Национальный исследовательский Университет ИТМО
Мегафакультет информационных и трансляционных технологий
Факультет инфокоммуникационных технологий

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Билеты к экзамену. СЕМЕСТР 2

Работу выполнили:
Бархатова Н.А.
Зенкин Д.Н.
Влазнев Д.В.
Преподаватель:
Танченко Ю.В.

Насчет опечаток и ошибок tg: @barkhatnat

2023

СОДЕРЖАНИЕ

1 Неопределенный интеграл

1.1 Определение первообразной

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Функцию $F(x)$ будем называть первообразной для функции $f(x)$ на указанном промежутке, если для всех значений $x \in [a, b]$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

1.2 Теорема о первообразных + Доказательство

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Тогда, для того чтобы функция $G(x)$ также была первообразной для функции $f(x)$ на том же промежутке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in [a, b]$ разность $G(x) - F(x)$ была постоянной.

Доказательство

Пусть функция $G(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Тогда на этом промежутке имеют место равенства $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = f(x)$, следовательно,

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = 0$$

Производная от константы равна нулю, значит $G(x) - F(x) = const$.

1.3 Определение неопределенного интеграла

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ называется множество всех первообразных этой функции на этом промежутке.

1.4 Свойства с доказательством

Пусть $F(x)' = f(x)$, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

1. $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$

   Доказательство: $(\int f(x)\,dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$

   Доказательство: $\int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, k \neq 0$

   Доказательство: $\int kf(x)\,dx = \int kF'(x)\,dx = \int (kF(x))'\,dx = kF(x) + C = k(F(x) + C) = k\int f(x)\,dx$
4. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

   Доказательство: $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int (F(x) \pm G(x))'\,dx = F(x) \pm G(x) + C = (F(x) + C) \pm (G(x) + C) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

2 Замена переменной. Интегрирование по частям. (Для неопределенного интеграла)

2.1 Замена переменной. Теорема + Доказательство

Пусть $x = \varphi(t)$ - непрерывна и дифференцируема на интервале X, строго монотонна. Если $f(x)$ тоже непрерывна на интервале X, то справедливо равенство:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Доказательство

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,d(\varphi(t))$$

По определению дифференциала: $d(\varphi(t)) = \varphi'(t)\,dt$, следовательно:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

2.2 Интегрирование по частям. Теорема + Доказательство

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и дифференцируемы на рассматриваемом промежутке, тогда

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Доказательство

$$(uv)' = u'v + uv'; d(uv) = vdu + udv$$

$$\int d(uv) = \int (vdu + udv) = \int vdu + \int udv$$

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

3 Интегрирование рациональных дробей.

3.1 Определение.

$R(x)$ называют рациональной функцией, если для вычисления её значения над аргументом x выполняется конечное число операций $(\cdot, /, +, ^-)$. Некоторые рациональные функции имеют дробный вид:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

где $Q_m(x), P_n(x)$ - многочлены степени m и n, соответственно

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_mx^0$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_nx^0$$

Пример: $P_3(x) = x^3 + 1 = x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$

ВАЖНО! Дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называется ПРАВИЛЬНОЙ, если $m < n$ и НЕПРАВИЛЬНОЙ, если $m \geq n$

3.2 Теорема о разложении на элементарные правильные дроби.

Всякая правильная дробь с вещественными коэффициентами может быть представлена в виде суммы простейших дробей, соответствующих разложению на множители знаменателя рациональной дроби.

В правой части находятся простые правильные дроби и само разложение называется разложением правильной дроби на простейшие правильные дроби

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{B_n}{(x-x_2)^n} + \ldots + \frac{D_1}{(x-x_r)} + \frac{D_2}{(x-x_r)^2} + \ldots + \frac{D_n}{(x-x_r)^n} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_1x + q_1)} +$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_nx+N_n}{(x^2+p_1x+q_1)^n}+\frac{S_1x+T_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\ldots+\frac{S_nx+T_n}{(x^2+p_1x+q_1)^n}$$

3.3 1 тип

$$\frac{A}{x-a}$$

Решение методом непосредственного интегрирования: $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\cdot\ln x-a+C$

3.4 2 тип

$$\frac{A}{(x-a)^n}$$

Решение методом непосредственного интегрирования: $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int(x-a)^{-n}\,dx = \frac{A\cdot(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$

3.5 3 тип

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}, D<0$$

◈ 3.1. Шаг 1. Выделим в числителе производную знаменателя

Выделим в числителе дроби производную от знаменателя. Обозначим: $u = x^2 + bx + c$. Дифференцируем: $u' = 2x + b$. Тогда

$$Ax + B = \frac{A}{2}(2x + b) + B - \frac{bA}{2} = \frac{A}{2}u' + B - \frac{bA}{2};$$

$$I = \int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx + \left(B - \frac{bA}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2 + bx + c}.$$

Но

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \int \frac{\frac{du}{dx}\,dx}{u} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln(x^2 + bx + c).$$

Мы опустили знак модуля, поскольку $x^2 + bx + c > 0$.

Тогда:

$$I = \int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}\,dx = \frac{A}{2}\ln(x^2 + bx + c) + \left(B - \frac{bA}{2}\right)I_1,$$

где

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + bx + c}.$$

◈ 3.2. Шаг 2. Вычисляем интеграл с A = 0, B=1

Теперь вычисляем оставшийся интеграл:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + bx + c}.$$

Приводим знаменатель дроби к сумме квадратов:

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2x\,\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + a^2,$$

где $a = \sqrt{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

Мы считаем, что уравнение $x^2 + bx + c = 0$ не имеет корней. Поэтому $c > \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Сделаем подстановку

$$x + \frac{b}{2} = at, \quad dx = a\,dt, \quad t = \frac{2x+b}{2a},$$

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = a^2(t^2+1).$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{2x+b}{2a}.$$

Итак,

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{2x+b}{2a}, \quad a = \sqrt{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Тем самым мы нашли интеграл от дроби третьего типа:

$$I = \int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+bx+c) + \left(B - \frac{bA}{2}\right)I_1 =$$

$$\frac{A}{2}\ln(x^2+bx+c) + \left(B - \frac{bA}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{2x+b}{2a} + C,$$

где $a = \sqrt{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

3.6 4 тип

$$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}, D < 0$$

Вычисляем его в три приема.

4.1) Выделяем в числителе производную знаменателя:

$$I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{A}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B - \frac{bA}{2}\right) I_n .$$

4.2) Вычисляем интеграл

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{2x+b}{2a}, \quad a = \sqrt{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2} .$$

4.3) Вычисляем интегралы

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n},$$

используя формулу приведения:

$$(n-1)(4c-b^2) I_n = 2(2n-3) I_{n-1} + \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^{n-1}} .$$

Далее мы приводим вывод этих формул, и пример вычисления интеграла от элементарной дроби четвертого типа.

◈ 4.1. Шаг 1. Выделение в числителе производной знаменателя

Выделим в числителе производную знаменателя, как мы это делали в разделе 3.1 ⇑. Обозначим $u = x^2 + bx + c$. Дифференцируем: $u' = 2x + b$. Тогда

$$Ax + B = \frac{A}{2}(2x+b) + B - \frac{bA}{2} = \frac{A}{2} u' + B - \frac{bA}{2} .$$

$$I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{u'}{u^n}\,dx + \left(B - \frac{bA}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n} .$$

Но

$$\int \frac{u'}{u^n}\,dx = \int \frac{\frac{du}{dx}\,dx}{u^n} = \int \frac{du}{u^n} = \int u^{-n}\,du = \frac{1}{-n+1}\,u^{-n+1} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{u^{n-1}} .$$

Окончательно имеем:

$$I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{A}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B - \frac{bA}{2}\right) I_n .$$

◈ 4.2. Шаг 2. Вычисление интеграла с n = 1

Вычисляем интеграл

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + bx + c}.$$

Его вычисление изложено в разделе 3.2 ⇑.

◈ 4.3. Шаг 3. Вывод формулы приведения

Теперь рассмотрим интеграл

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n}.$$

Приводим квадратный трехчлен к сумме квадратов:

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2x\,\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + a^2.$$

Здесь $a = \sqrt{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

Делаем подстановку.

$$x+\frac{b}{2}=at, \quad dx=a\,dt, \quad t=\frac{2x+b}{2a}, \quad x^2+bx+c=a^2(t^2+1).$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}=\frac{1}{a^{2n-1}}\int\frac{dt}{(t^2+1)^n}=\frac{1}{a^{2n-1}}\,S_n.$$

Выполняем преобразования и интегрируем по частям.

$$S_n=\int\frac{dt}{(t^2+1)^n}=\int\frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^n}\;dt=\int\frac{t^2+1}{(t^2+1)^n}\;dt-\int(t^2+1)^{-n}\,t^2\,dt=$$

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}\;dt-\frac{1}{2}\int t\,(t^2+1)^{-n}\,d(t^2+1)=$$

$$S_{n-1}-\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{-n+1}\,(t^2+1)^{-n+1}\right)=$$

$$S_{n-1}-\frac{1}{2}\,\frac{t(t^2+1)^{-n+1}}{-n+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)^{-n+1}}{-n+1}\;dt=$$

$$S_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\,S_{n-1}.$$

Умножим на $2(n-1)$:

$$2(n-1)S_n=2(n-1)S_{n-1}-S_{n-1}+\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}}=(2n-3)S_{n-1}+\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

Возвращаемся к x и I_n.

$$S_n=a^{2n-1}I_n, \quad 2at=2x+b, \quad a^2(t^2+1)=x^2+bx+c, \quad 4a^2=4c-b^2,$$

$$2(n-1)S_n=(2n-3)S_{n-1}+a^{2n-3}\,\frac{2at}{2(a^2(t^2+1))^{n-1}};$$

$$2(n-1)a^{2n-1}I_n=(2n-3)a^{2n-3}I_{n-1}+a^{2n-3}\,\frac{2x+b}{2(x^2+bx+c)^{n-1}};$$

$$(n-1)4a^2I_n=(2n-3)2I_{n-1}+\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^{n-1}}.$$

Итак, для I_n мы получили формулу приведения:

$$(n-1)(4c-b^2)I_n=2(2n-3)I_{n-1}+\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^{n-1}}.$$

Последовательно применяя эту формулу, мы сведем интеграл I_n к I_1.

4 Интегрирование тригонометрических функций с помощью различных подстановок.

4.1 Использование тригонометрических формул

Для интегралов вида:

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx; \int \sin(mx)\sin(nx)\,dx; \int \cos(mx)\cos(nx)\,dx; m, n \in \mathbb{N}$$

используются тригонометрические формулы:

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$$

4.2 Основное тригонометрическое тождество

Интерграл вида $\int sin^m x cos^n x dx$, где хотя бы одно из чисел m и n - нечетное целое положительное число. Тогда от нечетной степени отделяем один множитель и заносим под дифференциал, а другую функцию раскладываем по ОТТ: $sin^2 x + cos^2 x = 1$

4.3 Понижение степени подынтегральной функции

Интеграл вида $\int sin^m x cos^n x dx$, где m и n - четные неотрицательные Для понижения степени используются тригонометрические формулы:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

4.4 Метод замены переменной

Пусть R - рациональная функция. Тогда для интегралов вида:

$$R(\sin x)\cos x\,dx; \int R(\cos x)\sin x\,dx$$

Используются замены:

$$\sin x = t \Rightarrow d(\sin x) = dt \Rightarrow \cos x = dt$$

$$\cos x = t \Rightarrow d(\cos x) = dt \Rightarrow -\sin x = dt$$

4.5 Ещё один прикол

Интеграл вида $\int sin^m x cos^n x dx$, где $m + n = -2k, k \in N$ подстановка $tgx = t \to dx = \frac{1}{1+t^2}$

4.6 Тангенс и котангенс

Интеграл вида $\int tg^m x dx; \int ctg^m x dx, m = 2, 3, 4...$ Используем формулы:

$$tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} - 1 = sec^2 x - 1; ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x} - 1 = cosec^2 x - 1$$

4.7 Универсальная тригонометрическая подстановка

Интеграл вида $\int R(sinx, cosx)dx$

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4.8 Дополнительно

Можно написать первые 3 пункта из 5 билета

5 Интегрирование иррациональных функций с помощью замены. Пересчет дифференциалов функций, и почему, и где какая замена идет.

1. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ подстановкой $x = asint$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin t и cos t: $dx = acost\,dt$
2. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx$ подстановкой $x = atgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin t и cos t: $dx = \frac{a}{cos^2 t}\,dt$
3. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$ подстановкой $x = \frac{a}{cost}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin t и cos t: $dx = \frac{asint}{cos^2 t}\,dt$
4. Интеграл вида $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}})$ подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ сводится к интегралу от рациональной дроби: $x = \frac{t^n d - b}{a - t^n c}$; $dx = \frac{nt^{n-1}(da-cb)}{(a-t^n c)^2}$
5. Интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ подстановкой $x + \frac{b}{2a} = t$ приводится к сумме двух интегралов $(dx = dt)$

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = M_1 \int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}} + N_1 \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}$$

6. Интеграл вида $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})$ подстановка $x = t^k$, где k - общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$: $dx = kt^{k-1}dt$

Биноминальный дифференциал: $x^m(a + bx^n)^p dx$ может быть выражен через элементарные функции только если:

- p - целое отрицательное число: $t = \sqrt[k]{x}$, где k - общий знаменатель m и n.
- p - целое положительное число: раскрываем по формуле: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$
- $\frac{m+1}{n}$ - целое число: $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, где s - знаменатель p
- $\frac{m+1}{n} + p$ - целое число: $t = \sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где s - знаменатель p

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$

- если a>0, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$
- если a<0 и c>0, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm x\sqrt{c}$

- если a<0, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

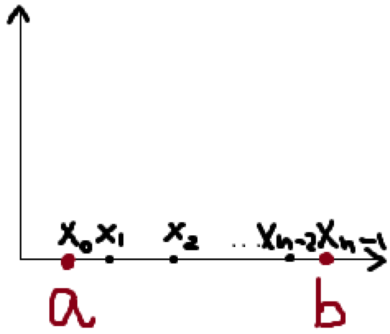
Интеграл вида $\int \frac{dx}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$, то $x - x_1 = \frac{1}{t}$

6 Определенный интеграл.

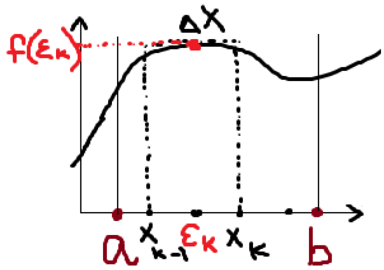
6.1 Вывод определения.

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке [a, b], пусть $f(x) > 0, a < b$

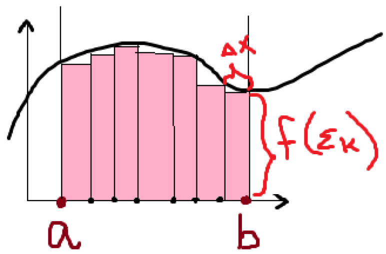
1. Разобьём отрезок [a, b] точками $x_k(k = 0 \ldots n-1)$ на $n-1$ частей, $a = x_0, b = x_{n-1}$



2. Рассмотрим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и наибольшее значение Δx обозначим за ранг дробления, $max \Delta x_k = \lambda(i = 0 \ldots n-1)$
3. На каждом частичном отрезке выберем произвольным образом точку ξ_k и найдем значение функции $f(x)$ в этой точке (то есть значение $f(\xi_k)$)



4. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$, рассмотрим предел $\lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$



Если данный предел имеет конечное значение, то он называется ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ от функции $f(x)$ на отрезке [a, b], при этом $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ — ИНТЕГРАЛЬНАЯ СУММА РИМАНА.

Замечание: сумма Римана не зависит ни от выбора точек, ни от разбиения отрезка $[a, b]$ на маленькие отрезки.

6.2 Теорема о подынтегральной функции.

Определение: $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на рассматриваемом отрезке, если она имеет конечное число точек разрыва функции первого рода.

Теорема: Если функция кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$

6.3 Свойства с доказательствами.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

   Доказательство: $\Delta x = a - a = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0 n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot 0 = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

   Доказательство: $\Delta x_k - \Delta x_{k-1} < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = -\lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b dx = b - a$

   Доказательство: $\int_a^b dx = \int_a^b 1\cdot dx = \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_k = [\Delta x = b - a] = \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty} (b - a) = b - a$
4. Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла: $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

Доказательство: $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} k \cdot f(x)\Delta x_k = k \cdot \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x)\Delta x_k = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

5. Определенный интеграл от суммы функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых с теми же пределами интегрирования: $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

   Доказательство: $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(f(x)\pm g(x))\Delta x_k = \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty}((\sum\limits_{k=0}^{n-1}(f(x)) \pm \sum\limits_{k=0}^{n-1}(g(x)))\Delta x_k) = \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x)\Delta x_k \pm \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(x)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

6. Если функция $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет тот же знак, что и функция.

   Доказательство: очевидно, т.к $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$, так как $\Delta x_k > 0$

7. Аддитивность определенного интеграла. Рассмотрим точку $c \in [a, b], f(x)$ - непрерывная функция, тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

   Доказательство: Пусть $c = x_m$ - одна из точек разбиения отрезка. Тогда можно сказать, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x)\Delta x_k = \sum\limits_{k=0}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum\limits_{k=m}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \lim\limits_{\lambda\to 0 n\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

8. Интегрирование неравенств. Неравенства между непрерывными функциями на отрезке $[a, b], a < b$ можно интегрировать с тем же знаком. То есть если $f(x) \geq g(x)$ для $\forall x \in [a, b]$, то$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

   Доказательство: $f(x) \geq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow$ по свойству 6 имеем, что $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0 \Rightarrow$ по свойству 5 имеем, что $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

9. Если функция интегрируема на отрезке [a, b], то она интегрируема и на любом внутреннем отрезке $[c, d] \in [a, b]$

10. Теорема о модуле интеграла. Модуль определенного интеграл не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции. При интегрируемой функции $y = f(x)$ из отрезка $[a, b]$ справедливо:

$$|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, по свойству 8 имеем $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \Leftrightarrow |\int_a^b f(x)| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

11. Теорема об оценке определенного интеграла. Если на отрезке $[a, b]$ имеют место неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

Доказательство: Так как $m \leq f(x) \leq M$, то по свойству 8 имеем $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$, вынесем константы по свойству 4 $mint_a^b\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\int_a^b dx$, по свойству 3 имеем $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

12. Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b], a < b$, то существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Доказательство: Пусть $m \leq f(x) \leq M$, тогда $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$ по теореме о промежуточных значениях (теорема из первого семестра, но она прям очевидная) получаем, что найдется такая точка $c \in [a, b] : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

7 Интеграл с переменным верхним пределом.

7.1 Определения.

Если $f(t)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема и на $[a, x]$, где $x \in [a, b]$. Такой интеграл называется интегралом с переменным верхним пределом:

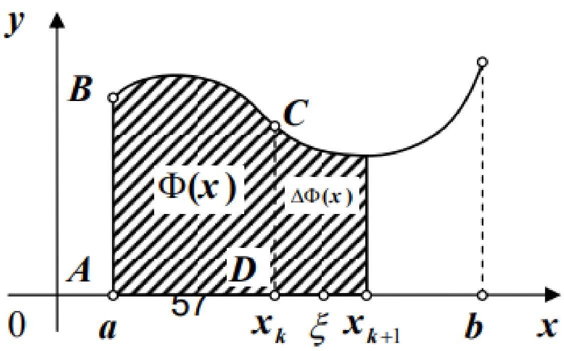
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

7.2 Теорема об интеграле в переменным верхним пределом (Теорема Барроу) + Доказательство

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t)\,dt$ имеет производную, равную значению подынтегральной функции при верхнем пределе, т.е.

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$$

Доказательство. Допустим, что $f(x) > 0$, тогда, в силу геометрического смысла определенного интеграла, очевидно, что функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ дает площадь криволинейной трапеции $ABCD$ (рис 2.2.1).



В свою очередь

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$

Откуда следует, что

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$

Последний интеграл в силу теоремы о среднем: $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\cdot\Delta x$, причем точка ξ лежит между точками x и $x+\Delta x$; тогда $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi)$.

Устремим Δx к нулю, тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ будет $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x)$, следовательно:

$$\Phi'_x(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x),$$

т.е. окончательно получим:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x).$$

7.3 Теорема (дополнительная к ф. Ньютона-Лейбница) + Доказательство

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она имеет первообразную на этом отрезке, т.е. $(F(x))'=f(x)$, и имеет неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

Доказательство:

Пусть $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$ (по теореме Барроу). Так как $f(x)=F'(x)$, то $F(x)$ - первообразная для $f(x)$

Пусть $\Phi(x)$ первообразная от $f(x)$, тогда $\Phi(x)-F(x)=C \Rightarrow \Phi(x)=F(x)+C. \Rightarrow \int f(x)\,dx=\Phi(x)=F(x)+C$

7.4 Теорема Ньютона-Лейбница + Доказательство

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то определенный интеграл от этой функции по промежутку $[a, b]$ равен разности значений какой-либо первообразной этой функции на верхнем и нижнем пределе интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство:

Пусть F(x) - первообразная для f(x), тогда по теореме Барроу:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

Полагая в этом равенстве x=a, получим

$$F(a) + C = \int_a^a f(t)\,dt = 0 => C = -F(a)$$

Положим, что x=b, тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

В итоге

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Заметим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

8 Замена переменной. Интегрирование по частям. (Для определенного интеграла)

8.1 Замена переменной. Теорема + Доказательство

Теорема о замене переменной в определенном интеграле. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, и функция $x = x(t), t \in [\alpha, \beta]$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\,dt,$$

где $a = x(\alpha)$ и $b = x(\beta)$.

Доказательство: Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,dx(t) = F(x(t))|_\alpha^\beta = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_b^a f(x)\,dx$$

8.2 Интегрирование по частям. Теорема + Доказательство

Теорема об интегрировании по частям в определенном интеграле. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

Доказательство

Очевидно, что функция $u \cdot v$ является первообразной для функции $u \cdot v' + v \cdot u'$ на промежутке $[a, b]$. Поэтому

$$\int_a^b (uv' + vu')\,dx = uv|_a^b$$

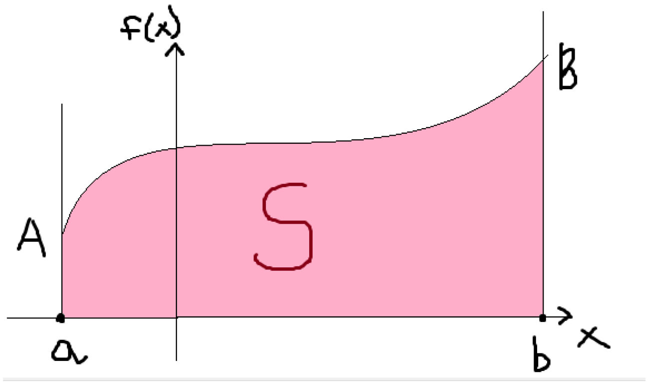
Но
$$\int_a^b (uv' + vu')\,dx = \int_a^b (udv + vdu) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu,$$
поэтому верно равенство
$$\int_a^b udv + \int_a^b vdu = uv|_a^b$$
или
$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

9 Площадь плоских фигур.

9.1 В декартовой системе координат.

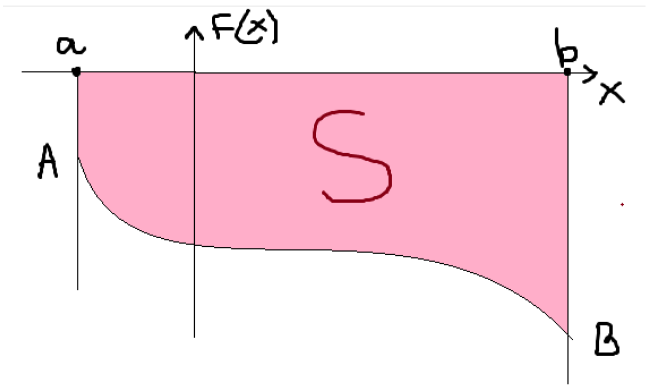
1. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(x) > 0, a < b$, тогда

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)\,dx$$



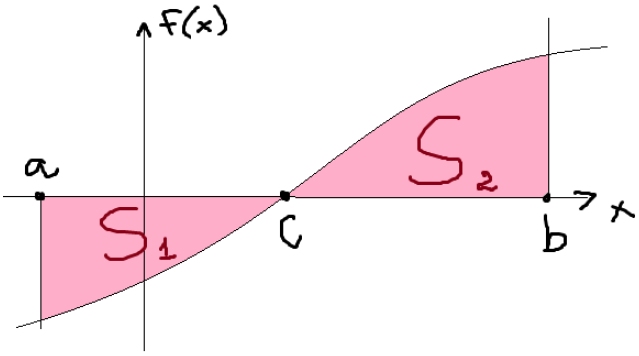
2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(x) < 0, a < b$, тогда

$$S_{aABb} = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$$



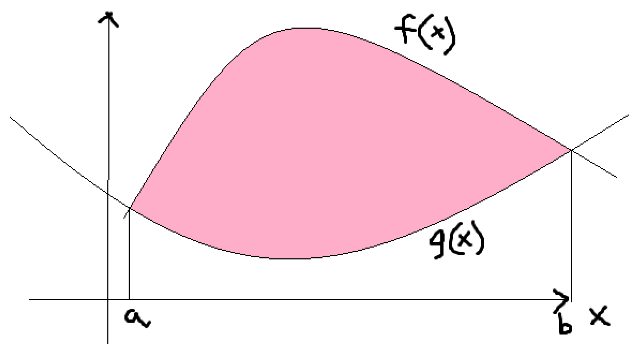
3. Пусть $f(x)$ меняет знак при переходе через ось Ox ($c \in [a,b]$), тогда

$$S = S_1 + S_2 = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



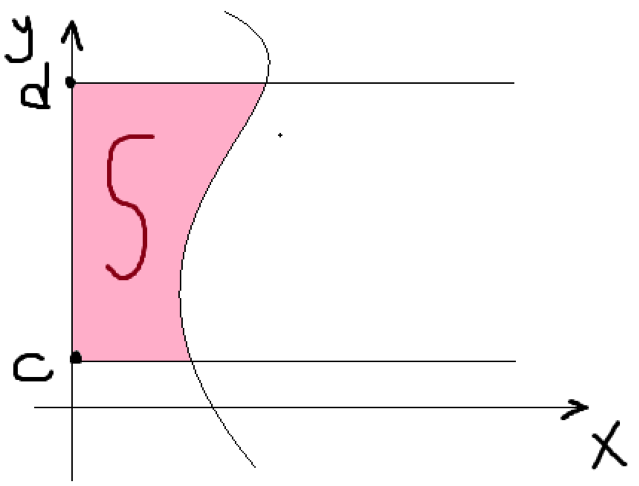
4. Пусть $f(x), g(x)$ непрерывны на $[a, b], a < b$ и $f(x) > g(x)$, тогда

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$



5. Пусть $x = f(y)$ непрерывная на $[c, d], c < d$, тогда

$$S = \int_c^d f(y)\, dy$$



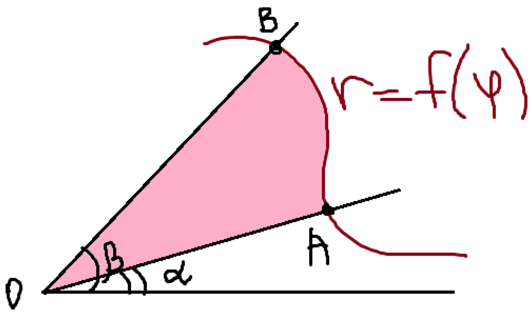
9.2 В параметрическом виде.

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

$$S = \int_a^b y(x)\, dx = \int_\alpha^\beta y(t)\, d(x(t)) = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\, dt$$

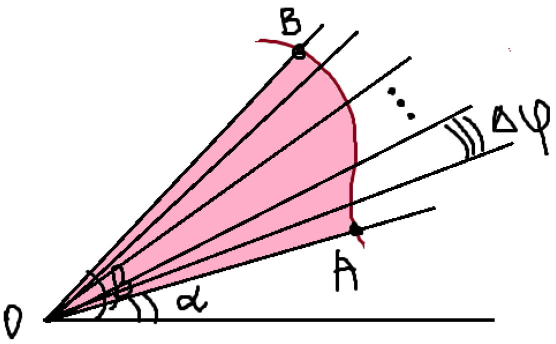
10 Площадь плоских фигур в полярной системе координат - вывод формулы.

Кривая $r = f(x\phi)$ задана в полярной системе координат, ограничена углами α и β.



Нахождение площади сектора OABO

1. Разбиваем сектор на k кусочков. $\alpha = \phi_0, \beta = \phi_k$



2. Вводим угол $\Delta\phi_k = \phi_k - \phi_{k-1}$
3. Рассмотрим произвольный $\Delta\phi_k$

   $\Delta\phi_k$ ограничен кривой $r_k = f(\Delta\phi_k)$

$$\Delta S_{sector} = \frac{1}{2} r_k^2 \cdot \Delta\phi_k$$

4. Таким образом находим все $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ и составим сумму

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} r_k^2 \cdot \Delta\phi_k$$

5. Вводим ранг дробления $\lambda = \max \Delta\phi_k$

6.

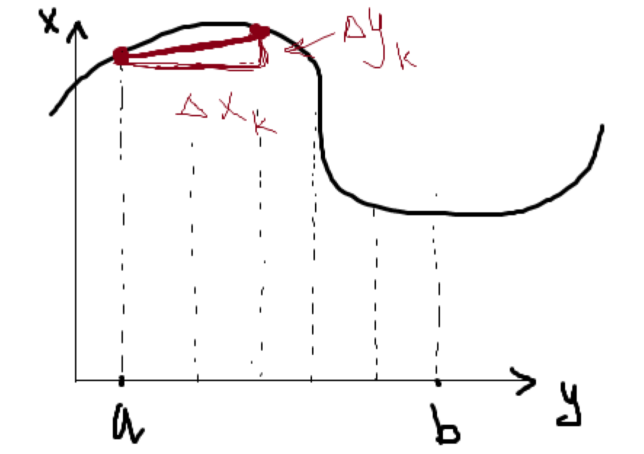
$$S = \lim_{n\to\infty \lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} r_k^2 \cdot \Delta\phi_k$$

Если данный предел существует и имеет конечное значение, то

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\phi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\phi) \, d\phi$$

11 Вычисления дуги плоской кривой.

Длиной дуги AB называют предел длины вписанной кривой линии при n $\Rightarrow \infty$



11.1 Вывод формулы в декартовых

Каждый кусочек ломаной:

$$l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

По т. Лагранжа:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'_k(x) = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{f_k - f_{k-1}}{\Delta x_k}$$

$$\Rightarrow f_k - f_{k-1} = f'_k(x) \cdot \Delta x_k = \Delta y_k$$

$$\sqrt{\Delta x_k^2 + (f'_k(x))^2 \cdot \Delta x_k^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + f_k'^2} = l_k$$

Аналогичным образом находим остальные l_n

Составляем сумму:

$$\sum_{k=1}^{n-1} l_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{(1 + f_k'^2)} \cdot \Delta x_k$$

Вводим ранг дробления: $\lambda = max \Delta x_k$

$$\lim_{n\to\infty\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 + f_k'^2} \cdot \Delta x_k = L$$

Если предел существует и имеет конечное значение, то:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f_k'^2} dx$$

11.2 Вывод формулы в параметрических

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

- описывает кривую $y(x) = f(x), t \in [t_1, t_2]$

$x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ - непрерывны

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\phi_t'^2 + \psi_t'^2} dt$$

11.3 Вывод формулы в полярных

$r(\phi), r'(\phi)$ - непрерывные функции при $\phi \in [\alpha, \beta]$

$x = r\cos\phi; y = r\sin\phi$

$L = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$

$$\begin{cases} x(\phi) = r(\phi)\cos\phi \Rightarrow x_\phi' = r'(\phi)\cos\phi + r(\phi)(-\sin\phi) \\ y(\phi) = r(\phi)\sin\phi \Rightarrow y_\phi' = r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi \end{cases}$$

$(x_\phi')^2 + (y_\phi') = r'(\phi)^2\cos^2\phi + 2r(\phi)r'(\phi)\cos\phi(-\sin\phi) + r^2(\phi)(-\sin\phi)^2 + {}$ $+ r'(\phi)^2\sin^2\phi + 2r(\phi)r'(\phi)\cos\phi\sin\phi + r^2(\phi)\cos^2\phi = r'(\phi)^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + {}$ $+ r^2(\phi)(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = {r_\phi'}^2 + r_\phi^2$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{{r'_\phi}^2 + r_\phi^2}\, d\phi$$

12 Несобственный интеграл первого рода.

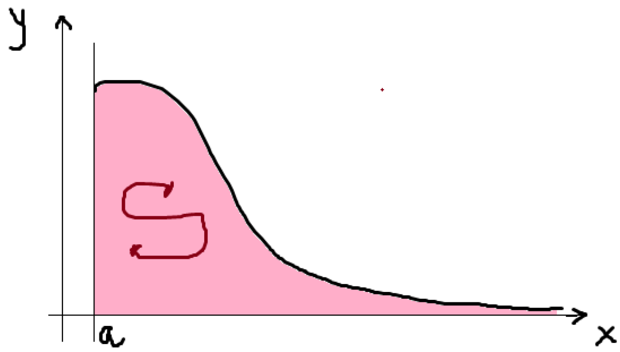
Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в $x \in (a, +\infty)$ и интегрирование в $x \in (a, A) \subset (a, +\infty)$

12.1 Определения.

Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ от $y = f(x)$ по бесконечному промежутку $(a, +\infty)$ называют предел $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx$, и если такой предел существует, то несобственный интеграл называют СХОДЯЩИМСЯ, в противном случае — РАСХОДЯЩИМСЯ.

12.2 Геометрический смысл.

Это площадь бесконечной криволинейной трапеции.



Способы вычисления несобственного интеграла:

1. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} (F(x))|_a^A = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A) - F(a)$
2. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim\limits_{B\to-\infty} F(B)$
3. При условии что $c \in (-\infty, +\infty)$, $f(c)$ - непрерывная $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся, если оба интеграла сходятся.

12.3 Главное значение.

Главным значением v.p. (*valeur principal*) несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называют предел $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim\limits_{R\to\infty}(F(R)-F(-R))$

В определении главного значения имеется в виду симметричное возрастание модуля переменной x, в положительном и отрицательном направлениях

12.4 Эталонный интеграл + вывод его сходимости.

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^r}\,dx, a>0$$

1. При $r=1$

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \ln|x||_a^{+\infty} = \ln|+\infty| = \ln|a| = \infty, \text{интеграл расходится.}$$

2. При $r=1+\epsilon, \epsilon>0$

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{1+\epsilon}}\,dx \;= \int_a^{+\infty} x^{-1-\epsilon}\,dx = \frac{x^{-\epsilon}}{-\epsilon}|_a^{+\infty} = \frac{1}{-\epsilon}\cdot\frac{1}{x^{\epsilon}}|_a^{+\infty} = -\frac{1}{-\epsilon}(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{a^{\epsilon}}) =$$

$$= \frac{1}{\epsilon\cdot a^{\epsilon}} - \text{конечное число, интеграл сходится.}$$

3. При $r=1-\epsilon, \epsilon>0$

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{1-\epsilon}}\,dx \;= \int_a^{+\infty} x^{-1+\epsilon}\,dx = \frac{x^{\epsilon}}{\epsilon}|_a^{+\infty} = \frac{1}{-\epsilon}\cdot\frac{1}{x^{\epsilon}}|_a^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{-\epsilon}(\infty - a^{\epsilon}) = \infty, \text{интеграл расходится.}$$

Итог

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} r > 1 \text{ - сходится} \\ r \leq 1 \text{ - расход.} \end{cases}$$

12.5 Достаточные признаки сходимости + Доказательство.

Первый признак сравнения

Если функции $f(x), \phi(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и $0 \leq f(x) \leq \phi(x)$, то утверждается, что:

1. Если $\int_a^{+\infty} \phi(x)\,dx$ - сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится.
2. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ - расходится, то $\int_a^{+\infty} \phi(x)\,dx$ тоже расходится.

Доказательство

По условию $0 \leq f(x) \leq \phi(x)$, $f(x)$ положительна и ограничена $\phi(x) \Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,конечное число. Рассмотрим $\int_a^{+\infty} \phi(x)\,dx = \lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x)|_a^{+\infty}$, конечное число. $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} \phi(x)\,dx$. Из этого неравенства всё очевидно.

Второй признак сравнения

Если функции $f(x), \phi(x)$непрерывны на $[a, +\infty)$ и $f(x) > 0, \phi(x) > 0$, то если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = k$,где k - конечное число $\neq 0$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} \phi(x)\,dx$ будут иметь одинаковую сходимость или расходимость.

Доказательство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\frac{f(x)}{\phi(x)} - k| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon < \frac{f(x)}{\phi(x)} - k < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon \cdot \phi(x) < f(x) - k \cdot \phi(x) < \epsilon \cdot \phi(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon \cdot \phi(x) + k \cdot \phi(x) < f(x) < \epsilon \cdot \phi(x) + k \cdot \phi(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi(x)(k - \epsilon) < f(x) < \phi(x)(\epsilon + k)$$

Пусть $\int_a^{+\infty} \phi(x)\, dx$ сходится. Тогда имеем:

$$f(x) < \phi(x)(\epsilon + k)$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx < \int_a^{+\infty} \phi(x)(\epsilon + k)\, dx$$

По предыдущей теореме имеем, что $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ тоже сходится.

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ расходится. Тогда по предыдущей теореме имеем, что $\int_a^{+\infty} \phi(x)\, dx$ тоже расходится .

12.6 Абсолютная сходимость.

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ называется абсолютно сходящимся, если $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ сходится.

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ расходится, но $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ называют условно сходящимся.

13 Несобственный интеграл второго рода.

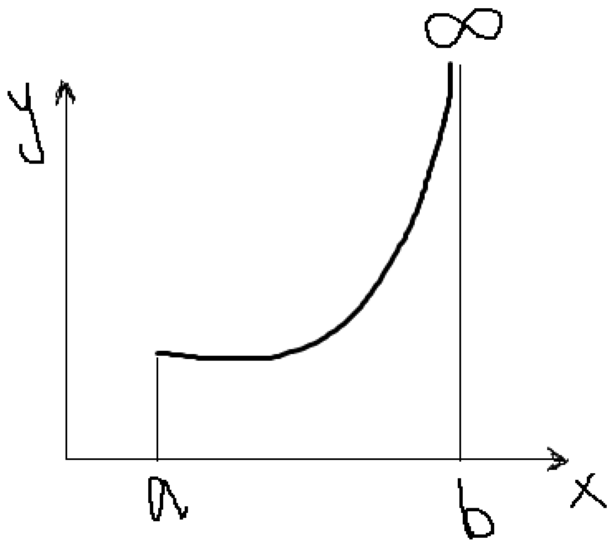
Пусть $f(x)$ на $[a,b]$ в точке b не ограничена, т.е. имеет разрыв второго рода.

13.1 Определение.

Несобственным интегралом 2-го рода $\int_a^b f(x)\,dx$ называют:

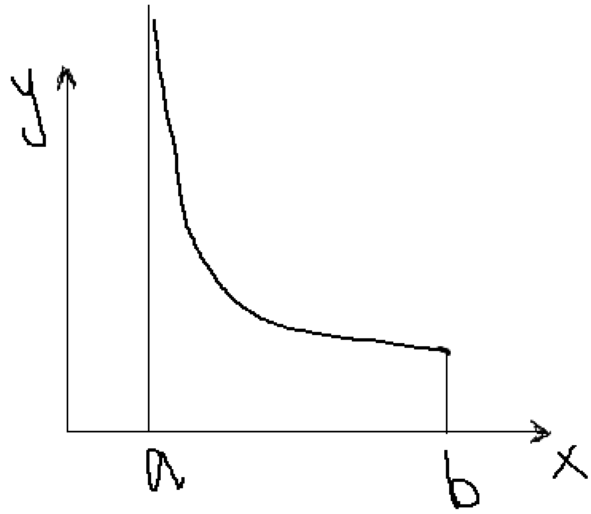
1.

$$f(b) - \text{ точка разрыва 2-го рода} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{B\to b_{-0}} \int_a^B f(x)\,dx$$



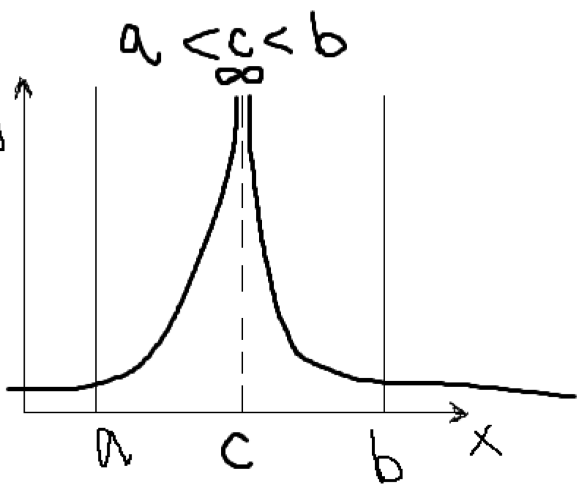
2.

$$f(a) - \text{ точка разрыва 2-го рода} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to a_{+0}} \int_A^b f(x)\,dx$$



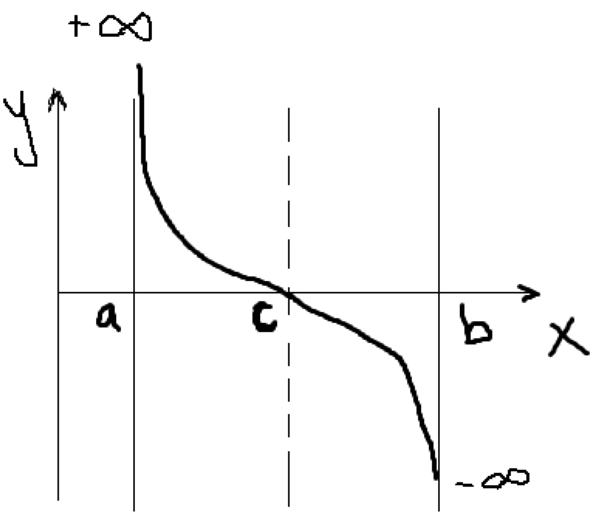
3.

$$f(c) - \text{ точка разрыва 2-го рода} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



4.

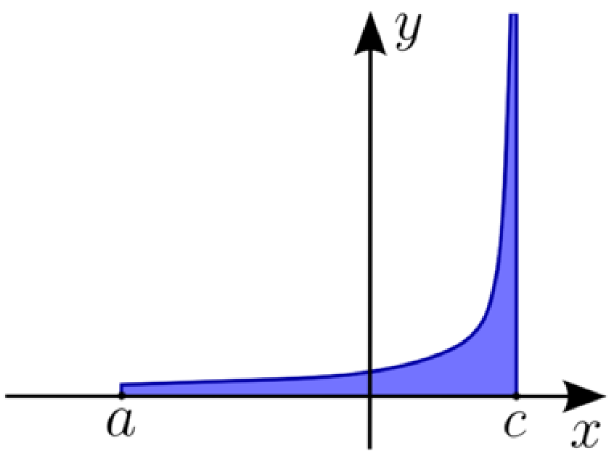
$$f(c) - \text{ конечное значение } f \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Интеграл сходится, если предел имеет конечное значение. Для 3-го и 4-го случаев: оба интеграла сходятся $\Rightarrow$ интеграл сходится; один из интегралов расходится $\Rightarrow$ интеграл расходится

13.2 Геометрический смысл.

Несобственный интеграл второго рода выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции.



13.3 Эталонный интеграл + вывод его сходимости.

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^r}; f(b) = \frac{1}{(b-b)^r} = \infty \text{- разрыв 2-го рода}$$

Исследуем на сходимость:

1. При $r = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = -\int_a^b \frac{d(b-x)}{(b-x)} = -\ln|b-x||_a^b = -\ln|b-b| + \ln|b-a| = \infty \text{ - расход.}$$

2. При $r = 1 + \epsilon$

$$\int_z^b \frac{dx}{(b-x)^{1+\epsilon}} = \int_a^b (b-x)^{-1-\epsilon}\, dx = -\int_a^b (b-x)^{-1-\epsilon}\, d(b-x) =$$

$$= \frac{1}{\epsilon(b-x)^\epsilon}|_a^b = \frac{1}{\epsilon(b-b)^\epsilon} - \frac{1}{\epsilon(b-a)^\epsilon} = \infty \text{ - расход.}$$

3. При $r = 1 - \epsilon$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{1-\epsilon}} = -\int_a^b (b-x)^{\epsilon-1}\, d(b-x) =$$

$$= -\frac{(b-x)^\epsilon}{\epsilon}|_a^b = 0 + \frac{(b-a)^\epsilon}{\epsilon} \text{ - сходится}$$

Итог

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^r} = \begin{cases} r \geq 1 \text{ - расход.} \\ r < 1 \text{ - сходится} \end{cases}$$

13.4 Свойства.

Теоремы сравнения для несобственного интеграла по неограниченному промежутку работают и для несобственного интеграла от неограниченной функции. Абсолютная сходимость тоже (см. пункт 12)

1. Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на интервале $[a, b]$, то их сумма $f(x)+g(x)$ также интегрируема на этом интервале, причем

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

2. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, то для любой константы C функция $Cf(x)$ также интегрируема на этом интервале, причем

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, причем на этом интервале $f(x) > 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

4. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, то для любого $c \in (a, b)$ интегралы $\int_a^c f(x)\,dx, \int_c^b f(x)\,dx$ тоже сходятся, причем

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

14 Двойной интеграл.

14.1 Определение.

Кривая K называется простой кривой, если она распадается на конечное число частей, каждая из которых имеет уравнение $y = f(x)$ или $x = \phi(y)$, причём если $f(x), \phi(x)$ - непрерывные функции на $[a, b], [p, q]$, то кривая K - простая, замкнутая самопересекающаяся кривая лежащая на плоскости 0xy разбивает множество точек на два, причем единственным образом.

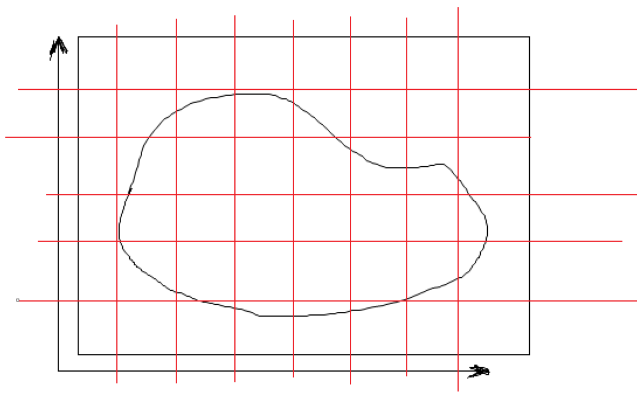
Два множества - множество точек внутри этой простой кривой - за область D(x, y).

D(x, y) + граница области (контур) = замкнутая область.

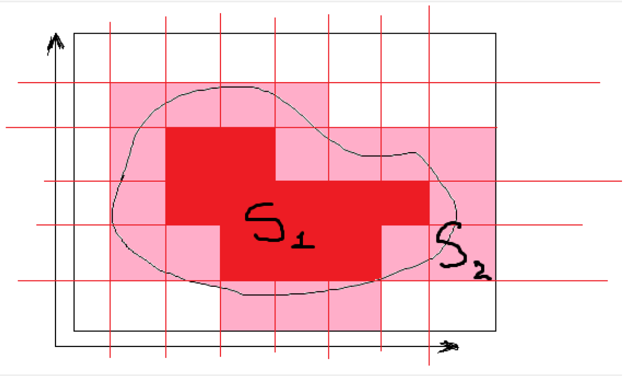
Мы будем рассматривать область D(x, y), которая ограничена простыми кривыми, такими, что для каждой прямой параллельной оси 0x или 0y будет соответствовать не более 2-х точек пересечения с областью D.

Рассмотрим область D(x, y) с контуром K. Найдем S этой области.

1. Пусть R - прямоугольник, который описан вокруг области D(x, y), но он не касается области D.
2. Разбиваем прямоугольник прямыми L, которые параллельны осям 0x и 0y на ячейки.



3. Рассмотрим ячейку и наибольший диаметр ячейки обозначим через λ - ранг дробления.
4. S_1 - площадь ячеек, целиком лежащих в области D(x, y) S_2 - площадь ячеек лежит в области D(x, y) и контуром K имеет хотя бы несколько точек пересечения.



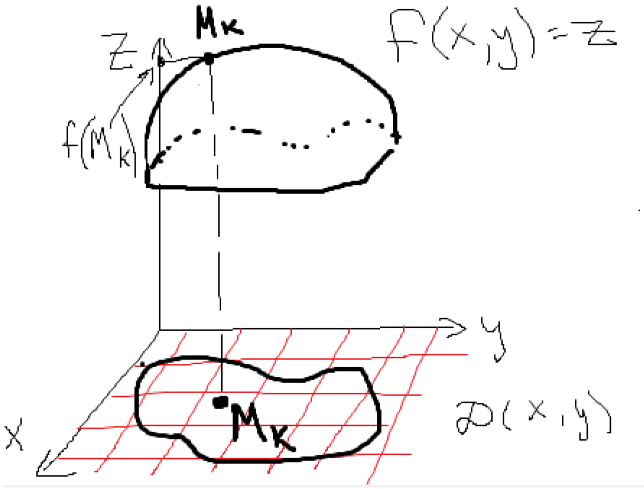
$$S_1 \leq S_2$$

Если существует общий предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_1 = \lim\limits_{n\to\infty} S_2 =$ конечное число, то он равен S = площадь области D(x, y).

Такая область D называется квадрируемой.

Рассмотрим $f(x, y) = z; x, y$ определены в области D(x, y).

1. Разобьём область D сетью простых кривых произвольным образом на ячейки $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$, площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \ldots, \Delta S_n$ с диаметрами $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$
2. Наибольший из диаметров обозначаем через ранг дробления $\max(d_k) = \lambda$



3. В каждой ячейке D_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ и вычислим значения $f(M_k)$
4. Умножим $f_k(M_k)$ на соответсвующую площадь ΔS_k ячейки и все это просуммируем $\sigma_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$ - это сумма Римана. Если рас-

сматриваемый предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_k = \lim\limits_{n\to\infty,\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$ имеет конечное значение, то оно равно $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ и называется двойным интегралом.

14.2 Вывод формулы.

14.3 Свойства.

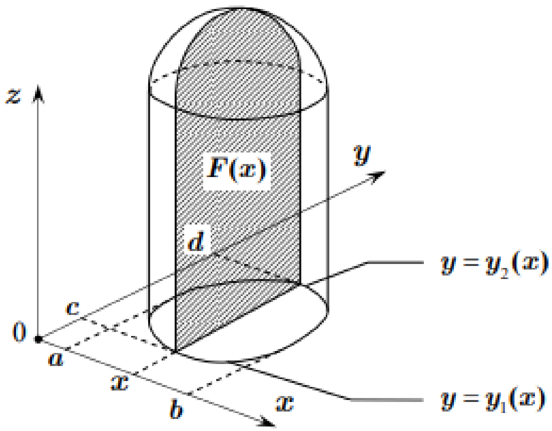
1. Аналогичные свойства, как и у обычных интегралов
2. Если каждая точка в области больше нуля, то и интеграл будет больше нуля.
3. Если одна функция больше другой, то ее интеграл тоже будет больше
4. Если в каждой точке D справедливо $m \le f(x,y) \le M$, то $m\cdot S_D \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M\cdot S_D$
   Доказательство: так как $m \le f(x,y) \le M \Rightarrow \iint_D m dxdy \le \iint_D f(x,y)dx\,dy \le \iint_D M\,dx\,dy \Rightarrow m\iint_D 1\,dx\,dy \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M\iint_D 1\,dx\,dy \Rightarrow m\cdot S_D \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M\cdot S_D$
   (по геометрическому смыслу)
5. Теорема о среднем
   Если в каждой точке D функция$f(x,y)$ непрерывна, то в области D найдется точка $P(\xi,\nu)$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\nu)\cdot S_D$$

   Доказательство: так как функция непрерывна, то по свойству $m\cdot S_D \le \iint_D f(x,y)\,dxdy \le M\cdot S_D : |\frac{1}{S_D} \Rightarrow m \le \frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M \Rightarrow$ найдется некоторая точка $P(\xi,\eta)$ такая, что $\frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot S_D$

14.4 Сведение двойного интеграла к повторному.

Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ в предположении, что функция $f(x,y)$ положительна в области D, а область D ограничена снизу кривой $y = y_1(x)$, сверху кривой $y = y_2(x)$, причем $x \in [a,b]$. Функции $y = y_1(x), y = y_2(x)$ непрерывны на промежутке $[a,b]$ и в каждой его точке $y_1(x) \le y_2(x)$. Двойной интеграл дает объём этого тела:



Найдем его объем с помощью определенного интеграла. Проведем сечение тела плоскостью $x = const$. Пусть площадь сечения равна:

$$F(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Объём тела равен:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b F(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Аналогично можно получить формулу для вычисления двойного интеграла, где внутреннее интегрирование выполнено по переменной x, а внешнее по y.

$$V = \iint\limits_D f(x,y) = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

14.5 Геометрический и физический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y) \geq 0$ в каждой точки области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = V$$

Объем тела ограниченного снизу областью $D(x,y)$, сверху функцией $f(x,y)$, с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны Oz
Замечание: Если $f(x,y) = 1$, то $\iint\limits_D 1\,dx\,dy = S$ области D.

15 Двойной интеграл в полярной системе координат.

15.1 Криволинейные координаты.

В полярной системе координат точка задается двумя координатами M(r, ϕ): r - полярный радиус, ϕ - полярный угол. Связь с декартовой системой координат:

$$x = rcos\phi, r \in [0, +\infty]$$

$$y = rsin\phi, \phi \in (0, 2\pi]$$

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D*} f(rcos\phi, rsin\phi)|J|drd\phi =$$

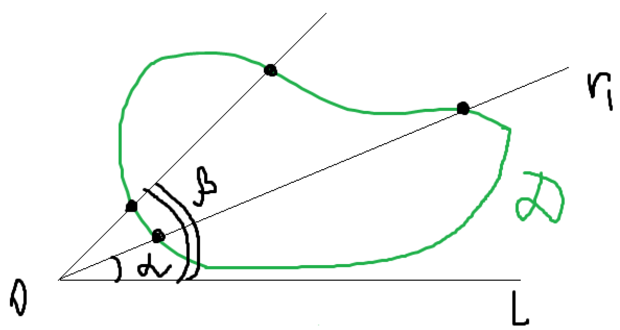
$$= \iint\limits_{D*} f(rcos\phi, r\phi)rdrd\phi$$

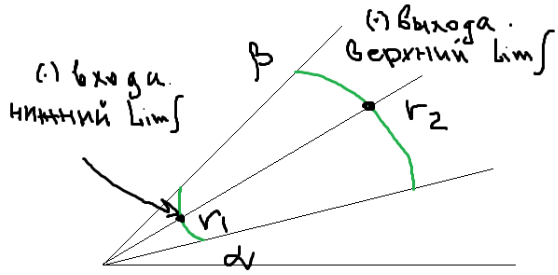
15.2 Якобиан (якобианчик :)).

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\phi \\ y'_r & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\phi & r(-sin\phi) \\ sin\phi & rcos\phi \end{vmatrix} = rcos^2\phi + rsin^2\phi = r$$

15.3 Вычисление

1. Полюс лежит вне области D

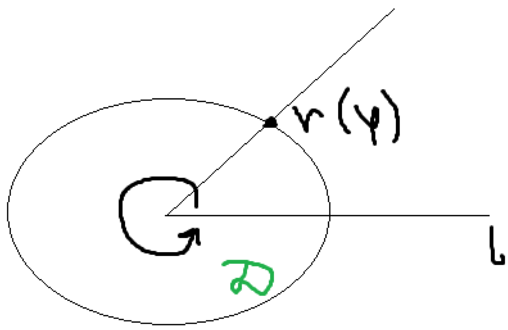




Т.е. область D обладает свойством, что любой луч исходящий из полюса пересекает ее границу не более чем в 2 точках или по целому отрезку, то

$$\iint\limits_{D*} f(rcos\phi, rsin\phi)rdrd\phi = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(rcos\phi, rsin\phi)rdr$$

2. Полюс находится внутри D



$$\iint\limits_{D\cdot} f(rcos\phi, rsin\phi)rdrd\phi = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{r(\phi)} f(rcos\phi, rsin\phi)rdr$$

16 Тройной интеграл.

16.1 Определение.

Пусть дано материальное тело, представляющее собой пространственную область T, заполненную массой.

Требуется найти массу этой области T, при условии, что в каждой точке этой области T известна плотность этой области, $\mu(P) = \mu(x, y, z)$

Разобьем эту область на произвольные кубируемые (имеющие объем) подобласти: $T_1, T_2, ..., T_n$ с соответствующими объемами: $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$

В каждой области выбираем точку P_k с плотностью $\mu(P_k)$, тогда масса этой области $\Delta m_k \approx \mu(P_k)\Delta v_k$, тогда масса всей области T:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k)\Delta v_k$$

Пусть d - наибольший из диаметров частичных областей.

Рассмотрим $\lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)v_k$, если предел существует и он конечный, то:

$$\iiint\limits_T \mu(x, y, z)dxdydz = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k)\Delta v_k$$

Если $\mu(P_k) = \forall$ функция, то

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dxdydz$$

16.2 Вывод формулы.

16.3 Свойства.

1. $\iiint_T dxdydz = V$, где V - объем тела T
2. $\iiint_T cf(x, y, z)dxdydz = c \iiint_T f(x, y, z)dxdydz$
3. $\iiint_T (f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z))dV = \iiint_T f_1(x, y, z)\, dV + \iiint_T f_2(x, y, z)\, dV$

4. $\iiint_T f(x,y,z)dV = \iiint_{T_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{T_2} f(x,y,z)dV$
5. Если всюду в области $T f(x,y,z) > 0 (f(x,y,z) \geq 0)$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz > 0 (\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \geq 0)$$

6. Если всюду в области $T f(x,y,z) \leq \phi(x,y,z)$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_T \phi(x,y,z)dxdydz$$

7. Если m и M - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области T, то:

$$mV \leq \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \leq MV$$

8. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в области T, то $|f(x,y,z|$ тоже интегрируема в области T и:

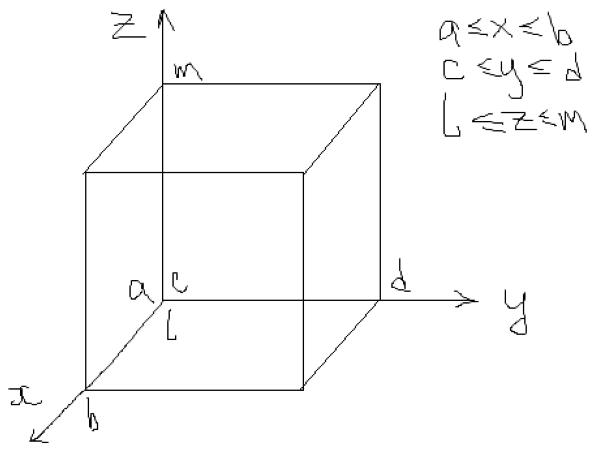
$$|\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz| \leq \iiint\limits_T |f(x,y,z)|dxdydz$$

9. Теорема о среднем для тройного интеграла. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой области T, то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0,z_0) \in T$, что справедливо равенство

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)V$$

16.4 Сведение к повторному.

Пусть область T - прямоугольный параллелепипед



$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy\int_l^m f(x,y,z)dz = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_l^m f(p)dz$$

$p = p(x,y,z)$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dzdx\int_c^d f(x,y,z)dy = \int_a^b dx\int_l^m dz\int_c^d f(p)dy$$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dydz\int_a^b f(x,y,z)\,dx = \int_c^d dy\int_l^m dz\int_a^b f(p)\,dx$$

16.5 Геометрический и физический смысл тройного интеграла.

1. Объем V кубируемого тела $T \in Oxyz$:

$$V = \iiint\limits_T dxdydz$$

2. Пусть T - материальное тело (кубируемая область $V \in Oxyz$ с плотностью $\gamma(x,y,z)$. Тогда:

$$\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)dxdydz = m - \text{масса тела } T$$

3. Статические моменты тела T относительно плоскостей xOy, yOz, xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x, y, z)\, dxdydz$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x, y, z)\, dxdydz$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_T y\gamma(x, y, z)\, dxdydz$$

4. $x_o = \frac{S_{yz}}{m}, y_o = \frac{S_{xz}}{m}, z_o = \frac{S_{xy}}{m}$ - координаты центра масс тела T
5. Моменты инерции тела T относительно осей Ox, Oy, Oz равны соответственно:

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)\, dxdydz$$

$$I_y = \iiint\limits_T (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)\, dxdydz$$

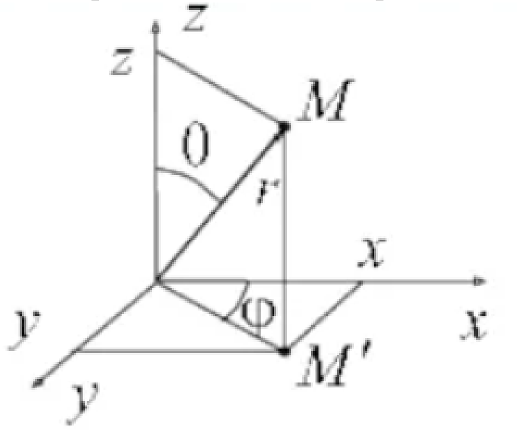
$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)\, dxdydz$$

6. Момент инерции тела T относительно начала координат:

$$I_o = \iiint\limits_T (x^2 + y^2 + x^2)\gamma(x, y, z)\, dxdydz$$

17 Замена в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла. Цилиндрическая система координат в тройном интеграле.

В цилиндрических координатах точка М описывается тремя координатами, т.е. $M(r, \phi, z)$. r - полярный радиус, ϕ - полярный угол для точки М', которая является проекцией М, z - аппликата.



Декартовы координаты связаны с цилиндрическими с помощью формул:

$$x = rcos\phi, r \in [0, +\infty)$$

$$y = rsin\phi, \phi \in [0, 2\pi]$$

$$z = z, z \in (-\infty, +\infty)$$

$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{G*} f(rcos\phi, rsin\phi, z) \cdot |J| drd\phi dz, \text{где J - якобиан}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\phi & -rsin\phi & 0 \\ sin\phi & rcos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^6 \cdot 1 \begin{vmatrix} cos\phi & -rsin\phi \\ sin\phi & rcos\phi \end{vmatrix} = rcos^2\phi + rsin^2\phi = r$$

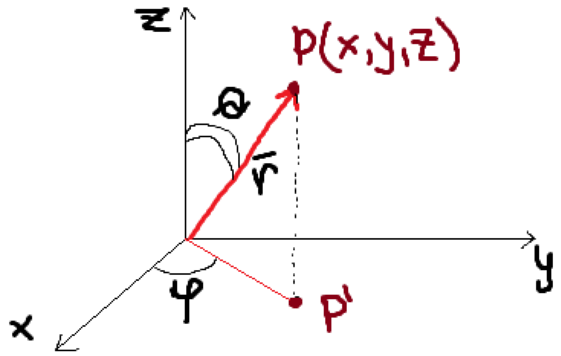
Элемент объема:

$$Jdrd\phi dz = rdrd\phi dz = dv$$

18 Замена в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла. Сферическая система координат в тройном интеграле.

В сферической системе координат положение точки $\mathcal{P}$ описывается тремя координатами: ϕ, r, θ, где:

- r - радиус-вектор, соединяющий точку $\mathcal{P}$ с началом координат; $r \in [0, +\infty)$
- ϕ - угол между проекцией точки $\mathcal{P}$ на плоскость 0xy и осью 0x (положительное направление); $\phi \in [0, 2\pi)$
- θ - угол между радиус-вектором r и положительным направлением оси 0z; $\theta \in [0, \pi)$



$$x = r\cos\phi\sin\theta, y = r\sin\phi\sin\theta, z = r\cos\theta$$

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)\mathcal{J}\,dr\,d\phi\,d\theta$$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi\sin\theta & r(-\sin\phi)\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} r(-\sin\phi)\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} - 0 - r\sin\phi \begin{vmatrix} \cos\phi\sin\theta & r(-\sin\phi)\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \ldots = r^2\sin\theta$$

Элемент объема:

$$J\,dr\,d\phi\,d\theta = r^2\sin\theta\,dr\,d\phi\,d\theta = dV$$

19 Криволинейный интеграл первого рода.

Кривая AB, заданная в параметрическом виде $x = \phi(t), t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

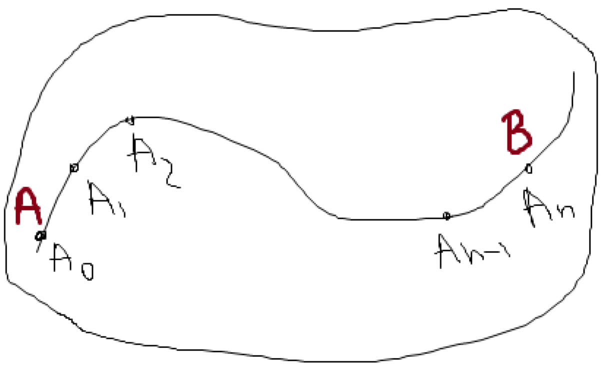
Кривая называется гладкой, если $\phi(t), \psi(t)$ непрерывны, имеют непрерывные производные и $\psi_t'^2 + \phi_t'^2 > 0$

19.1 Вывод формулы.

Рассмотрим гладкую кривую AB. Пусть $f(x)$ - функция, заданная на кривой AB и эта кривая лежит в области D

1. Разобьем кривую AB на n-частей произвольным способом

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = B$$



2. Рассмотрим любую дугу $A_kA_{k+1}, k \in [0, n-1]$ и точку $M_k \in A_kA_{k+1}$
3. Рассмотрим $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k, \Delta l_k =$ сумма A_kA_{k+1}
   $\delta - max(\Delta l_k)$
4. Если существует:

$$\lim_{n\to\infty,\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k$$

И не зависит от способа разбиения на A_kA_{k+1} и от выбора точки M_k, то такой предел называется КРИВОЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ 1-ГО РОДА.

$$\lim_{n\to\infty,\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k = \int_{AB} f(M_k)dl = \int_{AB} f(x,y)dl$$

19.2 Свойства.

1. Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от обхода кривой AB т.е.

$$\int_{AB} f(M)dl = \int_{BA} f(M)dl$$

2. $\int_{AB} cf(M)dl = c\int_{AB} f(M)dl$
3. $\int_{AB}(f_1(M) + f_2(M))dl = \int_{AB} f_1(M) + \int_{AB} f_2(M)$
4. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$$\int_{\alpha} f(M)dl = \int_{\alpha_1} f(M)dl + \int_{\alpha_2} f(M)dl$$

5. $f_1(M) \leq f_2(M)$

$$\int_{AB} f_1(M)dl \leq \int_{AB} f_2(M)dl$$

6. Теорема о среднем

$$\int_{AB} f(M)dl = f(x_c, y_c)\Delta l$$

19.3 Геометрический, физический смысл.

1. Длина дуги AB:

$$l = \int_{AB} 1dl$$

2. Пусть G - цилиндр с направляющей $l \in xOy$. S - площадь части поверхности G, заключенной между плоскостью xOy и поверхностью $z = f(x,y)$

$$S = \int_{l} f(x,y)dl$$

3. Если $f(M)$ - плотность материальной дуги, а m - масса дуги, то:

$$\int_{AB} f(M)dl = m$$

19.4 Вычисления криволинейного интеграла.

1. Кривая задана параметрически - гладкая или кусочно-гладкая, $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

$$\phi_t'^2 + \psi_t'^2 > 0,\ dl = \sqrt{\phi_t'^2 + \psi_t'^2}dt$$

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\phi(t), \psi(t))\sqrt{\phi_t'^2 + \psi_t'^2}dt$$

2. Кривая задана в явном виде, т.е. $y = y(x), x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x, y(x))\sqrt{x_x'^2 + y_x'^2}dx = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$$

3. Кривая в $\mathbb{R}^3$ - пространственная кривая

$$x = \zeta(t), y = \mu(t), z = \beta(t)$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = f(\zeta(t), \mu(t), \beta(t))\sqrt{\zeta_t'^2 + \mu_t'^2 + \beta'^2}dt$$

20 Криволинейный интеграл второго рода.

20.1 Определение из лекций (наверное лучше это брать)

Рассмотрим физическую задачу. Пусть в каждой точке кривой AB длиной L определена сила F(x,y) и под действием этой силы точка перемещается от точки A до точки B. Необходимо найти работу, которую выполняет сила поля по перемещению точки по кривой AB.

Вспомним физический смысл скалярного произведения.

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = |\overline{F}| \cdot |\overline{S}| \cdot \cos\alpha$$

Кривая AB разбивается произвольными точками на n частей. $A = M_0, B = M_n$ $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$

$$\overline{S} - \text{перемещение}$$

$$\overline{S}_k = (\Delta x_k, \Delta y_k) = \Delta r_k$$

Рассмотрим $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \overline{F}(M_k) \cdot \overline{r}_k$, если $\lim\limits_{n\to\infty, \overline{r}_k\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \overline{F}(M_k) \cdot \overline{r}_k$ существует и не зависит от способа разбиения AB и выбора точек M, то такой предел называется криволинейным интегралом 2 рода вектора $\overline{F}(x, y)$ по $d\overline{r}$

$$\lim_{n\to\infty, \overline{r}_k\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{F}(M_k) \cdot \overline{r}_k = \int\limits_{AB} \overline{F}(x, y)\, d\overline{r}$$

Перейдем из векторного в скалярный вид.

$\overline{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, где $(P(x, y), Q(x, y)) =$ - непрерывные функции на AB $= P(x, y) \cdot \overline{i} + Q(x, y) \cdot \overline{j}$

$d\overline{r} = (\, d\overline{x},\, d\overline{y}) = \, dx\overline{i} + \, dx\overline{j}$

$$\overline{F}(x, y)\, d\overline{r} = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

$$\int\limits_{AB} \overline{F}(x, y)\, d\overline{r} = \int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Криволинейный интеграл 2 рода в скалярном виде

20.2 Определение из методички

Пусть в плоскости 0xy лежит кривая AB, в каждой точке которой определена функция $f(x, y)$. Разобьём кривую на n частей. $M_0 = A, M_n = B$. Пусть $d_1, \dots, d_n$ - диаметры дуг $M_1M_0, \dots, M_{n-1}M_n$. $\lambda = max(d_k)$ - ранг дробления. На каждой дуге $M_kMk + 1$ возьмем произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$, вычислим в ней значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$ и составим произведение $f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

Составим интегральную сумму Римана

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k$$

Устремляя ранг дробления к нулю ищем предел

$$\lim_{n \to \infty \lambda \to 0} \sigma_n$$

Если этот предел существует и он является конечным числом, то он называется криволинейным интегралом второго рода от функции f(x, y) по кривой AB и обозначается так:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dx$$

Данное определение относится к плоской кривой, таким же образом определяется интеграл пространственной кривой:

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dx$$

Сумму интегралов по кривой AB обозначают так:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\, dx + \int\limits_{AB} Q(x, y, z)\, dy + \int\limits_{AB} R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int\limits_{AB} (P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz)$$

Если точка A совпадает с точкой B, то есть кривая представляет собой замкнутый контур K, то криволинейный интеграл второго рода обозначается так:

$$\int\limits_{K} f(x,y)\,dx$$

Если K - плоский замкнутый самонепересекающийся контур, то у него различают положительное и отрицательное направление. За положительное принимается то направление, при котором область, ограниченная контуром K, остается слева, если наблюдатель движется по контуру. Иногда для интегралов по замкнутому самонепересекающемуся контуру употребляют:

$$\oint\limits_{AB} f(x,y)\,dx$$

20.3 Вычисления интграла

Вычисления криволинейного интеграла 2-го рода

Кривая задана параметрически:

$x = \varphi(t)$ $\quad t \in [t_0, t_1]$ $\quad$ ф-ия непрерывна вместе со своими производными на $\Delta [t_0, t_1]$

$y = \psi(t)$

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_0}^{t_1} (\varphi(t), \psi(t))\, d\varphi(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\, d\psi(t)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)] \cdot dt$$

Ч. 2. Кривая задана в явном виде:

$y = y(x)$ $\quad x \in [a, b]$

$$\int\limits_{\smile AB} P(x, y(x))\, dx + Q(x, y(x))\, \underbrace{dy(x)}_{y'_x\, dx} = \int_b^a [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)]\, dx$$

20.4 Вывод формулы.

20.5 Свойства.

Для сокращения далее $P(x, y) = P$

1. Криволинейный интеграл второго рода зависит от пути обхода:

$$\int\limits_{AB} (P\,dx + Q\,dy) = -\int\limits_{BA} (P\,dx + Q\,dy)$$

2. В случае, когда кривая представляет собой замкнутый контур AbCdA

$$\oint\limits_{AbCdA} (P\,dx + Q\,dy) = -\oint\limits_{AdCbA} (P\,dx + Q\,dy)$$

3. Если кривая AB = AC+CB

$$\int\limits_{AB} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{AC} (P\,dx + Q\,dy) + \int\limits_{CB} (P\,dx + Q\,dy)$$

4. Если кривая AB есть прямолинейный отрезок, который перпендикулярен оси 0x, то при любой P(x) интеграл существует и равен 0. (Так как производная от x = const равна 0)

$$\int\limits_{AB} P\,dx = 0$$

Аналогично с 0y и 0z.

20.6 Смысл геометрический и физический интеграла.

Если $\overline{F} = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ - вектор силы, перемещающей точку по кривой L, то $\int\limits_{L}(P\,dx + Q\,dy) = A$ - работа переменной силы по перемещению точки вдоль кривой, $\frac{1}{2}\oint\limits_{\delta D}(P\,dx + Q\,dy) = S(D)$ - площадь области D, где δD - граница области D.

21 Криволинейный интеграл второго рода.

21.1 Связь криволинейного интеграла первого рода со вторым родом + вывод.

Рассмотрим $\int\limits_{AB} P\,dx$, где $P(x,y)$ - непрерывная функция вместе со своими частными производными на рассматриваемой кривой. Кривая AB будет задаваться в явном виде: $y=\psi(x), x\in[a,b]$. Так как кривая непрерывна и $P(x,y)$ - непрерывная функция вместе со своими частными производными на рассматриваемой кривой, то в каждой точке кривой можно построить касательную $y=kx+b$к рассматриваемой кривой. Тогда $y'=k=\tan\alpha=\psi(x)'$, где α - угол наклона касательной.

$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_{AB} P(x,\psi(x))\,dx = \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\cdot 1\cdot\,dx = [\tan^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 = \cos^2\alpha(\tan^2\alpha+1) \Leftrightarrow 1 = \cos\alpha\sqrt{\tan^2\alpha+1}] = \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\cdot \cos\alpha\sqrt{\tan^2\alpha+1}\cdot\,dx = \cos\alpha\sqrt{\psi(x)'^2\alpha+1}$. Вспомним, что $\sqrt{{y'_x}^2+1}\,dx = dl$ в криволинейном интеграле 1 рода. $\Rightarrow \int\limits_L P(x,\psi(x))\cos\alpha\,dl$ - криволинейный интеграл первого рода. Получаем

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_{AB} P(x,\psi(x))\cos\alpha\,dl$$

Аналогичным образом доказывается для $\int\limits_{AB} Q\,dy = \phi(y), y\in[c,d]$

21.2 Формула Остроградского-Грина + вывод.

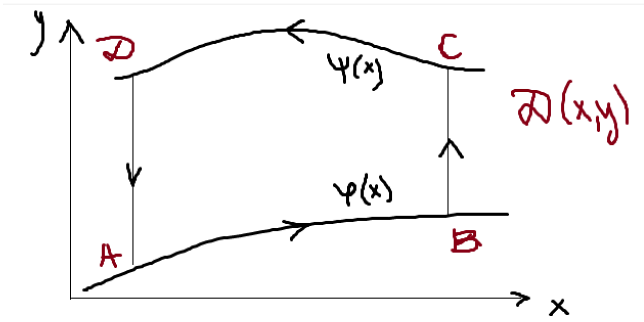
Если функции $P(x,y), Q(x,y)$- непрерывные функции вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ на кривой, которая полностью лежит в области $D(x,y)$ имеет место формула:

$$\oint\limits_{ABCDA} (P\,dx+Q\,dy) = \iint\limits_D (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\,dx\,dy$$

Доказательство

Пусть заданная область $D(x,y)$ ограничена:

1. кривыми $y_1 = \phi(x), y_2 = \psi(x)$
2. с боков $BC||0y, AD||0y$



Рассмотрим $\oint\limits_{ABCDA} (P\,dx + Q\,dy)$ по кускам

1. $\oint\limits_{ABCDA} P\,dx = \int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{BC} P\,dx + \int\limits_{CD} P\,dx + \int\limits_{DA} P\,dx$ Но! $\int\limits_{BC} P\,dx = \int\limits_{DA} P\,dx = 0$ по 4 свойству криволинейных интегралов 2 рода. Подставим кривые $\phi(x), \psi(x)$ в оставшуюся часть. $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + \int\limits_{CD} P(x,y)\,dx = \int\limits_{AB} P(x,\phi(x))\,dx + \int\limits_{CD} P(x,\psi(x))\,dx.$
   (!!!) Так как $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна на L и в области D, то $P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)) = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy$ (Разность первообразных)
   В нашем случае это выглядит как $P(x,\psi(x)) - P(x,\phi(x)) = \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b P(x,\phi(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\,dx = \int\limits_a^b [P(x,\phi(x)) - P(x,\psi(x))]\,dx$. Используя (!!!) получим $-\int\limits_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\phi(x))]\,dx = -\int\limits_a^b 1\,dx \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy = -\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx$ Итого:

Малая формула Грина

$$\oint\limits_{ABCDA} P\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx$$

2. Аналогичным образом малая формула Грина доказывается для Q(x, y). Итого имеем

$$\oint\limits_{ABCDA} Q\,dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dy\,dx$$

Формула Остроградского-Грина

$$\oint\limits_{ABCDA} P\,dx + \oint\limits_{ABCDA} Q\,dy = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx +$$

$$+\iint\limits_{D} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dy\,dx = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})\,dy\,dx$$

21.3 Криволинейный интеграл второго рода не зависящий от пути интегрирования свойство, теорема.

Рассмотрим функции $P(x,y), Q(x,y)$- непрерывные функции вместе со своими частными производными на рассматриваемой кривой и в области $D(x,y)$. Свойства:

1. Криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути интегрирования, если результат вычисления криволинейного интеграла по каждому кривой соединяющей точки A и B остаётся одним и тем же.
2. Если выполняется условие Грина:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

то криволинейный интеграл $\int\limits_{(x_0,y_0)} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy)$ не зависит от пути интегрирования.

3. Если выполняется условие Грина:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

то выражение $P\,dx + Q\,dy$ будет являться дифференциалом функции $U(x,y)$, т.е $dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

$\int\limits_{AB} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{AB} dU\,dx\,dy = U(x,y)$ - криволинейный интеграл не будет зависеть от контура.

4. $\oint\limits_{\gamma}(P\,dx + Q\,dy) = \iint\limits_{D}(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})\,dx\,dy = 0$, если $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$

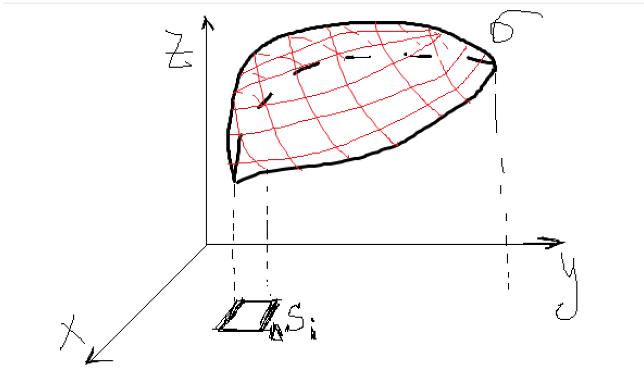
21.4 Приложение криволинейных интегралов.

1. Если $f(x,y)$-линейная плотность, то $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = m$ - масса дуги. Криволинейный интеграл 1 рода.
2. $\oint\limits_{L}(x\,dy - y\,dx) = 2S_D$. Площадь плоской фигуры.
3. $\int P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, где (P, Q) $= \vec{F}$ - сила перемещения, $(dx, dy) = \vec{S}$, то => $\int \vec{F} d\vec{S} = W$ - работа по перемещению точки вдоль контура

22 Поверхностный интеграл первого рода.

22.1 Определение

1. Пусть σ - гладкая ограниченная поверхность.
2. В каждой точке σ определена функция $g(M) = g(x, y, z)$
3. Разобьём σ сетью кусочно-гладких кривых на ячейки $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Каждая ячейка $\sigma_i(i = (1 \ldots n)$ однозначно проектируется на 0xy $\Rightarrow$ однозначно проектируется на касательную плоскость.
4. Вводим ΔS_i— площадь σ_i

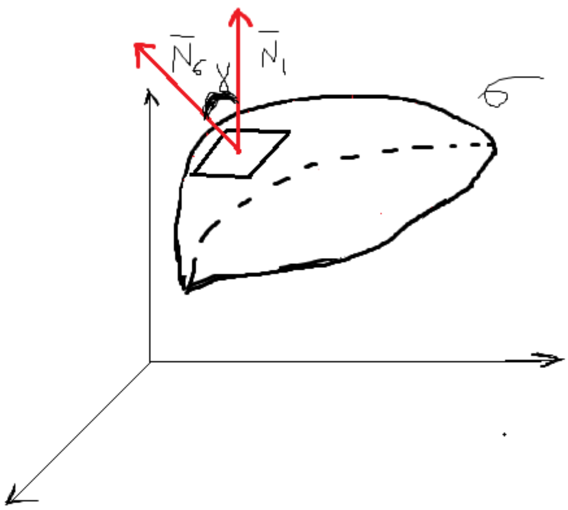


5. d_i - диаметр ячеек. $\lambda = max(d_i)$ - ранг дробления.
6. В каждой плоскости σ_i выберем произвольную точку M(x, y, z).
7. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(M) \cdot \Delta S_i$
8. Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(M) \cdot \Delta S_i$. Если предел существуем и конечен, то он называется поверхностным интегралом 1 рода.

$$\lim_{n\to\infty\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i(M) \cdot \Delta S_i = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma$$

22.2 Вывод формулы

Пусть поверхность σ однозначно проектируется на плоскость 0xy, поверхность описывается уравнением $F(x, y, z) = 0$ при условии, что $z = f(x, y)$, где $f(x.y) \in D(x, y)$



1. Рассмотрим точку на σ и проведем к этой точке касательную плоскость.
2. Рассмотрим N_1 к касательной плоскости (касательная плоскость || 0xy) и N_σ к поверхности σ.
3. $N_1 = (0, 0, 1), cos\gamma = \frac{dx\,dy}{d\sigma}, \cos\gamma = \frac{\overline{N_1 N_\sigma}}{|\overline{N_1} \cdot \overline{N_\sigma}|}$
   $N_\sigma = (\overline{F}'_x, \overline{F}'_y, \overline{F}'_z) = [F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0] = (f'_x, f'_y, -1)$
   $|N_\sigma| = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}, |N_1| = 1$
   $\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}} = \frac{dx\,dy}{d\sigma} \Rightarrow d\,\sigma = dx\,dy\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}$ (связь $d\sigma$ и $dx\,dy$).

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D0xy} f(x,y,f(x,y)) \cdot \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}\,dx\,dy$$

22.3 Свойства

1. Если поверхность задана так: $z = f(x,y)$, то интеграл:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D0xy} f(x,y,f(x,y)) \cdot \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}\,dx\,dy$$

2. Если поверхность задана так: $x = f(y,z)$, то интеграл:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D0zy} f(f(y,z),y,z) \cdot \sqrt{f'^2_y + f'^2_z + 1}\,dz\,dy$$

3. Если поверхность задана так: $y = f(x, z)$, то интеграл:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{D0xz} f(x, f(x, z), z) \cdot \sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}\, dx\, dz$$

22.4 Геометрический и физический смысл

Геометрический смысл

$\iint\limits_{\sigma} 1\, d\sigma$ - площадь поверхности σ

Физический смысл

Если $\rho = \rho(x, y, z)$ - плотность распределения массы материальной поверхности σ, то $\iint\limits_{\sigma} \rho(x, y, z)\, d\sigma = m$ - масса поверхности

23 Поверхностный интеграл второго рода.

23.1 Определение

П - поток через поверхность. Потоком жидкости через поверхность σ называется количество жидкости протекающей за единицу измерения.

Рассмотрим поток и гладкую поверхность. Пусть поток течет с постоянной V = const.

Объем тела равен $\Pi = Sh$, S - площадь основания, плоская поверхность, h- высота.

$$h = pr_{\overline{n_0}}\overline{V} = \frac{\overline{V}\overline{n_0}}{|\overline{n_0}|} = (\overline{V}, \overline{n_0}), |\overline{n_0}| = 1$$

$$\Pi = Sh = S(\overline{V}, \overline{n_0})$$

Рассмотрим физическое поле. V изменяется непрерывно. σ - гладкая поверхность, которую можно разбить на маленькие части σ_k, которые будут сравнимы с плоской поверхностью и будут обладать постоянной V перемещения.

1. $\Pi = \sum\limits_{k=1}^{n} (\overline{V}, \overline{n_0})|_{P_k} \cdot S_k$, ($P_k$ - точка).
2. d_i - диаметр ячеек S_k. $\lambda = max(d_i)$ - ранг дробления.
3. Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (\overline{V}, \overline{n_0})|_{P_k} \cdot S_k$. Если предел существуем и конечен, то он называется поверхностным интегралом 2 рода.

$$\lim_{n\to\infty\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\overline{V}, \overline{n_0})|_{P_k} \cdot S_k = \iint\limits_{\sigma} (\overline{V}, \overline{n_0})\, d\sigma$$

$$\overline{V} = \overline{a}$$

Потоком векторного поля $\overline{a}$ через поверхность σ называется поверхностный интеграл 2 рода:

$$\iint\limits_{\sigma} (\overline{a}, \overline{n_0})\, d\sigma$$

23.2 Представление в скалярном виде

$$\overline{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\overline{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\overline{a} \cdot \overline{n_0} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma,$$

$$\iint\limits_{\sigma} (\overline{a}, \overline{n_0})\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma$$

(поверхностный интеграл 1 рода)

$$\iint\limits_{\sigma} (P\, dy\, dz \pm Q\, dx\, dz \pm R\, dx\, dy)$$

(поверхностный интеграл 2 рода)

23.3 Связь 1 и 2 рода

$$\iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} (P\, dy\, dz \pm Q\, dx\, dz \pm R\, dx\, dy)$$

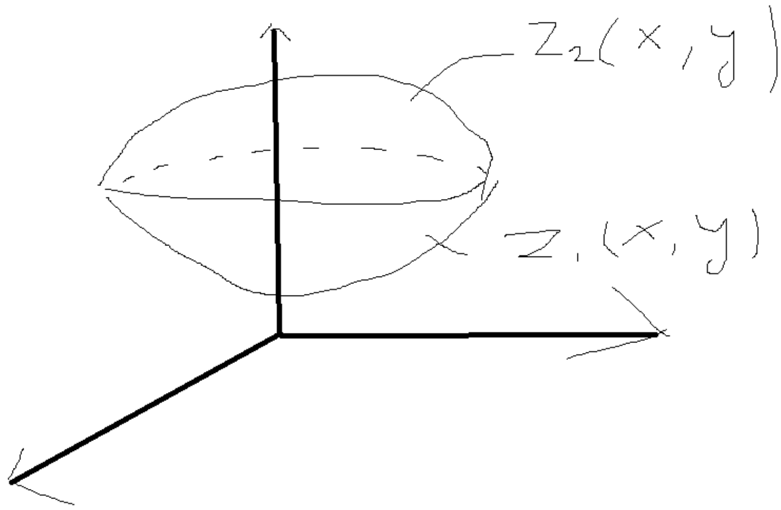
23.4 Теорема Гаусса-Остроградского

Если в некоторой области G в пространстве $\mathbb{R}^3$ координаты $\overline{a}(P,Q,R)$ - непрерывные функции и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$, то

$$\oiint\limits_{\sigma} (\overline{a}, \overline{n_0})\, d\sigma = \iiint\limits_{T} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\, dx\, dy\, dz$$

Доказательство

Рассмотрим поверхность, которая пересекает OZ не более чем в 2 точках, т.е. $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$, т.е. поверхность однозначно проецируется на OXY



Пусть $\vec{a} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} = R(x, y, z)\vec{k}$

$$\oiint\limits_{\sigma} \vec{a}\vec{n}d\sigma = \iint\limits_{\sigma} Rdxdy = \iint\limits_{D_{OXY}} Rdxdy =$$

$$\iint\limits_{D_{OXY}} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(xy)))dxdy =$$

$$\iint\limits_{D_{OXY}} dxdy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\delta R}{\delta z}dz = \iiint\limits_{T} \frac{\delta R}{\delta z}dxdydz$$

Остальное аналогично

24 Теория поля

24.1 Определения

Скалярное поле - поле, в котором в каждой точке определена скалярная величина. Иначе говоря, скалярное поле - это скалярная функция $U(x, y, z)$ вместе с ее областью определения.

$$U(x, y, z) = 0 \in \mathbb{R}^3$$

Векторное поле - поле, в каждой точке которого определена векторная функция.

$$\overline{a} - \text{векторное поле}$$

$$\overline{a}(x, y, z) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$$

24.2 Характеристики поля

1. Потоком векторного поля через поверхность σ называется поверхностный интеграл второго рода от векторной функции а (x, y, z) по поверхности σ,

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\overline{a} \cdot \overline{n_0})\, d\sigma$$

$$\Pi = \oiint\limits_{\Sigma} (\overline{a} \cdot \overline{n_0})\, d\sigma = \iiint\limits_{T} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\, dx\, dy\, dz$$

2. Пусть вдоль замкнутого контура γ задано векторное поле а. Криволинейный интеграл второго рода от вектора а по контуру γ называется циркуляцией векторного поля а

$$\text{Ц} = C = \oint\limits_{\gamma} \overline{a} \cdot \overline{r}\, d\overline{r}$$

Циркуляция векторного поля имеет простую физическую интерпретацию. Если F – сила, действующая на частицу, то циркуляция векторного поля F представляет собой работу этой силы по перемещению частицы по замкнутому контуру.

Формула Стокса:

$$C = \oint_{\gamma} \overline{a} \cdot \overline{r}\, d\overline{r} = \iint_{\Sigma} rot\overline{a} \cdot \overline{n_0}\, d\sigma$$

24.3 Ротор

$$rot\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \overline{a} = (P, Q, R)$$

Векторное поле $\overline{a}$ называется ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ, если ротор этого поля равен нулю. Потенциальное поле можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля.

24.4 Дивергенция

$$div\overline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Векторное поле $\overline{a}$ называется СОЛЕНОИДАЛЬНЫМ, если дивергенция этого поля равна нулю.