Лабораторaная работа 3

”Численное интегрирование функций”

Глеб Бузин - Б03-907

2022-02-01

Содержание

1 Теория

1.1 Численное интегрирование

Численное интегрирование - методы вычисления значения интеграла

$$J = \int_a^b f(x)\, dx$$

Самые широко используемые в практических вычислениях - методы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Способ их получения состоит в следующем. Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на N элементарных шагов. Точки разбиения $x_n (n = 0, 1, ..., N); h_n = x_{n+1} - x_n$, так что $\sum_{n=0}^{N-1} h_n = b - a$. В дальнейшем будем называть x_n узлами, h_n - шагами интегрирования. (В частном случае шаг интегрирования может быть постоянным $h = (b-a)/N$.) Искомое значение интеграла представим в виде

$$J = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{N-1} J_n, \tag{1}$$

где $J_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\, dx$.

1.2 Метод прямоугольников

Считая h_n малым параметром, заменим J_n в (1) площадью прямоугольника с основанием h_n и высотой $f_{n+1/2} = f(x_n + h_n/2)$. Тогда придем к локальной формуле прямоугольников

$$\tilde{J}_n = h_n f_{n+1/2}$$

Суммируя в соответствии с (1) приближенные значения по всем элементарным отрезкам, получаем формулу прямоугольников для вычисления приближения J:

$$\tilde{J} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n f_{n+1/2}$$

В частном случае, когда $h_n = h = const$, формула прямоугольников записывается в виде

$$\tilde{J} = h \sum_{n=0}^{N-1} f_{n+1/2}$$

1.3 Метод трапеций

На элементарном отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ заменим подынтегральную функцию интерполяционным полиномом первой степени:

$$f(x) \approx f_n + \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n)$$

Выполняя интегрирование по отрезку, приходим к локальной формуле трапеций:

$$\tilde{J}_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)(f_{n+1} + f_n) = \frac{1}{2}h_n(f_{n+1} + f_n) \tag{2}$$

Суммируя (2) по всем отрезкам, получаем формулу трапеций для вычисления приближения к J:

$$\tilde{J} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} h_n(f_n + f_{n+1})$$

1.4 Метод Симпсона

На элементарном отрезке $[x_n, x_{n+1}]$, привлекая значение функции в середине, заменим подынтегральную функцию интерполяционным полиномом второй степени

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_2(x) = f_{n+1/2} + \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n}(x - \frac{x_{n+1} + x_n}{2}) + \\ + \frac{f_{n+1} - 2f_{n+1/2} + f_n}{2(h_n/2)^2}(x - \frac{x_{n+1} + x_n}{2})^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Вычисляя интеграл от полинома по отрезку $[x_n, x_{n+1}]$, Приходим к локальной формуле Симпсона

$$\tilde{J}_n = \frac{h_n}{6}(f_n + 4f_{n+1/2} + f_{n+1}) \tag{4}$$

Суммируя (4) по всем отрезкам, получаем формулу Симпсона для вычисления приближения к J:

$$\tilde{J} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N-1} h_n(f_n + 4f_{n+1/2} + f_{n+1}) \tag{5}$$

1.5 Погрешность квадратурных формул

Для рассмотренных квадратурных формул оценки погрешности имеют вид:

Формула прямоугольников (левых и правых) - $|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{2}(b - a)M_1\overline{h}$

Формула прямоугольников (средних) - $|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{24}(b - a)M_2\overline{h}^2$

Формула трапеций - $|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{12}(b - a)M_2\overline{h}^2$

Формула Симпсона - $|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{180}(b - a)M_4\overline{h}^4$

2 Задача

Используя метод численного интегрирования вычислить интеграл от заданной функции $f(x)$ по заданному интервалу $[a, b]$.

$$\int_1^{4.14159} \ln(x)\, |\cos(128x)|\, dx$$

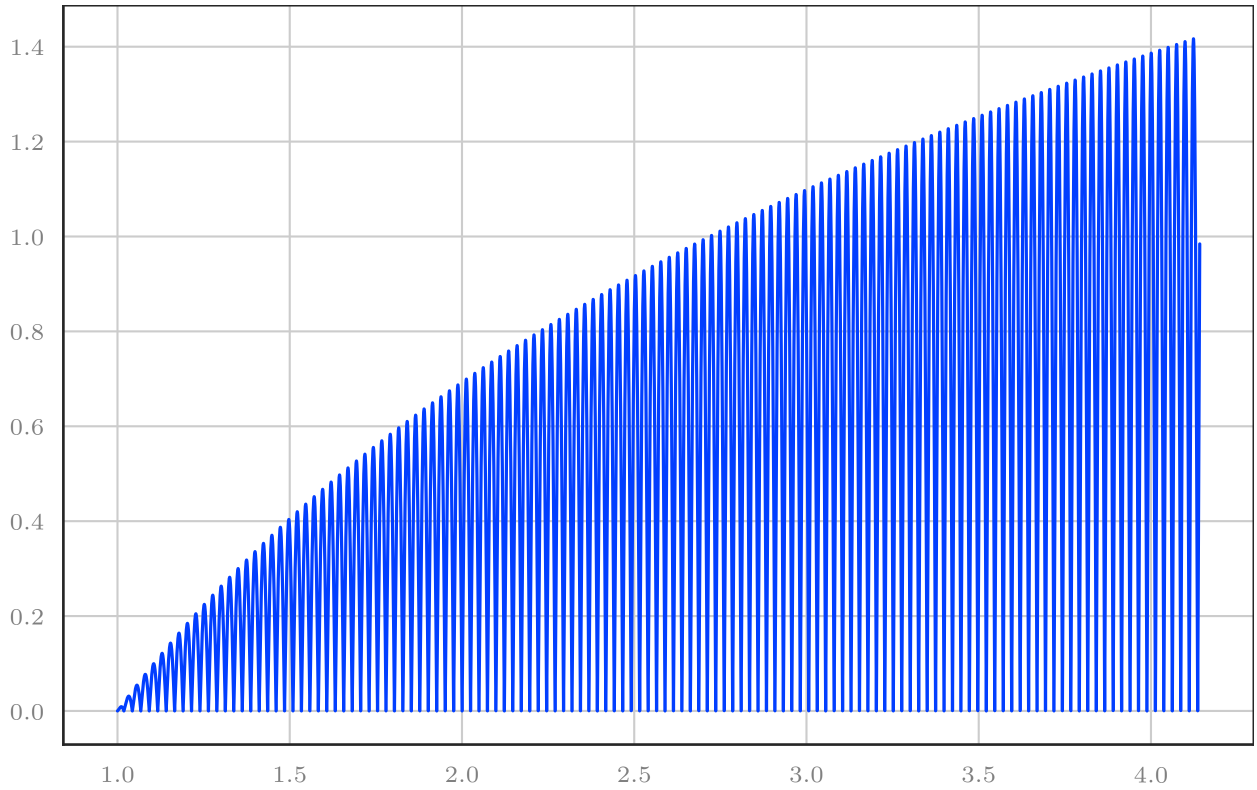

Figure 1: $f(x) = ln(x)|cos(128x)|$
from 1 to $\pi + 1$

3 Аналитическое решение интеграла

Применим интегрирование по частям с заменой

$$\begin{aligned} u = ln(x), du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{128}sin(128x) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\int ln(x)|cos(128x)|dx = \frac{ln(x)sin(128x)}{128} - \int \frac{sin(128x)}{128x}dx \tag{7}$$

$$\int_{1}^{4.141593} ln(x)|cos(128x)|dx = \tag{8}$$

4 Численное решение интеграла

4.1 Выбор шага интегрирования

4.2 Метод прямоугольников

4.3 Метод трапеций

4.4 Метод Симпсона

5 Вывод