Fark Denklemlerinin z-dönüşümü ile Çözümü

Fark denklemleri iki farklı yöntem ile çözülebilinir.

→ Direk çözüm

→ İndirekt çözüm

Eğer bu çözümler arasından indirekt metodunu kullanırsak z-dönüşümüne ihtiyacımız olacaktır.

Bildiğimiz gibi

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

Burada $y(n) = y_{zi} + y_{zs}$ olduğunu geçmiş derslerde ve notlardan bilebiliriz.

Eğer denklem çözümünü z-dönüşümüyle gerçekleştireceksek bu denklemlerin herbirinin ayrı ayrı z-dönüşümünü almamız gerekmektedir. Yani sonuç olarak bir z-dönüşümü alınmış bir rasyonel bir ifade elde edilir. Daha sonra z-ters dönüşümündeki işlemi yapmak için basit kesirlere ayırıp ~~ters~~ ters z-dönüşümü yapılarak sonuca gidilmektedir.

Eğer giriş şartlarımız (başlangıç) sıfır olduğu durumda

$$Z\{y[n-k]\} = z^{-k} Y(z)$$

$$Z\{y[n+k]\} = z^{k} Y(z)$$

olduğunu biliyoruz.

$$Z\{y[n-k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} y[n-k]\, z^{-n} \qquad n-k=m \qquad (k \in Z^{+})$$

$$= \sum_{m=-k}^{\infty} y[m]\, z^{-(m+k)}$$

$$= z^{-k}\left(\sum_{m=-k}^{-1} y[m]\, z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} y[m]\, z^{-n} \right)$$

$$Z\{y[n-k]\} = z^{-k}\left(\sum_{m=-k}^{-1} y[m]\, z^{-m} + Y(z) \right)$$

$$Z\{y[n-k]\} = z^{-k}\, Y(z) + z^{-k} \sum_{m=-k}^{1} y[m]\, z^{-m}$$ (Baslangic sartlari $\neq 0$

$$Z\{y[n+k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} y[n+k]\, z^{-n} \qquad n+k=m$$

$$= \sum_{m=k}^{\infty} y[m]\, z^{-(m-k)} = \sum_{m=0}^{\infty} y[m]\, z^{-(m-k)} - \sum_{m=0}^{k-1} y[m]\, z^{-(m-k)}$$

$$= z^{k}\left(\sum_{m=0}^{\infty} y[m]\, z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} y[m] \cdot z^{-m} \right)$$

$$= z^{k}\left(Y(z) - \sum_{m=0}^{k-1} y[m]\, z^{-m} \right)$$

$$\boxed{Z\{y[n+k]\} = z^{k}\, Y(z) - z^{k} \sum_{m=0}^{k-1} y[m]\, z^{-m}}$$

Asagıda verilen fark denklemi icin $x(n)$ giris $y[n]$ ise cıkısı göstermektedir. $y[0]=1$, $y[1]=1$ baslangıc sartları icin,

a) Sıfır giris cevabını ($y_{zi}(n)$)

b) Sıfır durum cevabını ($y_{zs}(n)$)

c) Cıkıs ifadesini bulunuz ($y[n]$)

Sistem $\rightarrow$ $y[n+2] - y[n+1] + \frac{3}{16} y[n] = x[n]$

Cevap

a) $y_{zi}[n] = ?$ ($x(n)=0$ sıfır giris)

$$y[n+2] - y[n+1] + \frac{3}{16} y[n] = 0$$

$$Z\{y[n+2]\} - Z\{y[n+1]\} + \frac{3}{16} Z\{y[n]\} = Z\{0\} = 0$$

$$Z\{y[n+k]\} = z^k \left(Y(z) - \sum_{m=0}^{k-1} y(m) z^{-m} \right)$$

$$Z\{y(n+2)\} = z^2 \left(Y(z) - \sum_{m=0}^{1} y(m) z^{-m} \right)$$

$K=2$

$$= z^2 \left(Y(z) - y[0] z^{-0} - y[1] z^{-1} \right)$$

$$Z\{y(n+1)\} = z^1 \left(Y(z) - y[0] z^{-0} \right)$$

Yani $\boxed{\begin{array}{l} Z\{y(n+2)\} = z^2 Y(z) - z^2 - z, \quad Z\{y(n)\} = Y(z) \\ Z\{y(n+1)\} = zY(z) - z \end{array}}$

$$z^2 Y(z) - z^2 - z - z\,Y(z) + z + \frac{3}{16} Y(z) = 0$$

$$Y(z)\left(z^2 - z + \frac{3}{16}\right) = z^2$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + \frac{3}{16}} \quad , \quad \frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - z + 3/16}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{\left(z - \frac{3}{4}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$ olarak elde edilir

Basit kesirlere ayıralım

$$\frac{A}{z - \frac{3}{4}} + \frac{B}{z - \frac{1}{4}} = \frac{z}{\left(z - \frac{3}{4}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

$$\left(z - \frac{1}{4}\right) \qquad \left(z - \frac{3}{4}\right)$$

$$A\left(z - \frac{1}{4}\right) + B\left(z - \frac{3}{4}\right) = z$$

$$Az - \frac{A}{4} + Bz - \frac{3B}{4} = z$$

$$z(A + B) - \frac{A}{4} - \frac{3B}{4} = z$$

$$A + B = 1 \quad , \quad -\frac{A}{4} - \frac{3B}{4} = 0 \qquad \boxed{A = -3B}$$

$-3B+B=1$

$-2B=1$

$\boxed{B=-\frac{1}{2}}$ $\boxed{A=-3\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}}$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-\frac{3}{4}}+\frac{-1}{2}\,\frac{1}{z-\frac{1}{4}}=Y(z)$$

$$y_{zi}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

$$\boxed{y_{zi}=\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u(n)}$$

b) $y_{zs}=?$ (Baslangıc sartlarının sıfır olduğu durum)

$$y[n+2]-y[n+1]+\frac{3}{16}y[n]=x[n]$$

$$\downarrow$$

$$y[n+2]-y[n+1]+\frac{3}{16}y[n]=u[n)$$

yani

$$z\{y[n+2]\}-z\{y[n+1]+\frac{3}{16}\{y[n]\}=z\{u[n]\}$$

$$z\{y[n+2]\}=z^2Y(z)\ ,\ z\{y[n+1]=zY(z)$$

$$z\{y(n)\}=Y(z)$$ (Baslangıc kosulları sıfır)

$$Z\{u(n)\} = \frac{z}{z-1}$$

$$z^2 Y(z) - z\,Y(z) + \frac{3}{16} Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)\left(z^2 - z + \frac{3}{16}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)\left(z-\frac{3}{4}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{B_1}{z-\frac{3}{4}} + \frac{C_1}{z-\frac{1}{4}}$$

$$\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{3}{4}\right) \quad (z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right) \quad \left(z-\frac{3}{4}\right)(z-1)$$

$$A_1\Big(z^2 \overbrace{-\frac{3}{4}z - \frac{1}{4}z}^{-z} + \frac{3}{16}\Big) + B_1\Big(z^2 \overbrace{-\frac{1}{4}z - z}^{-5/4\,z} + \frac{1}{4}\Big) = 1$$

$$+ C_1\Big(z^2 \overbrace{- z - \frac{3}{4}z}^{-7/4\,z} + \frac{3}{4}\Big)$$

$$z^2(A_1 + B_1 + C_1) + z\left(-A_1 - 5/4\,B_1 - 7/4\,C_1\right)$$

$$\frac{3A_1}{16} + \frac{B_1}{4} + \frac{3C_1}{4} = 1$$

$$A_1 + B_1 + C_1 = 0$$

$$A_1 + 5/4\, B_1 + 7/4\, C_1 = 0$$

$$\frac{3A_1}{16} + \frac{B_1}{4} + \frac{3C_1}{4} = 1$$

$$\boxed{A_1 = \frac{16}{3}, \quad B_1 = -8, \quad C_1 = \frac{8}{3}}$$

$$y(z) = \frac{16}{3} \cdot \frac{z}{z-1} - 8\frac{z}{z-\frac{3}{4}} + \frac{8}{3} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$y_{zs}(n) = \frac{16}{3} u(n) - 8\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

$$\boxed{y_{zs}(n) = \left(\frac{16}{3} - 8\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) u(n)}$$

c) $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$

$$y(n) = \left(\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) u(n) + \left(\frac{16}{3} - 8\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) u(n)$$

$$y(n) = \left(\underbrace{\frac{16}{3}}_{\text{Kalıcı durum}} - \underbrace{\frac{13}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\text{gecici durum}} + \underbrace{\frac{13}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{\text{gecici durum}}\right) u(n)$$

$(n \to \infty \quad y(n) = 16/3)$