



**T.C.  
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**

**MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ  
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ**

Prof. Dr. Zafer BİNGÜL

Prof. Dr. Serdar KÜÇÜK

# ROBOT KİNEMATİĞİ

PROF. DR. ZAFER BİNGÜL  
PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK



# 4. TERS KİNEMATİK

## 4.1. Giriş

Robot manipülatörlerinin ters kinematiği, robot kontrolünün en önemli aşamalarından birini oluşturmaktadır.

Altı serbestlik derecesine sahip bir robotla üç boyutlu uzayda bütün noktalara ulaşılabilirdiğinden genellikle endüstride 6 serbestlik derecesine sahip robotlar tercih edilmektedir.

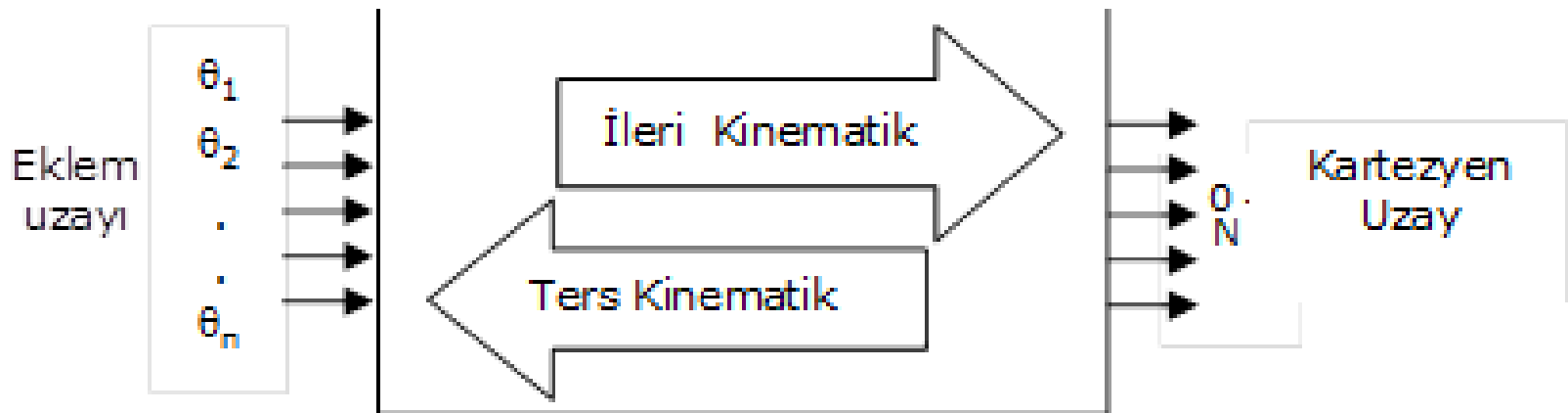
Altı serbestlik derecesine sahip bir endüstriyel robot manipülatörlerinin son üç eklemini bir noktada kesiştiğinde, kolaylıkla ters kinematik çözüm gerçekleştirilirken, kesişmediğinde ise ters kinematik problem oldukça zor bir hal almaktadır.

Seri robotlarda kolay olan ileri kinematik için her zaman bir çözüm elde edilirken, ters kinematik hem zor hem de her zaman çözüm elde etmek mümkün olmayabilir.

Ters kinematik problem Kartezyen uzayda, ana çerçeveye göre verilen uç işlevcinin konum ve yönelim verileri yardımıyla eklem değişkenlerinin bulunması şeklinde tanımlanabilir.

Başka bir ifadeyle, bir robot manipülatörünün uç işlevcisinin yönelimini ve konumunu Kartezyen koordinat sisteminden eklem koordinat sistemine dönüştürme işlemine ters kinematik problem denir.

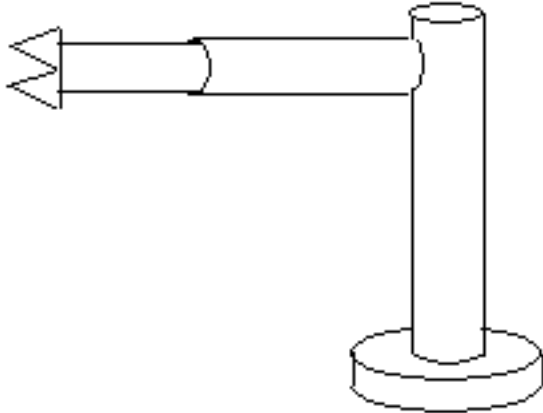
Ters kinematik problem çözümü, gerçek zamanlı kontrol, eyleyicilerin eklem torklarının hesaplanması, kaynak, boyama ve yörünge planlaması gibi bir çok uygulama için son derece önemlidir.



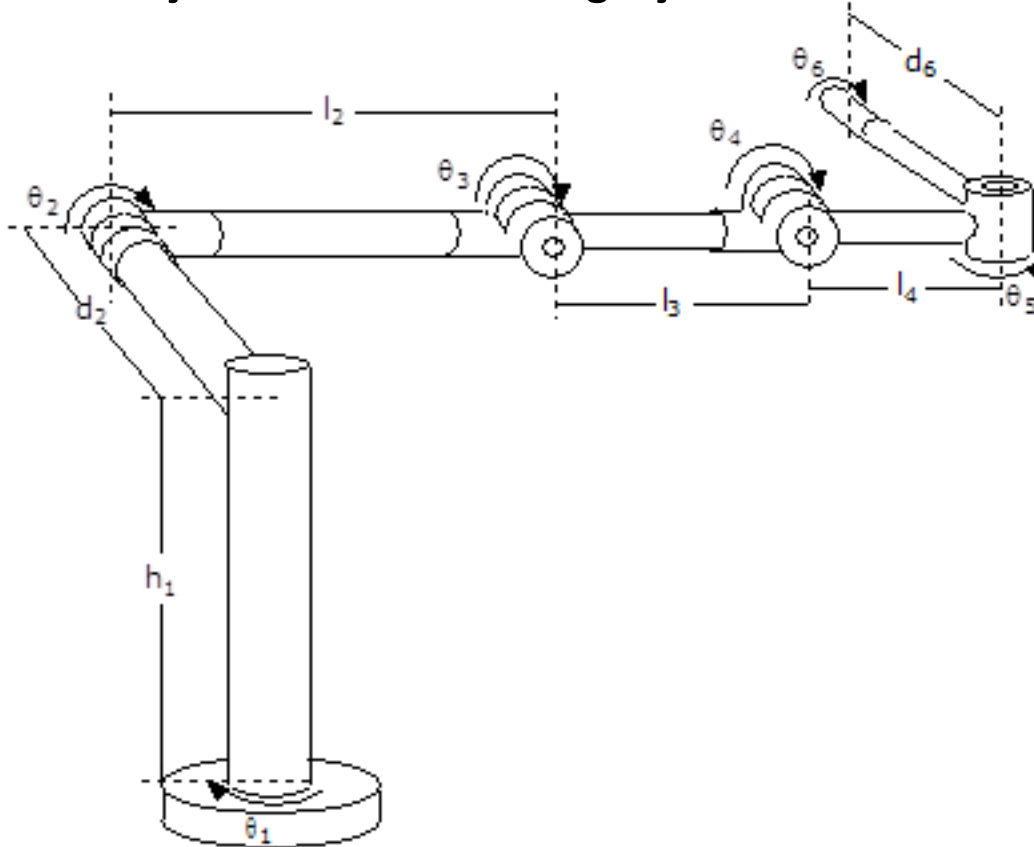
# Ters Kinematik Problemin Yapısı

Ters kinematik problem, aşağıdaki özelliklerden dolayı çözülmesi oldukça güçtür.

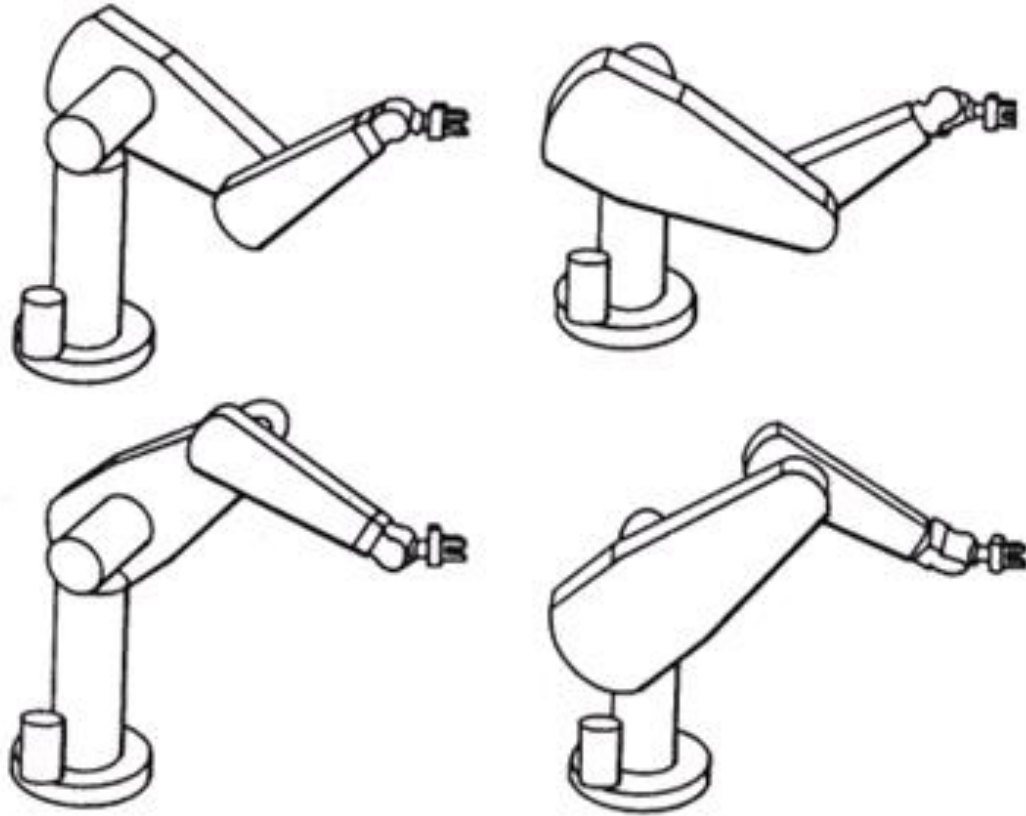
1. Analitik olarak karmaşık, doğrusal olmayan denklemler içerir.
2. Eklemlerin yapısına bağlıdır. Ters kinematik problem bir robotta prizmatik eklem sayısı artıkça kolaylaşmakta, dönel eklem sayısı artıkça zorlaşmaktadır.
3. Her zaman matematiksel çözüm fiziksel çözümü temsil etmez. Şekillerde görüldüğü gibi  $\theta = \text{Atan2}(-k, p_z)$  ise matematiksel çözümle fiziksel çözüm örtüşürken tam tersine  $\theta = \text{Atan2}(k, -p_z)$  ise fiziksel olarak gerçekleştiremeyecek bir çözüm üretmektedir.



4. Aynı uç işlevci düzenleşimi için birden fazla çözüm olabilir. Ters kinematik çözüm sayısı robotun serbestlik derecesinin yanında aynı zamanda eklem değişkenlerine de bağlıdır. Her bir eklemden  $a$  ve  $d$  parametrelerinin her ikisinin de bulunması çözüm sayısının artmasına neden olur. Örneğin şekildeki 6R robotta her bir eklem için en azından bir  $a$  veya  $d$  değişkeni olduğundan ters kinematik çözüm sayısı  $2^6 = 64$ 'tür. Yalnız bu çözümlerin bir kısmı gerçek bir kısmı ise sanal çözümler olabilir.



Dönel eklemlerden oluşan robotlarda fiziksel çözüm sayısının fazla olması, üç boyutlu uzayda bir noktaya pek çok farklı şekilde ulaşma imkanı sağlar. Şekilde PUMA-560 robotunun aynı noktaya dört farklı şekilde ulaşabildiği görülmektedir.



5. Ters kinematik problem, verilen bir robot düzenleşimi iin tamamen analitik (closed form) olarak özöllebileceėi gibi, analitik özölümölün mölmkölün olmadığı durumlarda sayısal yölntemler kullanılarak da özöllebilir.

Fakat tamamen kesin sonu üreten analitik özölme ait denklemler bilgisayar ortamında ok hızlı alışırken, eklem aılarının iteratif olarak özölldölėöl sayısal özölüm ise bilgisayar ortamında analitik özölme göre daha yavaş alışır. Ayrıca, sayısal olarak eklem aılarını bulmak iin yazılan algoritmanın yapısı da (özölüm zamanı ve başlangı koşulları) son derece önemlidir.

Sayısal özölümölün bilgisayar ortamında analitik özölme göre daha yavaş alışmasından dolayı robot tasarımcıları genellikle analitik özölümölün mölmkölün olduğu tasarımlar üzerinde durmaktadır. Günölümüzde endölstriyel robotlar (PUMA ve SCARA) oėunlukla analitik olarak özöllebilen basit yapılara sahip olacak şekilde üretilmektedirler.



Endüstriyel robotlarda Euler ve eklem kaçıklılıkli bilekli olmak üzere iki tip bilek kullanılmaktadır. Bu iki bileği ters kinematik çözümlerini incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara varılabilir.

**1.** Euler bileğinin üç eklemi de bir noktada kesiştiğinden, bu bileğin eklendiği endüstriyel robot manipölatörlerinin ters kinematiği tamamen analitik olarak çözülebilmektedir. Eklem kaçıklılıkli bilekli endüstriyel robotların son üç eklemine  $a$  ve  $d$  değişkenleri bulunduğundan, bu robot manipölatörlerinin bir kısmı tamamen analitik olarak çözülebilmektedir.

**2.** Euler bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim birbirinden ayrı gerçekleştiğinden, bu robotlar için her zaman analitik çözüm vardır. Buna rağmen, eklem kaçıklılıkli bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim iç içe olduğundan her zaman analitik çözüm gerçekleşmeyebilir.

**3.** Euler bilekli robotların ters kinematiğinde en fazla üç bilinmeyenli üç denklem olduğundan analitik olarak çözülürken, eklem kaçıklılıkli bilekli robotların ters kinematiğinde ise üç denkleme karşılık üçten fazla bilinmeyen olduğundan analitik çözümleri oldukça güç veya yoktur. Bu açıdan bu robotların bir kısmının ters kinematiği sayısal olarak çözülür.

4. Euler bilekli robotlarda ilk üç eklem uç işlevcinin konumunu, son üç eklem ise yönelimini belirlerken, eklem kaçıklılıkli bilekli robotlarda konumla yönelim iç içe gerçekleşmektedir. Bu açıdan Euler bilekli robotlarda, çalışma uzayında hemen hemen bütün noktalara ulaşılırken, eklem kaçıklılıkli bilekli robotlarda çalışma uzayı genişlemesine karşın bütün noktalara ulaşamaz.

Ulaşılabilir çalışma uzayı (reachable workspace) ve dexterious çalışma uzayı, robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarını belirleyen çok önemli iki özelliktir. Ulaşılabilir çalışma uzayı, bir robot manipülatörünün uç işlevcisini rastgele hareket ettirip yönlendirdiği, robotların serbestlik derecelerinin azalmasına neden olan tekil noktaların bulunmadığı bölgeye denir.

Nitelikli (dexterious) çalışma uzayı ise uç işlevcisinin yönelme ve öteleme hareketlerini en büyük kapasitede gerçekleştirdiği bölgedir. Dolayısıyla nitelikli çalışma uzayı ulaşılabilir çalışma uzayının bir alt kümesidir.

Ters kinematik çözüm, bütün eklem değişkenlerinin bilgisayar ortamında öz yineli işlemler gerçekleştirilerek Newton-Raphson ve Runga-Kutta yöntemlerinde olduğu gibi sayısal olarak çözülebilir. Sayısal çözüm için kinematik eşitliklerin farklarının toplamını alan tahmin edici ve düzeltici tip algoritmalar kullanılır.

Ters kinematik problemin sayısal yöntemlerle çözümlenmesinde karşılaşılan en büyük sorun, Jakobiyen matrisin tekil olduğu noktalarda yazılan algoritmanın çözüm üretememesidir.

Ayrıca, başlangıç çözüm vektörü (eklem değişkenlerini içeren vektör) çözüme yönelik vektör elemanlarından oluşmadığı zaman, sayısal çözüm kararlı bir çözüm üretmekten uzaklaşır.

Hem tamamen sayısal hem de tamamen analitik çözümün gerçekleştirilemediği durumlarda ise, eklem değişkenlerinden birkaçı sayısal olarak bulunup, geri kalanlar için analitik olarak çözülebilen yarı analitik çözüm uygulanır.

## Ters Kinematik Çözüm (Analitik çözüm yaklaşımı)

Altı serbestlik derecesine sahip bir robotun ileri yön kinematiği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (1)$$

${}^0_6T$  ileri yön kinematik matrisi, konum ve yönelim verilerini içeren matris elemanları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir. Bu matrisin 1. kolonu uç işlevcisinin normal vektörünü ( $n = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ ), 2. kolonu kayma (sliding) vektörünü ( $s = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ ) ve 3. kolonu ise yaklaşım (approaching) vektörünü ( $a = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ ) göstermektedir.

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denklem 1 aşağıdaki gibi yazılarak ters kinematik çözüm için gerekli olan eşitlikler türetilir.

$$\begin{bmatrix} {}^0T \\ {}_1T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = \begin{bmatrix} {}^0T \\ {}_1T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T {}_1T {}_2T {}_3T {}_4T {}_5T {}_6T$$

Denklemde  $\begin{bmatrix} {}^0T \\ {}_1T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = I$  olduğundan , ifade aşağıdaki gibi basitleşir.

$$\begin{bmatrix} {}^0T \\ {}_1T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = {}_2T {}_3T {}_4T {}_5T {}_6T$$

Bu şekilde türetilebilecek diğer denklemler:

$$\begin{bmatrix} {}^0T \\ {}_1T \\ {}_2T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = {}_3T {}_4T {}_5T {}_6T$$

$$\begin{bmatrix} {}^0T \\ {}_1T \\ {}_2T \\ {}_3T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = {}_4T {}_5T {}_6T$$

$$\begin{bmatrix} {}^0T \\ {}_1T \\ {}_2T \\ {}_3T \\ {}_4T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = {}_5T {}_6T$$

$$\begin{bmatrix} {}^0T \\ {}_1T \\ {}_2T \\ {}_3T \\ {}_4T \\ {}_5T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = {}_6T$$

Diğer bir denklemde Raghavan ve Roth adlı bilim adamları tarafından üretilmiştir.

$${}_3T {}_4T {}_5T = {}_2T^{-1} {}_1T^{-1} {}^0T {}_6T {}_6T^{-1}$$

Daha önce belirtilen bu 6 adet denklem sistemini kullanarak ters kinematik çözüm için gerekli olan eşitlikler türetilir. Bu eşitliklerde yer alan bazı bazı trigonometrik ifadelerden faydalanarak ters kinematik çözüm kolayca çözülebilir. Bu eşitlikler aşağıda verilmiştir.

$$\cos \theta = a \text{ ise } \theta = \text{Atan2}(\pm\sqrt{1-a^2}, a)$$

$$\sin \theta = a \text{ ise } \theta = \text{Atan2}(a, \pm\sqrt{1-a^2})$$

$$\cos \theta = a \text{ ve } \sin \theta = b \text{ ise } \theta = \text{Atan2}(b, a)$$

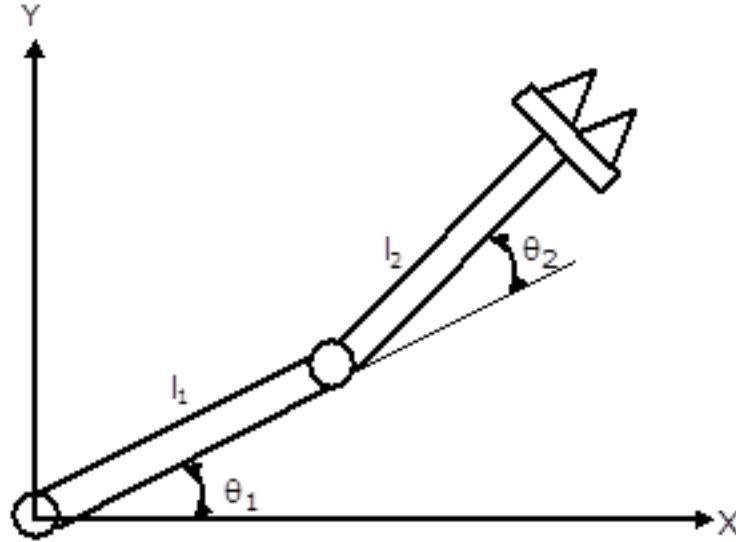
$$a \sin \theta + b \cos \theta = 0 \text{ ise } \theta = \text{Atan2}(-b, a) \text{ veya } \theta = \text{Atan2}(b, -a)$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = c \text{ ise } \theta = \text{Atan2}(a, b) \pm \text{Atan2}(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

Bu eşitliklerin dışında nadir kullanılabilecek diğer trigonometrik denklemler ders kitabında mevcuttur.

## ÖRNEK 4.1

Şekildeki RR eklem yapısına sahip düzlemsel robotun ters kinematikliğini çözünüz.



## ÇÖZÜM 4.1

Çözüm için öncelikle robotun ileri kinematik matrisleri ( ${}^0_3T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T$ ) bulunur.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^0_3T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T$  ifadesinin her iki tarafını da  $[{}^0_1T]^{-1}$  ile çarpalım. Yeni durumda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$[{}^0_1T]^{-1} {}^0_3T = [{}^0_1T]^{-1} {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T$$

Bilindiği gibi  $[{}^0_1T]^{-1} {}^0_1T = I$  olduğundan sonuçta denklem aşağıdaki gibi olur.

$$[{}^0_1T]^{-1} {}^0_3T = {}^1_2T {}^2_3T$$

Yukarıda denklemin sol tarafında yer alan robotun  ${}^0_1T$  dönüşüm matrisinin tersi:

$${}^0_1T^{-1} = \begin{bmatrix} {}^0_1R^T & -{}^0_1R^T {}^0P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yönelim matrisinin transpozu:  ${}^0_1R = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ise  ${}^0_1R^T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Konum vektörü:  $-{}^0_1R^T {}^0P_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



Bu durumda  ${}^0_1T$  dönüşüm matrisinin tersi:  ${}^0_1T^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bu aşamada  $[{}^0_1T^{-1}]_3^0T = {}^1_2T {}^2_3T$  ifadesini yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2 c\theta_2 + l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki sağ ve sol tarafta matris içerisinde bulunan 12 denklemi bir birine eşitleyerek bağımsız denklemler elde edebiliriz.

1.  $\cdot c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} = c\theta_2$
2.  $\cdot -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} = s\theta_2$
3.  $\cdot r_{31} = 0$
4.  $\cdot c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} = -s\theta_2$
5.  $\cdot -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} = c\theta_2$
6.  $\cdot r_{32} = 0$
7.  $\cdot c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} = 0$
8.  $\cdot -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} = 0$
9.  $\cdot r_{33} = 1$
10.  $\cdot c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y = l_2 c\theta_2 + l_1$
11.  $\cdot -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y = l_2 s\theta_2$
12.  $\cdot p_z = 0$

7 ve 8. denklemler çözüm üretmesine rağmen genellikle ters kinematik çözümün tamamı mümkünse kol uzunlukları,  $p_x, p_y, p_z$  cinsinden elde edilmek istenir. Çözüm için 10 ve 11. denklemlerden faydalanalım.

10 ve 11. denklemlerde eşitliğin her iki tarafının karelerini alıp alt alta toplayalım. Elde edeceğimiz eşitliği daha önceden bulduğumuz denklemlerden birine benzeterek eklem değişkenini kol uzunlukları yönelim ve konum cinsinden yazalım.

$$c^2\theta_1 p_x^2 + s^2\theta_1 p_y^2 + 2p_x p_y c\theta_1 s\theta_1 = l_2^2 c^2\theta_2 + 2l_1 l_2 c\theta_2 + l_1^2$$

$$+ s^2\theta_1 p_x^2 + c^2\theta_1 p_y^2 - 2p_x p_y c\theta_1 s\theta_1 = l_2^2 s^2\theta_2$$

$$p_x^2 (c^2\theta_1 + s^2\theta_1) + p_y^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) = l_2^2 (c^2\theta_2 + s^2\theta_2) + 2l_1 l_2 c\theta_2 + l_1^2$$

$c\theta^2 + s\theta^2 = 1$  olduğundan denklem şöyle yazılabilir:  $p_x^2 + p_y^2 = l_2^2 + 2l_1l_2c\theta_2 + l_1^2$

Denklemde  $c\theta_2$  ifadesini çekelim:  $c\theta_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$

Bulunan ifade  $\cos\theta = a'$  ya benzemektedir:  $\cos\theta = a$  ise  $\theta = A \tan 2\left(\mp \sqrt{1-a^2}, a\right)$

Bu durumda ikinci dönel eklem değişkeni  $\theta_2$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2\left(\mp \sqrt{1 - \left[\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right]^2}, \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right)$$

$\theta_2$  artık bilinen bir değişken olduğuna göre 10. denklemden  $\theta_1$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y = l_2 c\theta_2 + l_1$$

Bu ifadede aşağıdaki ifadeye benzemektedir:  $a \sin\theta + b \cos\theta = c$  ise

$$p_x = b, \quad p_y = a \quad \text{ve} \quad l_2 c\theta_2 + l_1 = c$$

$$\theta = A \tan 2(a, b) \mp A \tan 2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

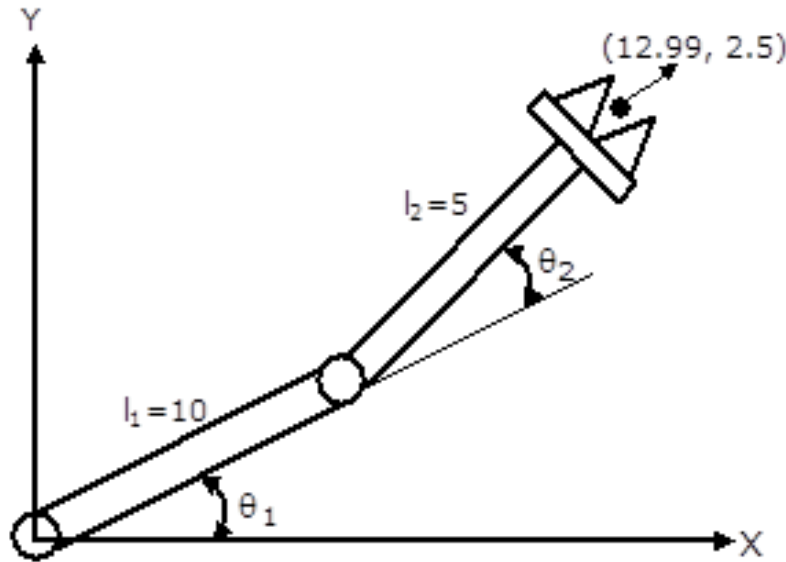
$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \mp A \tan 2(\sqrt{p_y^2 + p_x^2 - (l_2 c\theta_2 + l_1)^2}, l_2 c\theta_2 + l_1)$$

## ÖRNEK 4.2

Örnek 4.1'deki robotun kol uzunlukları  $l_1 = 10$  ve  $l_2 = 5$  olarak veriliyor. Buna göre,

a) Robotun uç işlevcisinin Kartezyen uzaydaki konumu  $p_x = 12.99$ ,  $p_y = 2.5$  olması için birinci eklem değişkeni  $\theta_1$  ve ikinci eklem değişkeni  $\theta_2$  kaç derece olmalıdır.

b) Bütün çözüm kümelerini bularak robotun gerçek konumunu eklem açılarını göstererek çiziniz.



## ÇÖZÜM 4.2

- a)  $P_x$ ,  $p_y$  ve bacak uzunluklarını ters kinematik denklemde yerlerine yazalım. Eklem değişkenleri, teorik olarak bulunan sıraya göre elde edilir. Dolayısıyla öncelikle ikinci eklem değişkeni  $\theta_2$  bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2 \left( \mp \sqrt{1 - \left[ \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right]^2}, \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right) = A \tan 2 \left( \mp \sqrt{1 - (0.49)^2}, 0.49 \right)$$

$$= A \tan 2 \left( \mp 0.866, 0.49 \right) = \mp 60^\circ$$

denklemde  $\left[ \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right] = \left[ \frac{12.99^2 + 2.5^2 - 10^2 - 5^2}{2 \cdot 10 \cdot 5} \right] = 0.49$

- b)  $\theta_2 = \mp 60^\circ$  açısının pozitif veya negatif değerinin cosinüsü aynı olduğundan birinci eklem değişkeni  $\theta_1$  ifadesini bulmak için  $\theta_2 = 60^\circ$  alalım.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \mp A \tan 2(\sqrt{p_y^2 + p_x^2 - (l_2 \cos \theta_2 + l_1)^2}, l_2 \cos \theta_2 + l_1)$$

$$\theta_1 = A \tan 2(2.5, 12.99) \mp A \tan 2(\sqrt{2.5^2 + 12.99^2 - (5 \cos(60) + 10)^2}, 5 \cos(60) + 10)$$

$$\theta_1 = 10.9 \mp 19.1$$

Görüldüğü gibi şekildeki robot için toplam dört farklı çözüm kümesi elde ettik.

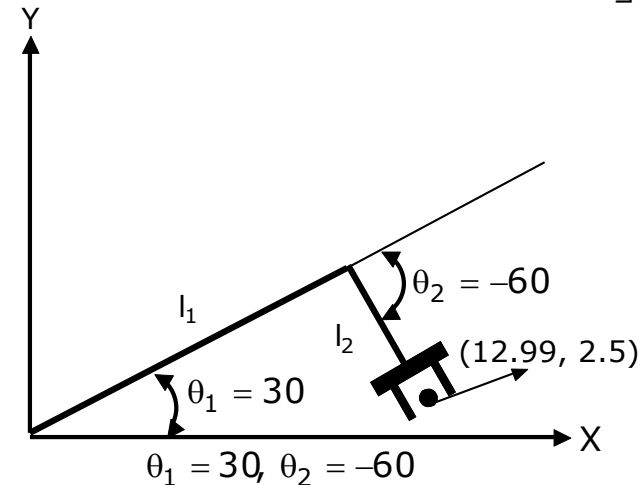
$$\zeta_1 = \{\theta_1 = 10.9 + 19.1 = 30^\circ, \theta_2 = +60^\circ\} \quad \zeta_2 = \{\theta_1 = 10.9 + 19.1 = 30^\circ, \theta_2 = -60^\circ\}$$

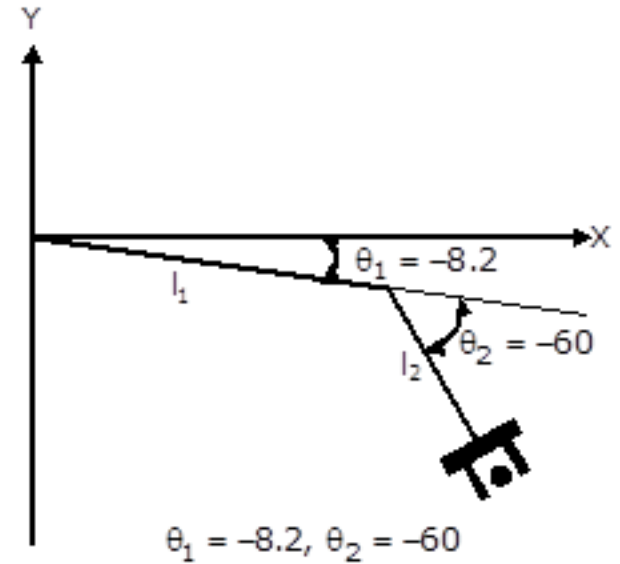
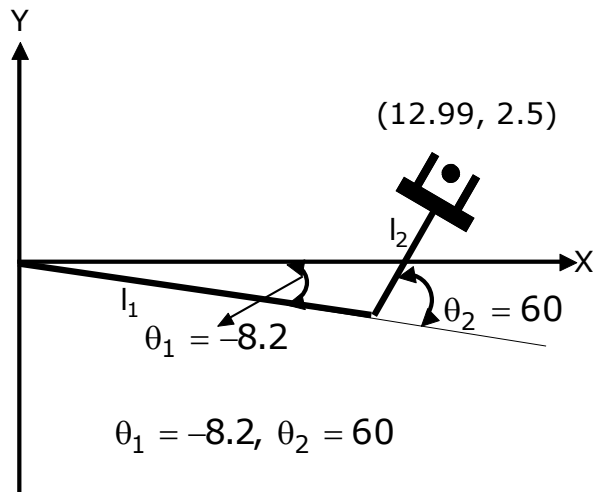
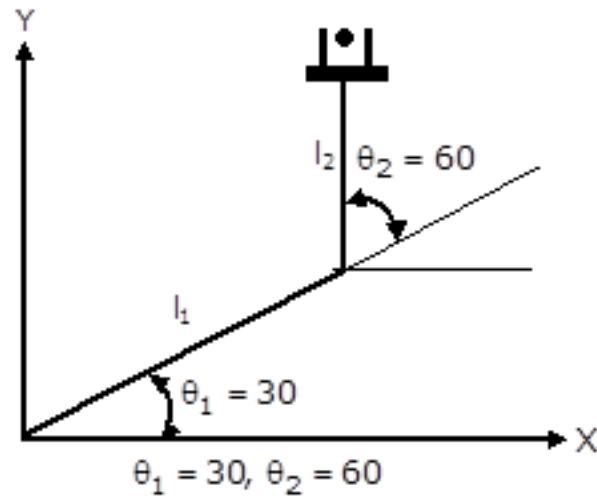
$$\zeta_3 = \{\theta_1 = 10.9 - 19.1 = -8.20^\circ, \theta_2 = +60^\circ\} \quad \zeta_4 = \{\theta_1 = 10.9 - 19.1 = -8.20^\circ, \theta_2 = -60^\circ\}$$

Bu çözüm kümelerinin doğruluğunu araştırmak için bulduğumuz açılar ileri kinematikteki konum vektöründe yerlerine yazılır. İkinci çözüm kümesinde bulunan açılar konum vektöründe yerine yazalım. Aşağıda görüldüğü gibi robot doğru noktaya gitmiştir.

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2(c\theta_1c\theta_2 - s\theta_1s\theta_2) + l_1c\theta_1 \\ l_2(c\theta_1s\theta_2 + s\theta_1c\theta_2) + l_1s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5[c(30)c(-60) - s(30)s(-60)] + 10c(30) \\ 5[c(30)s(-60) + s(30)c(-60)] + 10s(30) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.99 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Diğer çözüm kümeleri  
de bu şekilde test edilebilir.**





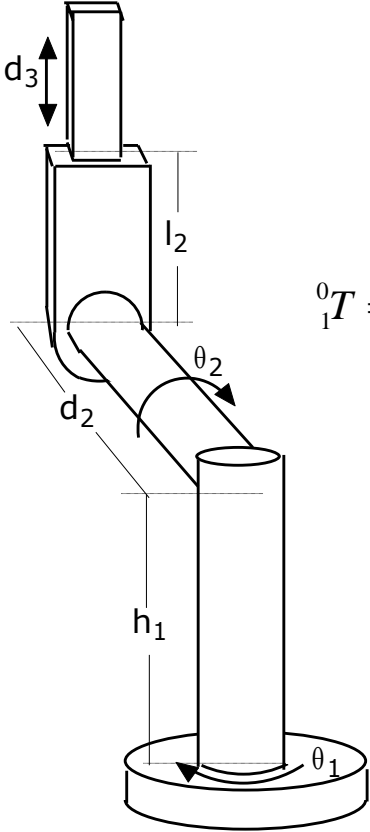
Dikkat edileceği gibi, çözüm kümelerinden sadece  $\zeta_2$  ve  $\zeta_3$  robotun doğru konuma ulaşmasına yardımcı olurken  $\zeta_1$  ve  $\zeta_4$  ise robotu doğru konuma ulaştırmaz.

## ÖRNEK 4.3

Şekildeki RRP eklem yapısına sahip robotun ters kinematikliğini çözüünüz.

## ÇÖZÜM 4.3

İleri kinematik dönüşüm matrislerini hatırlayalım.



$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eklem değişkenlerini bulmak için aşağıdaki denklemde kullanalım.

$$\left[ {}^0_1T \quad {}^1_2T \right]^{-1} {}^0_3T = {}^2_3T$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & -s\theta_2 h_1 \\ -c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_2 & -c\theta_2 h_1 \\ s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (l_2 + d_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Bu robotun ters kinematığı sadece konum vektöründen elde edilebileceğinden sadece konumları yazalım.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_2(c\theta_1p_x + s\theta_1p_y) + s\theta_2(p_z - h_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_2(c\theta_1p_x + s\theta_1p_y) + c\theta_2(p_z - h_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & s\theta_1p_x - c\theta_1p_y - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_2 + d_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denklemden  $s\theta_1p_x - c\theta_1p_y - d_2 = 0$  ise  $s\theta_1p_x - c\theta_1p_y = d_2$  olur. Bu durumda  $\theta_1$   
 $\rightarrow a \sin \theta + b \cos \theta = c$   
 $\theta_1 = A \tan 2(p_x, -p_y) \pm A \tan 2(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, d_2)$

$\theta_2, (1,4)$  karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$c\theta_2(c\theta_1p_x + s\theta_1p_y) + s\theta_2(p_z - h_1) = 0 \quad \text{ise} \quad a \sin \theta + b \cos \theta = 0$$

$$\theta_2 = A \tan 2(-c\theta_1p_x - s\theta_1p_y, p_z - h_1) \quad \text{ve} \quad \theta_2 = A \tan 2(c\theta_1p_x + s\theta_1p_y, -p_z + h_1)$$

$d_3, (2,4)$  karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = -s\theta_2(c\theta_1p_x + s\theta_1p_y) + c\theta_2(p_z - h_1) - l_2$$

Bu robotunda iki dönel ekleminden kaynaklanan dört farklı çözüm kümesi vardır. 3. eklem prizmatik olduğundan bu eklem sisteme ek bir çözüm kümesi katmaz.

$$\zeta_1 = \{\theta_1 = + \text{ için } \theta_2 = + \text{ ve } d_3\}$$

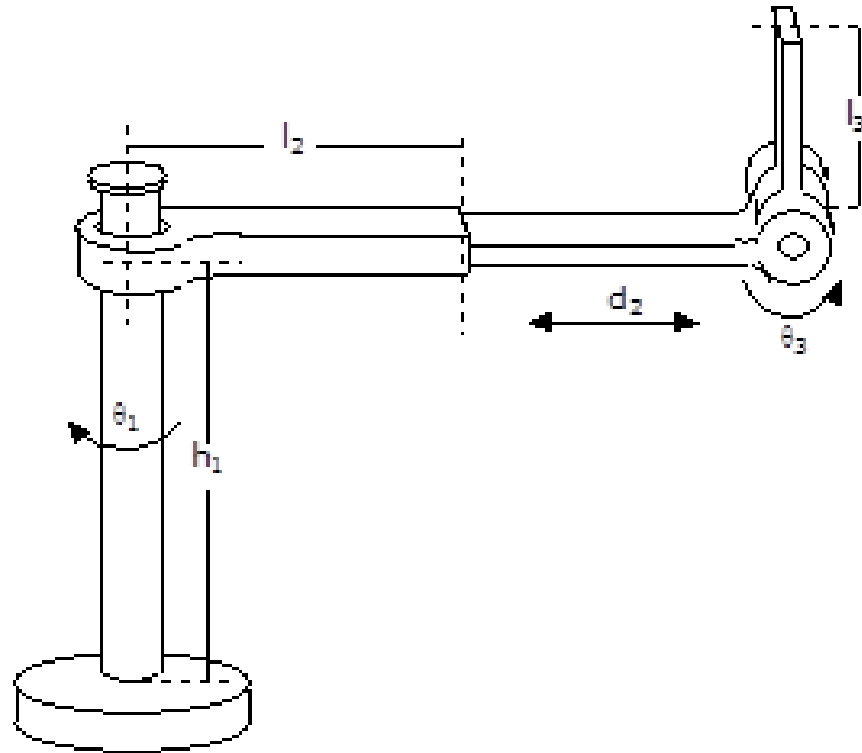
$$\zeta_2 = \{\theta_1 = + \text{ için } \theta_2 = - \text{ ve } d_3\}$$

$$\zeta_3 = \{\theta_1 = - \text{ için } \theta_2 = + \text{ ve } d_3\}$$

$$\zeta_4 = \{\theta_1 = - \text{ için } \theta_2 = - \text{ ve } d_3\}$$

### ÖRNEK 4.4

Şekildeki üç eklemlili RPR robotunun ters kinematiğini çözünüz ve çözüm kümelerini bulunuz.



## ÇÖZÜM 4.4

Şekildeki robotun ileri kinematik dönüşüm matrislerini hatırlayalım.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2 - d_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[{}^0_1T]^{-1} {}^0_4T = {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T$  ifadesinde sol ve sağ taraftaki ifadeleri bir birine eşitleyelim.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z - h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_3 s\theta_3 - (l_2 + d_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_3 c\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta_3$ , (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$p_z - h_1 = l_3 c\theta_3 \quad \text{ise} \quad c\theta_3 = \frac{p_z - h_1}{l_3} \quad \text{ve} \quad \theta_3 = \arctan 2\left( \frac{p_z - h_1}{l_3}, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{p_z - h_1}{l_3} \right)^2} \right)$$

$\theta_1$ , (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur:  $c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y = 0$

Bulunan ifade  $a\sin\theta + b\cos\theta = 0'$  a benzemektedir ve çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\theta_1 = A \tan 2(-p_x, p_y) \quad \text{veya} \quad \theta_1 = A \tan 2(p_x, -p_y)$$

$d_2$ , (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y + l_3 s\theta_3 - l_2$$

Bu robotunda bir önceki örnekte olduğu gibi  $d_2$  prizmatik eklem değişkeninin çözüm kümesine etkisi olmadığından iki dönel ekleminde kaynaklanan dört farklı çözüm kümesi bulunmaktadır.

$$\zeta_1 = \{\theta_3 = + \text{ için } \theta_1 = +\}$$

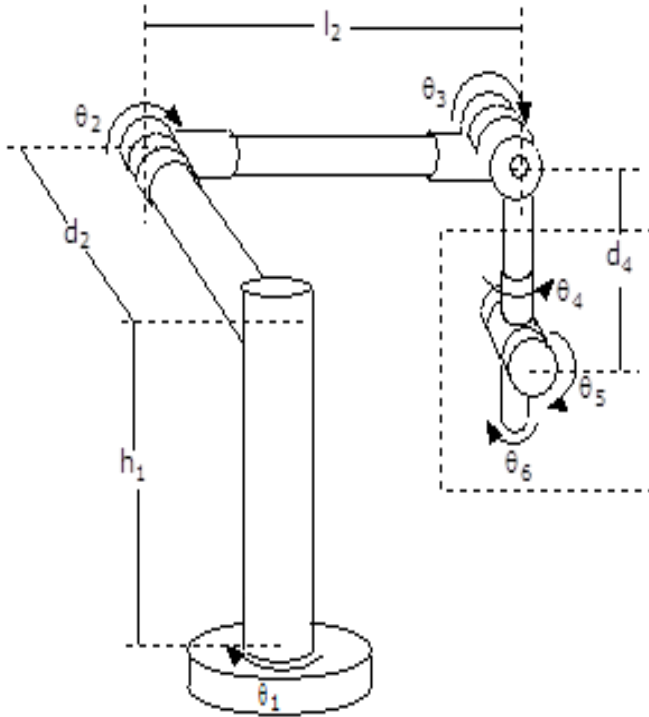
$$\zeta_2 = \{\theta_3 = + \text{ için } \theta_1 = -\}$$

$$\zeta_3 = \{\theta_3 = - \text{ için } \theta_1 = +\}$$

$$\zeta_4 = \{\theta_3 = - \text{ için } \theta_1 = -\}$$

## ÖRNEK 4.5

Şekildeki RRRRRR eklem yapısına sahip robotun ters kinematikliğini çözünüz ve çözüm kümelerini bulunuz.



## ÇÖZÜM 4.5

Robotun ileri kinematik dönüşüm matrisleri:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -\sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uç işlevcisinin kartezyen uzayda konumunu belirleyen ilk üç eklem değişkeni  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ve  $\theta_3$ 'ü bulalım. Bunun için aşağıdaki denklemden faydalanılabilir.

$$\begin{bmatrix} {}^0_1T \end{bmatrix}^{-1} {}^0_6T = {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T$$

$$\begin{bmatrix} . & . & . & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ . & . & . & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ . & . & . & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & -d_4 s\theta_{23} + l_2 c\theta_2 \\ . & . & . & d_2 \\ . & . & . & -d_4 c\theta_{23} - l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta_1$ , (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(-p_x, p_y) \pm A \tan 2(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, d_2)$$

$\theta_3$ , (1,4), (2,4) ve (3,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla bulunur. Bu işlem gerçekleştirildiğinde  **$\sin\theta_3 = a$**  bulunur. Bu ifadenin çözümü:

$$\theta_3 = A \tan 2\left(a, \pm \sqrt{1-a^2}\right)$$

Denklemden a ifadesi: 
$$a = -\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4^2 - l_2^2 - d_2^2}{2d_4 l_2}$$

Uç işlevcisinin kartezyen uzayda yönelimini belirleyen son üç eklem değişkeni  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  ve  $\theta_6$ 'yı bulalım. Bunun için aşağıdaki denklemden faydalanılabilir.

$$\begin{bmatrix} {}^0T & {}^1T & {}^2T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = {}^3T \quad {}^4T \quad {}^5T$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{23} r_{11} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{21} - s\theta_{23} r_{31} & c\theta_1 c\theta_{23} r_{12} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{22} - s\theta_{23} r_{32} & c\theta_1 c\theta_{23} r_{13} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{23} - s\theta_{23} r_{33} & \cdot \\ -c\theta_1 s\theta_{23} r_{11} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{21} - c\theta_{23} r_{31} & -c\theta_1 s\theta_{23} r_{12} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{22} - c\theta_{23} r_{32} & -c\theta_1 s\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{23} - c\theta_{23} r_{33} & \cdot \\ s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -c\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & s\theta_4 s\theta_5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix}$$

$\theta_5$ , (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = \pm A \tan 2(\sqrt{1 - (-c\theta_1 s\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{23} - c\theta_{23} r_{33})^2}, -c\theta_1 s\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{23} - c\theta_{23} r_{33})$$

$\theta_4$ , (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

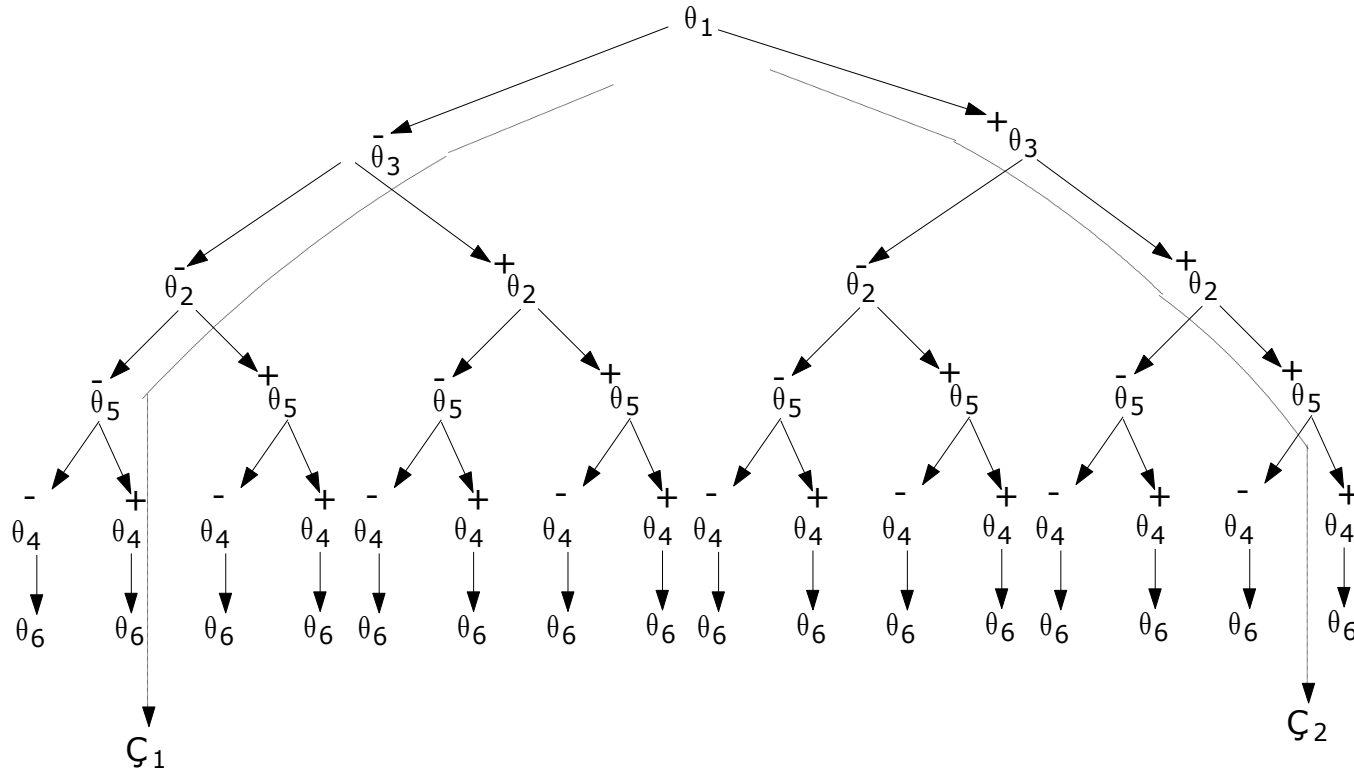
$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23}}{s\theta_5}, \frac{-c\theta_1 c\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 c\theta_{23} r_{23} + s\theta_{23} r_{33}}{s\theta_5}\right)$$

$\theta_6, (2,1)$  ve  $(2,2)$  karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2 \left( \frac{c\theta_1 s\theta_{23} r_{12} + s\theta_1 s\theta_{23} r_{22} + c\theta_{23} r_{32}}{\sin \theta_5}, \frac{-c\theta_1 s\theta_{23} r_{11} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{21} - c\theta_{23} r_{31}}{\sin \theta_5} \right)$$

Bu robotta 6 tane dönel eklem olmasına rağmen son üç eklem bir noktada kesiştiğinden çözüm kümesi sayısı 64 yerine 16'dır. Şekilde verilen her çözüm kümesinde  $\theta_1$ 'den başlayıp  $\theta_6$ 'ya kadar takip edilebilecek her bir yol bir çözüm kümesini temsil etmektedir. 16 çözüm kümesinden ikisi aşağıda verilmiştir.

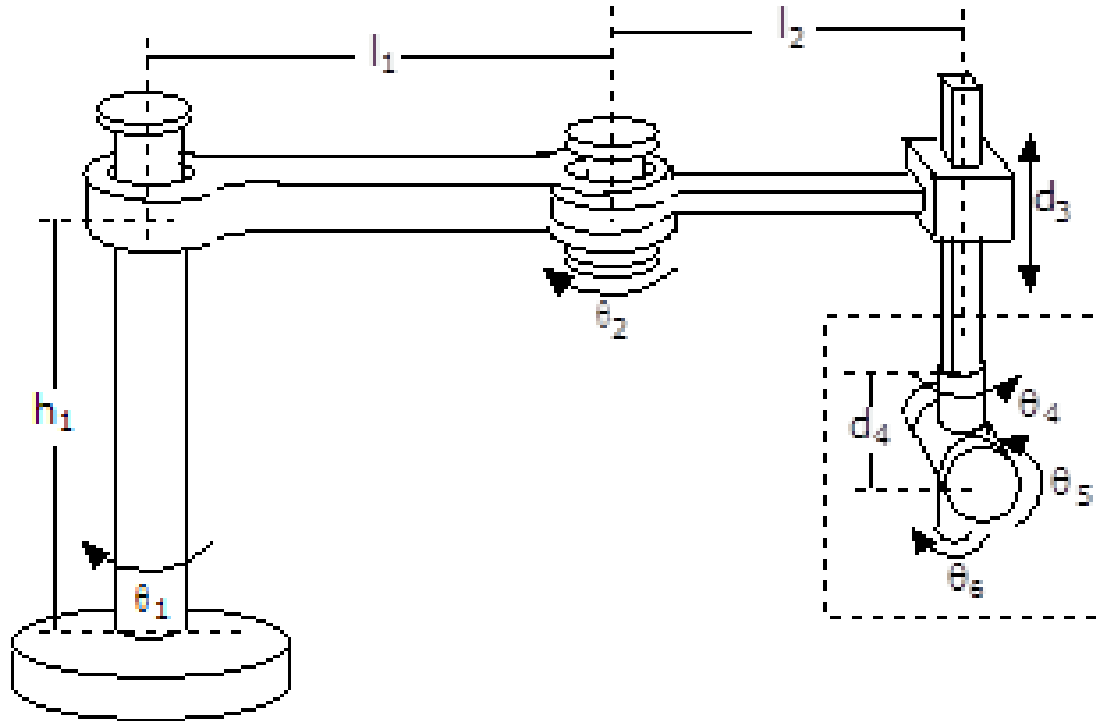
$$\zeta_1 = \{-\theta_1, -\theta_3, -\theta_2 + \theta_5, \theta_4 \text{ ve } \theta_6\} \quad \zeta_2 = \{+\theta_1, +\theta_3, +\theta_2 + \theta_5, \theta_4 \text{ ve } \theta_6\}$$





## ÖRNEK 4.6

Şekilde Euler bilekli SCARA robotu veriliyor. Bu robotun uç işlevcisinin konumunun  $p_x = 28, p_y = 31, p_z = 6$  ve yöneliminin X-Y-Z sabit açı sistemine göre  $\gamma = 42^\circ, \beta = -17^\circ$  ve  $\alpha = 25^\circ$  olması için dönel eklem değişkenlerinin ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  ve  $\theta_6$ ) açıları ve prizmatik eklem değişkeni  $d_3$ 'ün uzunluğu ne olmalıdır ( $l_1 = 26, l_2 = 18, h_1 = 22$  ve  $d_4 = 4$ ).



## ÇÖZÜM 4.6

Öncelikle şekildeki robotun ters kinematikğini teorik olarak çözmek için ileri kinematik dönüşüm matrislerini hatırlayalım.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki denklemden faydalanarak uç işlevcisinin kartezyen uzayda konumunu belirleyen ilk üç eklem değişkeni  $\theta_1, \theta_2$  ve  $d_3$ 'ü bulalım.

$$\begin{bmatrix} {}^0_1T \end{bmatrix}^{-1} {}^0_6T = {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & l_2 c\theta_2 + l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_2 s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta_1$ , (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karesini alıp alt alta toplayalıp sadeleştirme işlemi yapıldıktan sonra aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \pm A \tan 2(\sqrt{4l_1^2(p_x^2 + p_y^2) - k^2}, k) \quad k = p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2$$

$\theta_2$ (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y}{l_2}, \frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_1}{l_2}\right)$$

$d_3$  (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$d_3 = h_1 - p_z - d_4$$

Aşağıdaki denklemden faydalananarak uç işlevcisinin kartezyen uzayda yönelimini belirleyen son üç eklem değişkeni  $\theta_4, \theta_5$  ve  $\theta_6$  bulalım.

$$\begin{bmatrix} {}^0T & {}^1T \\ {}_1T & {}_2T \end{bmatrix}^{-1} {}^0T = {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T {}^6T$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_{12}r_{11} + s\theta_{12}r_{21} & c\theta_{12}r_{12} + s\theta_{12}r_{22} & c\theta_{12}r_{13} + s\theta_{12}r_{23} & \cdot \\ -s\theta_{12}r_{11} + c\theta_{12}r_{21} & -s\theta_{12}r_{12} + c\theta_{12}r_{22} & -s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23} & \cdot \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 & -c\theta_4c\theta_5s\theta_6 - s\theta_4c\theta_6 & -c\theta_4s\theta_5 & \cdot \\ -s\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 & s\theta_4c\theta_5s\theta_6 - c\theta_4c\theta_6 & s\theta_4s\theta_5 & \cdot \\ s\theta_5c\theta_6 & -s\theta_5s\theta_6 & -c\theta_5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}$$

$\theta_5$  (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm\sqrt{1-r_{33}^2}, -r_{33})$$

$\theta_4$  (1,3) ve (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23}}{\sin \theta_5}, \frac{-c\theta_{12}r_{13} - s\theta_{12}r_{23}}{\sin \theta_5}\right)$$

$\theta_6$  (3,1) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2\left(\frac{-r_{32}}{\sin \theta_5}, \frac{r_{31}}{\sin \theta_5}\right)$$

Robotun uç işlevcisinin Kartezyen uzaydaki konumunun  $p_x = 28$ ,  $p_y = 31$ ,  $p_z = 6$  olması için gerekli olan ilk üç eklem değişkenini ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ) daha önce elde ettiğimiz teorik denklemlerden faydalanarak bulalım.

$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) \pm A \tan 2(\sqrt{4l_1^2(p_x^2 + p_y^2) - k^2}, k)$$

$$k = p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2 = 28^2 + 31^2 + 26^2 - 18^2 = 2097$$

$$\theta_1 = A \tan 2(31, 28) \pm A \tan 2(\sqrt{4 \cdot 26^2(28^2 + 31^2) - 2097^2}, 2097) = 47.91 \pm 15.12$$

Görüldüğü gibi  $\theta_1 = 63.03^\circ$  ve  $\theta_1 = 32.79^\circ$  olmak üzere iki farklı açı elde ettik. İkinci eklem değişkenini bulmak için birinci eklem değişkenini  $\theta_1 = 63.03^\circ$  alalım.

$$\theta_2 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y}{l_2}, \frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_1}{l_2}\right)$$

$$\theta_2 = A \tan 2\left(\frac{-s(63.03) \cdot 28 + c(63.03) \cdot 31}{18}, \frac{c(63.03) \cdot 28 + s(63.03) \cdot 31 - 26}{18}\right) = A \tan 2(-0.6, 0.79) = -37.25$$

Prizmatik eklem değişkeni  $d_3$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$d_3 = h_1 - p_z - d_4 \quad d_3 = 22 - 6 - 4 = 12$$

Uç işlevcinin sabit koordinat sisteminin X ekseninde  $\gamma = 42^\circ$  , Y ekseninde  $\beta = -17^\circ$  ve Z ekseninde  $\alpha = 25^\circ$  döndürülmesiyle aşağıdaki matris elde edilir.

$$R_{XYZ}(42, -17, 25) = \begin{bmatrix} 0.8667 & -0.4914 & 0.0858 \\ 0.4041 & 0.5909 & -0.6982 \\ 0.29237 & 0.6399 & 0.7107 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin elemanlarından faydalananarak uç işlevcisinin yönelimini sağlayan açı kümesi  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  ve  $\theta_6$  aşağıdaki gibi bulunur. Önce  $\theta_5$  açısını bulalım.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - r_{33}^2}, -r_{33}) = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - 0.7107^2}, -0.7107) = \pm 135.29^\circ$$

$\theta_4$  açısını bulmak için beşinci eklem değişkenini  $\theta_5 = +135.29^\circ$  alalım.

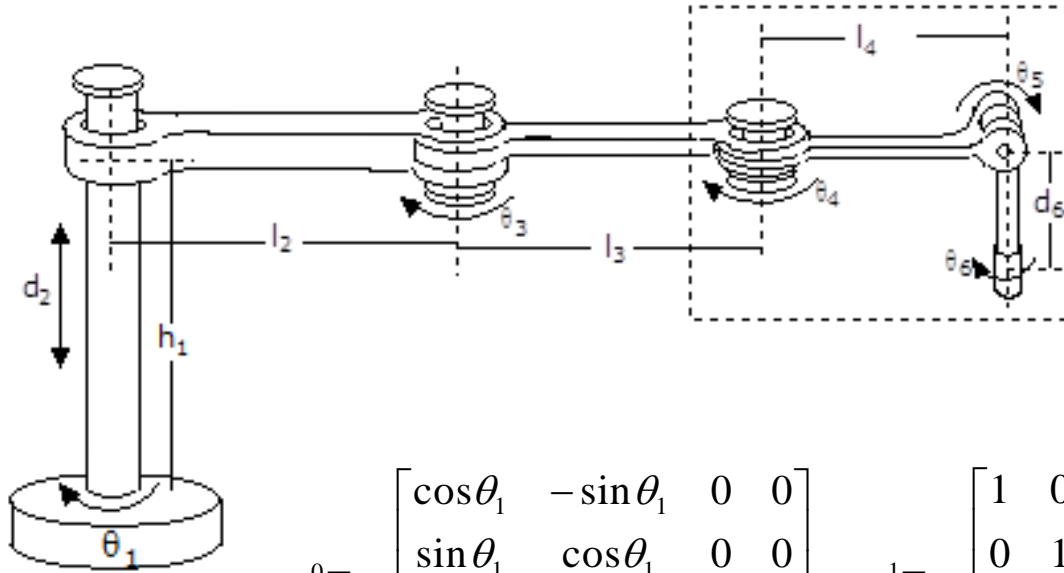
$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{-s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23}}{\sin \theta_5}, \frac{-c\theta_{12}r_{13} - s\theta_{12}r_{23}}{\sin \theta_5}\right) \quad \begin{aligned} s\theta_{12} &= s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2 = s(25.77) \\ c\theta_{12} &= c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 = c(25.77) \end{aligned}$$

$$\theta_4 = A \tan 2\left(\frac{-s(25.77) \cdot 0.0859 + c(25.77) \cdot (-0.6983)}{\sin(135.29)}, \frac{-c(25.77) \cdot 0.0859 - s(25.77) \cdot (-0.6983)}{\sin(135.29)}\right) = -72.2^\circ$$

$$\theta_6 \text{ ise } \theta_6 = A \tan 2\left(\frac{-r_{32}}{\sin \theta_5}, \frac{r_{31}}{\sin \theta_5}\right) = A \tan 2\left(-\frac{0.6399}{\sin(135.29)}, \frac{0.29237}{\sin(135.29)}\right) = -65.44^\circ$$

## ÖRNEK 4.6

Son olarak eklem kaçıklıklı bilekli bir robotun ters kinematığını bulalım. Bu bilekte hem  $d$  hem de  $a$  parametresi olduğu için ters kinematığı Euler bilekli robotlara göre daha karmaşık işlemler içerir. Aşağıdaki eklem kaçıklıklı bilekli 6 serbestlik dereceli robotun ters kinematığını çözüyoruz.



## ÇÖZÜM 4.6

Öncelikle şekildeki robotun ileri kinematik dönüşüm matrislerini hatırlayalım

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

İki, beş ve altıncı eklem değişkenlerini (  $\theta_6$ ,  $\theta_5$  ve  $d_2$ ) bulalım.

$${}^2_3T \ {}^3_4T \ {}^4_5T = {}^1_2T^{-1} \ {}^0_1T^{-1} \ {}^0_6T \ {}^5_6T^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & -c\theta_{34}s\theta_5 & \cdot & l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \\ \cdot & -s\theta_{34}s\theta_5 & \cdot & l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ \cdot & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & -c\theta_1r_{13} - s\theta_1r_{23} & \cdot & c\theta_1(p_x - r_{13}d_6) + s\theta_1(p_y - r_{23}d_6) \\ \cdot & s\theta_1r_{13} - c\theta_1r_{23} & \cdot & -s\theta_1(p_x - r_{13}d_6) + c\theta_1(p_y - r_{23}d_6) \\ \cdot & -r_{33} & s\theta_6r_{31} + c\theta_6r_{32} & -r_{33}d_6 + p_z - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta_6$  (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_6 = A \tan 2(-r_{32}, r_{31}) \quad \text{veya} \quad \theta_6 = A \tan 2(r_{32}, -r_{31})$$

$\theta_5$  , (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = A \tan 2(\pm \sqrt{1 - r_{33}^2}, -r_{33})$$

$d_2$  (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur:  $d_2 = p_z - r_{33}d_6$

Bir, üç ve dördüncü eklem değişkenlerini ( $\theta_1$  ,  $\theta_3$  ve  $\theta_4$ ) bulalım.

$$[{}^0_1T]^{-1} \ {}^0_6T = {}^1_2T \ {}^2_3T \ {}^3_4T \ {}^4_5T \ {}^5_6T \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & c\theta_1p_x + s\theta_1p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s\theta_1p_x + c\theta_1p_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & d_6c\theta_{34}s\theta_5 + l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_6s\theta_{34}s\theta_5 + l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -d_6c\theta_5 + d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$



Dönel eklem değişkeni  $\theta_1$ , (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerini alıp alt alta toplayalım (denklemden  $k = d_6 s\theta_5 + I_4$ )

$$p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 = k^2 + l_3^2 + 2l_3 k (c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34})$$

Yukarıdaki ifadede  $(c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34}) = c\theta_4$  eşittir. Bu ifadeyi yukarıdaki denklemden yerine yazıp  $c\theta_4$  ifadesini çekelim.

$$c\theta_4 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2}{2l_3 k}$$

(1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanların karelerini alıp alt alta toplayalım. Denklemden  $(p_x - r_{13}d_6) = m$  ve  $(p_y - r_{23}d_6) = n$  kullanılmıştır.

$$m^2 + n^2 + l_2^2 - 2l_2 m c\theta_1 - 2l_2 n s\theta_1 = l_4^2 + l_3^2 + 2l_3 l_4 (c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34})$$

Yukarıdaki ifadede  $(c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34}) = c\theta_4$  eşittir. Bu ifadeyi yukarıdaki denklemden yerine yazıp  $c\theta_4$  ifadesini çekelim.

$$c\theta_4 = \frac{m^2 + n^2 + l_2^2 - 2l_2 m c\theta_1 - 2l_2 n s\theta_1 - l_4^2 - l_3^2}{2l_3 l_4}$$

İki  $c\theta_4$  ifadesini bir birine eşitlenip sadeleştirme yapalım.

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2}{2l_3 k} = \frac{m^2 + n^2 + l_2^2 - 2l_2 m c\theta_1 - 2l_2 n s\theta_1 - l_4^2 - l_3^2}{2l_3 l_4}$$

$$c\theta_1(2l_2 km - 2l_2 l_4 p_x) + s\theta_1(2l_2 kn - 2l_2 l_4 p_y) + l_4(p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - k^2 - l_3^2) - k(m^2 + n^2 + l_2^2 - l_4^2 - l_3^2) = 0$$

Yukarıdaki denklemde bazı ifadelerin yerine p, q ve y yazalım.

$$(2l_2 kn - 2l_2 l_4 p_y) = p \quad (2l_2 km - 2l_2 l_4 p_x) = q$$

$$l_4(p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - k^2 - l_3^2) - k(m^2 + n^2 + l_2^2 - l_4^2 - l_3^2) = y$$

Gerekli düzenlemeleri yaparak birinci eklem değişkenini aşağıdaki gibi buluruz.

$$q c\theta_1 + p s\theta_1 = -y \quad \theta_1 = A \tan 2(p, q) \mp A \tan 2\sqrt{p^2 + q^2 - y^2}, -y)$$

$\theta_4$  daha önce bulduğumuz ifadelerden faydalanarak bulunabilir.

$$c\theta_4 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2}{2l_3 k}$$

Denklemden  $\frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2}{2l_3 k} = s$  olsun.

$$\theta_4 = \text{Atan2}(\pm\sqrt{1-s^2}, s)$$

Dönel eklem değişkeni  $\theta_3$ , (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitleyip gerekli düzenleme yapılırsa aşağıdaki gibi bulunur.

$$s\theta_3(c\theta_4 s\theta_5) + c\theta_3(s\theta_4 s\theta_5) = -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} \Rightarrow a \sin \theta + b \cos \theta = c$$

$$\theta_3 = A \tan 2(c\theta_4 s\theta_5, s\theta_4 s\theta_5) \mp A \tan 2\sqrt{s^2\theta_5 - (-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23})^2}, -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23})$$