T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

Prof. Dr. Zafer BİNGÜL Prof. Dr. Serdar KÜÇÜK

ROBOT KİNEMATİĞİ

PROF. DR. ZAFER BİNGÜL
PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK

3. İLERİ KİNEMATİK

3.1. Giriş

Geometrik bir sistemin yapısını ve hareketlerini inceleyen bilim dalına kinematik denir. Bir sistemin belirli şartlar altında nasıl hareket ettiğini anlayabilmek için bu sistemin kuvvet atalet ve enerji gibi büyüklüleri yani dinamiği hakkında bilgi sahibi olmak gerekir. Robotun ileri yön kinematiği (forward kinematics), robot bağlarının konumları, hızları ve ivmeleri arasındaki ilişkiyle ilgilenir. Bir seri robot, ana çerçevesinden araç çerçevesine doğru birbirine prizmatik veya dönel eklemlerle tutturulmuş seri bağlardan oluşur. Eğer her ekleme bir koordinat sistemi yerleştirilirse, komşu iki eklem arasındaki ilişki bir dönüşüm matrisi ile ifade edilir. İlk ekleme ait dönüşüm matrisi, ilk eklemle ana çerçeve arasında bir ilişki tanımlarken son ekleme ait dönüşüm matrisi ise uç işlevcisi ile son eklem arasında bir ilişki tanımlar. Arka arkaya sıralanan bu eklem dönüşüm matrislerinden yararlanarak ana çerçeveyle araç çerçevesi arasında bir ilişki tanımlanır. Bu ilişkiye ileri kinematik denir ve araç çerçevesinin yönelimini ve konumunu ana çerçeveye göre ifade eder ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$ {}^{0}_{N}T = {}^{0}_{1}T\, {}^{1}_{2}T\, {}^{2}_{3}T \cdots {}^{N-1}_{N}T $$

Her bir eklem matrisi bir eklem değişkeninin fonksiyonudur. ${}_{N}^{0}T$dönüşüm matrisi ise N tane eklemin birer fonksiyonudur. Bir robotun uç işlevcisinin çalışma uzayında serbestçe hareket edebilmesi için 6 serbestlik derecesi yeterlidir.

3.2. Eklem Değişkenlerinin Belirlenmesi

Robotların eklem değişkenlerinin belirlemek için bir çok kinematik yöntem geliştirilmiştir. Kinematik problemlerin çözümü, Kartezyen üç boyutlu ve Kartonyum dört boyutlu olmak üzere iki farklı uzayda gerçekleştirilir.

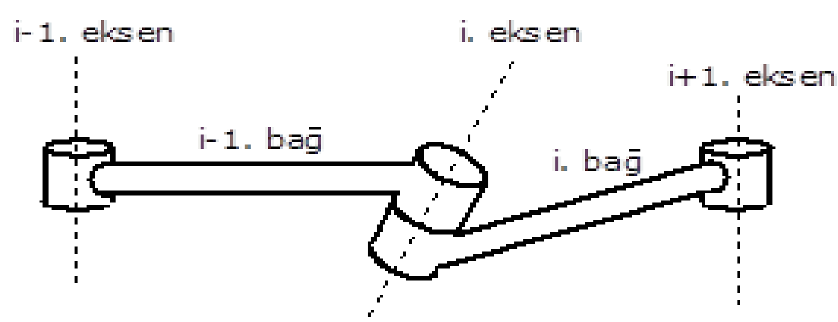
Kartezyen uzayda üstel yöntem (exponential method), Pieper-Roth yöntemi başvurulan yöntemlerden bazılarıdır. Fakat çoğunlukla bir robotun eklem değişkenlerinin belirlenmesinde en fazla tercih edilen yöntem kısaca D-H olarak gösterilen Denavit-Hartenberg yöntemidir.

3.2.1. Denavit-Hartenberg Yöntemi

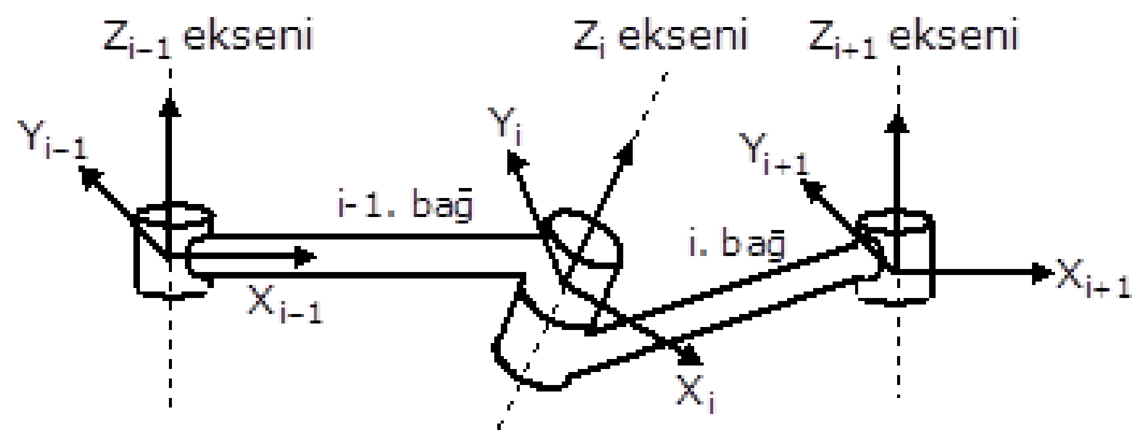
Denavit-Hartenberg yönteminde dört ana değişken kullanılarak robot kinematiği çıkarılır. Bu değişkenler,

1. İki eksen arasındaki bağ uzunluğu (link length) (a_{i-1})
2. (i-1) ile i eksenleri arasındaki bağ açısı (link twist) (α_{i-1})
3. Üst üste çakışan bağlar arasındaki eklem kaçıklığı (joint offset) (d_i)
4. İki bağ arasında oluşan eklem açısı (joint angle) (θ_i)'dir.

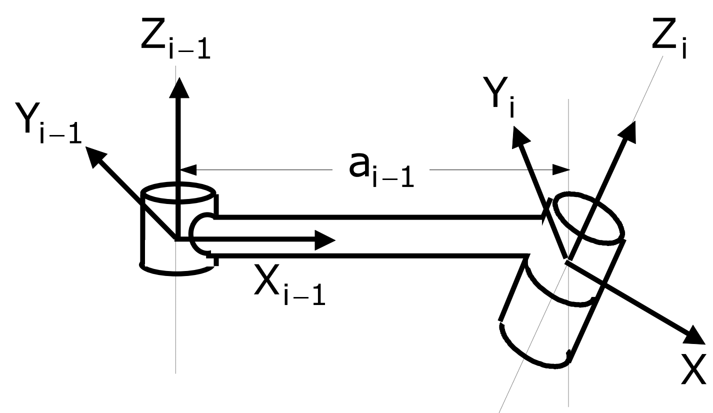
Bu dört değişkene D-H değişkeni denir. Bu değişkenleri belirlemek için, öncelikle robotun dönme eksenleri belirlenir ve dönme eksenleri bağlardan bir fazla olacak şekilde numaralandırılır.



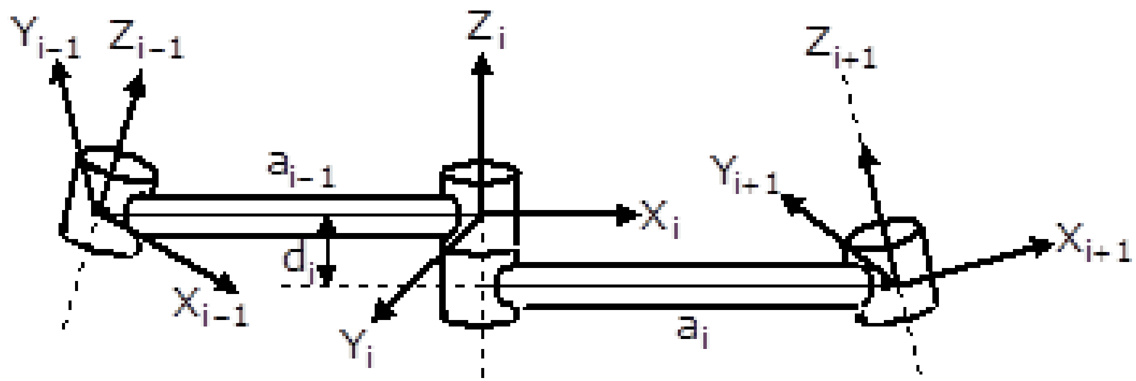
İkinci adım olarak bu eksenlerin her birine bir koordinat sistemi yerleştirilir ve bağ dönme ekseni koordinat sisteminin Z ekseni kabul edilir.



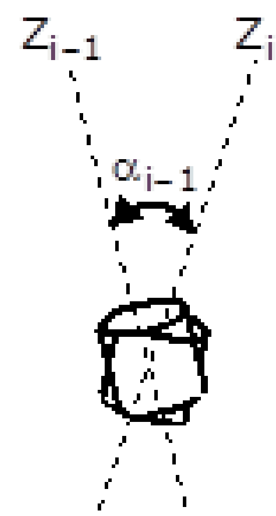
Üçüncü adımda ise X_{i-1} yönünde uzanan Z_{i-1} ile Z_i arasındaki dik uzaklık a_{i-1} bağ uzunluğu olarak belirlenir.



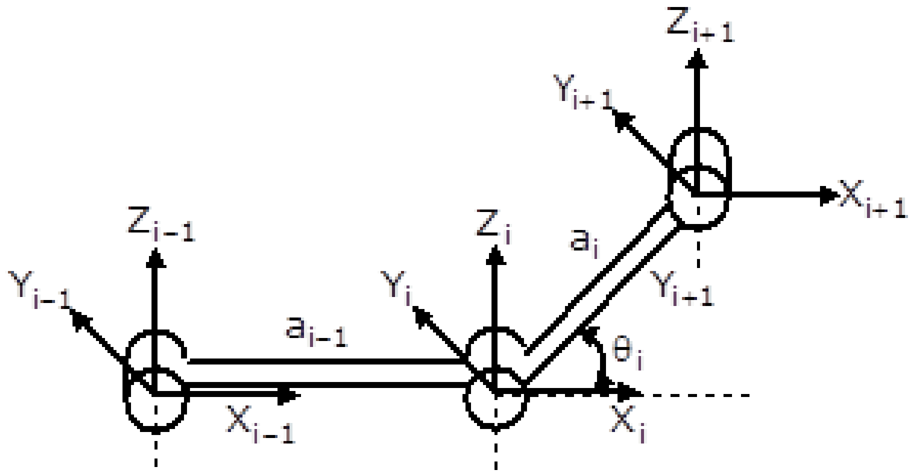
Dördüncü adımda X_{i-1} ile X_i arasında Z_i boyunca uzanan üst üste çakışan bağlar arasındaki mesafe d_i (bağ kaçıklığı) olarak belirlenir.



Beşinci adımda Z_{i-1} ile Z_i dönme eksenleri arasında oluşan açı α_{i-1} bağ açısı olarak belirlenir.



Son olarak a_{i-1} ile a_i bağları arasında X ekseni boyunca ölçülen açı θ_i açısı olarak belirlenir.



3.2.2. Eklemlere Koordinat Sistemi Yerleştirilmesi

Eklemlere koordinat sistemi yerleştirilirken aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir.

- Öncelikle eklem eksenlerinin dönme veya kayma yönleri belirlenir. Dönel eksenler için dönme yönü Z, prizmatik eklemler için kayma yönü Z ekseni olarak belirlenir.
- Genellikle Z eksenine dik ve kol boyunca olan bağ uzunluğu X ekseni olarak kabul edilir.
- Z ve X eksenleri belirlendikten sonra sağ el kuralına göre Y ekseni bulunur.

Önemli nokta:

- Bir seri robotun eklemlerine koordinat sistemleri yerleştirilirken birinci eksenin dönme yönü Z ekseni olarak belirlendikten sonra genellikle bu ekleme X ekseni döndürüldüğünde komşu iki Z ekseni üst üste çakışacak şekilde bir X ekseni yerleştirilir.

DH Değişkenleri

1. a_{i-1} , $\hat{Z}_{i-1}$ ile $\hat{Z}_i$ arasında $\hat{X}_{i-1}$ boyunca belirlenen uzunluktur.

2. α_{i-1} , $\hat{Z}_{i-1}$ ile $\hat{Z}_i$ arasında $\hat{X}_{i-1}$ boyunca ölçülen açıdır.

3. d_i , $\hat{X}_{i-1}$ ile $\hat{X}_i$ arasında $\hat{Z}_i$ boyunca belirlenen uzunluktur.

4. θ_i , $\hat{X}_{i-1}$ ile $\hat{X}_i$ arasında $\hat{Z}_i$ boyunca ölçülen açıdır.

Bu dört değişken kullanarak n serbestlik derecesine sahip bir robotun yalnızca bir eklemine ait dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi elde edilir. Bir dönüşüm matrisi, 3x3'lük bir dönme matrisinden ve 3x1'lik bir konum vektöründen oluşur.

$$ {}^{i-1}_{i}T = R_x(\alpha_{i-1})D_x(a_{i-1})R_z(\theta_i)D_z(d_i) $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

3.2.4. Robot Kinematiğinin Çıkarılmasında Uygulanan Genel Kurallar

Sıfır konumunda bulunan robotun ileri yön kinematiği bulma sırası :

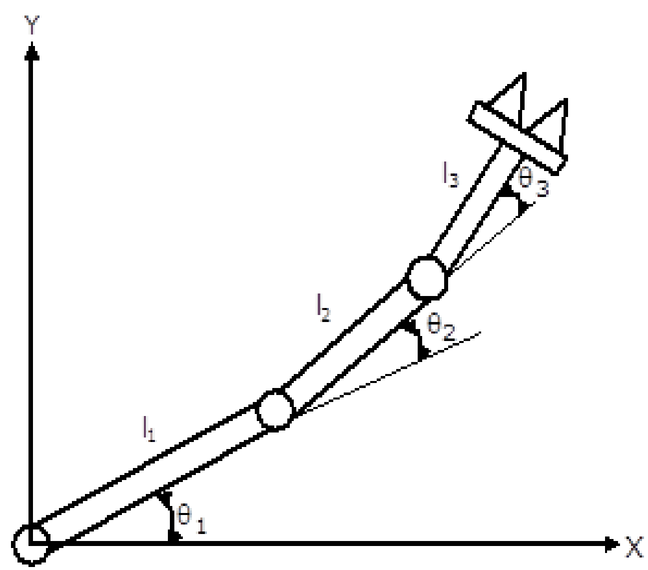
1. Robotun her eklemi belirlenerek bu eklemlere koordinat sistemi yerleştirilir.
2. Her eklem için D-H değişkenleri belirlenir.
3. Tablonun her satırında bulunan değişkenler kullanılarak her bir ekleme ait dönüşüm matrisi elde edilir.

Tabloda yer alan a_{i-1} ve α_{i-1} robotun hareket etmesiyle değişmeyen sabit parametreler iken θ_i ve d_i robotun hareketiyle değişen parametrelerdir. Her bir eklem için elde edilen θ_i ve d_i parametrelerinden sadece bir tanesi değişken olabilir.

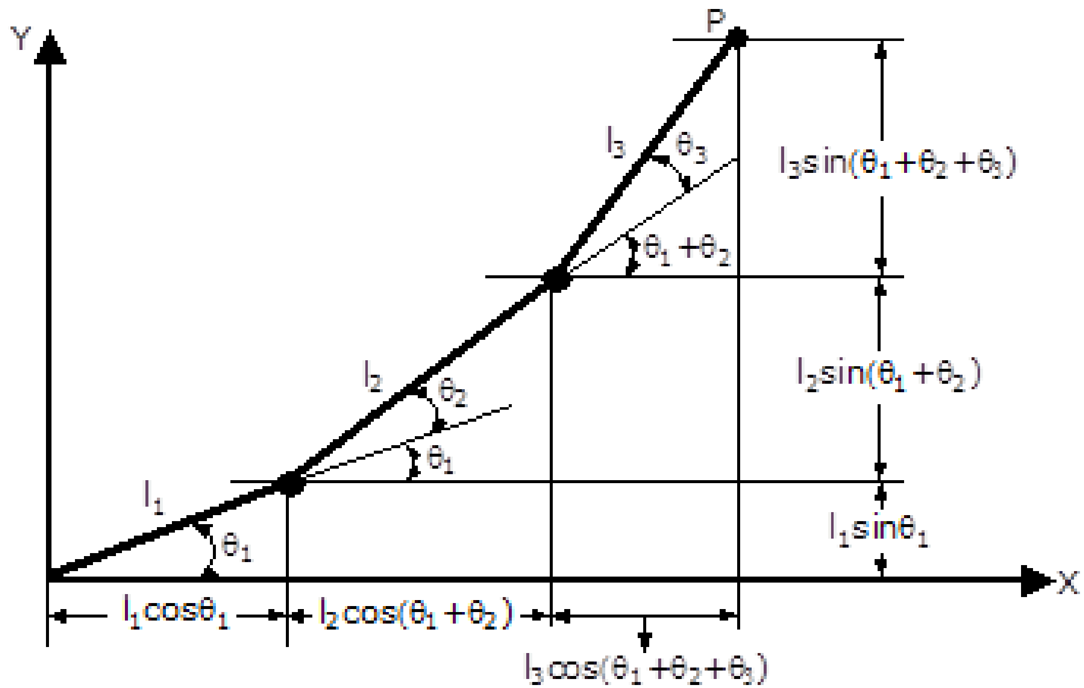
Eksen No	D – H Değişkenleri				i. Eklem Değişkeni
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i $veya$ θ_i
1	α_0	a_0	d_1	θ_1	d_1 $veya$ θ_1
2	α_1	a_1	d_2	θ_2	d_2 $veya$ θ_2
3	α_2	a_2	d_3	θ_3	d_3 $veya$ θ_3
4	α_3	a_3	d_4	θ_4	d_4 $veya$ θ_4

Robotların ileri yön kinematiği, geometrik ve DH olmak üzere iki farklı yöntem kullanılarak bulunabilir. Genellikle geometrik yöntem geometrik yapısı basit robotlar için tercih edilir.

Üç eklemli düzlemsel (planar) basit bir robotun ileri yön kinematiğini hem geometrik hem de matematik model yaklaşım kullanarak bulalım. Düzlemsel robotun eklem değişkenleri θ_1, θ_2, θ_3 açıları ve bağ uzunlukları ise l_1, l_2, l_3 ifadeleridir.



1. Geometrik yöntem



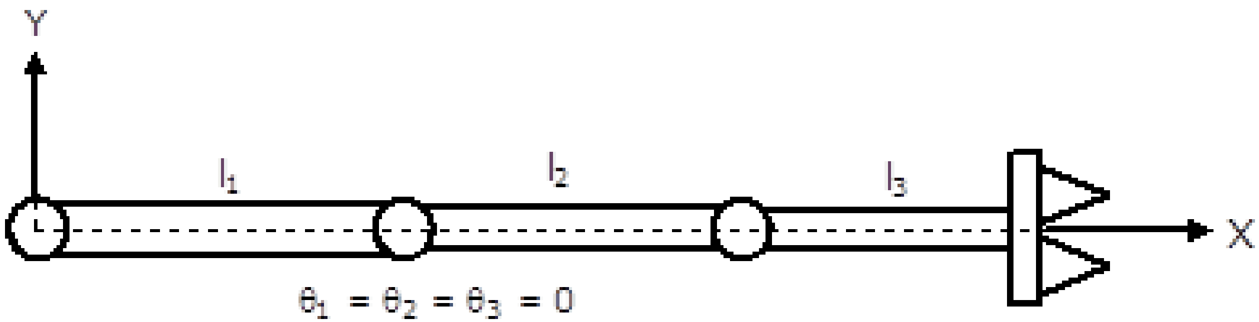
P noktasının konumu X ve Y eksenindeki ise l_1, l_2 ve l_3 bağ uzunluklarının toplanmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$p_x = l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) + l_3 c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

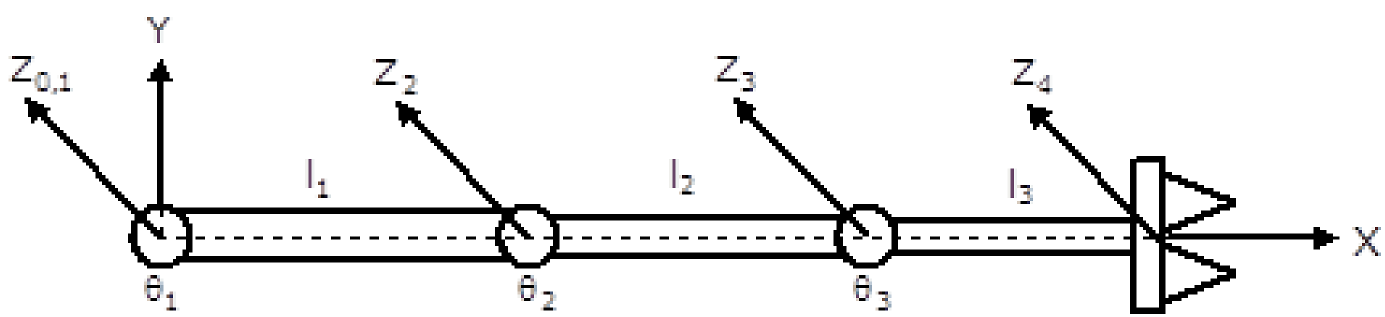
$$p_y = l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1 + \theta_2) + l_3 s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

2. DH yöntemini

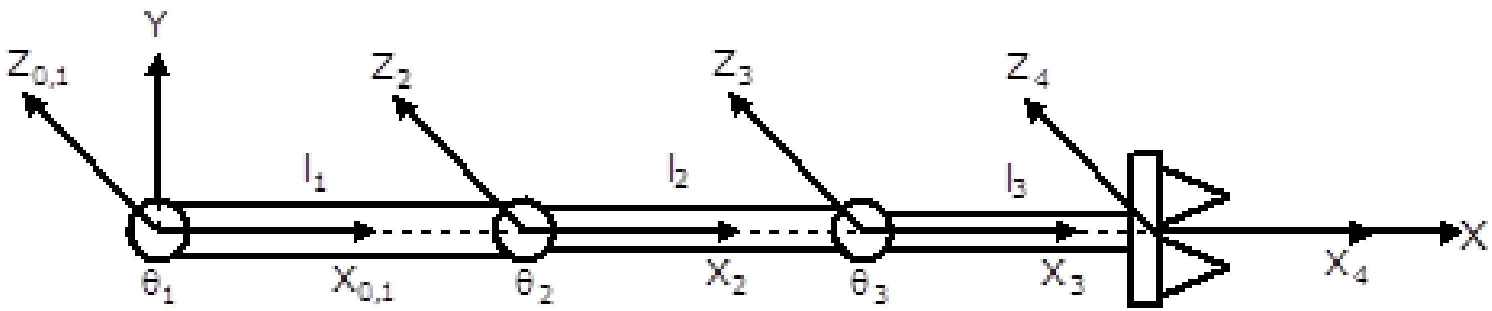
Öncelikle robotun katı gövde (rigid body) yapısı sıfır konumunda çizilir. Bir robotun sıfır konumu bütün eklem değişkenlerinin başlangıç konumunda olma durumudur.



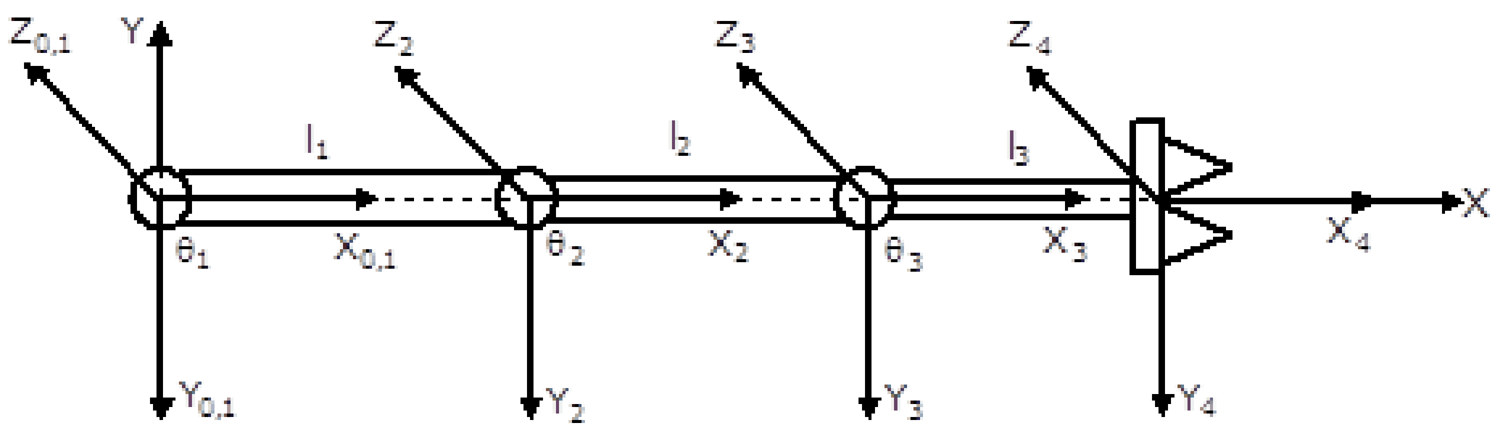
Şimdi ise yukarıdaki robotun her eklemine bir koordinat sistemi yerleştirelim. Bu robotun bütün eklemleri dönel ve bir birine paralel olduğundan eksenlerinin dönme yönleri de aşağıda görüldüğü gibi aynı olur.



Şimdi ise her ekleme bir X ekseni yerleştirelim. Şekilde görüldüğü gibi Z eksenine dik ve kol boyunca uzanan bağ uzunluğu X ekseni olarak belirlenir.



Son olarak sağ el kuralına göre aşağıda görüldüğü gibi Y ekseni belirlenir.



D-H parametreleri:

1. $\boldsymbol{\alpha_{i-1}}$: $Z_{0,1}$, Z_2, Z_3 ve Z_4 eksenlerinin dönme yönleri aynı olduğundan,

$$i = 1 \; için \;\; \alpha_{i-1} = \alpha_{1-1} = \alpha_0 = 0^\circ \qquad (0 \;\; ile \; 1 \;\; arası)$$

$$i = 2 \; için \;\; \alpha_{i-1} = \alpha_{2-1} = \alpha_1 = 0^\circ \qquad (1 \;\; ile \; 2 \;\; arası)$$

$$i = 3 \; için \;\; \alpha_{i-1} = \alpha_{3-1} = \alpha_2 = 0^\circ \qquad (2 \;\; ile \; 3 \;\; arası)$$

$$i = 4 \; için \;\; \alpha_{i-1} = \alpha_{4-1} = \alpha_3 = 0^\circ \qquad (3 \;\; ile \; 4 \;\; arası)$$

2. $\mathbf{a_{i-1}}$: 0 ile 1. eklemler üst üste olduğundan bu iki eklem arasında yani $\hat{Z}_0$ ile $\hat{Z}_1$ arasında $\hat{X}_0$ boyunca uzanan herhangi bir bağ uzunluğu yoktur.

$$i = 1 \; için \;\; a_{i-1} = a_{1-1} = a_0 = 0 \qquad (\hat{Z}_0 \;\; ile \; \hat{Z}_1 \;\; arası)$$

$\hat{Z}_1$ ile $\hat{Z}_2$ arasında $\hat{X}_1$ boyunca l_1 uzunluğu vardır.

$$i = 2 \; için \;\; a_{i-1} = a_{2-1} = a_1 = l_1 \qquad (\hat{Z}_1 \;\; ile \; \hat{Z}_2 \;\; arası)$$

$\hat{Z}_2$ ile $\hat{Z}_3$ arasında $\hat{X}_2$ boyunca I_2 uzunluğu vardır.

$$i = 3 \; için \;\; a_{i-1} = a_{3-1} = a_2 = l_2 \qquad (\hat{Z}_2 \;\; ile \; \hat{Z}_3 \;\; arası)$$

$\hat{Z}_3$ ile $\hat{Z}_4$ arasında $\hat{X}_3$ boyunca l_3 uzunluğu vardır.

$$i = 4 \; için \;\; a_{i-1} = a_{4-1} = a_3 = l_3 \qquad (\hat{Z}_3 \;\; ile \; \hat{Z}_4 \;\; arası)$$

3. $\mathbf{d_i}$: 0 ile 1. eklemler üst üste olduğundan bu iki eklem arasında yani $\hat{X}_0$ ile $\hat{X}_1$ arasında $\hat{Z}_1$ boyunca herhangi bir eklem kaçıklılığı (offset) yoktur.

$$i = 1 \; için \;\; d_i = d_1 = 0 \qquad (\hat{X}_0 \;\; ile \;\; \hat{X}_1 \;\; arası)$$

$\hat{X}_1$ ile $\hat{X}_2$ arasında $\hat{Z}_2$ boyunca herhangi bir uzunluk yoktur.

$$i = 2 \; için \;\; d_i = d_2 = 0 \qquad (\hat{X}_1 \;\; ile \;\; \hat{X}_2 \;\; arası)$$

$\hat{X}_2$ ile $\hat{X}_3$ arasında $\hat{Z}_3$ boyunca herhangi bir uzunluk yoktur.

$$i = 3 \; için \;\; d_i = d_3 = 0 \qquad (\hat{X}_2 \;\; ile \;\; \hat{X}_3 \;\; arası)$$

$\hat{X}_3$ ile $\hat{X}_4$ arasında $\hat{Z}_4$ boyunca herhangi bir uzunluk yoktur.

$$i = 4 \; için \;\; d_i = d_4 = 0 \qquad (\hat{X}_3 \;\; ile \;\; \hat{X}_4 \;\; arası)$$

4. $\boldsymbol{\theta_i}$: Son olarak bütün eklemler dönel olduğundan

$$i = 1 \; için \; \theta_i = \theta_1 \qquad i = 2 \; için \; \theta_i = \theta_2 \qquad i = 3 \; için \; \theta_i = \theta_3$$

Dördüncü eklemde sadece uç işlevcisi bulunmaktadır. Bu eklem dönel veya prizmatik olmadığından

$$i = 4 \; için \; \theta_i = \theta_4 = 0$$

Robotların ileri yön kinematiği çıkarılırken uç işlevcisine de bir koordinat çerçevesi yerleştirildiği unutulmamalıdır.

İleri yön kinematiği çıkarılan robotun üç eklemi de dönel olduğundan doğal olarak değişkenlerde θ_1, θ_2, θ_3 olur.

DH Tablosu

Eksen No	D – H Değişkenleri				i. Eklem Değişkeni
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i $veya$ θ_i
1	0	0	0	θ_1	θ_1
2	0	I_1	0	θ_2	θ_2
3	0	I_2	0	θ_3	θ_3
4	0	I_3	0	0	0

Tabloda görülen D-H değişkenlerini aşağıda verilen genel matriste yerine koyup her bir eklem için bir adet dönüşüm matrisi elde edilir.

$$
{}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Eksen No	**D – H Değişkenleri**				**i. Eklem Değişkeni**
İ	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i *veya* θ_i
1	0	0	0	θ_1	θ_1
2	0	I_1	0	θ_2	θ_2
3	0	I_2	0	θ_3	θ_3
4	0	I_3	0	0	0

1. Eklem için (i=1),

$$
{}^{i-1}_{i}T = {}^{1-1}_{1}T = {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 c(0) & c\theta_1 c(0) & -s(0) & 0 \\ s\theta_1 s(0) & c\theta_1 s(0) & c(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

2. Eklem için (i=2 için)

$$
{}^{i-1}_{i}T = {}^{2-1}_{2}T = {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 c(0) & c\theta_2 c(0) & -s(0) & 0 \\ s\theta_2 s(0) & c\theta_2 s(0) & c(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3. Eklem için (i=3) için

$$
{}^{i-1}_{i}T = {}^{3-1}_{3}T = {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 c(0) & c\theta_3 c(0) & -s(0) & 0 \\ s\theta_3 s(0) & c\theta_3 s(0) & c(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Uç işlevcisi için (i=4) için

$$
{}^{i-1}_{i}T = {}^{4-1}_{4}T = {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 \cdot c(0) & 1 \cdot c(0) & -s(0) & 0 \\ 0 \cdot s(0) & 1 \cdot s(0) & c(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Yukarıdaki dönüşüm matrislerinin çarpılmasıyla ana çerçeveden araç çerçeveye doğru ${}^{0}_{4}T$ ileri yönlü robot kinematiği aşağıdaki gibi çıkarılır.

$$
{}^{0}_{4}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T\,{}^{3}_{4}T
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_{12}c\theta_3 - s\theta_{12}s\theta_3 & -s\theta_{12}c\theta_3 + c\theta_{12}s\theta_3 & 0 & l_3(c\theta_{12}c\theta_3 - s\theta_{12}s\theta_3) + l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 \\ s\theta_{12}c\theta_3 + c\theta_{12}s\theta_3 & c\theta_{12}c\theta_3 - s\theta_{12}s\theta_3 & 0 & l_3(s\theta_{12}c\theta_3 + c\theta_{12}s\theta_3) + l_2 s\theta_{12} + l_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Denklemde c$\theta_{12} = c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2$ ve s$\theta_{12} = s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2$ ’dir.

D-H yönteminden elde edilen p_x ve p_y ifadelerini sırayla açı toplamları cinsinden yazalım.

$$p_x = l_3 c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) + l_1 c\theta_1$$

$$p_y = l_3 s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 s(\theta_1 + \theta_2) + l_1 s\theta_1$$

Denklemde,

$$c\theta_{12} = c(\theta_1 + \theta_2)$$

$$s\theta_{12} = s(\theta_1 + \theta_2)$$

$$c\theta_{12} c\theta_3 - s\theta_{12} s\theta_3 = c\theta_{123} = c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$s\theta_{12} c\theta_3 + c\theta_{12} s\theta_3 = s\theta_{123} = s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Dikkat edilirse geometrik yöntemden ve D-H yönteminden elde edilen sonuçlar aynı çıkmıştır

ÖRNEK 3.1

Şekilde bir RRP (dönel 'R', dönel 'R', prizmatik 'P') robotunun katı gövde yapısı veriliyor. Buna göre

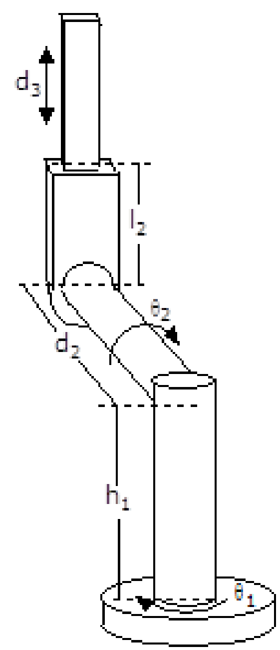
a. Her bir ekleme koordinat sistemi yerleştiriniz.

b. D-H değişkenlerini bulunuz.

c. Her bir eklemin dönüşüm matrisini bulunuz.

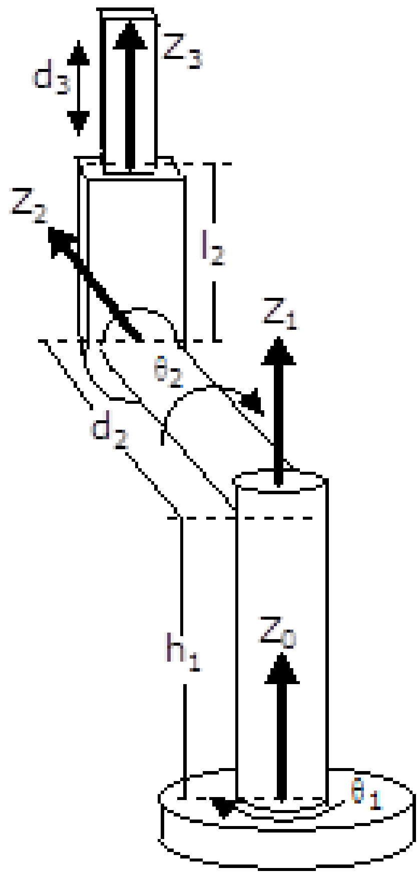
d. Ana çerçeve ile uç işlevcisi arasındaki ileri kinematiği bulunuz.

e. Bu ileri kinematik denklemin doğru olup olmadığını araştırınız.

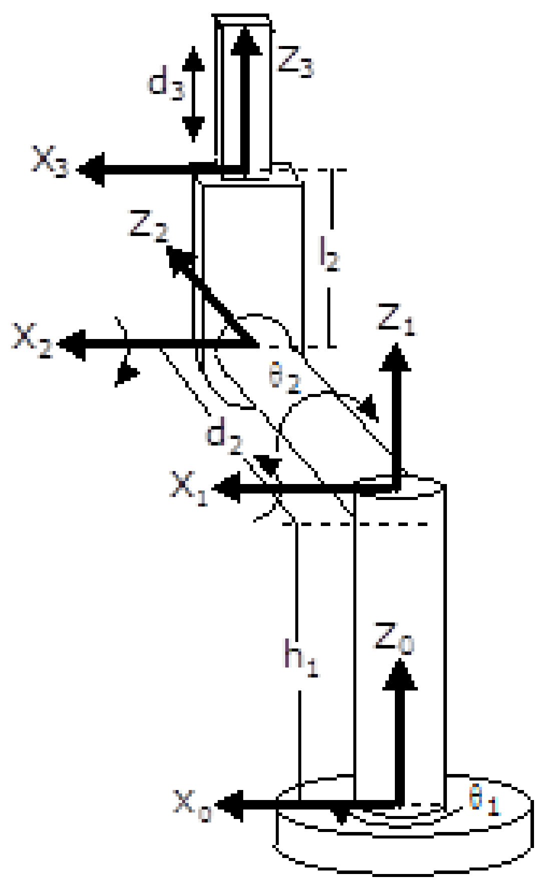


ÇÖZÜM 3.1

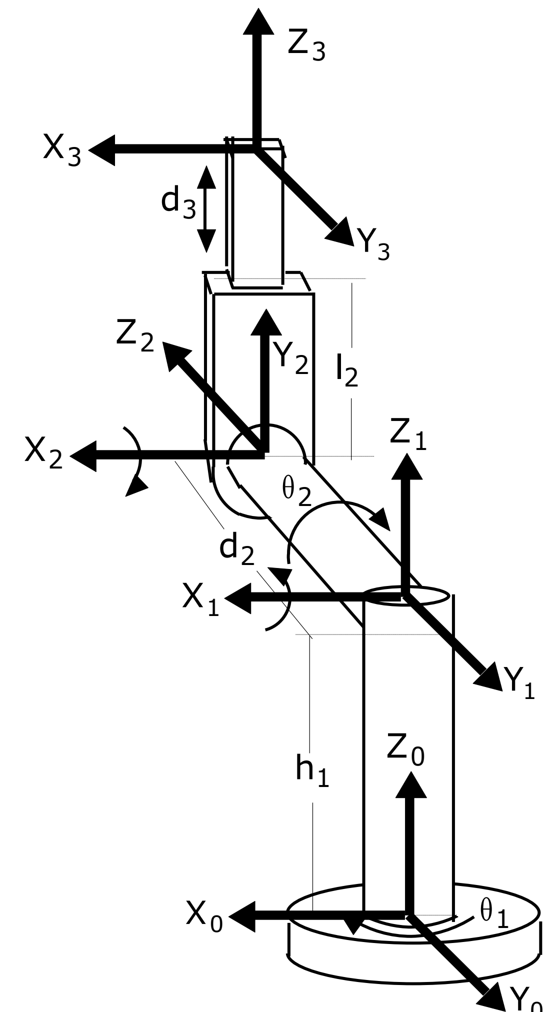
Şekildeki robot iki dönel bir de prizmatik eklemden oluşmaktadır. Bilindiği gibi prizmatik eklemlerde kayma, dönel eklemlerde dönme yönü Z ekseni olarak belirlenir. Buna göre şekildeki robotun her bir ekleminin Z ekseni aşağıdaki gibi belirlenir.



$\hat{Z}_0$ ile $\hat{Z}_1$ ekseni aynı yönlü olduğundan $\hat{X}_0$ ile $\hat{X}_1$ ekseni de aynı yönlü olur. $\hat{Z}_{0,1}$ eksenine $\hat{X}_{0,1}$ eksenini öyle yerleştirelim ki, $\hat{X}_{0,1}$ ekseni döndürüldüğünde $\hat{Z}_{0,1}$ ve $\hat{Z}_2$ eksenleri üst üste çakışsın.



Son olarak, sağ el kuralına göre RRP robotunun eklemlerine Y ekseni, aşağıdaki görüldüğü gibi yerleştirilir.



b) **1.** $\boldsymbol{\alpha_{i-1}}$: Şekildeki $\hat{Z}_0$ ile $\hat{Z}_1$ eksenlerinin dönme yönleri aynıdır.

$$i = 1 \; için \;\; \alpha_{i-1} = \alpha_{1-1} = \alpha_0 = 0^\circ \qquad (0 \;\; ile \;\; 1 \;\; arası)$$

$\hat{Z}_1$ ile $\hat{Z}_2$ eksenlerinin dönme yönleri arasında 90 derece vardır.

$$i = 2 \; için \;\; \alpha_{i-1} = \alpha_{2-1} = \alpha_1 = 90^\circ \qquad (1 \;\; ile \;\; 2 \;\; arası)$$

$\hat{Z}_2$ ile $\hat{Z}_3$ eksenlerinin dönme yönleri arasında -90 derece vardır.

$$i = 3 \; için \;\; \alpha_{i-1} = \alpha_{3-1} = \alpha_2 = -90^\circ \qquad (2 \;\; ile \;\; 3 \;\; arası)$$

2. $\mathbf{a_{i-1}}$: 0 ile 1. eklemler üst üste olduğundan bu iki eklem arasında yani $\hat{Z}_0$ ile $\hat{Z}_1$ arasında $\hat{X}_0$ boyunca herhangi bir bağ uzunluğu yoktur.

$$i = 1 \; için \;\; a_{i-1} = a_{1-1} = a_0 = 0 \qquad (\hat{Z}_0 \;\; ile \;\; \hat{Z}_1 \;\; arası)$$

$\hat{Z}_1$ ile $\hat{Z}_2$ arasında $\hat{X}_1$ boyunca herhangi bir uzunluk yoktur.

$$i = 2 \; için \;\; a_{i-1} = a_{2-1} = a_1 = 0 \qquad (\hat{Z}_1 \;\; ile \;\; \hat{Z}_2 \;\; arası)$$

$\hat{Z}_2$ ile $\hat{Z}_3$ arasında $\hat{X}_2$ boyunca herhangi bir uzunluk yoktur.

$$i = 3 \; için \;\; a_{i-1} = a_{3-1} = a_2 = 0 \qquad (\hat{Z}_2 \;\; ile \;\; \hat{Z}_3 \;\; arası)$$

3. $\mathbf{d_i}$: $\hat{X}_0$ ile $\hat{X}_1$ arasında boyunca h_1 uzunluğu vardır.

$$i = 1 \; için \;\; d_i = d_1 = h_1 \qquad (\hat{X}_0 \;\; ile \;\; \hat{X}_1 \;\; arası)$$

$\hat{X}_1$ ile $\hat{X}_2$ arasında boyunca d_2 uzunluğu vardır.

$$i = 2 \; için \;\; d_i = d_2 \qquad (\hat{X}_1 \;\; ile \;\; \hat{X}_2 \;\; arası)$$

$\hat{X}_2$ ile $\hat{X}_3$ arasında I_2+ d_3 boyunca uzunluğu vardır.

$$i = 3 \; için \;\; d_i = l_2 + d_3 \qquad (\hat{X}_2 \;\; ile \;\; \hat{X}_3 \;\; arası)$$

4. $\boldsymbol{\theta_i}$ veya $\boldsymbol{d_i}$:

İlk iki eklem dönel olduğundan,

$$i = 1 \; için \; \theta_i = \theta_1 \quad ve \quad i = 2 \; için \; \theta_i = \theta_2$$

son eklem prizmatik olduğundan i=3 için $d_{\mathrm{İ}} = d_3$'tür.

DH Tablosu

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	h_1	θ_1	θ_1
2	90	0	d_2	θ_2	θ_2
3	-90	0	$l_2 + d_3$	0	d_3

c) Her bir eklem için dönüşüm matrisini yazalım. 1. Eklem için (i=1),

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 c(0) & c\theta_1 c(0) & -s(0) & 0 \\ s\theta_1 s(0) & c\theta_1 s(0) & c(0) & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 c(90) & c\theta_2 c(90) & -s(90) & -s(90)d_2 \\ s\theta_2 s(90) & c\theta_2 s(90) & c(90) & c(90)d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c(0) & -s(0) & 0 & 0 \\ s(0)c(-90) & c(0)c(-90) & -s(-90) & -s(-90)(l_2 + d_3) \\ s(0)s(-90) & c(0)s(-90) & c(-90) & c(-90)(l_2 + d_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (l_2 + d_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

d) Elde edilen üç dönüşüm matrisinin çarpılmasıyla ana çerçeveden araç çerçeveye doğru ${}^{0}_{3}T$ ileri yönlü robot kinematiği aşağıdaki gibi çıkarılır.

$$
{}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (l_2 + d_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_2 & -(l_2 + d_3)(c\theta_1 s\theta_2) + d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_2 & -(l_2 + d_3)(s\theta_1 s\theta_2) - d_2 c\theta_1 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & (l_2 + d_3) c\theta_2 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

e) Elde edilen ${}^0_3T$ ileri kinematik denklemin doğru olup olmadığını tespit etmek için ${}^0_3T$ dönüşüm matrisinde konum vektörünü yazalım.

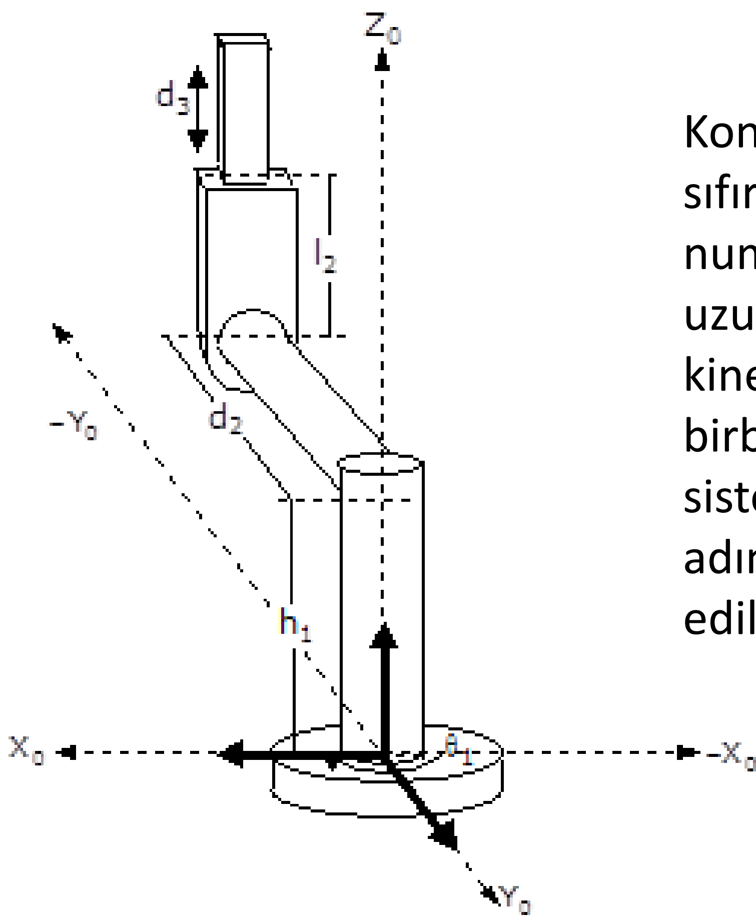
$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_2 + d_3)(c\theta_1 s\theta_2) + d_2 s\theta_1 \\ -(l_2 + d_3)(s\theta_1 s\theta_2) - d_2 c\theta_1 \\ (l_2 + d_3)c\theta_2 + h_1 \end{bmatrix}$$

Bu vektörde bütün açılara 0 derece vererek robotun sıfır konumunu elde edelim.

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_2 + d_3)c(0)s(0) + d_2 s(0) \\ -(l_2 + d_3)s(0)s(0) - d_2 c(0) \\ (l_2 + d_3)c(0) + h_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 \\ l_2 + d_3 + h_1 \end{bmatrix}$$

Denklemde görüldüğü gibi bu robot sıfır konumundayken p_x ekseninde herhangi bir uzunluğa sahip olmazken p_y ekseninde $-d_2$ ve p_z ekseninde ise I_2+ d_3+ h_1 uzunluğuna sahiptir.

Şekilde görüldüğü gibi p_y eksenindeki d_2 uzunluğunun $-d_2$ alınması sıfır numaralı eksene yerleştirilen koordinat sisteminin y ekseniyle, robotun y eksenindeki d_2 uzunluğunun ters yönde olmasından kaynaklanmaktadır. Şekilde X_0, Y_0, Z_0 eksenlerinde robotun bağ uzunluklarını tespit edelim. X_0 ekseninde robotun herhangi bir uzunluğu bulunmamaktadır. Y_0 ekseninde $-d_2$ ve Z_0 ekseninde ise I_2 +d_3 +h_1 uzunlukları bulunmaktadır.



Konum vektörüne 0 derece vererek robotun sıfır konumunda elde edilen denklemle sıfır numaralı koordinat sistemine göre elde edilen uzunluklar aynı çıktığından bu robotun ileri yön kinematiği doğrudur. Eğer bu iki sonuç bir birbirini tutmasaydı, özellikle koordinat sistemlerinin yerleştirilmesinden itibaren bütün adımların ve matris çarpımlarının kontrol edilmesi gerekecekti.

ÖRNEK 3.2

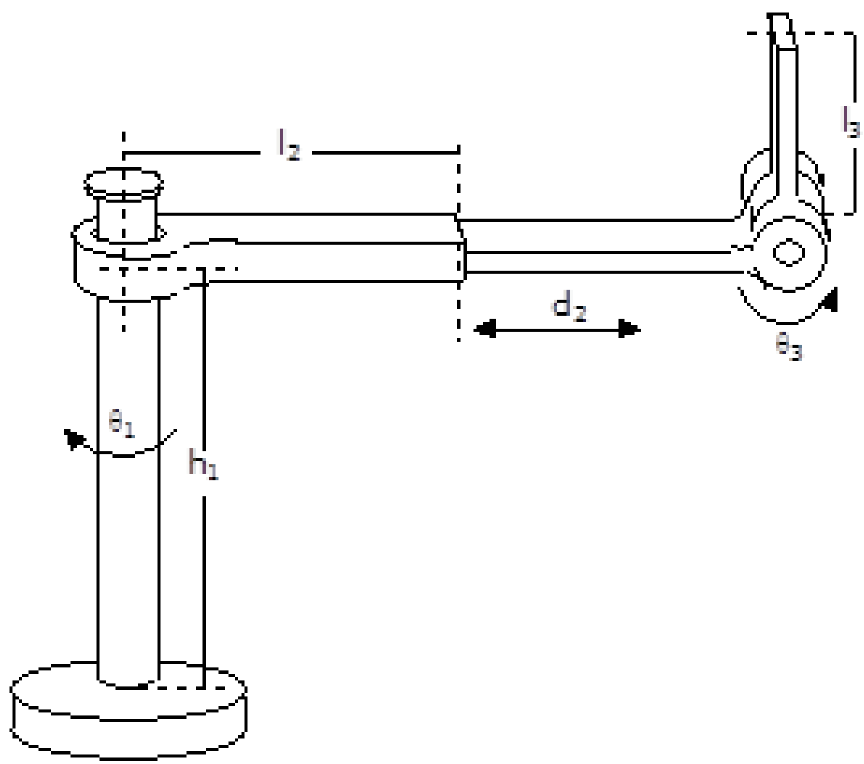
Şekilde bir RPR robotunun katı gövde yapısı veriliyor. Buna göre

a. Her bir ekleme koordinat sistemi yerleştiriniz.

b. D-H değişkenlerini bulunuz.

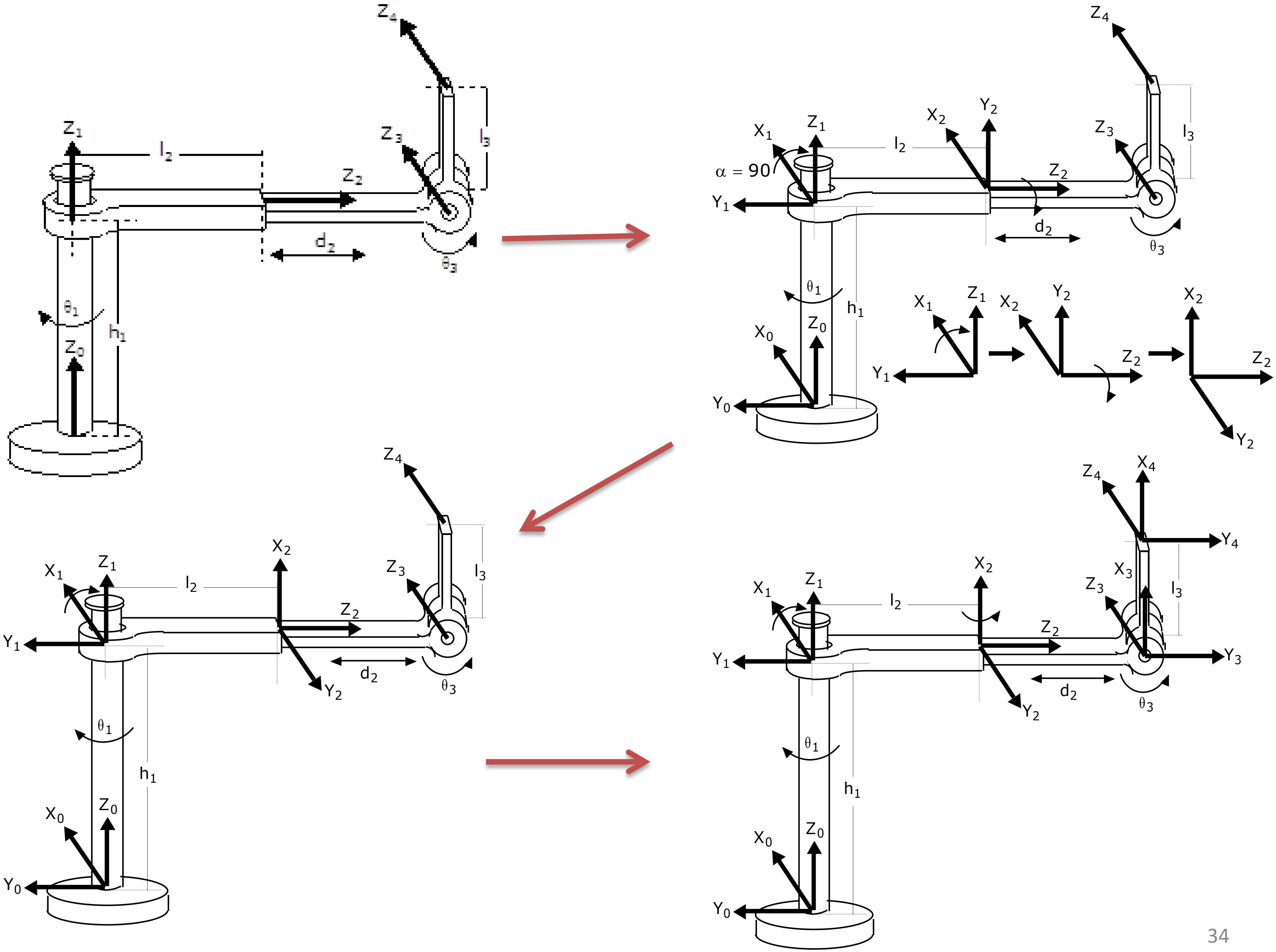
c. Her bir eklemin dönüşüm matrisini bulunuz.

d. Ana çerçeve ile uç işlevcisi arasındaki ileri kinematiği bulunuz.



ÇÖZÜM 3.2

a) Robotun eklemlerinin dönme ve kayma yönündeki Z eksenine yerleştirilen vektörler aşağıdaki şekilde görülmektedir. Daha öncede belirtildiği gibi $\hat{Z}_0$ ile $\hat{Z}_1$ ekseni aynı yönlü olduğundan $\hat{X}_0$ ile $\hat{X}_1$ ekseni de aynı yönlü olur. Bu robotun eklem yapısı Örnek 3.1'deki robottan farklı olduğundan eksen yerleştirilmesini her adımı çizerek gerçekleştirelim. Öncelikle $\hat{Z}_{0,1}$ ve $\hat{Z}_2$ eksenleri üst üste çakışacak şekilde $\hat{X}_{0,1}$ eksenini $\hat{Z}_{0,1}$ eksenine yerleştirip $\propto_1 = 90°$ döndürelim. Bu durumda $\hat{Z}_{0,1}$ ve $\hat{Z}_2$ eksenleri üst üste çakışır fakat $\hat{X}_2$ eksenini döndürerek $\hat{Z}_2$ ile $\hat{Z}_3$ eksenini üst üste getirmek mümkün olmaz. Bunun için ikinci ekleme yerleştirilen koordinat sisteminin ekseninde 90 derece döndürülmesi gerekmektedir. Bu durum D-H tablosunda $\theta_2 = 90°$ şeklinde gösterilir. Üçüncü ekleme ve uç işlevcisiyle birlikte bütün eklemlere yerleştirilen koordinat sistemleri de aşağıdaki şekillerde görülmektedir.



Z4
Z3
l3
Z1
l2
Z2
d2
θ3
θ1
h1
Z0
α = 90
X1
Y1
X2
Y2
Y3
X3
X4
Y4
X0
Y0

Bu robotta $\hat{X}_2$ eksenini döndürerek $\hat{Z}_2$ ile $\hat{Z}_3$ eksenlerini üst üste getirmek için $\propto_1 = 90$ ve $\theta_2 = 90$ derece döndürülmüştür. $\propto_1 = 90$ dönme işlemi $\hat{X}_1$'de gerçekleştirilmesine rağmen bilindiği gibi bu dönme D-H tablosunda 2. satıra yazılır.

b) D-H tablosu

i	$\propto_{i-1}$	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	h_1	θ_1	θ_1
2	90	0	$d_2 + I_2$	90	d_2
3	-90	0	0	θ_3	θ_3
4	0	I_3	0	0	0

c) Tablodaki D-H değişkenlerini kullanarak robota ait dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

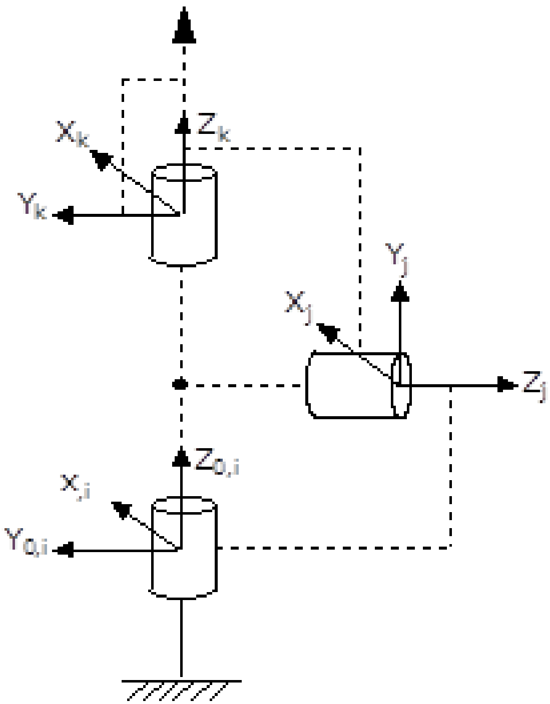
$$
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -(l_2 + d_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

d) Ana çerçeve ile uç işlevci arasındaki robotun ileri yön kinematiği denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$
{}^{0}_{4}T = \begin{bmatrix} -s\theta_1 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 & -c\theta_1 & -l_3(s\theta_1 s\theta_3) + (l_2 + d_2)s\theta_1 \\ c\theta_1 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_3 & -s\theta_1 & l_3(c\theta_1 s\theta_3) - (l_2 + d_2)c\theta_1 \\ c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3 c\theta_3 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3.3. Endüstriyel Robotlarda Kullanılan Bilek Düzenleşimleri

Endüstriyel robotlarda Euler ve eklem kaçıklılıklı bilek olmak üzere genel olarak iki farklı bilek düzenleşimi kullanılmaktadır. Euler bilekli düzenleşimde üç eksen, bir noktada kesişirken eklem kaçıklılıklı bilek düzenleşiminde eksenlerin kesişmeleri d eklem kayması ve a bağ uzunluğu konularak engellenir. Şekilde Euler bileğinin düzenleşimi görülmektedir. Diğer şekilde ise Euler bileğinin D-H değişkenleri vardır.



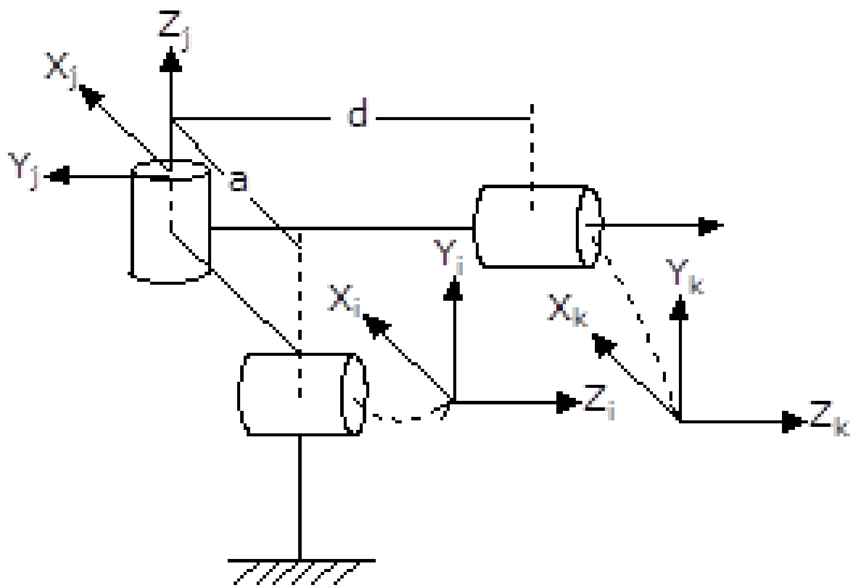
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	0	θ_i	θ_i
2	90	0	0	θ_j	θ_j
3	-90	0	0	θ_k	θ_k

D-H değişkenlerden yararlanarak Euler bileğinin ileri yön kinematik matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$
{}^{0}_{k}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_j & c\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_k & -c\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_i c\theta_j c\theta_k - s\theta_i s\theta_k & -c\theta_i c\theta_j s\theta_k - s\theta_i c\theta_k & -c\theta_i s\theta_j & 0 \\ s\theta_i c\theta_j c\theta_k + c\theta_i s\theta_k & -s\theta_i c\theta_j s\theta_k + c\theta_i c\theta_k & -s\theta_i s\theta_j & 0 \\ s\theta_j c\theta_k & -s\theta_j s\theta_k & c\theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Şekilde eklem kaçıklılıklı bileğin düzenleşimi görülmektedir. Aşağıda da eklem kaçıklılıklı bileğin D-H değişkenleri vardır.



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	0	θ_i	θ_i
2	90	a	0	θ_j	θ_j
3	-90	0	d	θ_k	θ_k

D-H değişkenlerden yararlanarak eklem kaçıklılıklı bileğin ileri yön kinematik matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$
{}^{0}_{k}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_j & c\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ -s\theta_k & -c\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_i c\theta_j c\theta_k - s\theta_i s\theta_k & -c\theta_i c\theta_j s\theta_k - s\theta_i c\theta_k & -c\theta_i s\theta_j & -d(c\theta_i s\theta_j) + a(c\theta_i) \\ s\theta_i c\theta_j c\theta_k + c\theta_i s\theta_k & -s\theta_i c\theta_j s\theta_k + c\theta_i c\theta_k & -s\theta_i s\theta_j & -d(s\theta_i s\theta_j) + a(s\theta_i) \\ s\theta_j c\theta_k & -s\theta_j s\theta_k & c\theta_j & d(c\theta_j) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3.4. Altı Serbestlik Derecesine Sahip Robotların İleri Yön Kinematiği

Endüstriyel robotlara Euler veya eklem kaçıklılıklı bilek eklenerek 6 serbestlik derecesine sahip robotlar elde edilir. Euler bilekli robotların endüstride yaygın olarak kullanılmasına rağmen bazı endüstriyel uygulamalarda robotların daha ağır yüklerin kaldırması veya daha uzak noktalara ulaşması istenir. Euler bilekli robotlar bu tür görevlerin gerçekleştirilmesinde yetirince başarılı olamadığından bu tür işlemlerde eklem kaçıklılıklı bilekli robotlar kullanılır. Örneğin, Panasonic VR-004GII, Kawasaki EE10, ABB IRB 2400, Kuka IR662, and Fanuc P145 gibi eklem kaçıklılıklı bilekli robotlar genellikle kaynak, boyama, metal kesme, ağır yük kaldırma ve tıpta kullanılırlar.

ÖRNEK 3.3

Şekilde altı serbestlik derecesine sahip Euler bilekli bir 6R robotun (PUMA) katı gövde yapısı veriliyor. Buna göre;

ÖRNEK 3.3

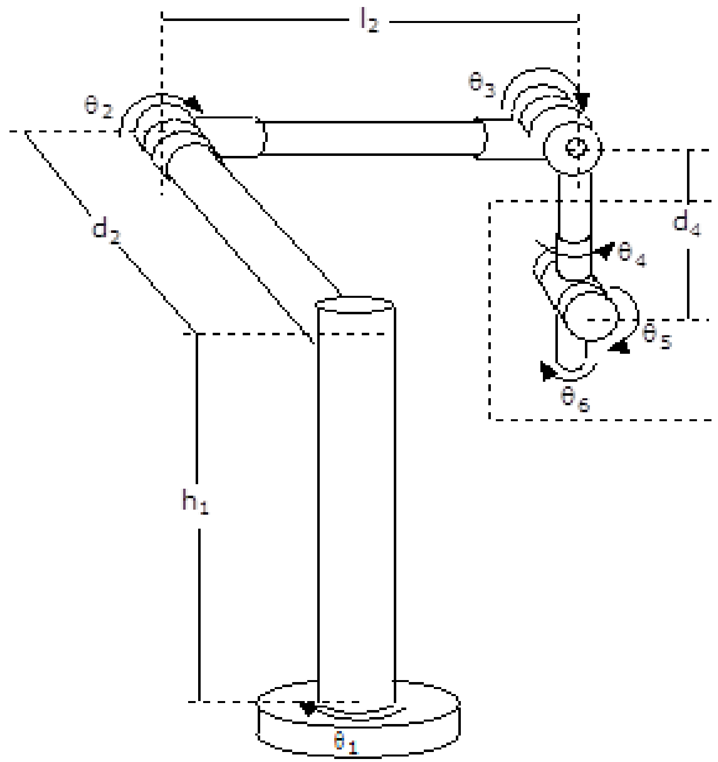
Şekilde altı serbestlik derecesine sahip Euler bilekli bir 6R robotun (PUMA) katı gövde yapısı veriliyor. Buna göre;

a. Her bir ekleme koordinat sistemi yerleştiriniz.

b. DH değişkenlerini bulunuz.

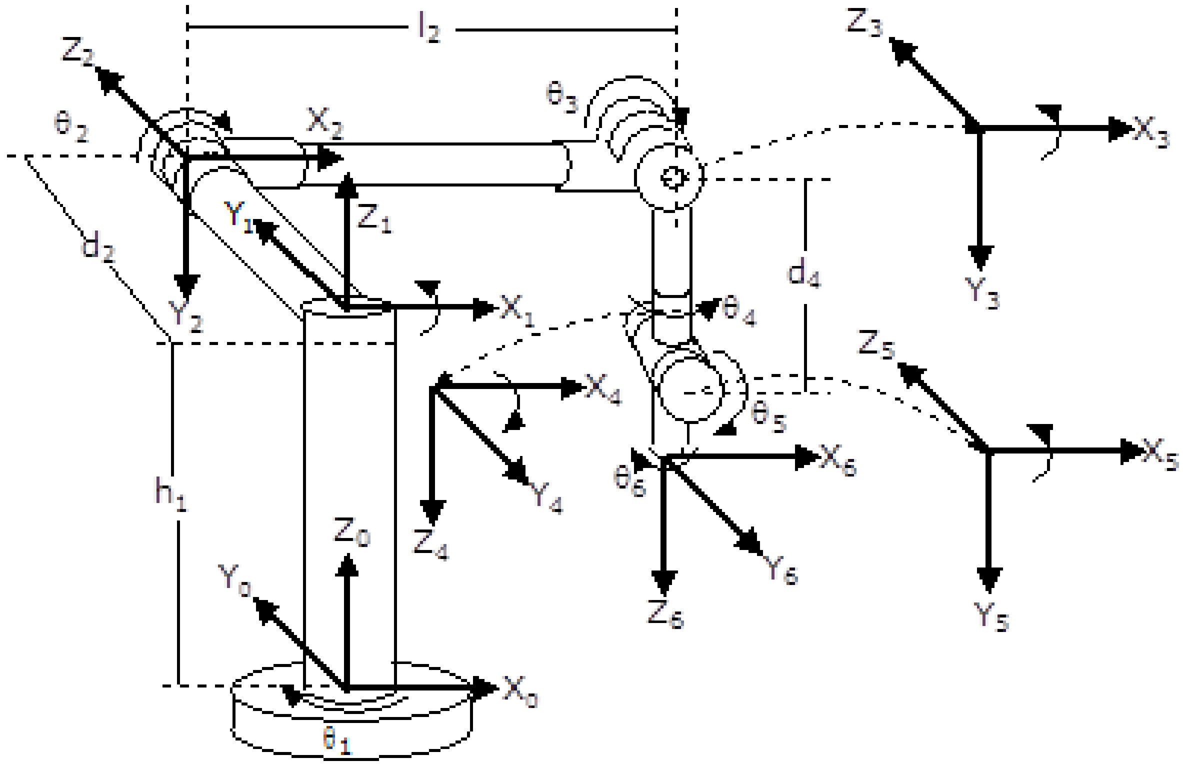
c. Her bir eklemin dönüşüm matrisini bulunuz.

d. Ana çerçeve ile uç işlevcisi arasındaki ileri kinematiği bulunuz.



ÇÖZÜM 3.3

a) Robotun eklemlerine yerleştirilen koordinat sistemleri şekilde görülmektedir.



b) Şekildeki robotun D-H değişkenleri aşağıdaki tablodaki gibi çıkarılır. Örneğin herhangi bir koordinat sistemi, X ekseninde saat yönünde 90 derece döndürülsün.

b) Robotun DH değişkenleri aşağıdaki tablodaki gibi çıkarılır. Herhangi bir koordinat sistemi, X ekseninde saat yönünde 90 derece döndürülsün. Eğer saat yönünde gerçekleştirilen bu dönme α=+90 olarak kabul ediliyorsa saate ters yönde gerçekleştirilen 90 derece dönme α=-90 olarak kabul edilir. Eksen döndürme gerçekleştirilirken saat yönü her zaman (+) tersi ise (-) olacak diye bir kural yoktur. Bunun tam tersi de seçilebilir. Eğer bir yön (+) olarak seçilmişse, tersi (-) olarak seçilmelidir.

i	$\propto_{i-1}$	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	h_1	θ_1	θ_1
2	-90	0	d_2	θ_2	θ_2
3	0	I_2	0	θ_3	θ_3
4	-90	0	d_4	θ_4	θ_4
5	90	0	0	θ_5	θ_5
6	-90	0	0	θ_6	θ_6

c) DH değişkenlerini kullanarak şekildeki robota ait dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -\sin\theta_4 & -\cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

d) Robotun ileri yön kinematiği aşağıdaki gibi bulunur.

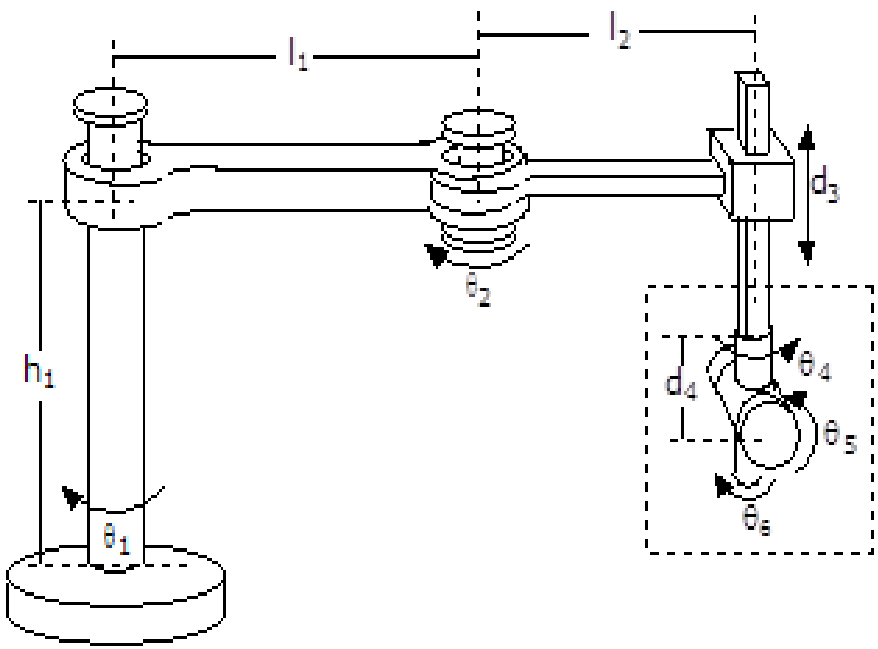
$$
{}_6^0T = \begin{bmatrix}
((c\theta_1 c\theta_{23} c\theta_4 + s\theta_1 s\theta_4)c\theta_5 - c\theta_1 s\theta_{23} s\theta_5)c\theta_6 + (c\theta_1 c\theta_{23} s\theta_4 - s\theta_1 c\theta_4)s\theta_6 \\
((s\theta_1 c\theta_{23} c\theta_4 - c\theta_1 s\theta_4)c\theta_5 - s\theta_1 s\theta_{23} s\theta_5)c\theta_6 + (s\theta_1 c\theta_{23} s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4)s\theta_6 \\
-(s\theta_{23} c\theta_4 c\theta_5 + c\theta_{23} s\theta_5)c\theta_6 - s\theta_{23} s\theta_4 s\theta_6 \\
0
\end{matrix} \cdots
$$

$$
\cdot \begin{matrix}
-((c\theta_1 c\theta_{23} c\theta_4 + s\theta_1 s\theta_4)c\theta_5 - c\theta_1 s\theta_{23} s\theta_5)s\theta_6 + (c\theta_1 c\theta_{23} s\theta_4 - s\theta_1 c\theta_4)c\theta_6 \\
-((s\theta_1 c\theta_{23} c\theta_4 - c\theta_1 s\theta_4)c\theta_5 - s\theta_1 s\theta_{23} s\theta_5)s\theta_6 + (s\theta_1 c\theta_{23} s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4)c\theta_6 \\
(s\theta_{23} c\theta_4 c\theta_5 + c\theta_{23} s\theta_5)s\theta_6 + s\theta_{23} s\theta_4 c\theta_6 \\
0
\end{matrix} \cdot\cdot
$$

$$
\cdot\cdot \begin{matrix}
-(c\theta_1 c\theta_{23} c\theta_4 + s\theta_1 s\theta_4)s\theta_5 - c\theta_1 s\theta_{23} c\theta_5 & -d_4 c\theta_1 s\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\
-(s\theta_1 c\theta_{23} c\theta_4 - c\theta_1 s\theta_4)s\theta_5 - s\theta_1 s\theta_{23} c\theta_5 & -d_4 s\theta_1 s\theta_{23} + l_2 s\theta_1 c\theta_2 + d_2 c\theta_1 \\
s\theta_{23} c\theta_4 s\theta_5 - c\theta_{23} c\theta_5 & -d_4 c\theta_{23} - l_2 s\theta_2 + h_1 \\
0 & 1
\end{bmatrix}
$$

ÖRNEK 3.4

Şekilde altı serbestlik derecesine sahip Euler bilekli bir 5R1P eklem yapısına sahip bir robotun (SCARA) katı gövde yapısı veriliyor. Buna göre,



a. Her bir ekleme koordinat sistemi yerleştiriniz.

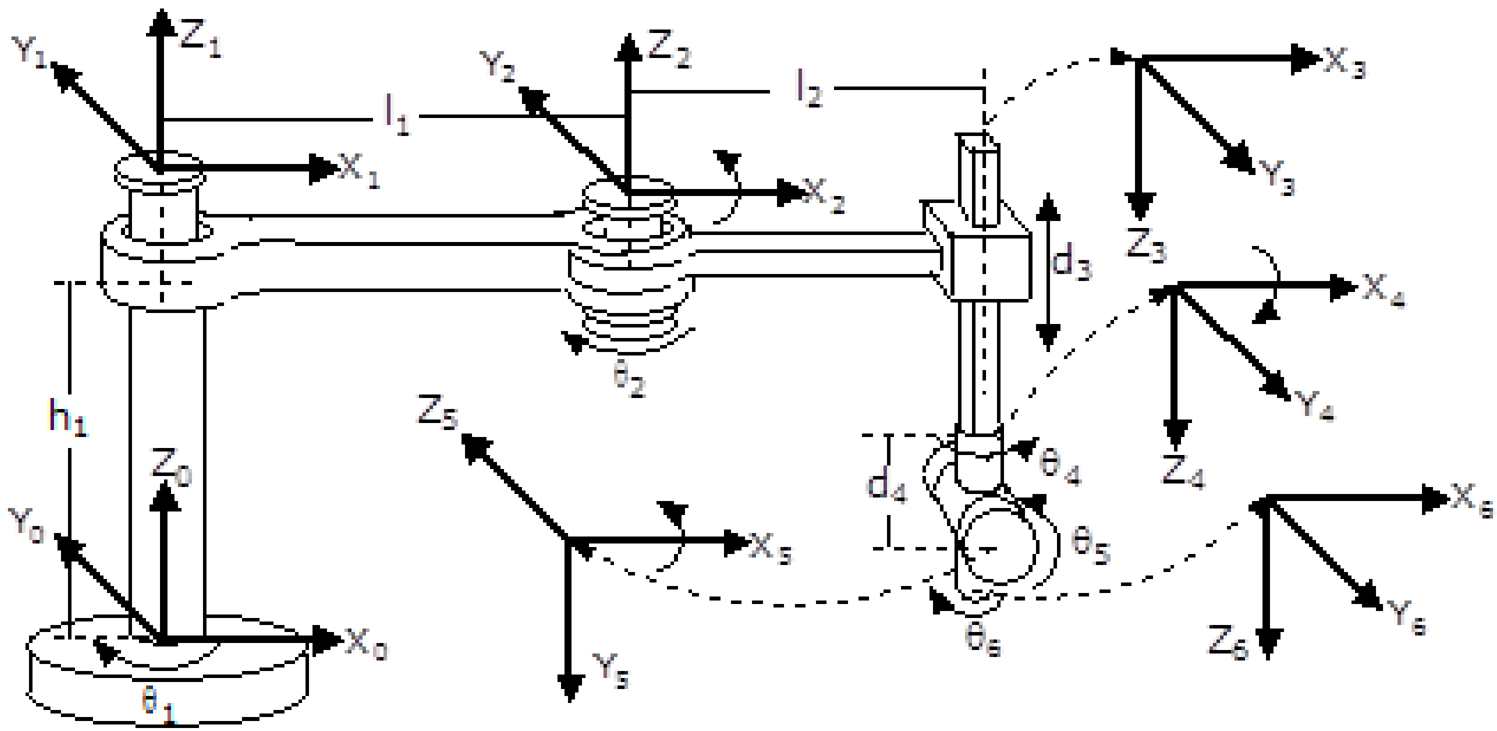
b. D-H değişkenlerini bulunuz.

c. Her bir eklemin dönüşüm matrisini bulunuz.

d. Ana çerçeve ile uç işlevcisi arasındaki ileri kinematiği bulunuz.

ÇÖZÜM 3.4

a) Robotun eklemlerine yerleştirilen koordinat sistemleri şekilde görülmektedir.



b) Robotun DH değişkenleri aşağıdaki gibi çıkarılır.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	h_1	θ_1	θ_1
2	0	l_1	0	θ_2	θ_2
3	180	l_2	d_3	0	d_3
4	0	0	d_4	θ_4	θ_4
5	-90	0	0	θ_5	θ_5
6	90	0	0	θ_6	θ_6

c) DH değişkenlerini kullanarak robotun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}_1^0T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}_2^1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

c) DH değişkenlerini kullanarak robotun dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

d) Robotun ileri yön kinematiği aşağıdaki gibi bulunur.

$$
{}_6^0T = \begin{bmatrix}
(c\theta_{12}c\theta_4 + s\theta_{12}s\theta_4)c\theta_5c\theta_6 - (c\theta_{12}s\theta_4 - s\theta_{12}s\theta_4)s\theta_6 \\
(s\theta_{12}c\theta_4 - c\theta_{12}s\theta_4)c\theta_5c\theta_6 - (s\theta_{12}s\theta_4 + c\theta_{12}s\theta_4)s\theta_6 \\
s\theta_5c\theta_6 \\
0
\end{bmatrix.}
\ldots
$$

$$
\begin{matrix}
-(c\theta_{12}c\theta_4 + s\theta_{12}s\theta_4)c\theta_5s\theta_6 - (c\theta_{12}s\theta_4 - s\theta_{12}s\theta_4)c\theta_6 \\
-(s\theta_{12}c\theta_4 - c\theta_{12}s\theta_4)c\theta_5s\theta_6 - (s\theta_{12}s\theta_4 + c\theta_{12}s\theta_4)c\theta_6 \\
-s\theta_5s\theta_6 \\
0
\end{matrix}
\ldots
$$

$$
\begin{matrix}
-(c\theta_{12}c\theta_4 + s\theta_{12}s\theta_4)s\theta_5 & l_2c\theta_{12} + l_1c\theta_1 \\
-(s\theta_{12}c\theta_4 - c\theta_{12}s\theta_4)s\theta_5 & l_2s\theta_{12} + l_1s\theta_1 \\
-c\theta_5 & h_1 - d_3 - d_4 \\
0 & 1
\end{matrix}\Bigg]
$$

ÖRNEK 3.5

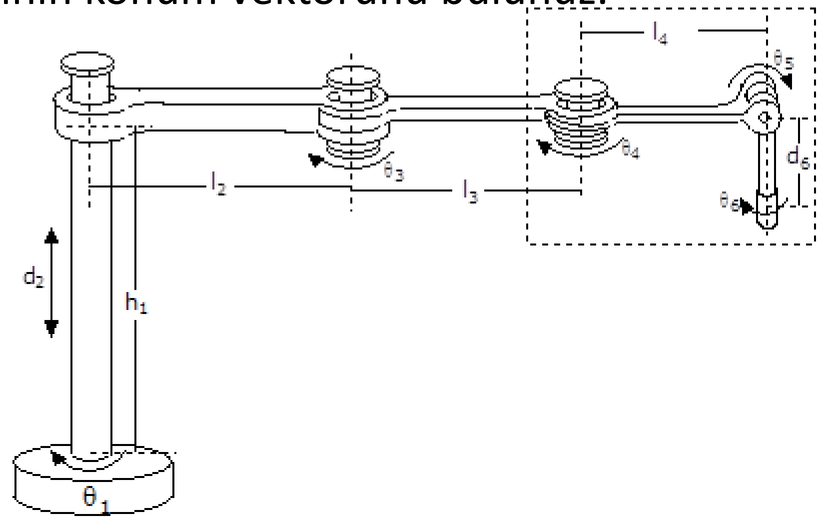
Şekilde altı serbestlik derecesine sahip Eklem kaçıklılıklı bilekli 5R1P (RPRRRR) eklem yapısına sahip bir robotun katı gövde yapısı veriliyor. Buna göre,

a. Her bir ekleme koordinat sistemi yerleştiriniz.

b. D-H değişkenlerini bulunuz.

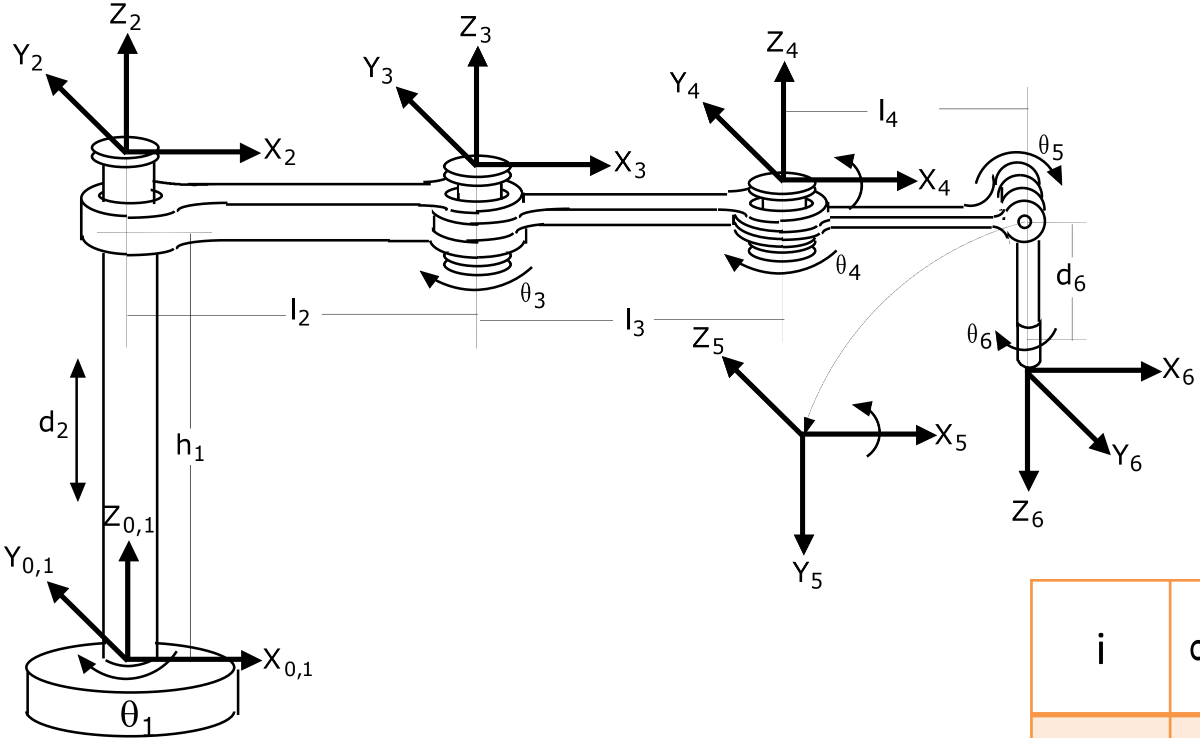
c. Her bir eklemin dönüşüm matrisini bulunuz.

d. Dönüşüm matrisinin konum vektörünü bulunuz.



ÇÖZÜM 3.5

a)Robotun eklemlerine yerleştirilen koordinat sistemleri şekilde görülmektedir.



b) DH Tablosu

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	0	θ_1	θ_1
2	0	0	d_2	0	d_2
3	0	l_2	0	θ_3	θ_3
4	0	l_3	0	θ_4	θ_4
5	90	l_4	0	θ_5	θ_5
6	90	0	d_6	θ_6	θ_6

c) Şekildeki robota ait dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

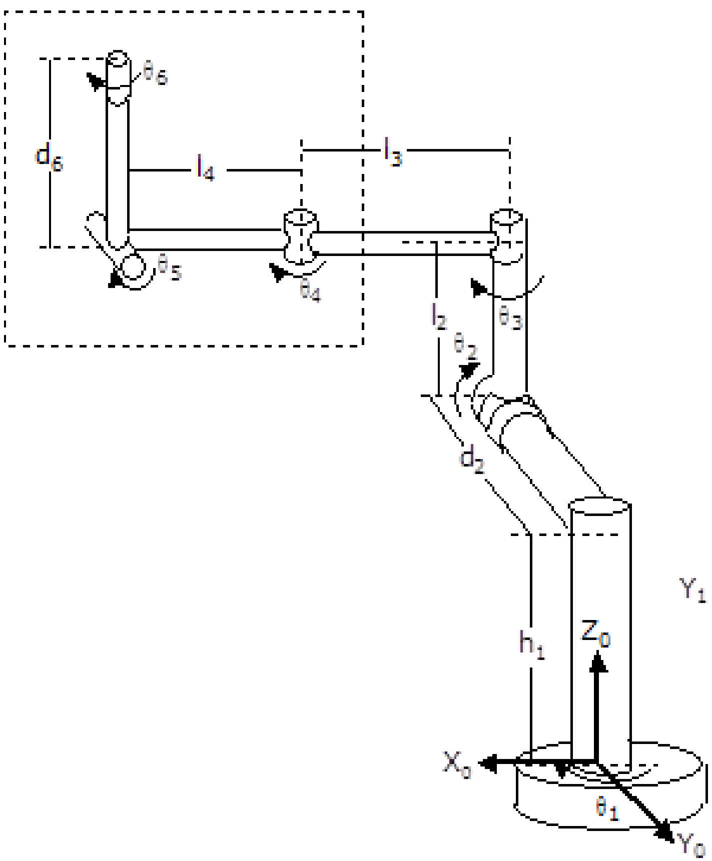
d) ${}^0_6T$ Dönüşüm matrisinin konum vektörü aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^0_6T = \begin{bmatrix} d_6(c\theta_{13}c\theta_4 - s\theta_{13}s\theta_4)s\theta_5 + l_4(c\theta_{13}c\theta_4 - s\theta_{13}s\theta_4) + l_3c\theta_{13} + l_2c\theta_1 \\ d_6(s\theta_{13}c\theta_4 + c\theta_{13}s\theta_4)s\theta_5 + l_4(s\theta_{13}c\theta_4 + c\theta_{13}s\theta_4) + l_3s\theta_{13} + l_2s\theta_1 \\ -d_6c\theta_5 + d_2 \\ 1 \end{bmatrix} $$

ÖRNEK 3.6

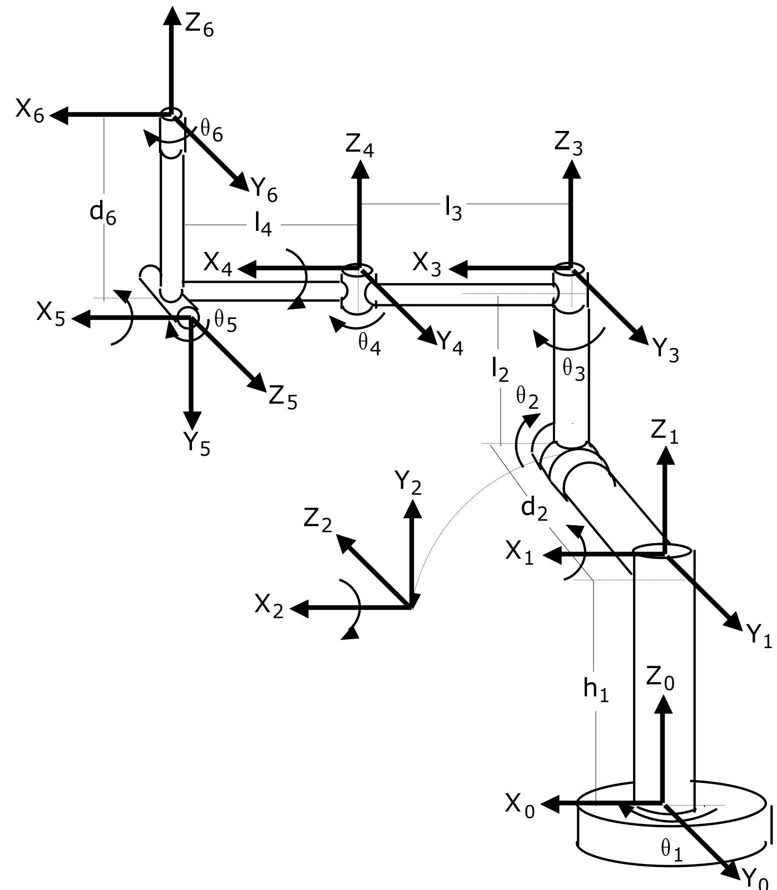
Şekilde eklem kaçıklılıklı bilekli 6R eklem yapısına sahip bir robot veriliyor. Buna göre,

a) Her bir ekleme koordinat sistemi yerleştiriniz.
b) DH değişkenlerini bulunuz.
c) Her bir eklemin dönüşüm matrisini bulunuz.
d) Robotun konum vektörünü bulunuz.



ÇÖZÜM 3.6

a) Robotun eklemlerine yerleştirilen koordinat sistemleri aşağıdaki şekilde görülmektedir.



b) DH tablosu

i	$\propto_{i-1}$	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	h_1	θ_1	θ_1
2	90	0	d_2	θ_2	θ_2
3	-90	0	I_2	θ_3	θ_3
4	0	I_3	0	θ_4	θ_4
5	-90	I_4	0	θ_5	θ_5
6	90	0	d_6	θ_6	θ_6

c) Tablodaki D-H parametrelerini kullanarak robota ait dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

d) Robotun konum vektörünü: ${}^{0}_{6}T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$

Denklemde,

$$
\begin{aligned}
p_x = &-(-((c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3)c\theta_4 - (c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3)s\theta_4)s\theta_5 + c\theta_1 s\theta_2 c\theta_5)d_6 \\
&+ ((c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3)c\theta_4 - (c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3)s\theta_4)l_4 \\
&+ (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3)l_3 - c\theta_1 s\theta_2 l_2 + s\theta_1 d_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_y = &-(-((s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3)c\theta_4 - (s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_3)s\theta_4)s\theta_5 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_5)d_6 \\
&+ ((s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3)c\theta_4 - (s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_3)s\theta_4)l_4 \\
&+ (s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3)l_3 - s\theta_1 s\theta_2 l_2 - c\theta_1 d_2
\end{aligned}
$$

$$
p_z = -(-(s\theta_2 c\theta_{34})s\theta_5 - c\theta_2 c\theta_5)d_6 + (s\theta_2 c\theta_{34})l_4 + s\theta_2 c\theta_3 l_3 + c\theta_2 l_2 + h_1
$$