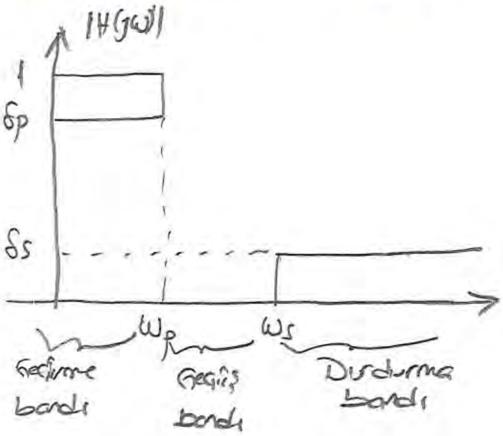
Analog Filtre Tasarımı

Analog filtre tasarımında yaygın olarak kullanılan yöntemler,

1) Butterworth filtre tasarım yöntemi
2) Chebyshev filtre tasarım yöntemi
3) Bessel yaklaşımı
4) Eliptik yaklaşım

Sayısal IIR filtre tasarımında öncelikle analog filtre tasarımı yapılmaktadır. Analog filtre tasarımında da Butterworth filtre tasarım yöntemi ile A.G.F. tasarlanmaktadır. Daha sonra uygun frekans dönüşümü ile tasarlanmak istenen IIR sayısal filtreye geçiş yapılmaktadır.
Bu nedenle IIR sayısal filtre tasarımı FIR sayısal filtre tasarımından daha zordur.

1) Butterworth Filtre



δp: Geçirme bandı dalgalanması
w_p: Geçirme bandı köşe frekansı
δs: Durdurma bandı dalgalanması
w_s: Durdurma bandı köşe frekansı

Sayısal filtre tasarımında izlenecek yol,

- İstenilen özellikleri sağlayacak en düşük dereceli filtre derecesi (N) hesaplanır
- Daha sonra uygun bir dönüşüm ile sayısal filtreye geçiş yapılır.

Sayısal filtre tasarımında her zaman AGF temel alınarak tasarım gerçekleştirilir.

Butterworth filtrenin genlik cevabı karakteristiği;

$$\boxed{|H(jw)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{w}{w_c}\right)^{2N}}}$$

Burada;

w_c: $-3dB$ frekansı (Genliğin $1/\sqrt{2}$ olduğu frekans değeridir)
N: filtre derecesi (N arttıkça geçiş bandı daralır)

$w=0$ için $|H(jw)| = 1$

$w=w_c$ için $|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$w=\infty$ için $|H(jw)| = 0$

$$|A|^2 = A \cdot A^* \quad \text{(Kompleks sayılar için)}$$

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H(-j\omega)$$

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) \quad (s \to j\omega)$$

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

Bu ifade hem $H(s)$ hem de $H(-s)$'i ifadeleri içermektedir. Sistemin kararlı olabilmesi için kutupların $j\omega$ ekseninin sol tarafında olması gerekir.

$$\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N} + 1 = 0 \qquad \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N} = -1$$

$$\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N} = 1 \cdot e^{j(2k-1)\pi}$$

N. dereceden kökü alındığında,

$$\frac{s^2}{(j\omega_c)^2} = e^{j\frac{(2k-1)\cdot\pi}{N}} \qquad s^2 = \underbrace{-\omega_c^2}_{\text{hepsi reel sayılar}} \cdot e^{j\frac{(2k-1)\cdot\pi}{N}} \qquad k = 1,2,3,4,\ldots\ldots 2N$$

$$S_k = \mp j\omega_c \, e^{j\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2N}}$$

$$S_k = \mp \omega_c \left(-\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right) + j\cos\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2N}\right)\right)$$

Örneğin $N=2$ için toplam dört adet kutup bulunacak ve bunların iki tanesi sol yarı s düzleminde iken iki tanesi sağ yarı s düzleminde olacaktır. Tasarlanacak filtrenin kararlı davranış gösterebilmesi için, sol yarı s düzlemindeki kökler kullanılmalıdır. Dolayısıyla,

$$S_k = \omega_c \left(-\sin\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2N}\right) + j\cos\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2N}\right)\right)$$

$N=1$ için;

$$S_k = \omega_c \left(-\sin\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2N}\right) + \underbrace{j\cos\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2N}\right)}_{=0}\right)$$

$k=1$ için $\quad S_1 = \omega_c\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$S_1 = -\omega_c \quad H(s)$'in kökü

$k=2$ için $\quad S_2 = \omega_c\left(-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$S_2 = \omega_c \quad H(-s)$'in kökü

Transfer fonksiyonunu bulurken;

$$\frac{S_k}{W_c} = \left(-\sin\left(\frac{(2k-1).\pi}{2N}\right) + j\cos\left(\frac{(2k-1).\pi}{2N}\right)\right)$$

k=1 için

$$\frac{S_k}{W_c} = -1 \qquad H(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{W_c}} = \frac{W_c}{s+W_c}$$

1. derecede AGF transfer fonksiyonu karakteristiği

En genel olarak transfer fonksiyonu;

$$H(s) = \begin{cases} \dfrac{W_c^N}{\prod_{k=1}^{N/2}\left(s^2+b_k W_c s+W_c^2\right)} & N \text{ çift ise} \\[2ex] \dfrac{W_c^N}{(s+W_c)\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(s^2+b_k W_c s+W_c^2\right)} & N \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$\underbrace{b_k = 2\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right)}$$

Örnek; $N=4$ ve $W_c \neq 1$ olduğu durum için $H(s)=?$

N çift olduğundan $k=1,2,\ldots N/2$

k=1 için $b_1 = 2.\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0,76537$

k=2 için $b_2 = 2.\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1,84776$

$$H(s) = \frac{W_c^4}{\left(s^2+0,76537W_c s+W_c^2\right)\left(s^2+1,84776W_c s+W_c^2\right)}$$

Örnek; $N=5$ ve $W_c=1$ için $H(s)=?$

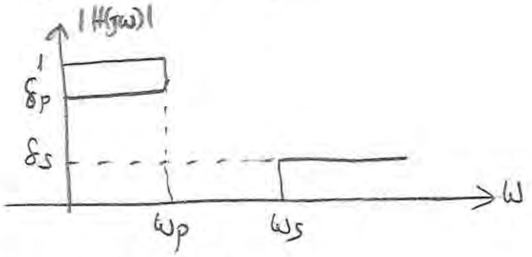
N tek olduğundan, $k=1,2\ldots(N-1)/2$

k=1 için $b_1 = 2.\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0,618$

k=2 için $b_2 = 2.\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 1,618$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+b_1 s+1)(s^2+b_2 s+1)}$$

Alçak geçiren filtre genlik cevabı;



şeklindedir.

Butterworth filtre tasarım yaklaşımı için;

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$\omega = \omega_s$ için

$$|H(j\omega_s)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} \qquad \delta_s^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} = \delta_s^{-2} \qquad \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} = \delta_s^{-2}-1 \qquad 2N\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right) = \log\left(\delta_s^{-2}-1\right)$$

$$N \geq \frac{1}{2}\,\frac{\log\left(\delta_s^{-2}-1\right)}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

$\omega = \omega_p$ için;

$$\delta_p = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}} \qquad \delta_s^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} = \delta_p^{-2}-1 \qquad \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} = \delta_s^{-2}-1$$

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} = \frac{\delta_p^{-2}-1}{\delta_s^{-2}-1} \qquad N \geq \frac{1}{2}\,\frac{\log\left(\frac{\delta_p^{-2}-1}{\delta_s^{-2}-1}\right)}{\log\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)}$$

Tasarım işlemlerinde δ_p ve δ_s dB cinsinden verildiğinde;

$$20\log\delta_p = -A_p \qquad \delta_p = 10^{-\frac{A_p}{20}}$$

$$20\log\delta_s = -A_s \qquad \delta_s = 10^{-\frac{A_s}{20}}$$

Örnek: Aşağıda verilen özellikleri sağlayan alçak geçiren Butterworth filtreyi tasarlayınız.

$$\omega_c = 1000\pi$$

$\omega_s = 2000\pi$ Durdurma bandı minimum zayıflaması 40 dB.

$$A_s = -40\,dB \qquad \delta_s = 10^{-\frac{A_s}{20}} = 10^{-2} = 0{,}01$$

$$N \geq \frac{1}{2}\,\frac{\log\left((0{,}01)^{-2}-1\right)}{\log\left(\frac{2000\pi}{1000\pi}\right)} \qquad N \geq \frac{1}{2}\,\frac{\log(99)}{\log(2)} \qquad N \geq 6{,}64$$

$\underline{N=7}$ seçilir

$N=7$ için

$$H(s) = \frac{\omega_c^{N}}{(s+\omega_c)\cdot\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(s^2+b_k\omega_c s+\omega_c^2)}$$

$$H(s) = \frac{\omega_c^{7}}{(s+\omega_c)(s^2+b_1\omega_c s+\omega_c^2)(s^2+b_2\omega_c s+\omega_c^2)(s^2+b_3\omega_c s+\omega_c^2)}$$

$$b_1 = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = 0{,}44504$$

$$b_2 = 2\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) = 1{,}24698 \qquad \omega_c = 1000\pi$$

$$b_3 = 2\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = 1{,}80193$$

Filtre tasarımında; filtre derecesi (N) arttıkça daha iyi bir filtre elde edilir. Teorik olarak $N=\infty$'da ideal bir filtre karakteristiğine ulaşılır.

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.