Ayrık Zamanlı Sistemlerde Transfer Fonksiyonu

Ayrık zamanlı sistemler
- Fark denklemi
- Transfer fonksiyonu
- Durum Uzay gösterimi ile gösterilebilirler.

LTD ayrık zamanlı sistemler transfer fonksiyonu kullanılarak gösterilebilirler. Başlangıç koşullarının sıfır olması şartıyla, çıkışın z-dönüşümünün, girişin z-dönüşümüne oranı transfer fonksiyonu olarak adlandırılır. Bir sistemin transfer fonksiyonu z-domeninde bir gösterimdir ve bu gösterimden hareketle sisteme ait bir çok analiz (kararlılık, nedensellik v.b.) yapılabilir.

$x(n) \rightarrow$ giriş $\quad y(n) \rightarrow$ çıkış

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{(Başlangıç koşulları sıfır)}$$

Bir sistemin fark denklemi gösterimi,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \quad \text{şeklindedir.}$$

$$Z\{a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N)\} = Z\{b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M)\}$$

$$Y(z).\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}\right) = X(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$y_{zs}(n) = h(n) * x(n) \qquad Y_{zs}(z) = H(z).X(z)$$

$H(z) \rightarrow$ Birim örnek cevabının z-domenindeki karşılığıdır.

Örnek: LZD AZ bir sistemde $x(n)$ girişi ve $y(n)$ de çıkıştır. Sistemin girişine birim basamak ($U(n)$) uygulandığında başlangıç koşulları sıfır iken

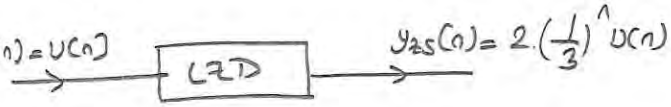
$y(n) = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^n U(n)$ çıkışı alınmıştır. Buna göre;

a) Transfer fonksiyonunu bulunuz.

b) Birim örnek cevabını bulunuz. ($h(n)$)

c) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n U(n)$ girişi için çıkışı elde ediniz.

a)



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{(başlangıç şartları sıfır)}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{U(n)\} = \frac{z}{z-1} \qquad Y(z) = \mathcal{Z}\{y_{zs}(n)\} = 2.\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2.\frac{z}{z-1/3}}{\frac{z}{z-1}} = 2\,\frac{z-1}{z-1/3}$$

b) $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{2.\frac{z-1}{z-\frac{1}{3}}\right\} \qquad \frac{H(z)}{z} = \frac{2\,z-1}{z\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad \frac{H(z)}{z} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{3}}$$

$$c_1 = 6, \quad c_2 = 2.\frac{-2/3}{1/3} = -4$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{6}{z} - \frac{4}{z-\frac{1}{3}} \qquad H(z) = 6 - 4.\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad \underline{h(n) = 6\delta(n) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n U(n)}$$

c) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n U(n)$ girişi için $y(n) = ?$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad Y(z) = X(z).H(z) \qquad X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad H(z) = 2.\frac{z-1}{z-\frac{1}{3}}$$

$$Y(z) = 2\,\frac{z-1}{z-\frac{1}{3}} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad \frac{Y(z)}{z} = \frac{2\;\;z-1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{c_1}{z-\frac{1}{3}} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{2}} \qquad c_1 = 8, \quad c_2 = -6$$

$$Y(z) = 8\frac{z}{z-\frac{1}{3}} - 6\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad y_{ts}(n) = \left[8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

Örnek: $y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n)$ fark denklemi ile verilen sistemin,

a) Transfer fonksiyonu
b) Ürün örnek cevabını
c) Ürün basamak cevabını bulunuz. (NOT: Sistem nedensel kabul)

a) $h(n) = 0, \quad n < 0$ (nedensel sistemler için)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Z\{y(n)\} - \frac{3}{4}Z\{y(n-1)\} + \frac{1}{8}Z\{y(n-2)\} = Z\{x(n)\}$$

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$$

b) $Z^{-1}\{H(z)\} = h(n)$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \qquad \frac{H(z)}{z} = \frac{c_1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{4}} \qquad c_1 = 2, \quad c_2 = -1$$

$$h(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

c) $x(n) = u(n) \Rightarrow y(n) = ?$

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \qquad Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{4}} \qquad c_1 = \frac{8}{3}, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = \frac{8}{3}\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{4}} \qquad y(n) = \left(\frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u(n)$$

Ayrık Zamanlı Sistemlerde Kararlılık

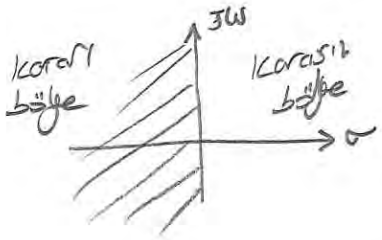
1.) Transfer Fonksiyonundan Faydalanarak Kararlılık Analizi

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

$B(z) = 0$ (Sıfırlar) $z_1, z_2, \dots, z_m$

$A(z) = 0$ (Kutuplar) $z_1, z_2, \dots, z_N$

S- düzleminde sistemin kararlı olması, transfer fonksiyonundaki kutupların sol yarı S- düzleminde olması gerekir.



$z = e^{sT}$

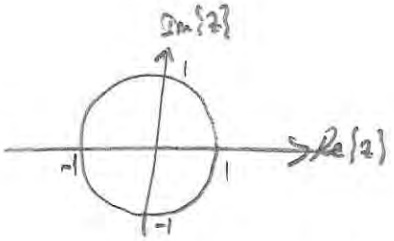
$s = \sigma + j\omega$ $\quad T$: örneklere periyodu

$z = e^{(\sigma + j\omega)T}$

$z = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$

genlik $\quad$ faz

$\sigma < 0$ için $\quad z = 1 \cdot e^{j\omega T}$



$\sigma < 0$, $|z| < 1$

$\sigma > 0$, $|z| > 1$

z düzleminde birim çemberin içi veya dışını temsil etmektedir.

Transfer fonksiyonunun paydasını sıfır yapan değerler kutuplardır ve kutupların konumu sistemin kararlılığını belirler.

Sistemin kutupları z- düzleminde farklı şekillerde konumlanabilir. Aşağıda verilen özellikler sistemin kararlılığını bilgilerinize sunar.

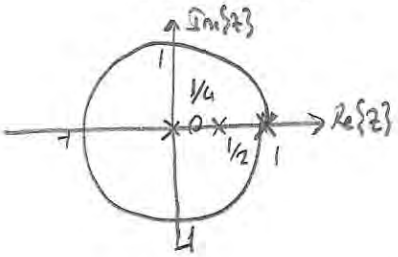
1) Kutuplar birim çemberin içerisindeyse sistem asimptotik kararlıdır.
2) Birim çember üzerinde katlı (tekrarlı) kutup varsa veya birim çember dışında kutup varsa sistem kararsızdır.
3) Birim çember üzerinde katlı (tekrarlı) olmayan kök veya kökler varsa ve birim çember dışında kutup yoksa marjinal kararlıdır.

Örnek; Aşağıda verilen transfer fonksiyonlarının sıfır ve kutuplarını bularak her bir sistemin kararlılığını çiziniz.

$$H(z)=\frac{z-\frac{1}{4}}{z(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

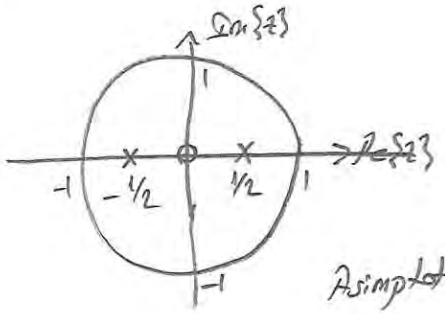
$z-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow z=\frac{1}{4}$ (sıfır)

$z\cdot(z-1)(z-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=\frac{1}{2}$ (kutuplar)



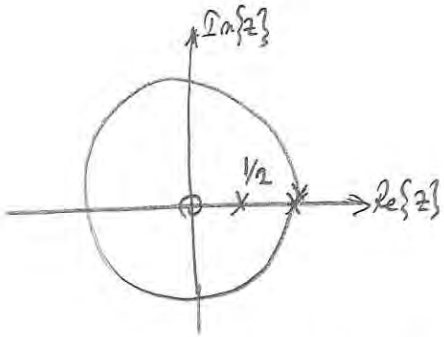
Marjinal kararlı

$$H(z)=\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$$



Asimptotik kararlı

$$H(z)=\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-1)^2}$$



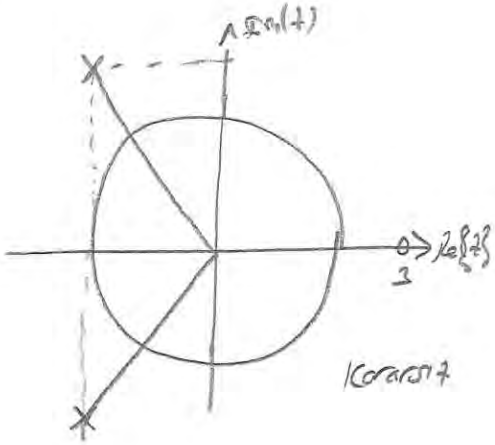
Kararsız

$$H(z)=\frac{z-3}{z^2+2z+5}$$

$z=3$ (sıfır)

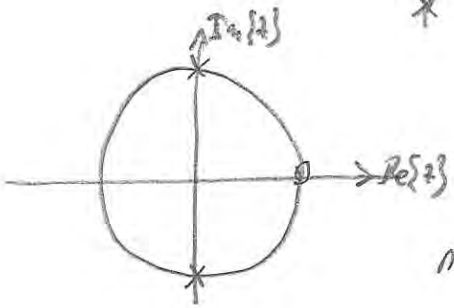
$z_1=-1+j2=\sqrt{5}e^{j\theta}$

$z_2=-1-j2=\sqrt{5}e^{j\theta}$



Kararsız

$$H(z)=\frac{z-1}{z^3+1}$$



marjinal kararlı

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.