MEM 334: Otomatik Kontrol II
Güz 2023 Ders 2

Dr. Öğr. Üyesi Gökhan Güngör

Mekatronik Mühendisliği, Mühendislik Fakültesi
Karabük Üniversitesi

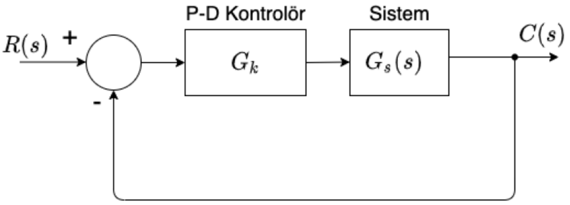
Mühendislik Fakültesi
Mekatronik Mühendisliği

Dersin İçeriği

1. Geçen hafta verilmiş olan alıştırmaların çözümü ve yorumlanması.
2. Otomatik Kontrol 1- kutup ve sıfırların bulunması ve yorumlanması hakkında genel tekrar
3. Root-Locus grafiğinin bazı temel özellikleri.
4. Root-Locus grafiğinin oluşturulması ve oluşturulma aşamaları.
5. Değerlendirme ve sonuçlar.

Alıştırma 1

Alıştırma 1: Aşağıda verilen kapalı çevrim diagramına göre, K_p ve K_d kontrolör parametrelerini hangi değer aralığında seçilirse kapalı çevrim sistemimiz kararlı halde olur. Lütfen yorumlayınız? (Root-locus methodu kullanılacak.)



$$G_k = K_p + K_d s \qquad G_s(s) = \frac{1}{s+\kappa}$$

Alıştırma 1 Cevabı

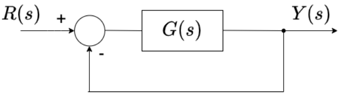
Açık çevrim kontrolör transfer fonksiyonu

$$G_k = K_p + K_d s = K_d(s + \frac{K_p}{K_d})$$

Burada açık çevrim kontrolürün zeros (sıfırları) $s = -\frac{K_p}{K_d}$ olarak bulunacaktır. Bir diğer taraftan sistemin transfer fonksiyonuna baktığımızda sistemin polü $s = -\kappa$ olarak bulunacaktır. Kolaylık olması için bundan sonra $\frac{K_p}{K_d}$ oranını $\frac{K_p}{K_d} = b$ olarak adlandıracağız. Şimdi alıştırmada verilen sistem ve kontrolürün birleşimiyle birlikte kapalı çevrim transfer fonksiyonunu gösterelim.

Alıştırma 1 Cevap Devamı

Hatırlatma: Bir sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunabilinir.



Genel transfer fonksiyonu $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)}$ olarak bulunabilinir. Hatırlatmayı düşünerek alıştırmanın genel transfer fonksiyonunu bulabiliriz. Kapalı çevrim genel transfer fonksiyonu

$$G_{kc} = \frac{K_d(s+b)}{(K_d+1)s + (a + K_d b)} \tag{1}$$

olarak bulunacaktır.

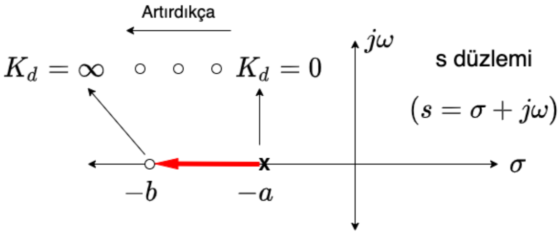
Alıştırma 1 Cevap Devamı

Kapalı çevrimin polünü ise $p_{kc} = \dfrac{-(a + K_d b)}{(1 + K_d)}$ olarak bulunacaktır.

Yorumlama: Burada kapalı çevrimin polü bulunduktan sonra a ve b katsayılarını sabit ve gerçek sayı olarak kabul edersek K_d değerini değiştirerek root-locus grafiğinin oluşumu için belli yorumlarda bulunabiliriz.

1. K_d değeri eğer sıfıra yaklaşırsa yani $K_d \rightarrow 0$ için pole değerimiz $-a$ olarak bulunacaktır. Yani kapalı çevrim kutup değerimiz açık çevrim kutup değerimize yaklaşmış olduğunu söylebiliriz.
2. K_d değeri eğer sonsuza yaklaşırsa yani $K_d \rightarrow \infty$ olursa burada iki farklı durum söz konusu olabilir. Bir diğer değişle a ve b değerlerinin büyüklüğüne göre kapalı çevrim kutbunun yönelimi hakkında yorumda bulunabiliriz. Bu durumu grafikler üzerinde inceleyelim.

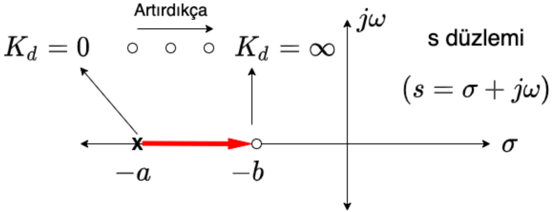
Alıştırma 1 Cevap Devamı



Eğer

$b > a$

ise



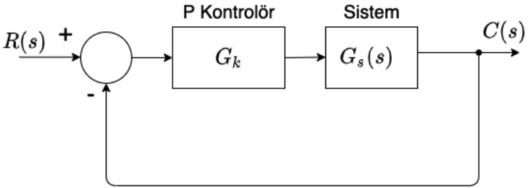
Eğer

$a > b$

ise

Alıştırma 2

Alıştırma 2: Aşağıda verilen kapalı çevrim diagramına göre, K_p kontrolör parametresinin hangi değer aralığında seçilirse kapalı çevrim sistemimiz kararlı halde olur. Lütfen yorumlayınız? (Root-locus methodu kullanılacak.)



$$G_k = K_p \qquad G_s(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Alıştırma 2 Cevabı

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

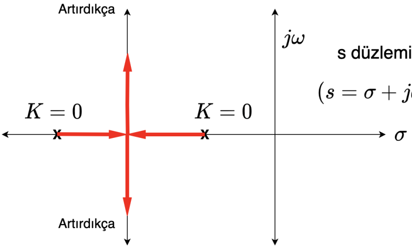
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1+K)}.$$

Şimdi bu kapalı çevrim sistemin kutuplarını yazalım.

$$p_{kc1} = p_{kc2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - (1+K)} \tag{2}$$

Görüldüğü gibi eğer $\zeta \geq 1$ ve $K \leq \zeta - 1$ olmazsa poller karmaşık eşlenik olacaktır.

Alıştırma 2 Cevabı Devamı



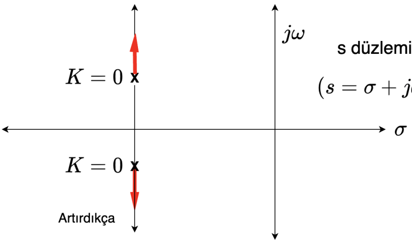
s düzlemi

$(s = \sigma + j\omega)$

Eğer

$\zeta > 1$

ise



s düzlemi

$(s = \sigma + j\omega)$

Eğer

$\zeta < 1$

ise

Sistem kutupları ve sıfırları

Aşağıda verilmiş olan bir sistemin tranfer fonksiyonunu inceleyiniz.

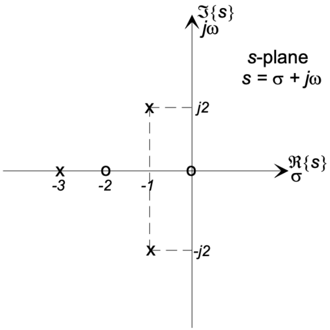
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{3}$$

Burada kutuplar ve sıfırlar ya tamamen gerçek sayı yada karmaşık eşlenikli sayı olmalıdır.
Aşağıdaki örneği inceleyelip sistemin sıfırlarını ve kutuplarını bulup, s düzlemi üzerinde gösterelim.

$$G(s) = \frac{5s^2+10s}{s^3+5s^2+11s+5} \tag{4}$$

Burada sistemin kutup-sıfır grafiği çizilerek sistemin dinamik davranışı konusunda yorumlar yapılabilinir.

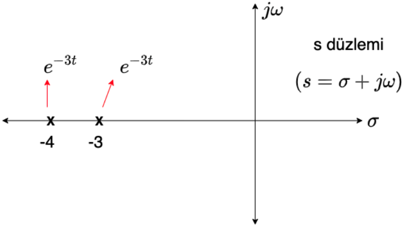
Kutup-Sıfırların s-düzleminde gösterimi



Burada dikkat edilmesi gereken sistem kutuplarının sistemin homojen çözümüne olan etkisi. Biraz bu konuyu ele alarak kutupların ve sıfırların neden önemli olduğunu tartışalım.

Kutup-Sıfırların s-düzleminde önemi

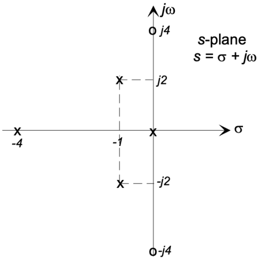
$$G(s) = \frac{12}{s^2 + 7s + 12} \tag{5}$$



Burada $y_1 = C_1 e^{-3t}$ ve $y_2 = C_2 e^{-4t}$ terimleri sistemin genel homojen cevabının parçalarıdır.

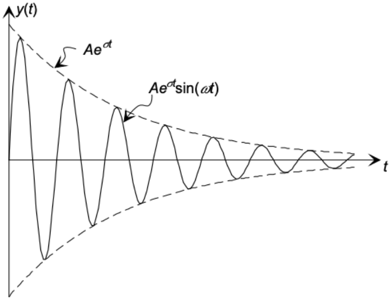
Kompleks Kutup-Sıfırların s-düzleminde önemi

$$G(s) = \frac{s^2+16}{s^4+16s^3+13s^2+2s} = \frac{s^2+16}{s(s+4)(s^2+2s+5)} \tag{6}$$

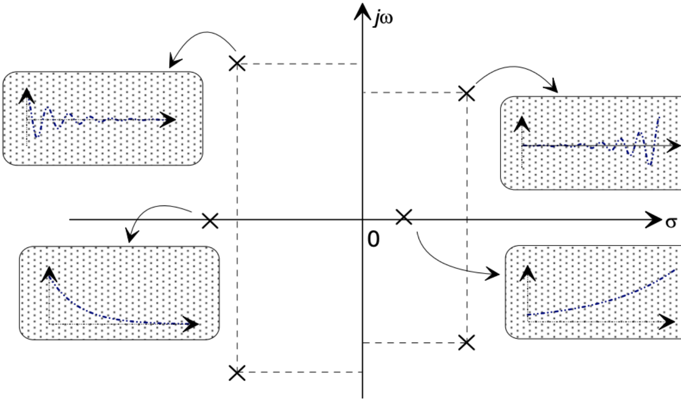


Burada $y_1 = C_1 e^{-3t}$ ve $y_2 = C_2 e^{-4t}$ terimleri sistemin genel homojen cevabının parçalarıdır.

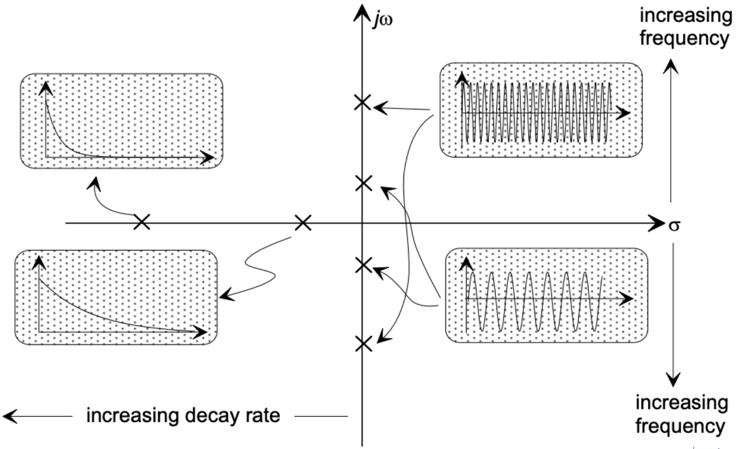
Kompleks Kutup-Sıfırların s-düzleminde önemi



Kutup noktalarının etkileri

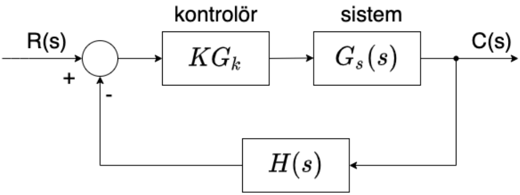


Kutup noktalarının etkileri



Root-Locus Grafiğinin Oluşturulması

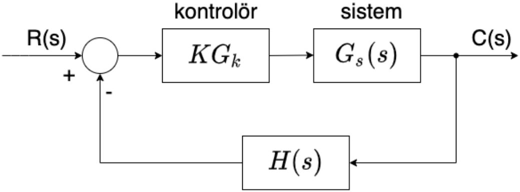
Son iki örnekte iki basit örnek üzerinden Root-Locus grafiğinin oluşturulması için kısa bilgiler verildi. Şimdi ise root-locus grafiğinin oluşturulma methodunu detaylı şekilde inceleyelim.



Kapalı çevrim karakteristik denklemini
$1 + KG(s) = 1 + KG_k G_s H(s) = 0$ olarak yazabiliriz.

Root-Locus Grafiğinin Oluşturulması Devamı..

Şimdi kendimize sormamız gereken: s-düzlemi üzerindeki rasgele bir noktanın $s = \sigma + j\omega$ kök yer eğrisi üzerinde olup olmadığını nasıl anlarız? Başka bir deyişle, s'nin karakteristik denklemin bir kökü olup olmadığını belirlememiz gerekmektedir. Sonuç olarak şartımız, eğer s bir kök ise



Kapalı çevrim karakteristik denklemini
$1 + KG(s) = 1 + KG_k G_s H(s) = 0$ olarak yazabiliriz.

Root-Locus Grafiğinin Oluşturulması Devamı..

köklerimizin s düzleminde olması için karakteristik denklemimizi $KG(s) = -1 + j0$ olarak yazmamız gerekecek. Matematiksel olarak bu durumu aşağıdaki denklem kümeleriyle özetleyebiliriz.

$$KG(s) = |KG(s)|e^{j\underline{/(KG(s))}} = 1 \times e^{j(2n+1)\pi} \quad n = 0, 1, 2, 3.... \tag{7}$$

Sonuçlar

Referanslar

Bu notlar Prof. Derek Rowella notları kullanılarak hazırlanmıştır. Teşekkür ederim.