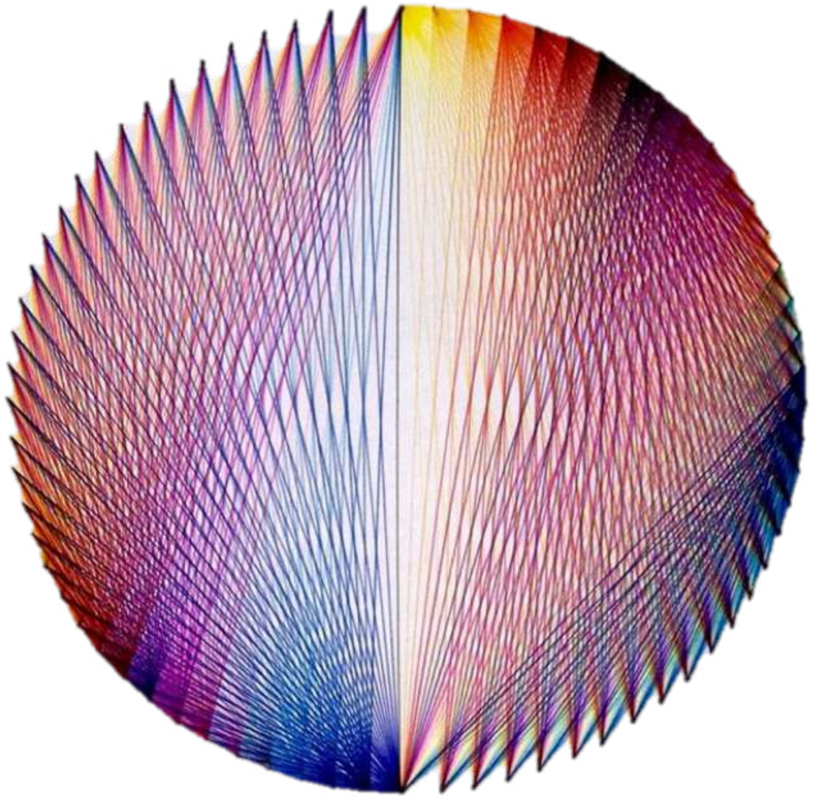
Основные определения теории графов

Алгоритмы и структуры данных на языке Python

Захаров Степан Алексеевич

МФТИ, 2020



instagram.com/regolo54

Глоссарий

вершина
вес графа
вес ребра
взвешенный граф
висячая вершина
высота дерева
гамильтонов граф
гамильтонов контур/путь
гамильтонов орграф
гамильтонов цикл
гамильтонова цепь
двудольный граф
дерево
диаметр графа
достижимость вершины
дуга
изолированная вершина
изоморфность графов
инцидентность
компонента связности
конец дуги
контур
корень
корневое дерево
кратное ребро
лемма о рукопожатиях
маршрут
минимальное остовное дерево
мост
начало дуги
неориентированный граф
область связности
ориентированный граф
ориентированный маршрут
остовное дерево
остовный подграф
параллельные дуги
петля
подграф
полный граф
полустепень захода
полустепень исхода
порядок
простая цепь
простой граф
простой цикл
пустой граф
путь
расстояние между вершинами
ребро
связный граф
сильносвязная компонента орграфа
сильносвязный орграф
смежность
степень вершины
точка сочленения
уровень вершины
цепь
цикл
циклический маршрут
эйлеров граф
эйлеров орграф
эйлеров цикл
эйлерова цепь
эксцентриситет вершины
элемент

Материалы

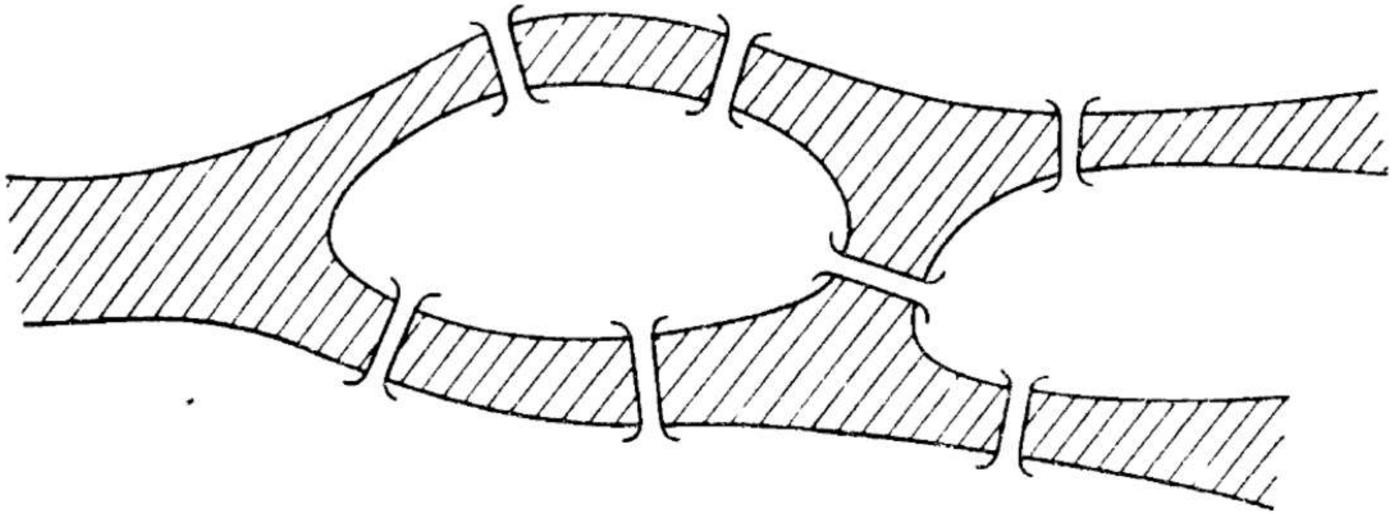
Лекции по теории графов. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. – М.: Наука, 1990, С.384.

«Алгоритмы на Python 3. Лекция №23 (весной 9-я)». YouTube-канал «Тимофей Хирьянов». URL: https://www.youtube.com/watch?v=rg7DX6U0v9k

Предисловие

Задача о кёнигсбергских мостах. Можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя ровно один раз по каждому мосту?

Схема мостов показана снизу.



Определение неориентированного графа

Неориентированный граф (граф) $G(V, E)$ это пара множеств (V, E), где

- V – непустое множество,
- E – подмножество неупорядоченных пар из $V^{(2)}$.

Элементы множества V называют вершинами (vertexes). Число вершин графа обозначают $|V|$ (или $|G|$) и называют порядком графа.

Элементы множества E называют рёбрами (edges).

Вершины и ребра графа называют его элементами.

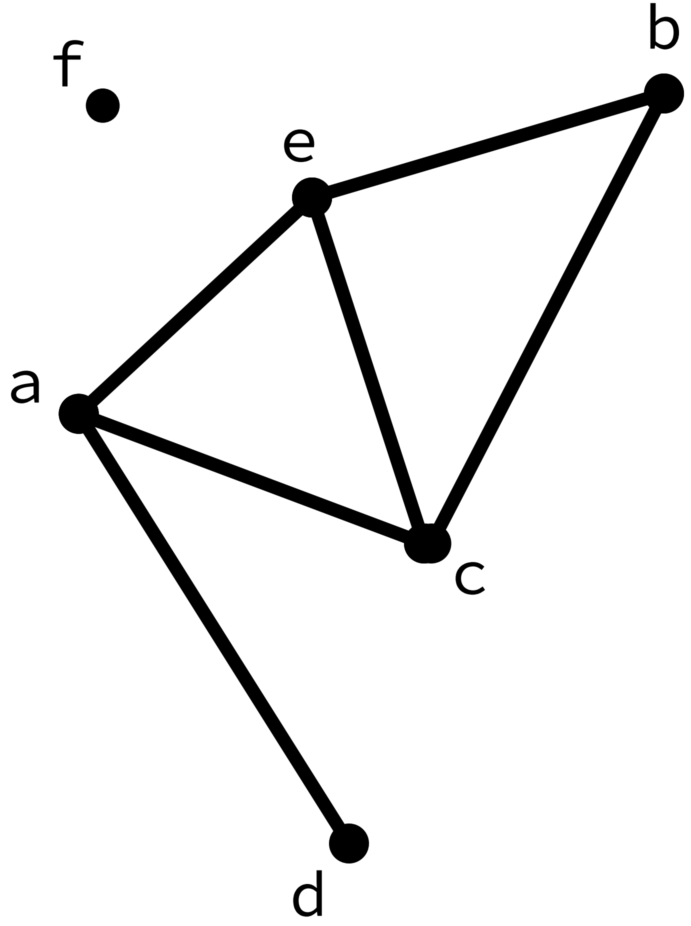
Определение неориентированного графа: пример

{} – неупорядоченное множество

V = {a, b, c, d, e, f}

E = {{a, c}, {a, d}, {a, e}, {b, e}, {c, e}, {c, b}}

|V| = 6; |E| = 6



Отношения между вершинами и рёбрами

Две вершины u и v называют смежными, если {u, v} является ребром.

Если ребро e = {u, v}, то вершины u и v называют концами ребра e. Тогда говорят, что ребро e соединяет вершины u и v. Такое ребро могут обозначать проще: e = uv.

Два ребра называют смежными, если они имеют общий конец.

Вершина u и ребро e называют инцидентными, если u является концом ребра e.

\# смежность – отношение между однородными элементами графа,
\# инцидентность между разнородными

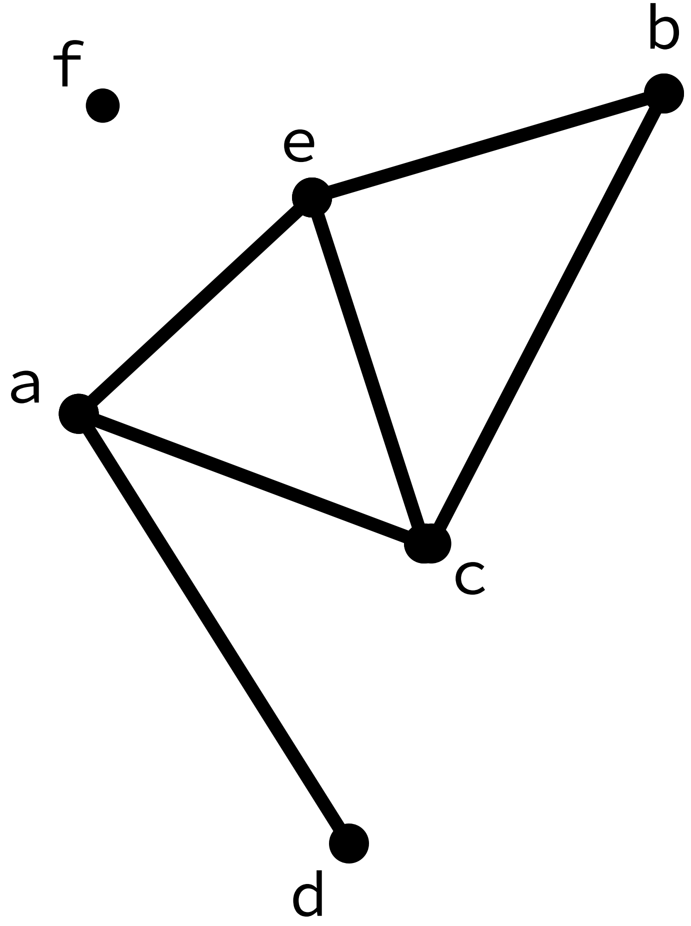
Отношения между вершинами и рёбрами: пример

c и b – смежные вершины

a и e – концы ребра ae

Ребра ae и da – смежные

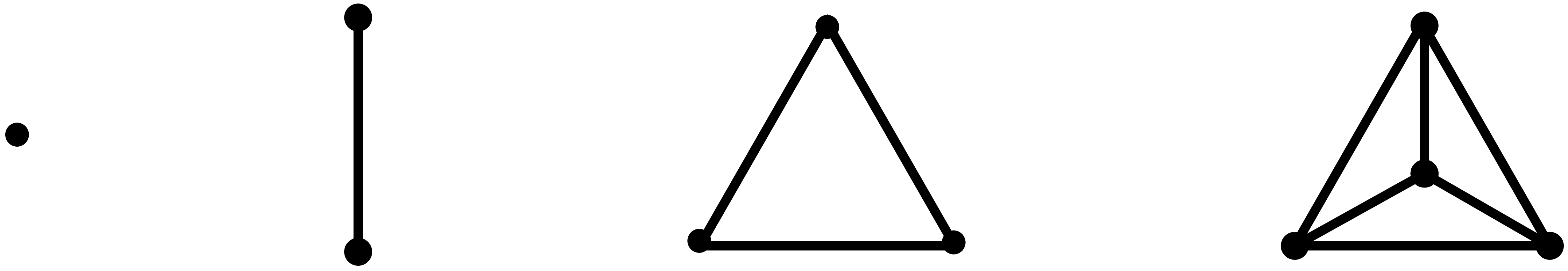
Ребро ec и вершина e инцидентны



Полный граф

Граф называется полным, если любые две его вершины смежны.
каждая вершина соединена с каждой

Ниже показаны первые 4 полные графа.



Граф называет пустым, если в нём нет ребёр.

Двудольный граф

Покрытие множества – набор подмножеств множества S, объединение которых совпадает с S.

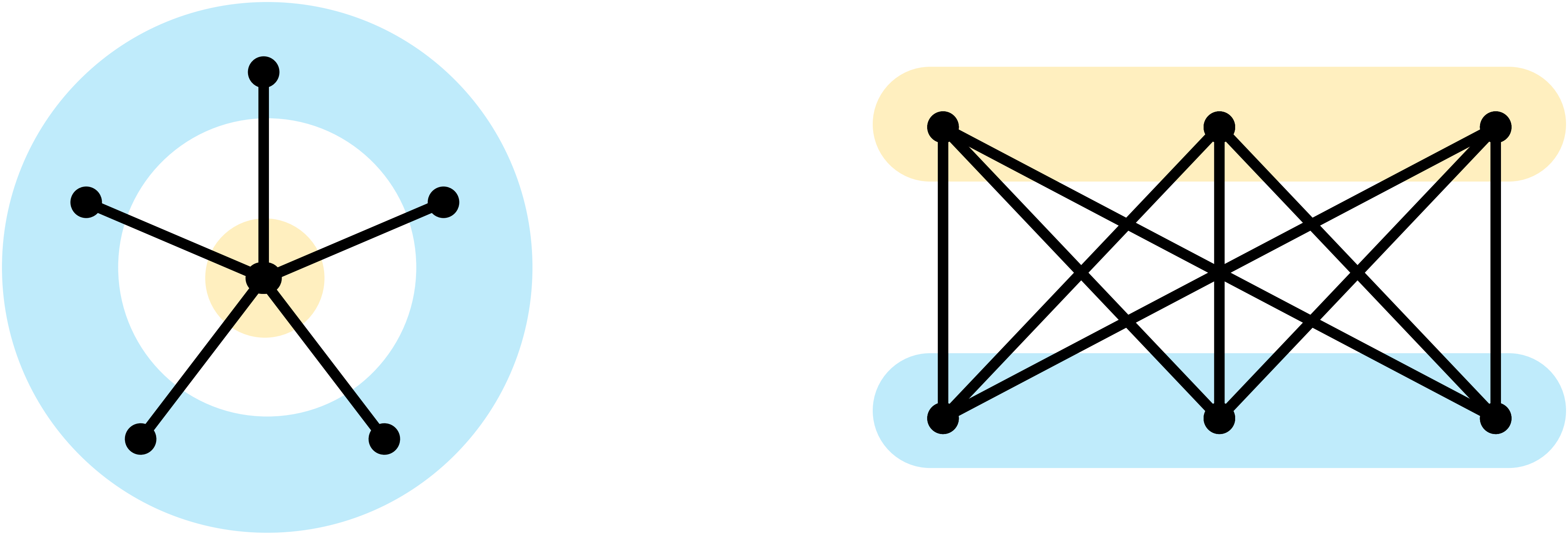
Покрытие называется разбиением, если множества покрытия не пересекаются.

Двудольный граф – граф, для которого существует разбиение множества его вершин на две части (доли), при этом концы каждого ребра принадлежат разным частям.

дольный граф – ни одно ребро «не лежит» целиком в доле

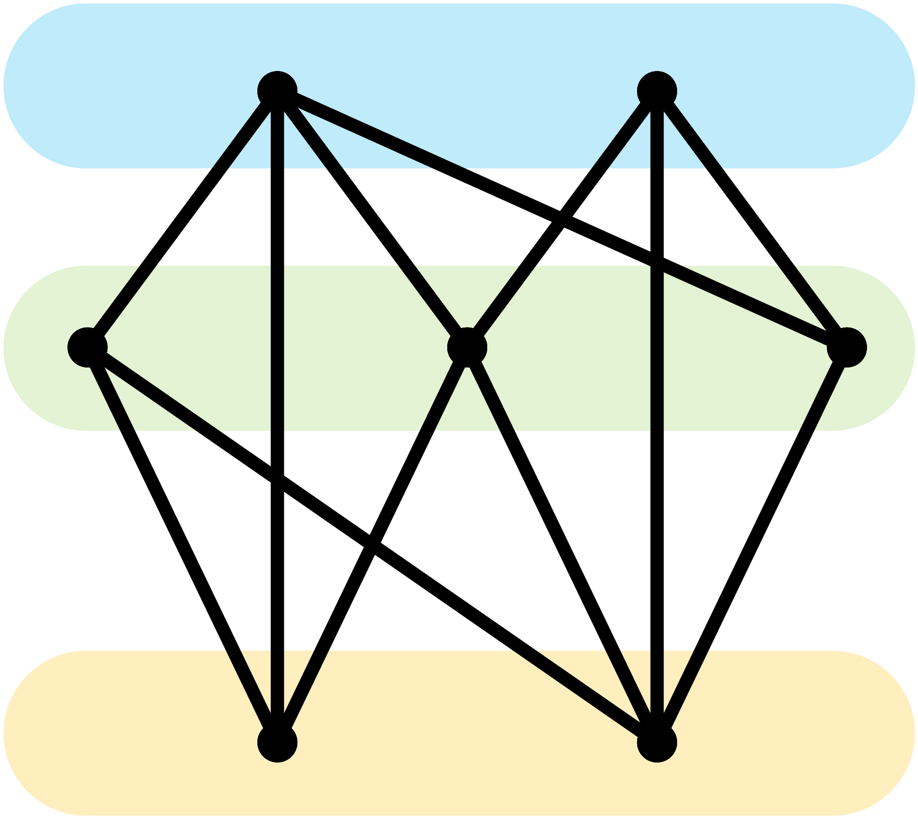
Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называют полным двудольным.

Примеры полных двудольных графов



подсвечены доли разбиения

Пример трёхдольного графа



\# подсвечены доли
\# разбиения

Изоморфность графов

Графы G(VG, EG) и H(VH, EH) называются **изоморфными**, если

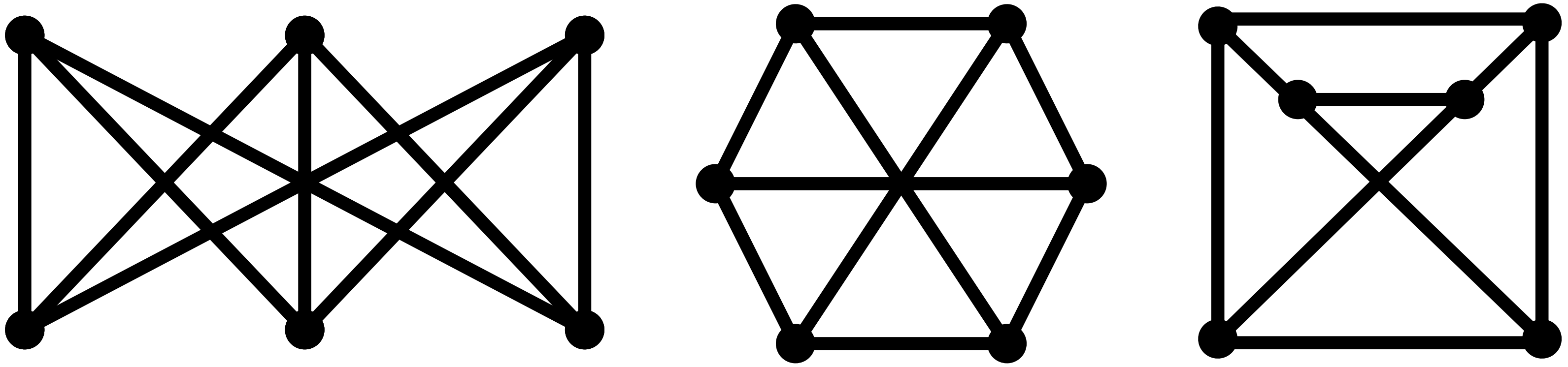
1) существует биекция f между множествами их вершин f: VG → VH
2) f такова, что для любых вершин v, u графа G их образы f(v) и f(u) смежны в графе H тогда и только тогда, когда v и u смежны в G.

Биекция f в таком случае называется **изоморфизмом графа G на граф H**.

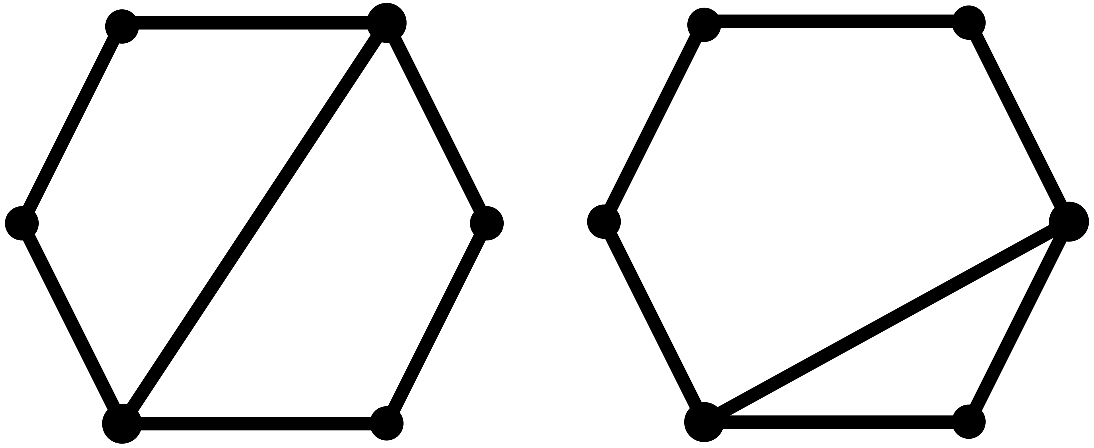
\# от «переименования» или «перетаскивания» вершин вместе с
\# соответствующими ребрами граф не изменится: сохранятся все
\# его свойства, значит, G и H эквивалентные объекты

Изоморфность графов: примеры

изоморфны



не изоморфны

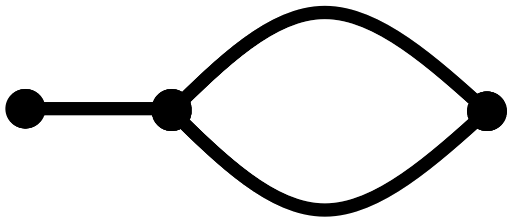


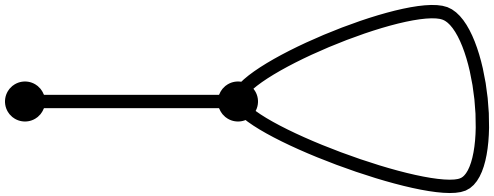
Кратные ребра и петли

Если какое-то ребро во множестве E присутствует более одного раза, то его называют кратным.

Ребро, у которого концы совпадают называют петлёй.

Простой граф – граф, не содержащий кратных рёбер и петель.





Подграф

Граф H(VH, EH) называют подграфом графа G(VG, EG), если

- VH является подмножеством VG,
- EH является подмножеством EG, при этом ребра EH инцидентны вершинам VH.

Тогда говорят, что H содержится в G.

Если VH = VG, то подграф H графа G называют остовным подграфом.

остов: ребра произвольно удалили, а все вершины оставили

Маршрут

Чередующаяся последовательность

v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_l, v_{l+1}

вершин и рёбер графа, такая что
e_i = {v_i, v_{i+1}} называется **маршрутом** из v_1 в v_{l+1}.

Число рёбер в маршруте называют его **длиной**.

{} - неупорядоченное множество
_i и _{i+1} - индексы

Цепи и циклы

Цепь – маршрут, не содержащий повторяющихся рёбер.

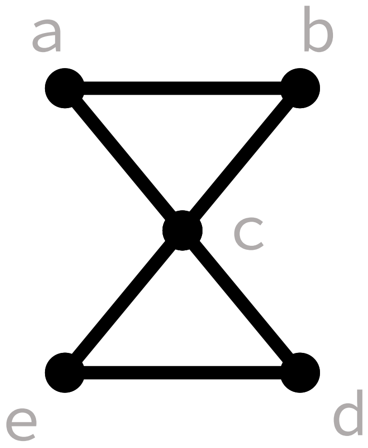
Простая цепь – цепь, не содержащая повторных вершин, кроме, возможно, крайних.

Маршрут называют циклическим, если $v_1 = v_{l+1}$.

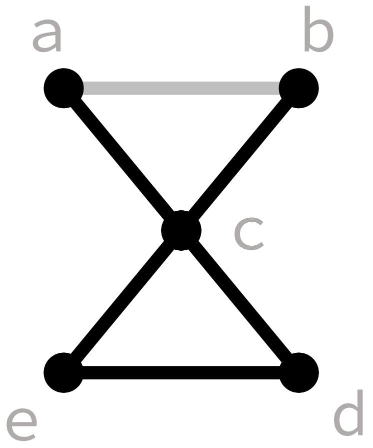
Цикл это циклическая цепь.

Простой цикл это простая циклическая цепь.

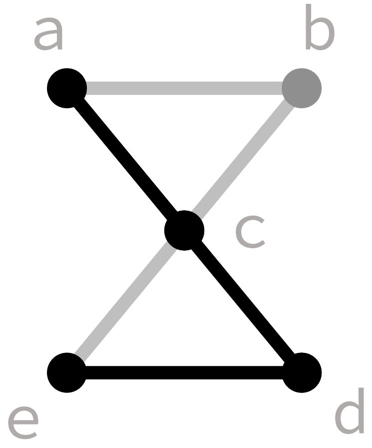
Примеры цепей и циклов



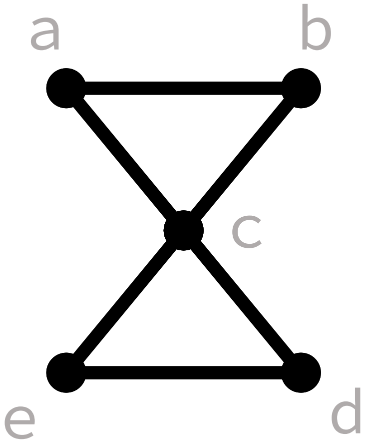
граф



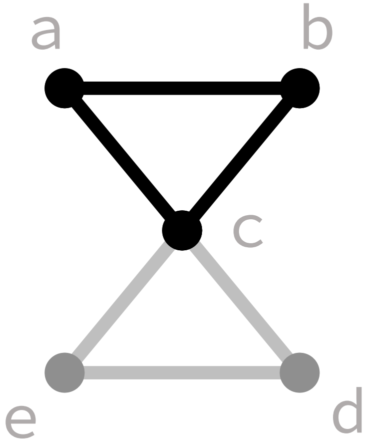
цепь



простая цепь



цикл



простой цикл

Связность

Граф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

Всякий максимальный по включению связный подграф графа G называется связной компонентой (компонентой, компонентой связности).

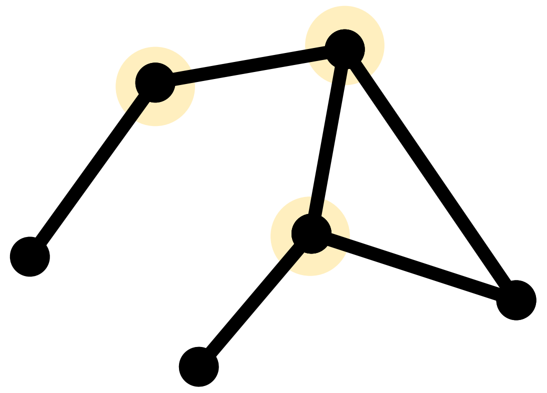
максимальный по включению означает не содержащийся в связном
подграфе с большим числом элементов

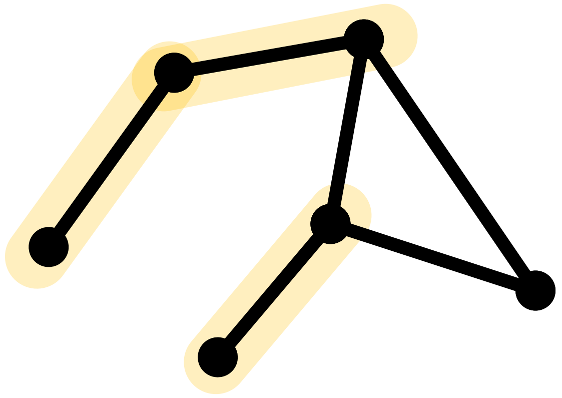
Множество вершин связной компоненты называют областью связности.

Связность: точки сочленения и мосты

Если после удаления некоторой вершины v из графа G количество компонент связности увеличилось, то v называют точкой сочленения.

Аналогично ребро e графа G называется мостом, если его удаление увеличивает число компонент.





Степень вершины графа

Степенью вершины deg(v) графа называют число инцидентных ей рёбер.

Вершину v называют изолированной, если deg(v) = 0.

Вершину v называют висячей (концевой), если deg(v) = 1.

«Лемма о рукопожатиях». Сумма степеней вершин графа – чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

sum_{v in V} deg(v) = 2|E|.

Метрические характеристики графа

Пусть G – связный граф, v != u – две его вершины.

Расстоянием между вершинами v и u называют длину кратчайшего маршрута между ними.
Обозначают d(v, u). Полагают d(v, v) = 0.

этот маршрут будет являться простой цепью

Эксцентриситетом e(v) вершины v называют максимальное из расстояний от вершины v до любых вершин графа.

Диаметром графа d(G) называют максимальный из эксцентриситетов его вершин.

```
# e(v) = max_{u ∈ V} d(v, u)
# d(G) = max_{v ∈ V} e(v) = max_{v,u ∈ V} d(v, u)
```

Взвешенный граф

Пусть G(V, E) – граф, а w – отображение, сопоставляющее каждому ребру e графа число w(e).

Пару (G, w) называют **взвешенным графом**.

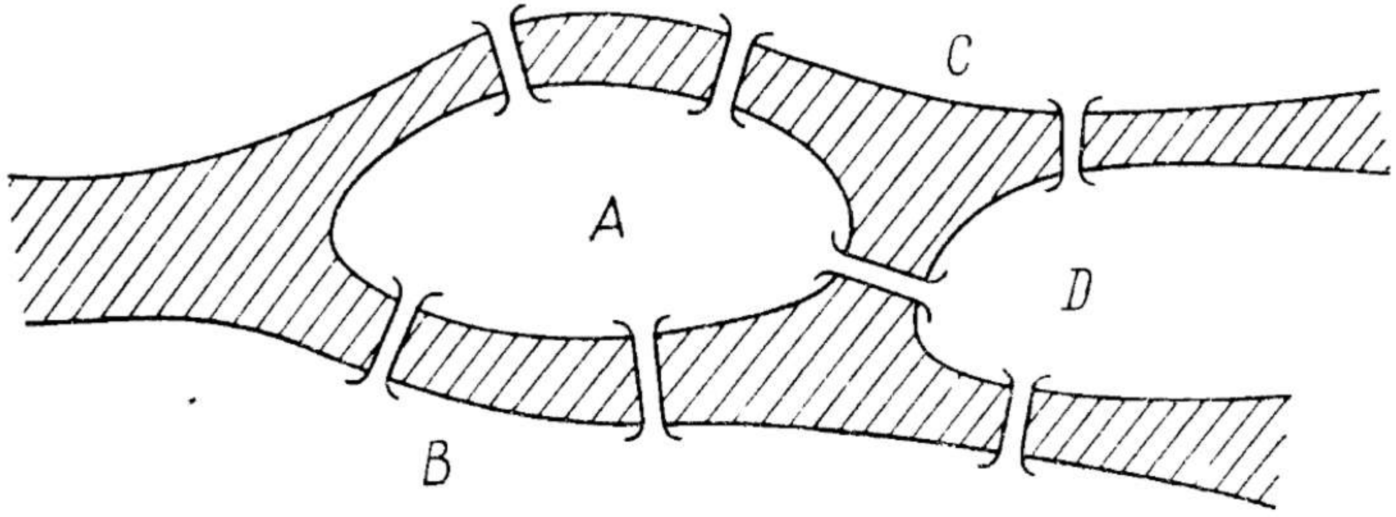
Значение w(e) называют **весом ребра** e.

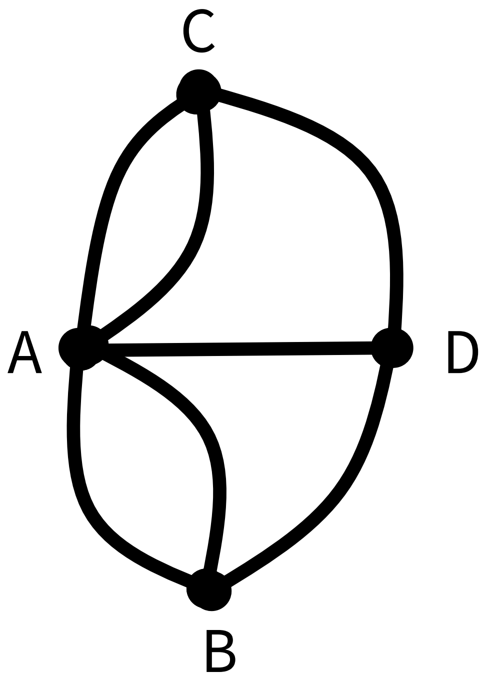
на практике w сопоставляет ребру не только числовые значения
аналогично, может рассматриваться понятие взвешенной вершины

Вес графа – сумма весов его рёбер.

Обходы в графах: предисловие

Задача о кёнигсбергских мостах. Можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя ровно один раз по каждому мосту?





Обходы в графах
эйлеров и гамильтонов графы

Цикл в графе называется эйлеровым, если он содержит все рёбра графа.

Связный граф, содержащий эйлеров цикл, называется эйлеровым.

Граф называется гамильтоновым, если в нём есть простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа.

Сам такой цикл называется гамильтоновым.

Гамильтонова цепь – простая цепь, содержащая каждую вершину графа.

Деревья

Дерево – связный граф без циклов.

Теорема. Эквивалентны следующие утверждения

1. G – дерево;
2. G – связный и |E| = |V| - 1;
3. G – ациклический и |E| = |V| - 1;
4. Любые вершины v != u графа G соединены единственной простой цепью;
5. G – ациклический и такой что, если любую пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Корневое дерево

Дерево с одной отмеченной вершиной называют корневым деревом. Отмеченную вершину называют корнем.

Выделив корень, дерево можно рассматривать как иерархичную структуру и ввести для её вершин отношение порядка.

Уровень вершины – длина кратчайшего маршрута от корня до этой вершины.

Высота дерева – максимальный из уровней его вершин.

\# в информатике также вводят термины узел (вершина),
\# узел-потомок, узел-родитель, лист (висячая вершина)

Остовное дерево графа

Пусть H – остовный подграф произвольного графа G.

Если на каждой области связности графа G графом H порождается дерево, то H называют остовным деревом.

Минимальное остовное дерево (остов минимального веса) – остовное дерево взвешенного графа, имеющее минимальный вес.

Ориентированный граф

Ориентированный граф (орграф) G(V, A) это пара множеств (V, A), где

V – непустое множество,

A – подмножество упорядоченных пар из V^2.

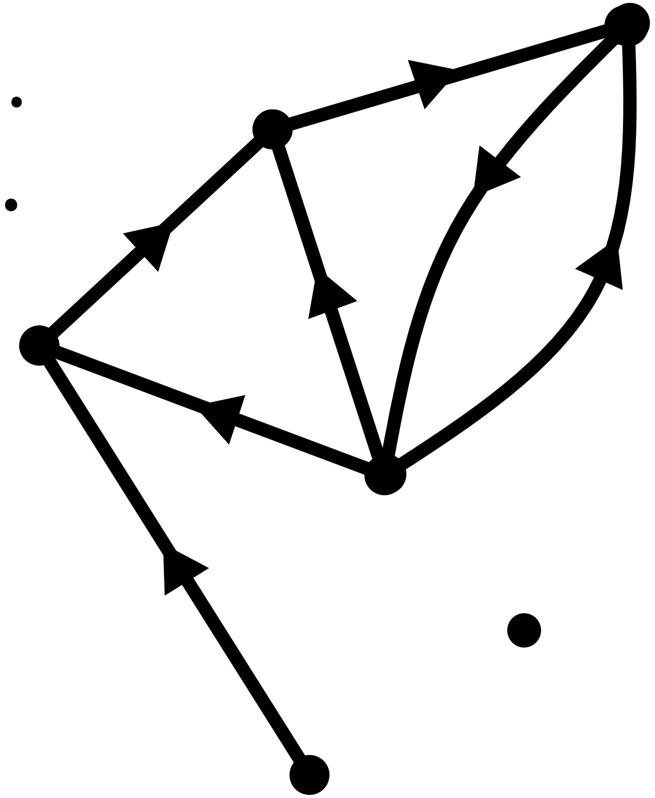
Элементы множества A называют дугами.

Если a = (v, u) – дуга, то

v, u – концевые вершины;

v – начало дуги;

u – конец дуги.



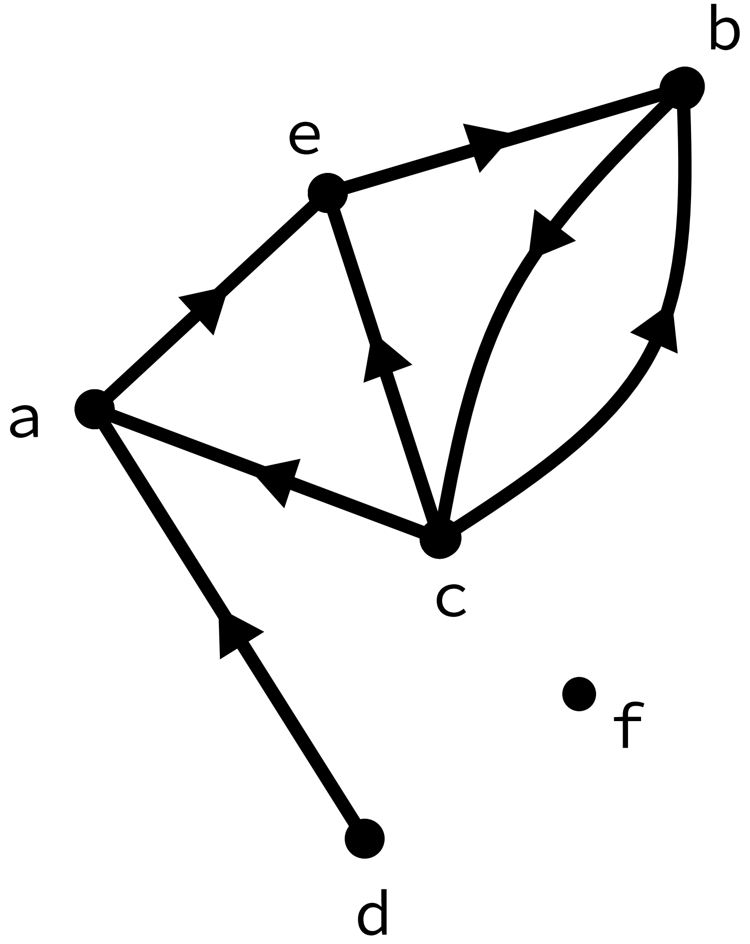
Пример орграфа

```
# {} - неупорядоченное множество
# () - упорядоченное множество
```

V = {a, b, c, d, e, f}

E = {(a, e), (b, c),
(c, a), (c, e), (c, b),
(d, a), (e, b)}

|V| = 6; |E| = 7



Отношения между вершинами и дугами

Говорят, что дуга инцидента каждой из своих концевых вершин.

Говорят, что дуга исходит из своего начала и заходит в свой конец.

Дуги, имеющие общее начало и общий конец называются параллельными.

Вершины орграфа называются смежными, если они являются концевыми для некоторой дуги.

Дуги называют смежными, если они имеют общую концевую вершину.

Дуга вида (v, v) называется петлёй.

Ориентированный маршрут

Пусть G – орграф. Ориентированный маршрут (маршрут) в графе G это последовательность

$$S = (v_0, x_1, v_1, x_2, \dots, x_n, v_n)$$

его чередующихся вершин v_i и дуг x_i, причём дуга имеет вид $x_i = (v_{i-1}, v_i)$.

Вершины v_0, v_n – крайние, остальные – промежуточные.

Длина маршрута – количество входящих в него дуг.

Цепь, путь, контур в орграфе

Маршрут называется цепью, если все входящие в него дуги различны.

Путь – маршрут, не содержащий одинаковых вершин, кроме, возможно крайних.

Маршрут называется циклическим, если его первая и последняя вершины совпадают.

Контур – циклический путь.

```
# существует другая терминология, здесь приведено соответствие
# ------------------------------------------------------------
# ориентированный маршрут                   путь
# цепь                                      простой путь
# аналог простой цепи неориент. графа      элементарный путь
```

Связность в орграфе

Говорят, что вершина u **достижима** из вершины v, если существует маршрут из u в v.

Орграф называется **сильносвязным**, если любые две его вершины достижимы друг из друга.

Сильносвязной компонентой орграфа называется любой его максимальный по включению сильносвязный подграф.

Степень вершины орграфа

Полустепень исхода $d^+(v)$ вершины v – число исходящих из v дуг.

Аналогично, полустепень захода $d^-(v)$ – число входящих в v дуг.

Степень вершины орграфа

$$\deg(v) := d^+(v) + d^-(v)$$

Аналог леммы о рукопожатиях для орграфа:

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |A|$$

Обходы орграфа

Эйлерова цепь – цепь, содержащая каждую дугу орграфа.

Эйлеров орграф – связный орграф, в котором есть замкнутая эйлерова цепь.

Гамильтонов контур/путь – контур/путь орграфа, содержащий все его вершины.

Гамильтонов орграф – орграф, имеющий гамильтонов путь.