c) Kompleks Kök Olma Durumu

$\lambda_1 = \lambda_2 = \in \mathbb{I}$

$y_{zi}(n) = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n$

$c_1 = a + jb = |c|.e^{j\theta}$

$\lambda_1 = \lambda_2^*$ $\qquad$ $\lambda_1 = \sigma + jw = |r|.e^{j\phi}$

$c_1 = c_2^*$ $\qquad$ $c_2 = c_1^* = |c|.e^{-j\theta}$

$\lambda_2 = \lambda_1^* = |r|.e^{-j\phi}$

$$y_{zi}(n) = |c|.e^{j\theta}.(|r|.e^{j\phi})^n + |c|.e^{-j\theta}(|r|.e^{-j\phi})^n$$

$$= |c|.(|r|)^n\left(e^{j\theta}.e^{j\phi n} + e^{-j\theta}.e^{-j\phi n}\right)$$

$$= |c|.(|r|)^n\left(e^{j(\theta+\phi n)} + e^{-j(\theta+\phi n)}\right)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

$$y_{zi}(n) = 2|c|.(|r|)^n.\cos(\phi n + \theta)$$

Örnek; $y(n) + y(n-2) = 0 \Rightarrow y_{zi}(n) = ?$ $\qquad$ $y(-1) = 0$

$y(-2) = 1$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_1 = j$ $\qquad$ $\lambda_1 = 1.e^{j\pi/2}$

$\lambda_2 = -j$

$y(n) = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n$

$y(-1) = 0 \Rightarrow 0 = c_1(\lambda_1)^{-1} + c_2(\lambda_2)^{-1}$

$y(-2) = 1 \Rightarrow 1 = c_1(\lambda_1)^{-2} + c_2(\lambda_2)^{-2}$

$-jc_1 + jc_2 = 0$

$-c_1 - c_2 = 1$ $\qquad$ $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$

$c_1 = \frac{1}{2}e^{j\pi}$ $\qquad$ $\lambda_1 = 1.e^{j\pi/2}$

$y_{zi}(n) = 2.|c|.(|r|)^n.\cos(\phi n + \theta)$

$y_{zi}(n) = 2.\frac{1}{2}(1)^n.\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \pi\right)$

$y_{zi}(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \pi\right)$ $\quad n \geq 0$

Sıfır Durum Cevabı
(Zero State Response)

Sıfır durum cevabı, bütün başlangıç şartlarının sıfır olduğu durumda (başlangıç enerjisi sıfır) sadece çıkışın oluşturduğu çözümdür veya cevaptır. Sıfır durum cevabının bulunmasında en çok kullanılan yöntem konvolüsyondur. Bu yöntem lineer, zamanla değişmeyen ayrık zamanlı sistemlerde (LZDAZS) kullanılabilir.

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{LZDAZS}} \longrightarrow h(n)$$ (Birim örnek cevabı)

$$\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{LZDAZS}} \longrightarrow h(n-k)$$ (Zamanla Değişmezlik)

$$x(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{LZDAZS}} \longrightarrow x(k).h(n-k)$$ (Çarpımsallık)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{LZDAZS}} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$$ (Toplamsallık)

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\delta(n-k)$$

$$\boxed{y_{zs}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)}$$

(Ayrık zamanda konvolüsyon toplamı) (Sürekli zamanda konvolüsyon integrali)

Konvolüsyon Toplamının Özellikleri

1) Değişme özelliği

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$$

$*$ → konvolüsyon sembolü

$$h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k)$$

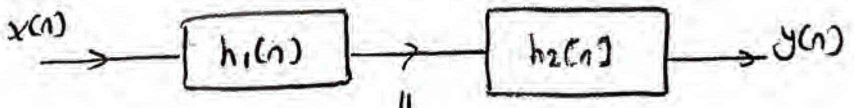
$n-k=m$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m).x(m)$$

(aynı sonuç. Dolayısıyla değişme özelliği vardır.)

$$h(n) * x(n) = x(n) * h(n)$$

2) Birleşme özelliği

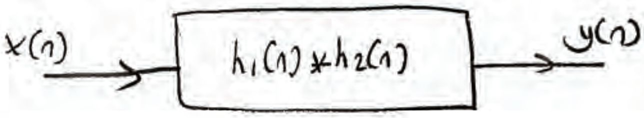


$\Downarrow$

$x(n) * h_1(n)$

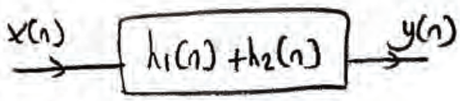
$$y(n) = \left(x(n) * h_1(n)\right) * h_2(n)$$

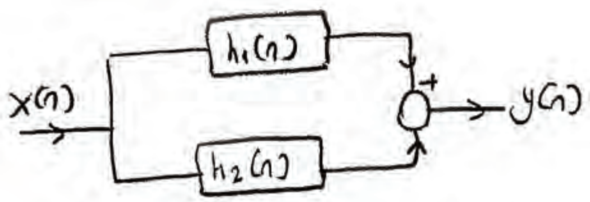
$$y(n) = x(n) * \left(h_1(n) * h_2(n)\right)$$



3) Dağılma özelliği

$$x(n) * \left(h_1(n) + h_2(n)\right) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$





4) Birim örnek ile konvolüsyon

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

$$x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$$

Konvolüsyon Toplamının Bulunması

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

$y_{zi}(n) \rightarrow$ Başlangıç şartlarından gelen çıkış

$y_{zs}(n) \rightarrow$ sadece girişten gelen çıkış

$$y_{zs}(n) = x(n) * h(n)$$

$h(n)$: birim örnek cevabı

Ayrık zamanlı sistemlerde konvolüsyon toplamı iki farklı yaklaşımla bulunabilir

1) Doğrudan yaklaşım
2) Grafiksel yaklaşım

1) Doğrudan Yaklaşım

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$$

$$\dots + x(-1).h(n+1) + x(0).h(n) + x(1).h(n-1) + x(2).h(n-2) + \dots$$

Doğrudan yaklaşım yöntemi; sınırsız süreli işaretlerin konvolüsyonunda kullanılır.

2) Grafiksel Yaklaşım

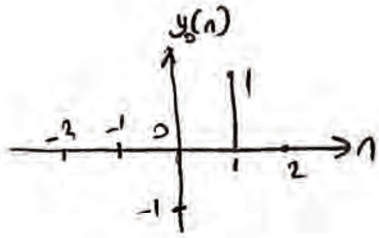
Grafiksel yaklaşım, sınırlı süreli işaretlerin konvolüsyonunda kullanılır.

Örnek; $x(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, -1, 2\}$, $h(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1}, 1\}$

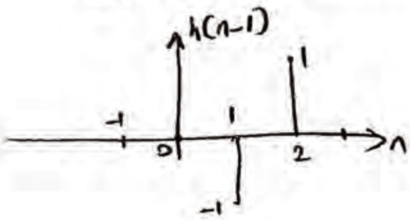
$y(n) = x(n) * h(n)$ bulunuz.

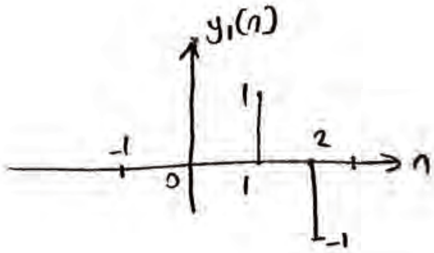
1. Yaklaşım: $k=0$ $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$

$y_0(n) = x(0).h(n) = 1.h(n)$

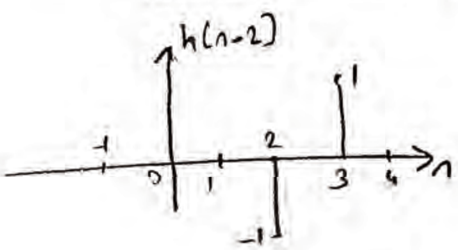


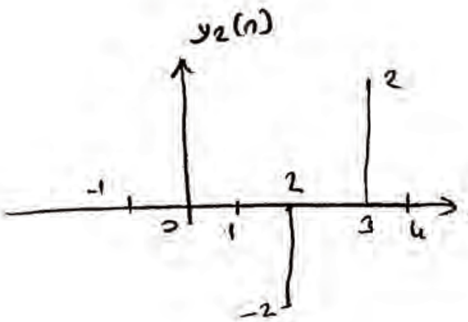
$k=1$ $y_1(n) = x(1).h(n-1)$



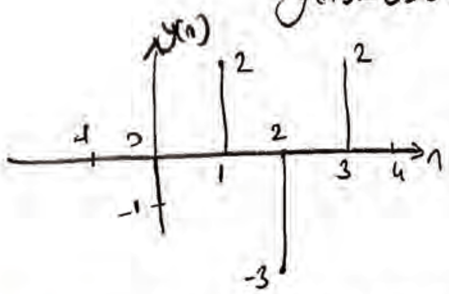


$k=2$ $y_2(n) = x(2).h(n-2)$





$$y(n) = y_0(n) + y_1(n) + y_2(n)$$



$$y(n) = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1}, 2, -3, 2 \}$$

NOT: Sınırlı süreli işaretlerin konvolüsyon toplamından elde edilen işaretin uzunluğu $N = N_1 + N_2 - 1$ formülü ile bulunabilir. Burada N, konvolüsyon işlemi sonucunda elde edilen işaretin uzunluğudur. N_1 ve N_2 ise sırasıyla konvolüsyon işlemine tabii tutulan işaretlerin uzunluklarıdır. Konvolüsyon toplamı sonucunda bulunan işaretin başlangıç ve bitiş indeksleri işleme tabii tutulan indekslerin başlangıç ve bitiş indekslerinden bulunabilir.

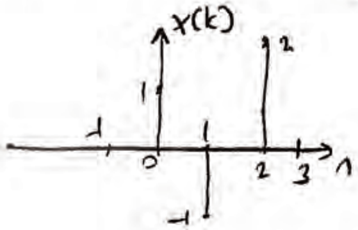
örneğin; $x(n) \to 3$
$h(n) \to 2$
$N = 3 + 2 - 1 = 4$

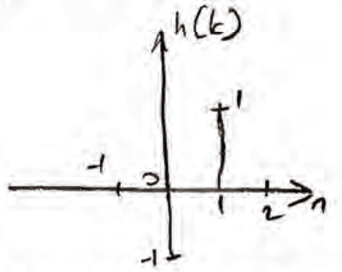
						Konvolüsyon işlemi sonrasındaki işaret
$x(n)$	başlangıç indeksi	0	$h(n)$	başlangıç indeksi	0	$0+0 \to 0$ 'da başlar
	bitiş "	2		bitiş "	1	$2+1 \to 3$ biter.

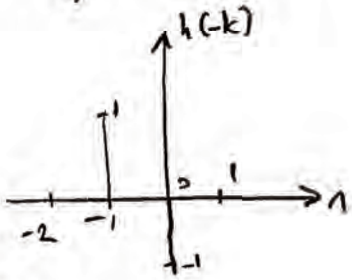
2. Yaklaşım;

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) \qquad x(n) = \{ \underset{\uparrow}{1}, -1, 2 \}$$

$$n = 0 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(-k) \qquad h(n) = \{ \underset{\uparrow}{-1}, 1 \}$$

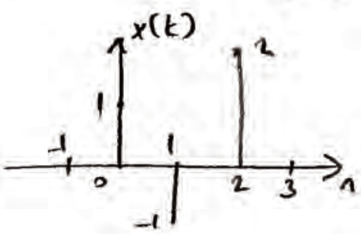


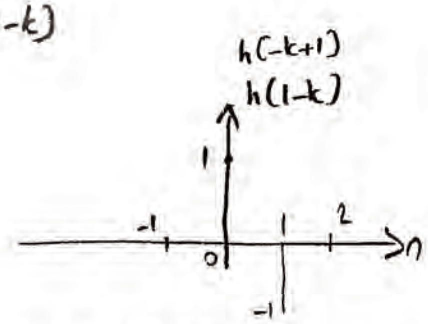




$$y(0) = \cancel{0.(1)} + (1)(-1) + \cancel{(-1)(0)} + \cancel{(2)(0)} = -1$$

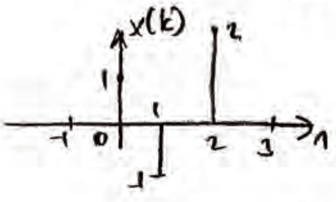
$n=1$ için $\quad y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(1-k)$

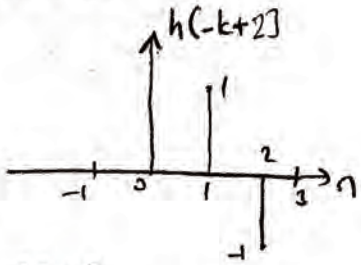




$$y(1) = (1).(1) + (-1)(-1) + \cancel{(2)(0)} = 1 + 1 = 2$$

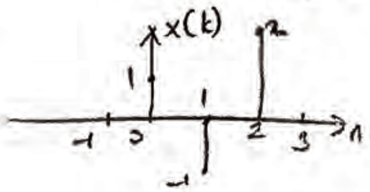
$n=2$ için $\qquad y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(2-k)$

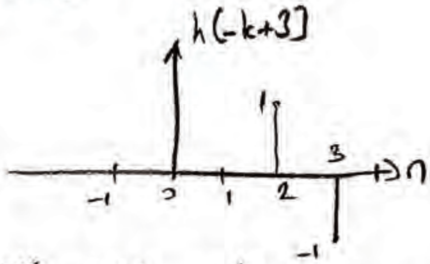




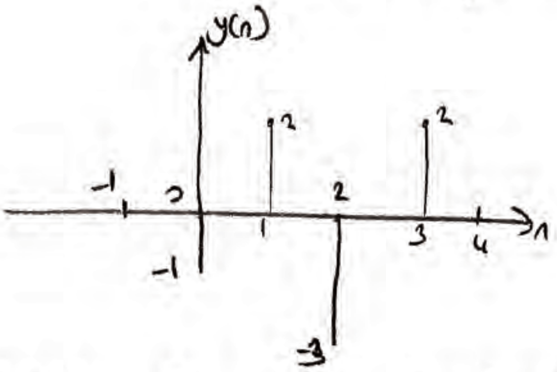
$$y(2)=\cancel{(1)}(0)+(-1)(1)+(2)(-1)=-1+2=-3$$

$n=3$ için $\qquad y(3)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(3-k)$



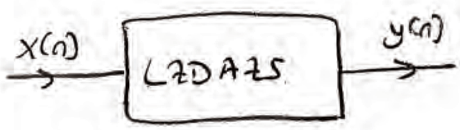


$$y(3)=\cancel{(1)(0)}+\cancel{(-1)(0)}+(2)(1)+\cancel{(0)(-1)} \Rightarrow y(3)=2$$



$$y(n)=\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1},\ 2,\ -3,\ 2\}$$

Örnek; Aşağıda verilen lineer zamanla değişmeyen (LZD) ayrık zamanlı sistemin (AZS) sıfır durum cevabını bulunuz.



$h(n)=u(n)$

$x(n)=a^n.u(n) \qquad y_{zs}(n)=?$

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$$

$$u(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases} \qquad u(n-k)=\begin{cases}1 & k\leq n\\ 0 & k>n\end{cases}$$

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k).u(n-k)$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} a^k$$

$$y(n)=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n$$

$$a.y(n)=a+a^2+a^3+\cdots+a^{n+1}$$

$$y(n)-ay(n)=1-a^{n+1}$$

$$y_{zs}(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Örnek;

$$h(n) = u(n-1) \qquad x(n) = n\,u(n) \qquad y_{zs}(n) = ?$$

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,u(k).\,u(n-k-1)$$

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad u(n-k-1) = \begin{cases} 1 & k \leq n-1 \\ 0 & k > n-1 \end{cases}$$

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k \qquad y(n) = 1+2+3+\dots+n-1 = \frac{(n-1).n}{2}$$

$$y(n) = \frac{(n-1).n}{2}$$

Birim Örnek Cevabına Göre Ayrık Zamanlı Sistemlerin Sınıflandırılması

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{LZDAZS} \longrightarrow h(n)$$

$\delta(n) \rightarrow$ birim impulse sinyali
$h(n) \rightarrow$ birim örnek cevabı

Ayrık zamanlı sistemler birim örnek cevabına göre ikiye ayrılır.

① FIR (Finite Impulse Response)
② IIR (Infinite Impulse Response)

Ayrık zamanlı bir sistem için FIR sistem tanımlaması sonlu birim örnek cevabına sahip sistem olarak yapılır. Yani $n \geq n_0$ $(n_0 \in Z^+)$ için $h(n)=0$ olacak şekilde bir n değeri mevcut ise bu tür sistemlere FIR sistemler denir. Bu şartı sağlamayan sistemlere ise IIR sistemler adı verilir.

Örnek; $y(n) = x(n) + 2x(n-1) - x(n-2)$ Lineer, zamanla değişmeyen, nedensel (LZDN) sistem FIR mi?, IIR sistem midir?

$x(n) \rightarrow \delta(n)$
$y(n) \rightarrow h(n)$ $\qquad h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-2) \qquad h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, -1\}$

n	$\delta(n)$ $x(n)$	$\delta(n-1)$ $x(n-1)$	$\delta(n-2)$ $x(n-2)$	$h(n)$ $y(n)$
-1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	2
2	0	0	1	-1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

$n \geq 3$ $h(n) = 0$ old. FIR sistemdir.

Örnek; $y(n) = 4x(n) - 0{,}5\,y(n-1)$ LZDN sistem FIR, IIR = ?

n	$\delta(n)$ / $x(n)$	$h(n-1)$ / $y(n-1)$	$h(n)$ / $y(n)$
-1	0	0	0
0	1	0	4
1	0	4	-2
2	0	-2	1
3	0	1	-0,5
4	0	-0,5	0,25

$n \geq n_0$ $h(n) \neq 0$ old.
IIR sistemdir.

NOT: Ayrık zamanlı bir sistemin herhangi bir andaki çıkışı daha önceki çıkış değer veya değerlerine bağlı ise sistem IIR sistemdir. Sadece girişin, o anki ve daha önceki değerleri çıkışın hesaplanmasında kullanılıyorsa sistem FIR'dir.

Birim örnek Cevabı ile Nedensellik İlişkisi

Lineer zamanla değişmeyen (LZD) bir ayrık zamanlı sistem için (AZS) birim örnek cevabı $h(n)$ olmak üzere;

$n<0$ $h(n)=0$ ise sistem nedenseldir.

Birim örnek Cevabı ile Kararlılık İlişkisi

LZD AZS için $h(n)$ birim örnek cevabı olmak üzere aşağıdaki şart sağlanıyorsa sistem sınırlı giriş sınırlı çıkış (BIBO) kararlılığa sahiptir denir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$ Bu şartın sağlanması için $\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} h(n) = 0$ olmalıdır.

Bu şart gerek şarttır ancak yeter şart değildir.

KAYNAKLAR

1- Prof. Dr. Arif GÜLTEN Ders Notları

2- Digital Signal Processing 1st Edition by Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer

3- Sayısal Sinyal İşleme: İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar, John G. Proakis.