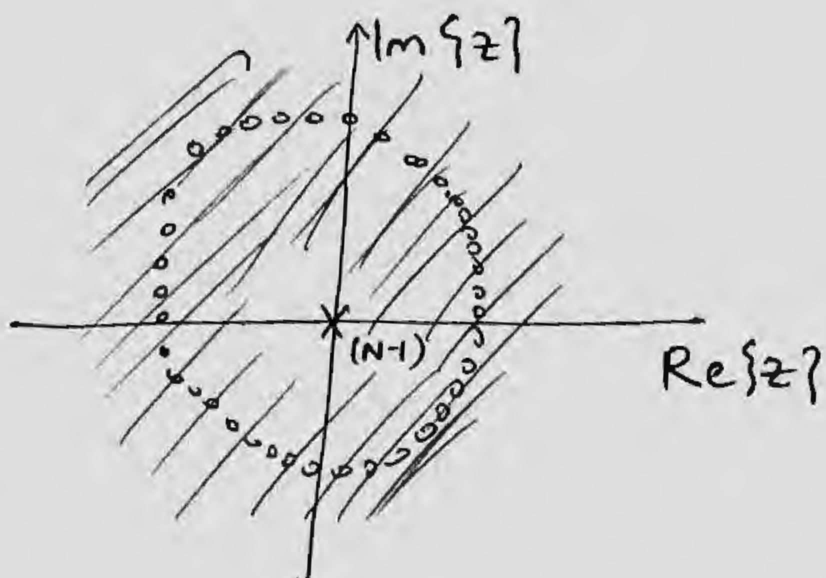
$$\text{Y.B} : \sum_{n=0}^{N-1} |\alpha z^{-1}|^n < \infty \Rightarrow$$

$|\alpha| < \infty$ ve $z \neq 0$

tüm z bölgesi $z=0$ hariç

Zeros : $z^N = \alpha^N \Rightarrow z_k = \alpha e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k = 0, 1, 2, \dots N-1$

poles : $z=0$ $(N-1)$ ve $z=\alpha$



(16)

ÖRN

Sonuç $X(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ olursa

zeros $z=-1$
poles $z=-2,1$

ancak $\lim_{z\to\infty} X(z) \approx \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$

$z=\infty$ da zero olduğun görebiliriz

ÖRN

Sonuç $X(z) = \frac{(z+2)(z-1)}{z+1}$ olursa

zeros $z=-2,1$
pole $z=-1$

ancak $\lim_{z\to\infty} X(z) \approx \lim_{z\to\infty} z = \infty$

$z=\infty$ olduğun ~~görür~~, pole olarak görürüz

NOT:

Eğer $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ve Kuvveti$\{P\}=M$, Kuvvet$\{Q\}=N$ dersek

1) $N>M$ olduğu zaman
$N-M$ zeros $z=\infty$

2) $M>N$ olduğu zaman
$M-N$ poles $z=\infty$ olacaktır.

ÖRN

$$x[n] = u[n] + (-3/4)^n u[-n]$$

$$X(z) = ?$$

Cevap

$$x[n] = u[n] + \delta[n] - - (-3/4)^n u[-n-1]$$

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1$$

$$-(-3/4)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z+3/4}, \quad |z| < 3/4$$

$X(z)$ yoktur!!

(Bir sonraki sayfadaki nota bakınız)

Z- Dönüşümün Özellikleri

1) Lineerlik özelliği

$$Z\{x_1(n)\} = X_1(z) \quad , \; YB_1$$

$$Z\{x_2(n)\} = X_2(z) \quad , \; YB_2$$

$$Z\{a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\} = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

$$YB_1 \cap YB_2 \quad (a_1, a_2 \in R)$$

önemli!!!

NOT: Yakınsama bölgesi boş küme ise ilgilenilen ifadenin z-dönüşümü de mevcut değildir!!!

Bir önceki soruya yönelik not!!

ÖR $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$ ise

$X(z)$ ve YB'yi bulunuz?

CEVAP

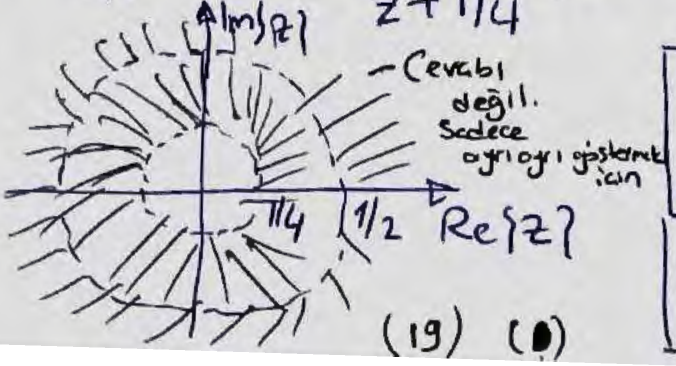
$$Z\{x(n)\} = Z\{(\tfrac{1}{2})^n u(n)\} - Z\{(-\tfrac{1}{4})^n u(n)\}$$

$$Z\{(\tfrac{1}{2})^n u(n)\} = \frac{z}{z-1/2} \; , \; |z| > 1/2$$

$$Z\{(-\tfrac{1}{4})^n u(n)\} = \frac{z}{z+1/4} \; , \; |z| > 1/4$$

Hatırlatma

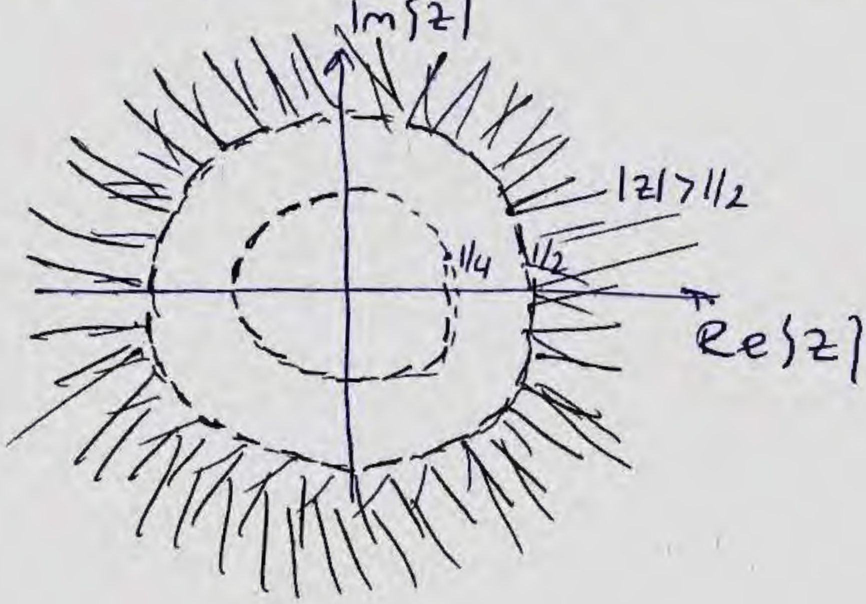
$$Z\{a^n u(n)\} = \frac{z}{z-a}$$
$$|z| > a$$



$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-1/2} - \frac{z}{z+1/4}}$$

$$\boxed{Y.B. \Rightarrow |z| > 1/2}$$

Buradaki örnekte görüldüğü gibi kesişim noktası $|z| > 1/2$ olduğu durumdur. Yani Y.B.

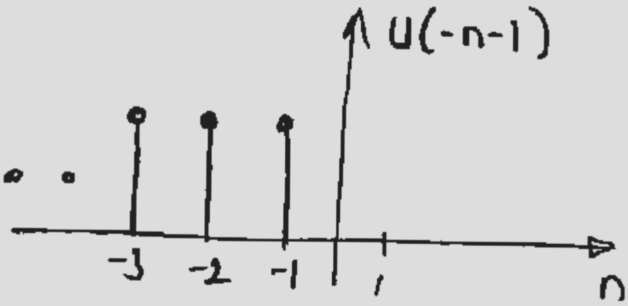


ÖRNEK

$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ ise $X(z)$'yi aşağıdaki şartlar için ayrı ayrı bulunuz.

a) $|a| > |b|$ b) $|a| < |b|$

$$\mathcal{Z}\{a^n u(n)\} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > a$$



$$\mathcal{Z}\{-b^n u(-n-1)\} = -\sum_{n=\infty}^{-1} b^n z^{-n}$$

$n = -k$

$$\mathcal{Z}\{-b^n u(-n-1)\} = -\sum_{k=1}^{\infty} b^{-k} z^{k}$$

$$= -\left(b^{-1}z + b^{-2}z^2 + b^{-3}z^3 + \dots\right)$$

$$= -b^{-1}z\left(1 + b^{-1}z + b^{-2}z^2 + \dots\right)$$

$$= -b^{-1}z\left(\frac{1}{1+b^{-1}z}\right) \qquad |b^{-1}z| < 1$$

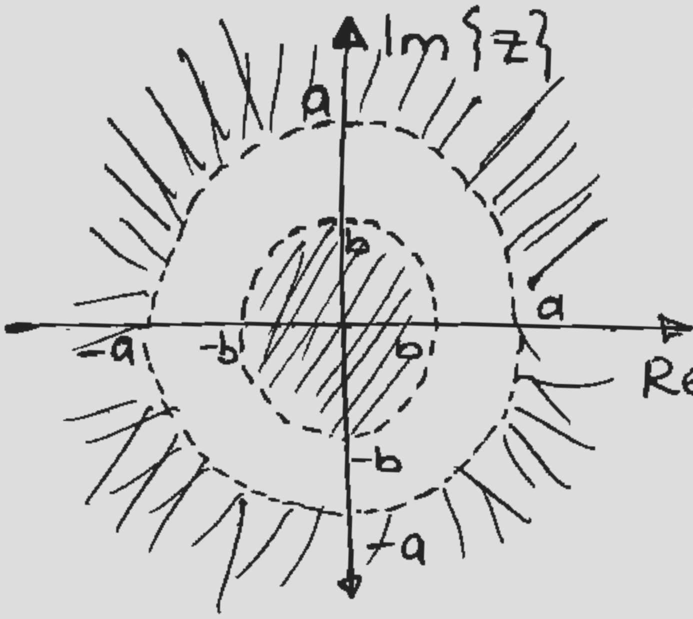
$$= \frac{b^{-1}z}{b^{-1}z - 1} \qquad |z| < |b|$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\{-b^n u(-n-1)\} = \frac{z}{z-b}, \quad |z| < |b|}$$

Bu sonuç aynı zamanda $\boxed{\mathcal{Z}\{b^n u(n)\} = \frac{z}{z-b}, \quad |z| > b}$

Bu iki sinyalin z dönüşümleri aynıdır. Fakat Y.B. farklıdır. Dolayısıyla Y.B. önemini göstermektedir.

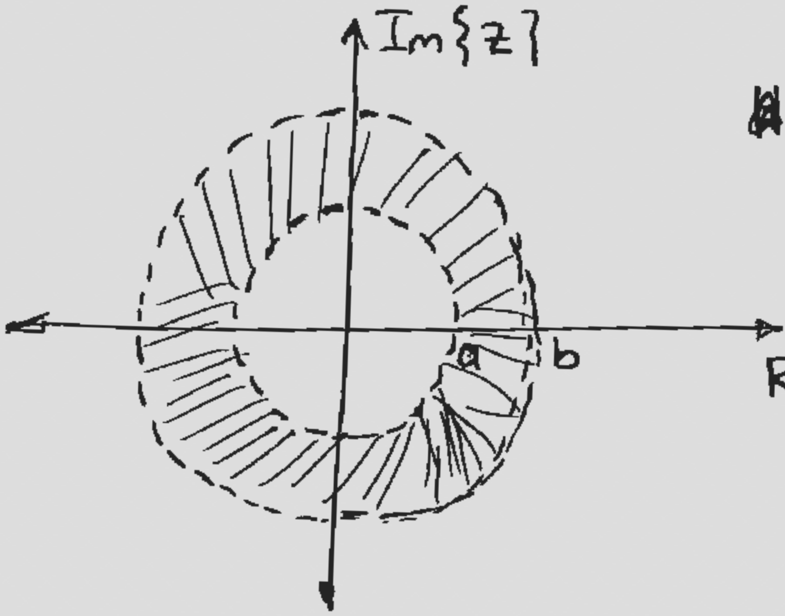
a)



$|a| > |b|$ için

$$Z\{a^n u(n) - b^n u(-n-1)\} = \text{tanımlı / mevcut değildir.}$$

b)



$|a| < |b|$ için

$$Z\{a^n u(n) - b^n u(-n-1)\} = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$$

$$|a| < |z| < |b|$$

2) Yansıtma özelliği

$$Z\{x(n)\} = X(z) \quad \text{ise} \quad Z\{x(-n)\} = ?$$

$$Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \Rightarrow Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n}$$

$n = -k$

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{k}$$

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) (z^{-1})^{-k}$$

$$\boxed{Z\{x(-n)\} = X(z^{-1})}$$

ÖRNEK $\quad Z\{u(-n)\} = ?$

$$Z\{u(n)\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$Z\{u(-n)\} = X(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1}, \quad |z^{-1}| > 1$$

$$Z\{u(-n)\} = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

2. Yöntem olarak; doğrudan işlem yapılırsa

$$Z\{u(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{0} 1 . z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1$$

$n = -k$

3) Zamanda öteleme

a) Sağa öteleme

$Z\{x(n)\} = X(z)$ Y.B

$Z\{x(n-n_0)\} = ?$ $(n_0 \in Z^+)$

$$Z\{x(n-n_0)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n-n_0).z^{-n} \qquad n-n_0=k$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-n_0}.z^{-k}$$

$$= z^{-n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} = z^{-n_0} X(z)$$

Y.B. değişmez.

b) Sola öteleme

$Z\{x(n)\} = X(z)$ Y.B.

$Z\{x(n+n_0)\} = z^{n_0} X(z)$ Y.B. değişmez.

$\boxed{\text{NOT: öteleme işlemleri sonucunda yakınsama bölgesi değişmez.}}$

7

ÖRNEK

a) $\mathcal{Z}\{u(n-2)\} = ?$ b) $\mathcal{Z}\{u(n+3)\} = ?$

Cevap

a) $\mathcal{Z}\{u(n)\} = \dfrac{z}{z-1}, \quad |z|>1$

$$\mathcal{Z}\{u(n-2)\} = z^{-2}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{-1}}{z-1}, \quad |z|>1$$

b)
$$\mathcal{Z}\{u(n+3)\} = z^{3}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{4}}{z-1}, \quad |z|>1$$

2. Yöntem

$$\mathcal{Z}\{u(n-2)\} = \sum_{n=2}^{\infty} 1.z^{-n} = z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\cdots$$
$$= z^{-2}(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots)$$
$$= z^{-2}\frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z^{-1}|<1$$
$$= \frac{z^{-1}}{z-1}, \quad |z|>1$$

ÖRNEK $\mathcal{Z}\{\delta(n-2)\} = ?$

$\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = 1$ Y.B. Tüm z-düzlemi

$\mathcal{Z}\{\delta(n-2)\} = z^{-2}.1$ Y.B. Tüm z-düzlemi $- \{\underset{\text{nokta}}{z=0}\}$

NOT: Sınırlı süreli işaretlerin ötelenmesi sonucunda oluşan işaretlerin yakınsama bölgeleri değişebilir. Yalnız bu değişiklik yakınsama bölgesinden $z=0$ veya $z=\infty$ değerlerinin çıkarılması şeklinde olur.

4) Konvolüsyon

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k).x_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)x_1(n-k)$$

(Değişme özelliği)

$$\boxed{Z\{x_1(n) * x_2(n)\} = X_1(z).X_2(z)}$$

$$\boxed{Y.B_1 \cap YB_2}$$

ÖRNEK

$x(n) = \{1,-1,2\}$ $\quad h(n) = \{-1, 1\}$

$Z\{x(n) * h(n)\} = ?$ $\quad x(n) * h(n) = ?$

$$Z\{x(n) * h(n)\} = X(z)H(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{2} x(n) z^{-n} = 1.z^0 - 1.z^{-1} + 2.z^{-2}$$

$$= 1 - z^{-1} + 2z^{-2}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{1} h(n) z^{-n} = (-1) z^0 + 1.z^{-1} = -1 + z^{-1}$$

$$Z\{x(n) * h(n)\} = (1 - z^{-1} + 2z^{-2})(-1 + z^{-1})$$

$$= -1 + z^{-1} + z^{-1} - z^{-2} - 2z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$Z\{x(n) * h(n)\} = -1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$x(n) * h(n) = ?$$

$$Z\{x(n) * h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n) * h(n)) z^{-n}$$

$$= -1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$x(n) * h(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1}, 2, -3, 2\}$$

5) Zamanda ölçekleme

a) Zamanda Daraltma (örnek Seyreltme)

$$x(n) \longrightarrow x(an) \qquad (a \in Z^{+})$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$Z\{x(an)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(an) z^{-n} \qquad an = k$$

$$Z\{x(an)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-k/a} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(z^{1/a})^{-k}$$

$$Z\{x(n)\} = X(z) \Rightarrow Z\{x(an)\} = X(z^{1/a})$$

b) <u>Zamanda Genişletme</u>

$$x(n) \longrightarrow x\left(\frac{n}{a}\right) \qquad n \in Z^{+}$$

$$Z\{x(n)\} = X(z)$$

$$\boxed{Z\left\{x\left(\frac{n}{a}\right)\right\} = X(z^{a})}$$

<u>ÖRNEK</u>

$x(n) = 2^{n} u(n)$ ise a) $Z\{x(3n)\} = ?$

b) $Z\left\{x\left(\frac{n}{2}\right)\right\} = ?$

a) $X(z) = \dfrac{z}{z-2}, \quad |z| > 2$

$$Z\{x(3n)\} = \frac{z^{1/3}}{z^{1/3}-2}, \quad |z^{1/3}| > 2$$

$$|z| > 8$$

b) $Z\left\{x\left(\frac{n}{2}\right)\right\} = \dfrac{z^{2}}{z^{2}-2}, \quad |z^{2}| > 2, \quad |z| > \sqrt{2}$

6) Türev özelliği

$$Z\{x(n)\} = x(z)$$

$$Z\{x(n)\} = -z\frac{d\,x(z)}{dz} \quad R' = R$$

İspatı:

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\frac{d\,x(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,x(n)\,z^{-n-1}$$

$$\frac{d\,x(z)}{dz} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,x(n) z^{-n}$$

$$\boxed{Z\{n\,x(n)\} = -z\frac{d\,x(z)}{dz}}$$

ÖRNEK $Z\{n\,T\,u(n)\} = ?$

$$Z\{T\,u(n)\} = T.\frac{z}{z-1} \quad |z|>1$$

$$Z\{n\,T\,u(n)\} = T.\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right).-z$$

$$= -Tz\left(\frac{z-1-z}{(z-1)^2}\right) = \frac{T.z}{(z-1)^2}, \quad |z|>1$$

7) a^n ile Çarpma

$$Z\{x(n)\} = X(z) \quad Y.B.$$

$$Z\{a^n x(n)\} = ?$$

$$Z\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (a^{-1} z)^{-n}$$

$$= X(a^{-1}.z)$$

<u>ÖRNEK</u>

$$Z\{a^n n\, u(n)\} = ?$$

<u>1. Yöntem</u>

$$Z\{n.u(n)\} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad , |z|>1$$

$$Z\{a^n n\, u(n)\} = \frac{z/a}{(z/a-1)^2} \quad |z/a|>1$$

$$Z\{a^n n\, u(n)\} = \frac{z/a}{\left(\frac{z-a}{a}\right)^2} = \frac{z/a}{(z-a)^2} . a^2 = \frac{a z}{(z-a)^2} \quad , |z|>a$$

2. Yöntem

$$Z\{a^n . u(n)\} = \frac{z}{z-a} \quad , \ |z| > |a|$$

$$Z\{n\, a^n u(n)\} = -z \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = -z\left(\frac{z-a-z}{(z-a)^2}\right)$$

$|z| > a$

$$Z\{n . a^n u(n)\} = \frac{z . a}{(z-a)^2} \quad , \ |z| > |a|$$

---

8) Son Değer Teoremi

Bu teoremi kullanarak $\lim_{n \to \infty} x(n) = ?$

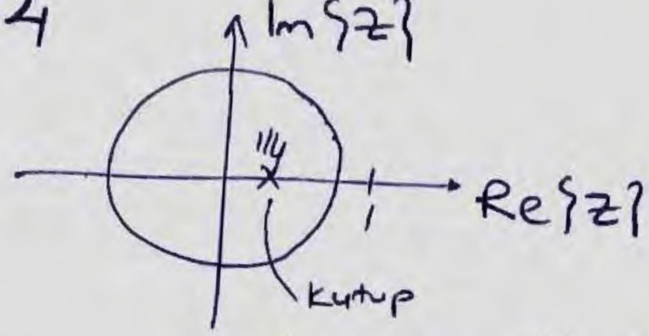
Yani $\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, x(z)$ elde ederiz.

__NOT__ : Buradaki $(z-1)(x(z))$ ifadesinden ortaya çıkan kutuplar birim çemberin içinde olmalıdır. Aksi halde bu teorem uygulanamaz. Bu teorem özellikle sayısal kontrol sistemlerinin kalıcı durum cevabı analizinde kullanılır.

ÖRNEK $x(n)=4^{-n}u(n)$ $\quad \lim_{n\to\infty} x(n)=?$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)=0$$

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{4}} \qquad \lim_{n\to\infty} x(n)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-\frac{1}{4}}=0$$



bu kısım birim çember içinde olduğundan teorem uygulanabilir

ÖRNEK $x(n)=4^{n}u(n)$

$$X(z)=\frac{z}{z-4}$$

$$\lim_{n\to\infty} x(n)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-4}$$

kutup birim çember dışında olduğundan uygulanamaz

9) Başlangıç Değer Teoremi

$x(n)=0 \quad n<0 \qquad x(0)=\lim_{n\to 0} x(n)=\lim_{z\to\infty} X(z)$

İspat: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad x(n)=0 \quad n<0$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}=x(0).1+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\dots$$

$$x(0)=\lim_{n\to\infty} X(z)$$

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.

4- Doç. Dr. Turgay KAYA Ders Notları
5- Dr. Öğr. Üyesi Barış KARAKAYA Ders Notları