Ters Z - Dönüşümü

Ters Z-Dönüşümü, Z-dönüşümü alınarak elde edilen ifadelerden hareketle tekrardan ayrık zaman domenine geçiş için kullanılan bir dönüşümdür. Farklı yöntemlerle ters Z-dönüşümü elde edilebilir.

1) Direkt Kontur İntegrasyonu (Doğrudan İntegrasyon)
2) Seriye Açılım
3) Basit Kesirlere Ayırma

En çok kullanılan yöntem basit kesirlere ayırma yöntemidir. Ters Laplace dönüşümü alınırken izlenen yola benzer şekilde ters dönüşüm yapılabilir. Buradaki tek fark basit kesirlere ayırırken $X(z)$ yerine $\frac{X(z)}{z}$'nin kullanılmasıdır. Ters dönüşüm alınırken yakınsama bölgelerine de dikkat edilmelidir. Çünkü farklı fonksiyonların Z-dönüşümleri aynı olabilir.

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-a} \quad |z|>|a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-a} \quad |z|<|a|$$

Hatırlatma;

$$u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-1}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-a}$$

$$\sin(\Omega n)\, u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{z \sin(\Omega)}{z^2-2z\cos(\Omega)+1}$$

$$\cos(\Omega n)\, u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{z^2-z.\cos(\Omega)}{z^2-2z\cos(\Omega)+1}$$

Z-Dönüşümünde pay kısmında "z" bulunmaktadır. Basit kesirlere ayrıldığında;

$$\frac{A}{z-p_1}+\frac{B}{z-p_2}+\cdots+\frac{k}{z-p_n}$$

şeklinde olacak ve pay kısmındaki "z" kaybolacaktır. Bu yüzden ters Z-dönüşümü alınırken tablodan okuma yapılamayacaktır. Bunun için $\frac{X(z)}{z}$ dönüşümü yapılır ve z ile çarpılır.

$$\frac{Az}{z-p_1}+\frac{Bz}{z-p_2}+\cdots$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-p_n}\right) = \begin{cases} p_n^n\, u(n) & |z| > |p_n| \\ -p_n^n \cdot u[-n-1] & |z| < |p_n| \end{cases}$$

Basit Kesirlere Ayırma

$\frac{X(z)}{z}$'nin köklerine göre basit kesirlere ayırma işlemi,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{C_1}{z-p_1} + \frac{C_2}{z-p_2} + \dots + \frac{C_n}{z-p_n}$$ şeklinde olacaktır.

1) Kökler Reel ve Birbirinden Farklı

$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ (birbirinden farklı)

$$x(n) = C_1(p_1)^n \cdot u(n) + C_2(p_2)^n u(n) + \dots + C_n(p_n)^n u(n)$$

$$x(n) = \left[C_1(p_1)^n + C_2(p_2)^n + \dots + C_n(p_n)^n\right] u(n)$$

Örnek; $X(z) = \frac{1}{1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}}$ ise aşağıda verilen yakınsama bölgeleri için $x(n)$'i bulunuz.

a) $|z|>1$, b) $|z|<0{,}5$ c) $0{,}5<|z|<1$

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2-1{,}5z+0{,}5} \qquad \frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2-1{,}5z+0{,}5} = \frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)} = \frac{C_1}{z-0{,}5} + \frac{C_2}{z-1}$$

$$C_1 = \left[(z-0{,}5)\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0{,}5} = \left[\cancel{(z-0{,}5)} \cdot \frac{z}{\cancel{(z-0{,}5)}(z-1)}\right]_{z=0{,}5} = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=0{,}5} = \frac{0{,}5}{0{,}5-1} = -1$$

$$C_2 = \left[(z-1)\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} \Rightarrow C_2 = 2$$
$$C_1 = -1$$

a) $|z|>1$ için (her ikisi sağ taraflı) $\frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{z-0{,}5} + \frac{2}{z-1}$

$$X(z) = \frac{-z}{z-0{,}5} + \frac{2z}{z-1} \qquad x(n) = -(0{,}5)^n \cdot u(n) + 2\cdot(1)^n \cdot u(n)$$

$$x(n) = \left(2-(0{,}5)^n\right) u(n) \quad |z|>1$$

b) $X(z) = \frac{-z}{z-0{,}5} + \frac{2z}{z-1} \quad |z|<0{,}5$ (her ikiside sol taraflı)

$$X(n) = -\left(-(0{,}5)^n . u(-n-1)\right) + 2\left(-(1)^n . u(-n-1)\right)$$

c) $X(z) = \underbrace{\frac{-z}{z-0{,}5}}_{\text{sağ taraflı}} + 2\underbrace{\frac{z}{z-1}}_{\text{sol taraflı}} \quad 0{,}5<|z|<1$

$$X(n) = -(0{,}5)^n u(n) - 2 . u(-n-1)$$

2) Köklerin Tekrarlı olma Durumu (Katlı Kök olma Durumu)

$$p_1, p_2, \ldots, p_r \in R \; (p_1 = p_2 = \ldots = p_r)$$

$$p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n \in R \; \text{(birbirinden farklı)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \underbrace{\frac{C_1}{(z-p_1)^r} + \frac{C_2}{(z-p_2)^{r-1}} + \ldots + \frac{C_r}{(z-p_1)}} + \frac{C_{r+1}}{z-p_{r+1}} + \ldots + \frac{C_n}{z-p_n}$$

$$C_k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-p_1)^r . \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_1}$$

Örnek; Aşağıda verilen $X(z)$ ve yakınsama bölgesi için $X(n)$'i elde ediniz.

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}, \quad |z|>1$$

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{C_1}{(z-1)^2} + \frac{C_2}{z-1} + \frac{C_3}{z+1}$$

$$C_1 = \left[(z-1)^2 . \frac{z^2}{(z+1)} . \frac{1}{(z-1)^2} \right]_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{1}{1!} . \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{z+1}\right]_{z=1} = \left[\frac{2z(z+1) - z^2}{(z+1)^2}\right]_{z=1} = \frac{3}{4}$$

$$C_3 = (z+1) . \frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{(-1)^2}{(-1-1)^2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} \qquad |z|>1$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{3}{4}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{4}\frac{z}{z+1}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$n\,u(n) \qquad\qquad u(n) \qquad\qquad (-1)^n \cdot u(n)$$

$$x(n) = \left[\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n\right] u(n)$$

3) Kompleks Kökler Olma Durumu

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} \qquad |z|>1 \qquad \begin{matrix} p_1, p_2 \in \mathbb{C} \\ c_1, c_2 \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

$$p_1 = p_2^* \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2^*$$

$$x(n) = c_1 (p_1)^n u(n) + c_2 (p_2)^n u(n) \qquad \text{sağ taraflı ise}$$

$$p_1 = |r| . e^{j\phi} \qquad c_1 = |c| . e^{j\theta}$$

$$x(n) = 2|c|(|r|)^n \cos(\phi n + \theta) . u(n)$$

örnek;

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0{,}5z^{-2}} \qquad |z|>1 \quad \text{ise } x(n) = ?$$

$$X(z) = \frac{z(z+1)}{z^2 - z + 0{,}5} \qquad \begin{matrix} p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} . e^{j\pi/4} \\ p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2}$$

$$c_1 = \left((z-p_1) . \frac{X(z)}{z}\right] = \left[(z-p_1) . \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)}\right)_{z=p_1} = \frac{p_1+1}{p_1-p_2}$$

$$c_1 = \frac{\frac{3}{2} + j\frac{1}{2}}{j} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j1{,}249}$$

$$x(n) = 2 . \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n . \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1{,}249\right) . u(n)$$

$$x(n) = \sqrt{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n . \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1{,}249\right) u(n)$$

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.