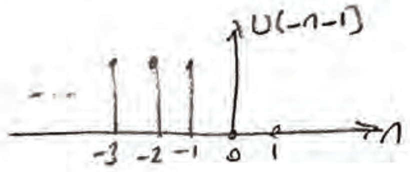
Örnek: $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ ise $X(z)$'yi aşağıdaki şartlar için ayrı ayrı bulunuz.

a) $|a| > |b|$ b) $|a| < |b|$

$$\mathcal{Z}\{a^n u(n)\} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > a$$



$$\mathcal{Z}\{-b^n u(-n-1)\} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \qquad n=-k$$

$$\mathcal{Z}\{-b^n u(-n-1)\} = -\sum_{k=1}^{\infty} b^{-k} z^{k} = -(b^{-1}z + b^{-2}z^2 + b^{-3}z^3 + \dots)$$

$$= -b^{-1}z(1 + b^{-1}z + b^{-2}z^2 + \dots\dots)$$

$$= -b^{-1}z\left(\frac{1}{1+b^{-1}z}\right) \qquad |b^{-1}z| < 1$$

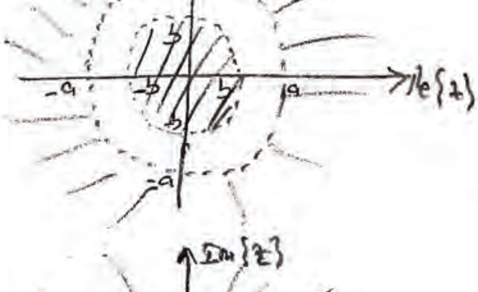
$$= \frac{b^{-1}z}{b^{-1}z - 1} \qquad |z| < |b|$$

$$\mathcal{Z}\{-b^n u(-n-1)\} = \frac{z}{z-b}, \quad |z| < |b|$$

Bu sonuç aynı zamanda $\mathcal{Z}\{b^n u(n)\} = \frac{z}{z-b}$, $|z| > b$

Z- dönüşümleri aynıdır fakat Y.B farklıdır. Dolayısıyla Y.B. önemini göstermektedir.

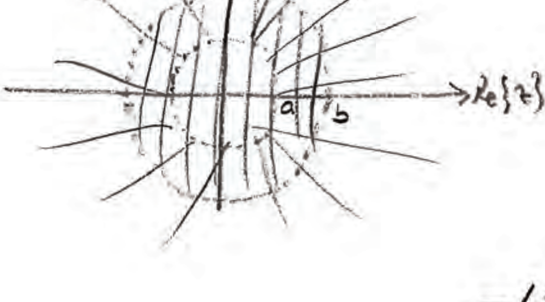
a)



$|a| > |b|$ için

$\mathcal{Z}\{a^n u(n) - b^n u[-n-1]\}$ = tanımlı /mevcut değildir

b)



$$\mathcal{Z}\{a^n u(n) - b^n u(-n-1)\} = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$$

$$|a| < |z| < |b|$$

2) Yansıtma özelliği

$Z\{x[n]\} = X(z)$ ise $Z\{x[-n]\} = ?$

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} \Rightarrow Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n].z^{n} \quad n=-k$$

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].z^{k}$$

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].(z^{-1})^{-k} \Rightarrow \boxed{Z\{x[-n]\} = X(z^{-1})}$$

Örnek; $Z\{u[-n]\} = ?$

$$Z\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z|>1$$

$$Z\{u[-n]\} = X(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1}, \quad |z^{-1}|>1$$

$$Z\{u[-n]\} = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1$$

2. Yöntem olarak; Doğrudan işlem yapılırsa,

$$Z\{u[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{0} 1.z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} = \frac{1}{1-z} \quad |z|<1$$

$n=-k$

3) Zamanda Öteleme

a) Sağa öteleme

$Z\{x[n]\} = X(z)$ Y.B

$Z\{x[n-n_0]\} = ?$ $\quad (n_0 \in Z^{+})$

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0].z^{-n} \quad n-n_0=k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].z^{-n_0}.z^{-k} = z^{-n_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].z^{-k} = \underline{z^{-n_0}X(z)} \text{ Y.B değişmez}$$

b) Sola öteleme

$Z\{x[n]\} = X(z)$ Y.B

$Z\{x[n+n_0]\} = z^{n_0}X(z)$ Y.B değişmez.

NOT: Öteleme işlemleri sonucunda yakınsama bölgesi değişmez.

Örnek; $\mathcal{Z}\{u(n-2)\} = ?$ $\qquad \mathcal{Z}\{u(n+3)\} = ?$

$$\mathcal{Z}\{u(n)\} = \frac{z}{z-1} \quad , |z|>1$$

$$\mathcal{Z}\{u(n-2)\} = z^{-2}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{z^{-1}}{z-1} \quad , |z|>1 \qquad \mathcal{Z}\{u(n+3)\} = \frac{z^3 \cdot z}{z-1}$$

$$= \frac{z^4}{z-1} \quad , |z|>1$$

2. yöntem;

$$\mathcal{Z}\{u(n-2)\} = \sum_{n=2}^{\infty} 1\cdot z^{-n} = z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots$$

$$= z^{-2}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots)$$

$$= z^{-2}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} \quad , |z^{-1}|<1 \qquad = \frac{z^{-1}}{z-1} \quad , |z|>1$$

Örnek; $\mathcal{Z}\{\delta(n-2)\} = ?$

$\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = 1$ $\quad$ Y.B = Tüm z-düzlemi

$\mathcal{Z}\{\delta(n-2)\} = z^{-2}\cdot 1$ $\quad$ YB = Tüm z-düzlemi $- \{z=0\}$

NOT: Sınırlı süreli işaretlerin ötelenmesi sonucunda oluşan işaretlerin yakınsama bölgeleri değişebilir. Yalnız bu değişiklik yakınsama bölgesinden $z=0$ veya $z=\infty$ değerlerinin çıkarılması şeklinde olabilir.

4) Konvolüsyon!

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\cdot x_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)\cdot x_1(n-k) \quad \text{(Değişme özelliği)}$$

$$\mathcal{Z}\{x_1(n) * x_2(n)\} = X_1(z)\cdot X_2(z) \qquad YB_1 \cap YB_2$$

Örnek; $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -1, 2\}$ $\qquad h(n) = \{\underset{\uparrow}{-1}, 1\}$ $\qquad \mathcal{Z}\{x(n) * h(n)\} = ?$

$x(n) * h(n) = ?$

$$\mathcal{Z}\{x(n) * h(n)\} = X(z)\cdot H(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{2} x(n)\cdot z^{-n} = 1\cdot z^{0} - 1\cdot z^{-1} + 2z^{-2} = 1 - z^{-1} + 2z^{-2}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{1} h(n)\cdot z^{-n} = (-1)\cdot z^{0} + 1\cdot z^{-1} = -1 + z^{-1}$$

$$z\{x(n) * h(n)\} = (1 - z^{-1} + 2z^{-2})(-1 + z^{-1})$$
$$= -1 + z^{-1} + z^{-1} - z^{-2} - 2z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$z\{x(n) * h(n)\} = -1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} + 2 . z^{-3}$$

$$x(n) * h(n) = ?$$

$$z\{x(n) * h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n) * h(n)) z^{-n} = \underset{(-1 . z^{0})}{-1} + 2z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3}$$

$$x(n) * h(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1}, 2, -3, 2\}$$

5) Zamanda Ölçekleme

a) Zamanda Daraltma (örnek Seyreltme)

$$x(n) \longrightarrow x(an) \quad (a \in z^{+})$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) . z^{-n}$$

$$z\{x(an)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(an) . z^{-n} \qquad an = k$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k) . z^{-\frac{k}{a}} \qquad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) . (z^{1/a})^{-k}$$

$$z\{x(n)\} = X(z) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{z\{x(an)\} = X(z^{1/a})}$$

b) Zamanda Genişletme

$$x(n) \rightarrow x[\tfrac{n}{a}] \quad n \in z^{+}$$

$$z\{x(n)\} = X(z) \qquad \underbrace{z\{x(\tfrac{n}{a})\} = X(z^{a})}$$

Örnek: $x(n) = 2^{n} u(n)$ ise a) $z\{x[3n]\} = ?$ b) $z\{x[\frac{n}{2}]\} = ?$

a) $X(z) = \dfrac{z}{z-2}$, $|z| > 2$

$$z\{x(3n)\} = \frac{z^{1/3}}{z^{1/3} - 2} \quad , |z^{1/3}| > 2$$
$$|z| > 8$$

b) $Z\{x(\frac{n}{2})\} = \dfrac{z^2}{z^2-2} \quad |z^2|>2 \quad , \ |z|>\sqrt{2}$

6) Türev Özelliği:

$$Z\{x(n)\} = X(z)$$

$$Z\{x(n)\} = -z.\frac{dX(z)}{dz} \qquad R' = R$$

İspat;

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} n.x(n).z^{-n-1} \qquad \frac{dX(z)}{dz} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n.x(n).z^{-n}$$

$$Z\{n.x(n)\} = -z.\frac{dX(z)}{dz}$$

Örnek: $Z\{nT.u(n)\} = ?$

$$Z\{T.u(n)\} = T.\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

Türev özelliğini kullanırsak;

$$Z\{n.T.u(n)\} = T.\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right).-z = -T.z.\left(\frac{z-1-z}{(z-1)^2}\right) = \frac{T.z}{(z-1)^2} \quad |z|>1$$

7) a^n ile Çarpma

$$Z\{x(n)\} = X(z) \qquad Y.B,\ R$$

$$Z\{a^n x(n)\} = ?$$

$$Z\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n.x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).(a^{-1}.z)^{-n} = X(a^{-1}.z)$$

Örnek: $Z\{a^n n.u(n)\} = ?$

1. Yöntem; $Z\{n.u(n)\} = \dfrac{z}{(z-1)^2} \quad |z|>1$

$$Z\{a^n.n\,u(n)\} = \frac{z/a}{(z/a-1)^2} \qquad |z/a|>1$$

$$Z\{a^n.n.u(n)\} = \frac{z/a}{\left(\frac{z-a}{a}\right)^2} = \frac{z/a}{(z-a)^2}.a^2 = \frac{a.z}{(z-a)^2} \qquad |z|>a$$

2. Yöntem:

$$Z\{a^n u(n)\} = \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$Z\{n.a^n.u(n)\} = -z.\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = -z\left(\frac{z-a-z}{(z-a)^2}\right) \qquad |z|>a$$

$$Z\{n.a^n u(n)\} = \frac{z.a}{(z-a)^2}, \quad |z|>|a|$$

8) Son Değer Teoremi: (Final Value Theorem)

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = ?$$

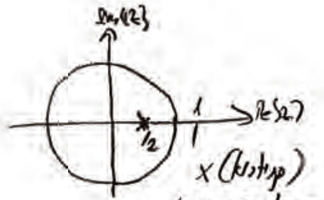
$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1} (z-1)X(z)$$

Not: $(z-1).X(z)$ ifadesinde ortaya çıkan kutuplar birim çemberin içinde olmalıdır. Aksi halde bu teorem uygulanamaz. Bu teorem özellikle sayısal kontrol sistemlerinin kalıcı durum cevabı analizinde kullanılır.

Örnek: $x(n) = 2^{-n} u(n)$ $\qquad \lim_{n\to\infty} x(n) = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = 0$$

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad \lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1} (z-1).\frac{z}{z-\frac{1}{2}} = 0$$



x (kutup) birim çember içerisinde old. teorem uygulanabilir.

Örnek: $x(n) = 3^n.u(n)$

$$X(z) = \frac{z}{z-3}$$

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1} (z-1).\frac{z}{z-3}$$ kutup birim çember dışında olduğundan uygulanamaz.

9) Başlangıç Değer Teoremi: (Initial Value Theorem)

$$x(n) = 0 \qquad n<0$$

$$x(0) = \lim_{n\to 0} x(n) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

İspat: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$ $\qquad x(n)=0 \quad n<0$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n} = x(0).1 + x(1)z^{-1} + x(2).z^{-2} + \cdots$$

$$\underbrace{x(0) = \lim_{n\to\infty} X(z)}$$

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.