Лабораторaная работа 3
”Численное интегрирование функций”

Глеб Бузин
Московский физико-технический институт

1 Марта, 2022

Содержание

1 Теория

1.1 Численное интегрирование

Численное интегрирование - методы вычисления значения интеграла

$$J = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

Самые широко используемые в практических вычислениях - методы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Способ их получения состоит в следующем. Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на N элементарных шагов. Точки разбиения $x_n (n = 0, 1, ..., N); h_n = x_{n+1} - x_n$, так что $\sum_{n=0}^{N-1} h_n = b - a$. В дальнейшем будем называть x_n узлами, h_n - шагами интегрирования. (В частном случае шаг интегрирования может быть постоянным $h = (b-a)/N$.) Искомое значение интеграла представим в виде

$$J = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x\right)dx = \sum_{n=0}^{N-1} J_n, \tag{1}$$

где $J_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x\right)dx$.

1.2 Метод прямоугольников

Считая h_n малым параметром, заменим J_n в (1) площадью прямоугольника с основанием h_n И высотой $f_{n+1/2} = f(x_n + h_n/2)$. Тогда придем к локальной формуле прямоугольников

$$\tilde{J}_n = h_n f_{n+1/2}$$

Суммируя в соответствии с (1) приближенные значения по всем элементарным отрезкам, получаем формулу прямоугольников для вычисления приближения J:

$$\tilde{J} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n f_{n+1/2}$$

В частном случае, когда $h_n = h = const$, формула прямоугольников записывается в виде

$$\tilde{J} = h \sum_{n=0}^{N-1} f_{n+1/2}$$

1.3 Метод трапеций

На элементарном отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ заменим подынтегральную функцию интерполяционным полиномом первой степени:

$$f(x) \approx f_n + \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n)$$

Выполняя интегрирование по отрезку, приходим к локальной формуле трапеций:

$$\tilde{J}_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)(f_{n+1} + f_n) = \frac{1}{2}h_n(f_{n+1} + f_n) \tag{2}$$

Суммируя (2) по всем отрезкам, получаем формулу трапеций для вычисления приближения к J:

$$\tilde{J} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} h_n(f_n + f_{n+1})$$

1.4 Метод Симпсона

На элементарном отрезке $[x_n, x_{n+1}]$, привлекая значение функции в середине, заменим подынтегральную функцию интерполяционным полиномом второй степени

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_2(x) = f_{n+1/2} + \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n}(x - \frac{x_{n+1} + x_n}{2}) + \\ + \frac{f_{n+1} - 2f_{n+1/2} + f_n}{2(h_n/2)^2}(x - \frac{x_{n+1} + x_n}{2})^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Вычисляя интеграл от полинома по отрезку $[x_n, x_{n+1}]$, Приходим к локальной формуле Симпсона

$$\tilde{J}_n = \frac{h_n}{6}(f_n + 4f_{n+1/2} + f_{n+1}) \tag{4}$$

Суммируя (4) по всем отрезкам, получаем формулу Симпсона для вычисления приближения к J:

$$\tilde{J} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N-1} h_n(f_n + 4f_{n+1/2} + f_{n+1}) \tag{5}$$

1.5 Погрешность квадратурных формул

Для рассмотренных квадратурных формул оценки погрешности имеют вид:

Формула прямоугольников (левых и правых) - $|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{2}(b-a)M_1\overline{h}$

Формула прямоугольников (средних) - $|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{24}(b-a)M_2\overline{h}^2$

Формула трапеций - $|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{12}(b-a)M_2\overline{h}^2$

Формула Симпсона - $|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{180}(b-a)M_4\overline{h}^4$

2 Задача

Используя метод численного интегрирования вычислить интеграл от заданной функции $f(x)$ по заданному интервалу $[a, b]$.

$$\int_1^{4.14159} \ln(x)\,|\cos(128x)|\,dx$$

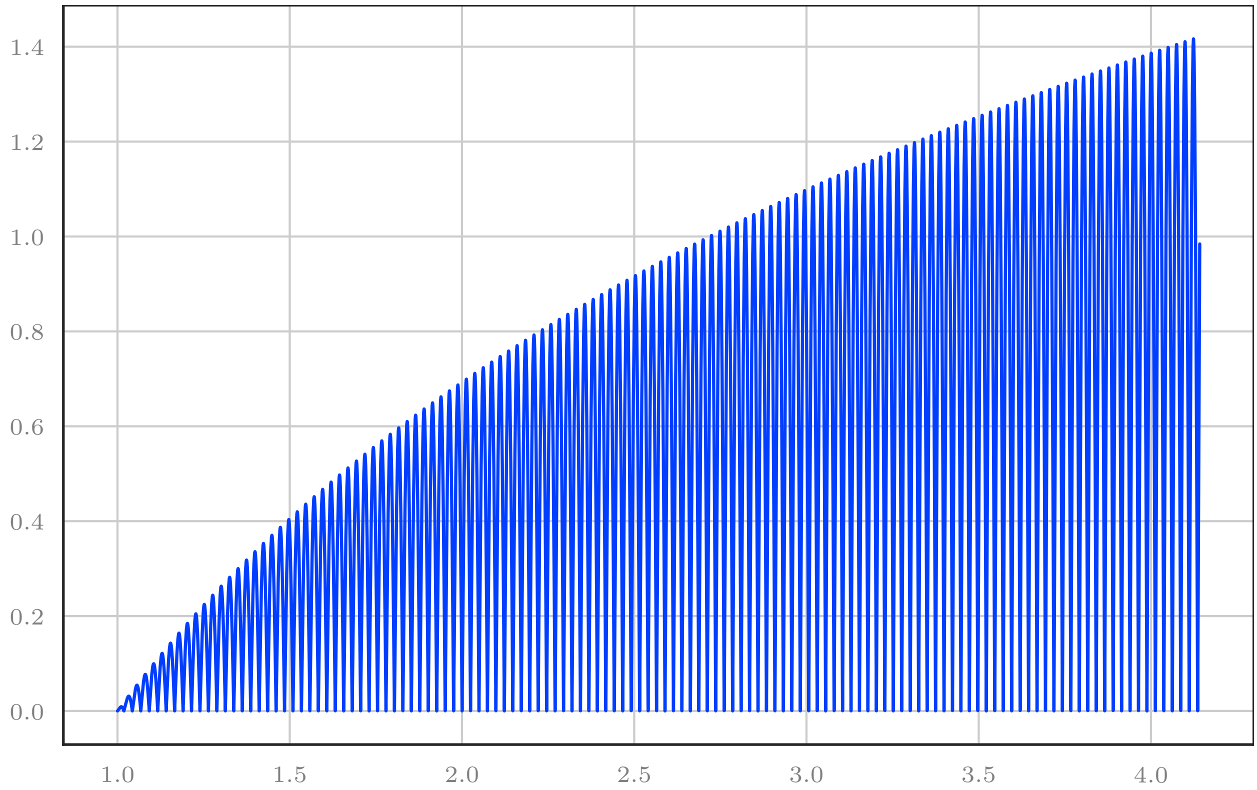

Figure 1: $f(x) = ln(x)|cos(128x)|$
from 1 to $\pi + 1$

3 Аналитическое решение интеграла

Применим интегрирование по частям с заменой

$$\begin{aligned} u = ln(x), du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{128}sin(128x) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\int ln(x)|cos(128x)|dx = \frac{ln(x)sin(128x)}{128} - \int \frac{sin(128x)}{128x}dx \tag{7}$$

Интеграл от функции $f(x) = sinc(x)$ не выражается в элементарных функциях.

4 Численное решение интеграла

4.1 Выбор шага интегрирования по правилу Рунге

Интеграл вычисляется по выбранной формуле (прямоугольников, трапеций, парабол Симпсона) при числе шагов, равном n, а затем при числе шагов, равном $2n$. Погрешность вычисления значения интеграла при числе шагов, равном $2n$, определяется по формуле Рунге:

$$\delta_{2n} \approx \Theta|I_{2n} - I_n|$$

Для формул прямоугольников и трапеций $\Theta = \frac{1}{3}$, а для формулы Симпсона $\Theta = \frac{1}{15}$

Таким образом, интеграл вычисляется для последовательных значений числа шагов

$$N = n_0, 2n_0, 4n_0, \ldots$$

где n_0 - начальное число шагов. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения N будет выполнено условие $\Delta_{2n} < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

4.2 Метод прямоугольников

Определим методы интегрирования для методов средних, левых и правых прямоугольников

```go
func fnGleb(x float64) float64 {
    return math.Log(x) * math.Abs(math.Cos(128*x))
}

type Job struct {
    Method func(Fn, float64, float64) float64
    Target Fn
    Low    float64
    High   float64
    H      float64
}

func integrateSync(
    job Job,
) float64 {
    xNext := job.Low + job.H
    small := 0.0
    total := 0.0
    for x := job.Low; xNext <= job.High; xNext += job.H {
        small = job.Method(job.Target, x, xNext)
        total += small
        x = xNext
    }

    return total
}

type Fn func(float64) float64

func leftRect(fn Fn, a, b float64) float64 {
    return fn(a) * (b - a)
}

func rightRect(fn Fn, a, b float64) float64 {
    return fn(b) * (b - a)
}

func centerRect(fn Fn, a, b float64) float64 {
    return fn((b+a)/2) * (b - a)
}
```

Будем считать по методу Рунге, с начальным $n = 1000$ до тех пор, пока погрешность не достигнет $\varepsilon = 10^{-4}$:

```go
func ascend(job Job) float64 {
    var n int64 = 1000
    var prev float64
    var res float64
    for {
        job.H = (job.High - job.Low) / float64(n)
        res = integrateSync(job)
        if (job.Teta * math.Abs(res-prev)) < precision {
            break
        }
        prev = res
        n *= 2
    }
    return res
}
```

Метод левых прямоугольников:

```
h = 0.0031415930; integral = 1.7415615747
h = 0.0015707965; integral = 1.7438347568
h = 0.0007853983; integral = 1.7435126677
h = 0.0003926991; integral = 1.7443890902
h = 0.0001963496; integral = 1.7442964207
final result: 1.7442964207
final h = 0.000196349562500
```

Конечное значение интеграла $J = 1.7443 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0001963495625$.

Метод правых прямоугольников:

```
h = 0.0031415930; integral = 1.7431477123
h = 0.0015707965; integral = 1.7453815298
h = 0.0007853983; integral = 1.7442012938
h = 0.0003926991; integral = 1.7447757834
h = 0.0001963496; integral = 1.7444846443
FINAL RESULT: 1.7444846443
final h = 0.000196349562500
```

Конечное значение интеграла $J = 1.7445 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0001963495625$.

Метод средних прямоугольников:

```
h = 0.0031415930; integral = 1.7421340596
h = 0.0015707965; integral = 1.7445678307
h = 0.0007853983; integral = 1.7438449587
h = 0.0003926991; integral = 1.7445801984
h = 0.0001963496; integral = 1.7442740465
h = 0.0000981748; integral = 1.7445462512
FINAL RESULT: 1.7445462512
final h = 0.000098174781250
```

Конечное значение интеграла $J = 1.7445 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0000981747813$.

4.3 Метод трапеций

```
func trapezoid(fn Fn, a, b float64) float64 {
    return (fn(a) + fn(b)) * (b - a) / 2
}
```

Итерации:

```
h = 0.0031415930; integral = 1.7423546435
h = 0.0015707965; integral = 1.7446081433
h = 0.0007853983; integral = 1.7438569807
h = 0.0003926991; integral = 1.7445824368
h = 0.0001963496; integral = 1.7443905325
FINAL RESULT: 1.7443905325
final h = 0.000196349562500
```

Конечное значение интеграла $J = 1.7444 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0001963495625$.

4.4 Метод Симпсона

```
func simpson(fn Fn, a, b float64) float64 {
    return ((b - a) / 6) * (fn(a) + 4*fn((a+b)/2) + fn(b))
}
```

Итерации:

```
h = 0.0031415930; integral = 1.7422075876
h = 0.0015707965; integral = 1.7445812682
h = 0.0007853983; integral = 1.7438489660
FINAL RESULT: 1.7438489660
final h = 0.000785398250000
```

Конечное значение интеграла $J = 1.7438 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0007853982500$.

5 Оценка погрешности

Метод левых (правых) прямоугольников

Оценим максимум первой производной на заданном отрезке

$$f'(x) = \frac{cos(128x)}{x} - \frac{128ln(x)sin(128x)cos(128x)}{|cos(128x)|}$$

Максимум достигается при $x \approx 1.023$.

$$M_1 = max(f'(x)) \approx 2.9803 \leq 3$$

$$\delta \leq \frac{1}{2}h(b-a)M_1$$

$$h \leq \frac{2}{3.14159 * 3} * 10^{-4} = 0.2122 * 10^{-4}$$

Что удовлетворяет найденному по правилу Рунге $h = 0.1963 * 10^{-4}$.

Метод средних прямоугольников

Оценим максимум второй производной на заданном отрезке

$$\begin{aligned} f''(x) = -|cos(128x)|/x^2 - (16384log(x)cos^2(128x))/|cos(128x)| - \\ -(256sin(128x)cos(128x))/(x|cos(128x)|) - \\ -(16384log(x)sin^2(128x)cos^2(128x))/|cos(128x)|^3 + \\ +(16384log(x)sin^2(128x))/|cos(128x)| \end{aligned} \tag{8}$$

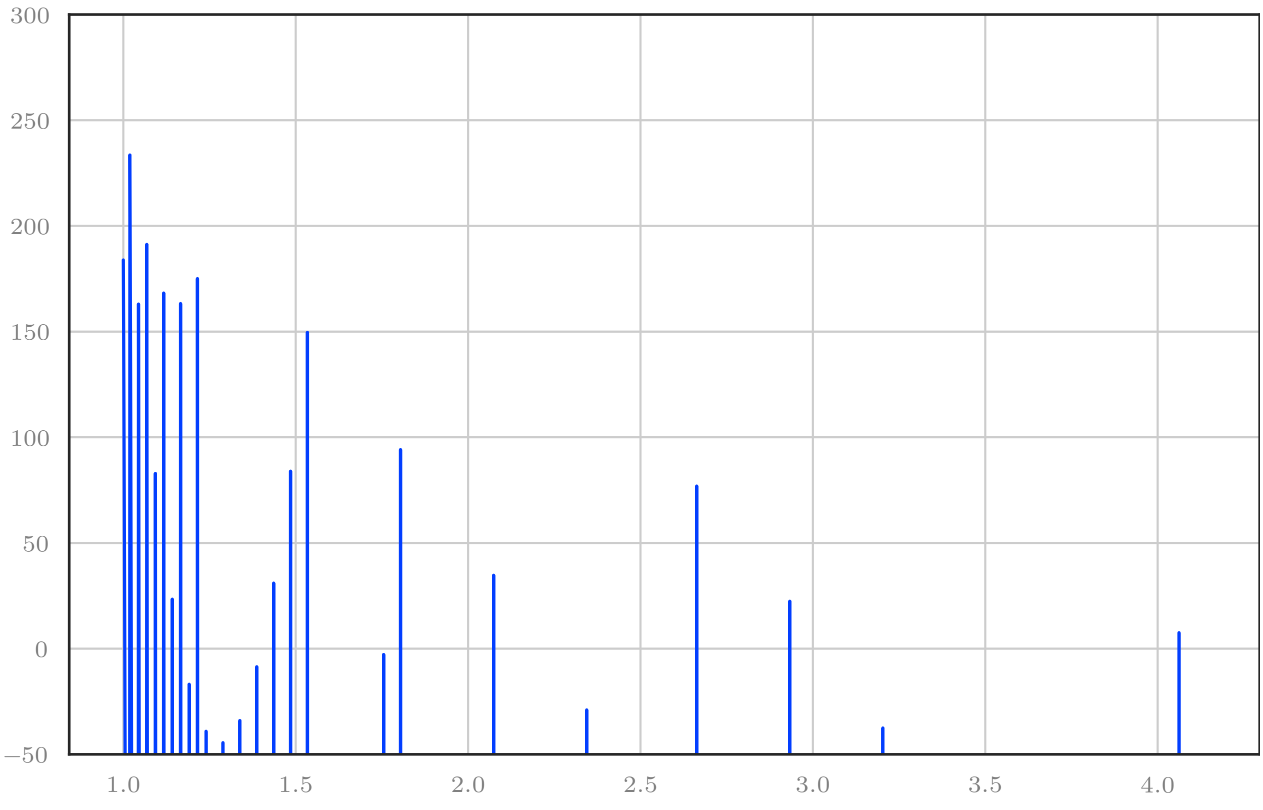

Figure 2: $f''(x)$
from 1 to $\pi + 1$

Из графика $M_2 \leq 250$. Для метода средних прямоугольников

$$\delta \leq \frac{1}{24}h^2(b-a)M_2$$

$$h \leq 0.173 * 10^{-2}$$

Что удовлетворяет найденному по правилу Рунге (порядок 10^{-4}).

Метод трапеций

$$\delta \leq \frac{1}{12}h^2(b-a)M_2$$

$$h \leq 0.1236 * 10^{-2}$$

Что удовлетворяет найденному по правилу Рунге (порядок 10^{-4}).

6 Вывод

К численному интегрированию приходится обращаться, когда требуется вычислить определённый интеграл от функций, заданных таблично, или непосредственное нахождение первообразной затруднительно. Последнее, например, возникает при сложном аналитическом задании подинтегральной функции, а также, если интеграл не берётся в элементарных функциях.

При использовании разных методов значение интегала и шаг для получения заданной точности соответственно:

- Метод левых прямоугольников $J = 1.7443 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0001963495625$.
- Метод правых прямоугольников $J = 1.7445 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0001963495625$.
- Метод средних прямоугольников $J = 1.7445 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0000981747813$.
- Метод трапеций $J = 1.7444 \pm 10^{-4}$ при шаге $h = 0.0001963495625$.

Метод Симпсона достигает заданной погрешности $\varepsilon = 10^{-4}$ при наименьшем количестве разбиений. Найденное значение интеграла при этом $J = 1.7438 \pm 10^{-4}$.