Fark Denklemlerinin Z-Dönüşümü İle Çözümü

Verilen bir fark denklemi sisteme ait bir matematiksel model olabilir. Böyle bir fark denklemi belirli girişler için çözülürse, sistemin çıkışı elde edilmiş olur. Fark denklemleri iki yöntem ile çözülebilir.

- Direkt çözüm
- İndirekt çözümüdür.

Bu yöntemlerden indirekt çözümde Z-dönüşümü kullanılır.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k . x(n-k) \qquad y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

Z-dönüşümü kullanılarak fark denklemini çözmek için bütün terimlerin ayrı ayrı Z-dönüşleri alınır. Bulmak istediğimiz fonksiyon Z'ye bağlı rasyonel bir ifade olarak elde edilir. Bu ifadenin basit kesirlere ayrılması işleminden sonra ters Z-dönüşümü alınarak istenilen sonuca ulaşılır.

$$\left.\begin{aligned} Z\{y(n-k)\} &= z^{-k} Y(z) \\ Z\{y(n+k)\} &= z^{k} Y(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{Bütün başlangıç şartlarının sıfır olduğu durumda}$$

$$Z\{y(n-k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n-k) . z^{-n} \qquad n-k=m \quad (k \in Z^{+})$$

$$= \sum_{m=-k}^{\infty} y[m] . z^{-(m+k)} \qquad = z^{-k}\left(\sum_{m=-k}^{-1} y(m) . z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} y(m) z^{-m}\right)$$

$$Z\{y(n-k)\} = z^{-k}\left(\sum_{m=-k}^{-1} y(m) . z^{-m} + Y(z)\right)$$

$$\underline{Z\{y(n-k)\} = z^{-k} . Y(z) + z^{-k} \sum_{m=-k}^{-1} y(m) . z^{-m}} \qquad (\text{Başlangıç şartları} \neq 0)$$

$$Z\{y(n+k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n+k]\, z^{-n} \qquad n+k=m$$

$$= \sum_{m=k}^{\infty} y(m) . z^{-(m-k)} = \sum_{m=0}^{\infty} y(m) . z^{-(m-k)} - \sum_{m=0}^{k-1} y(m) . z^{-(m-k)}$$

$$= z^{k}\left(\sum_{m=0}^{\infty} y(m) . z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} y(m) . z^{-m}\right) = z^{k}\left(Y(z) - \sum_{m=0}^{k-1} y(m) . z^{-m}\right)$$

$$\underline{Z\{y(n+k)\} = z^{k} . Y(z) - z^{k} \sum_{m=0}^{k-1} y(m) . z^{-m}}$$

Örnek: Aşağıda verilen fark denklemi için $x(n)$ giriş, $y(n)$ ise çıkışı göstermektedir. $y[0]=1$, $y[1]=1$ başlangıç koşulları için,

a) Sıfır giriş cevabını $(y_{zi}(n))$

b) Sıfır durum cevabını $(y_{zs}(n))$

c) Çıkış ifadesini bulunuz $(y(n))$

$$y[n+2]-y[n+1]+\frac{2}{9}y[n]=x[n]$$

a) $y_{zi}(n)=?$ $\quad (x(n)=0$ sıfır giriş$)$

$$y[n+2]-y[n+1]+\frac{2}{9}y[n]=0$$

$$Z\{y[n+2]-y[n+1]+\frac{2}{9}y[n]\}=Z\{0\}$$

$$Z\{y[n+2]\}-Z\{y[n+1]\}+\frac{2}{9}Z\{y[n]\}=0 \rightarrow \text{lineerlik özelliği}$$

$$Z\{y[n+k]\}=z^k\left(Y(z)-\sum_{m=0}^{k-1}y[m].z^{-m}\right)$$

$$Z\{y[n+2]\}=z^2\left(Y(z)-\sum_{m=0}^{1}y[m].z^{-m}\right)=z^2\left(Y(z)-y[0].z^{-0}-y[1].z^{-1}\right)$$

$$Z\{y[n+1]\}=z^1\left(Y(z)-y[0].z^{-0}\right)$$

$$Z\{y[n+2]\}=z^2Y(z)-z^2-z$$

$$Z\{y[n+1]\}=zY(z)-z$$

$$Z\{y(n)\}=Y(z)$$

$$z^2Y(z)-z^2-z-zY(z)+z+\frac{2}{9}Y(z)=0$$

$$Y(z)\left(z^2-z+\frac{2}{9}\right)=z^2 \qquad Y(z)=\frac{z^2}{z^2-z+\frac{2}{9}} \qquad \frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{\left(z-\frac{2}{3}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{c_1}{z-\frac{2}{3}}+\frac{c_2}{z-\frac{1}{3}} \qquad c_1=\frac{2/3}{1/3}=2 \quad , \quad c_2=\frac{1/3}{-1/3}=-1$$

$$\frac{Y(z)}{z}=2.\frac{1}{z-\frac{2}{3}}-\frac{1}{z-\frac{1}{3}} \qquad Y(z)=\frac{2z}{z-\frac{2}{3}}-\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$y_{zi}(n)=2.\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)-\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$y_{zi}(n)=\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u(n)$$

b) $y_{zs}(n) = ?$ (Başlangıç şartlarının sıfır olduğu durum)

$$y(n+2) - y(n+1) + \frac{2}{9} y(n) = x(n)$$

$$y(n+2) - y(n+1) + \frac{2}{9} y(n) = u(n)$$

$$Z\{y(n+2)\} - Z\{y(n+1)\} + \frac{2}{9} Z\{y(n)\} = Z\{u(n)\}$$

$$Z\{y(n+2)\} = z^2 Y(z) \quad , \quad Z\{y(n+1)\} = zY(z) \quad , \quad Z\{y(n)\} = Y(z)$$ (Başlangıç koşulları sıfır)

$$Z\{u(n)\} = \frac{z}{z-1}$$

$$z^2 Y(z) - zY(z) + \frac{2}{9} Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + \frac{2}{9})} \qquad \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-\frac{2}{3})(z-\frac{1}{3})}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-\frac{2}{3}} + \frac{C_3}{z-\frac{1}{3}} \Rightarrow C_1 = \frac{9}{2} \; , \; C_2 = -9 \; , \; C_3 = \frac{9}{2}$$

$$Y(z) = \frac{9}{2} \frac{z}{z-1} - 9 \frac{z}{z-\frac{2}{3}} + \frac{9}{2} \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$y_{zs}(n) = \frac{9}{2} u(n) - 9\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n) + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$y_{zs}(n) = 9\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) u(n)$$

$$\underline{y_{zs}(n) = \frac{9}{2}\left(1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) u(n)}$$

c) $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$

$$y(n) = \left[2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u(n) + \frac{9}{2}\left[1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u(n)$$

$$y(n) = \Big[\underbrace{-7\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{geçici durum}} + \underbrace{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{geçici durum}} + \underbrace{\frac{9}{2}}_{\text{kalıcı durum}}\Big] u(n)$$

$(n \to \infty \;\; y(n) = \frac{9}{2})$

Örnek:

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2x(n)$$

$$y(-1)=2 \qquad y(-2)=4$$

$$x(n)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n)$$

a) $y_{zi}(n)=?$ b) $y_{zs}(n)=?$ c) $y(n)=?$

a) $y_{zi}(n)=?$ $(x(n)=0)$

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=0$$

$$z\{y(n-k)\}=z^{-k}\left(Y(z)+\sum_{m=-k}^{-1}y(m).z^{-m}\right)$$

$$z\{y(n-2)\}=z^{-2}\left(Y(z)+\sum_{m=-k}^{-1}y(m).z^{-m}\right)$$

$$=z^{-2}\left(Y(z)+4z^{2}+2z\right)=z^{-2}Y(z)+4+2z^{-1}$$

$$z\{y(n-1)\}=z^{-1}(Y(z)+2z)=z^{-1}Y(z)+2$$

$$Y(z)-\frac{3}{4}\left(Y(z).z^{-1}+2\right)+\frac{1}{8}\left(z^{-2}Y(z)+4+2.z^{-1}\right)=0$$

$$Y(z)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^{-1}$$

$$Y(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} \Rightarrow Y(z)=\frac{z^{2}-\frac{1}{4}z}{z^{2}-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z-1/4}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} \Rightarrow Y(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad \underline{y_{zi}(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)}$$

b) $x(n)=2.\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).u(n) \Rightarrow y_{zs}(n)=?$ (Başlangıç şartları sıfır old. durum)

$$z\{\sin(\Omega n)\,u(n)\}=\frac{z.\sin(\Omega)}{z^{2}-2z\cos(\Omega)+1}$$

$$\Omega=\frac{\pi}{2} \Rightarrow z\{\sin(\Omega n).u(n)\}=\frac{z}{z^{2}+1}$$

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = 2x(n)$$

$$Z\{y(n)\} - \frac{3}{4} Z\{y(n-1)\} + \frac{1}{8} Z\{y(n-2)\} = 2 \cdot Z\{x(n)\}$$

$$Y(z) - \frac{3}{4} z^{-1} Y(z) + \frac{1}{8} z^{-2} Y(z) = \frac{4 \cdot z}{z^2+1}$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}\right) = \frac{4z}{z^2+1}$$

$$Y(z) = \frac{4 \cdot z}{z^2+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{4 \cdot z^2}{(z^2+1)\left(z^2 - \frac{3}{4} z + \frac{1}{8}\right)} \qquad \frac{Y(z)}{z} = 4 \cdot \frac{z^2}{(z-j)(z+j)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{c_1}{z-j} + \frac{c_2}{z+j} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_4}{z-\frac{1}{4}}$$

$$c_1 = 4 \cdot \frac{j^2}{2j\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{4}\right)} = 2j \frac{1}{-1 - j\frac{1}{4} - j\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = 2j \frac{1}{-\frac{7}{8} - j\frac{3}{4}}$$

$$c_1 = 1{,}7354\, e^{-j2{,}2794}, \quad c_2 = 1{,}7354 \cdot e^{j2{,}2794}$$

$$c_3 = 4 \cdot \frac{1/4}{\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{16}{5}, \quad c_4 = 4 \cdot \frac{1/16}{\frac{17}{16} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{16}{17}$$

$$y_{zs}(n) = \left[2|c_1| \cdot (|r|)^n \cos(\phi n + \theta) + c_3\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_4\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$$

$$p_1 = j \qquad p_2 = -j \qquad p_1 = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$y_{zs}(n) = \left[2 \cdot 1{,}7354 \cdot (1)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} n - 2{,}2794\right) + \frac{16}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{16}{17}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$$

$$y_{zs}(n) = \left[3{,}47 \cos\left(\frac{\pi}{2} n - 2{,}2794\right) + \frac{16}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{16}{17}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$$

c) $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$

$$y(n) = \left[3{,}47 \cos\left(\frac{\pi}{2} n - 2{,}2794\right) + \frac{21}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{16}{17}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$$

$y_{zi}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.