통계학 개론

제6장 통계적 가설검정

6.1. 가설검정의 이해

통계적 가설검정(hypothesis testing): 두 개의 가설을 설정하고, 두 가설 중 어느 가설이 적당한지 파악하는 것

귀무가설(null hypothesis, H_0): 기존의 사실

대립가설(alternative hypothesis, H_1): 우리가 밝히고자 하는 가설

제1종 오류와 제2종 오류

		검정결과	
		H_0 기각하지 않음	H_0 기각
실제	H_0 참	올바른 판단	제1종 오류
	H_1 참	제2종 오류	올바른 판단

유의수준(significance level, α): 제1종 오류가 발생할 확률의 최대 한계

유의확률(significance probability, p value): 귀무가설하에서 주어진 관측값에서 벗어날 확률

↳ p값이 작다: ①귀무가설이 참이 아니다 or ②매우 희귀한 사건이 발생했다

기각역(rejection region): 귀무가설을 기각하는 관측값의 영역

❖ 가설검정 과정

① 통계적 가설 (H_0, H_1)을 세운다

② 유의수준 α를 정한다

③ 귀무가설하에서 검정통계량이 따르는 분포를 정하고 계산한다

④ 앞서의 분포를 바탕으로 유의수준에 해당하는 검정통계량값인 기각역을 찾거나, 통계량값과 관련된 확률(유의확률)을 구한다.

⑤ 앞서 구한 통계량값을 기각역과 비교하거나 유의확률을 유의수준과 비교하여 가설검정을 실시한다.

6.2 모평균 가설검정

<예제 6-5>

기존 생산방식의 전구: 평균수명 1,500시간(표준편차 200시간)
새로운 생산방식의 전구: 평균수명 1,600시간
30개 표본의 표본평균($\overline{X}$) = 1,555시간

통계적 가설검정은 $\overline{X}$의 표본분포와 관련된 기준값(critical value) C를 선정한 후
'X가 C보다 작으면 가설 H_0를 채택, 아니면 H_0를 기각(H_1 채택)'
이라는 선택기준(decision rule)으로 가설 중 하나를 선택하게 된다.
H_0 채택역(acceptance region): $\overline{X}$가 C보다 작은 영역
H_0 기각역(rejection region): $\overline{X}$가 C보다 크거나 같은 영역
↳ 기각역은 유의수준을 바탕으로 정해진다.

유의수준, 즉 제1종 오류 발생확률의 허용한계를 5%로 하면: $P(\overline{x} < C) = 0.95$
표본평균의 분포 $\overline{X} \sim N(1500, \frac{200}{\sqrt{30}})$ 이므로
C는 $1500 + z_{0.95}\frac{200}{\sqrt{30}}$인데, 표준정규분포표에서 $z_{0.9495}$=1.64, $z_{0.9509}$=1.65 이므로 근사적으로 $z_{0.95}$=1.645라 하면 C=1560.07이 된다.
즉, $\overline{X} < 1560.07$이면 H_0가 채택되고, $\overline{X} \geq 1560.07$이면 H_1이 채택(H_0이 기각)된다.
↳ 여기서, $\overline{X} = 1555$이므로 H_0가 채택된다

일반적으로 모평균에 대한 가설검정에서 대립가설의 형태는 크게 다음의 세 가지이다.
① H_1: $\mu < \mu_0$ 우측검정(right-sided test)
② H_1: $\mu > \mu_0$ 좌측검정(left-sided test)
③ H_1: $\mu \neq \mu_0$ 양측검정(two-sided test)

모평균을 검정하려면 모평균과 관련된 통계량인 $\overline{X}$를 표준화한 식을 이용

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

모집단의 표준편차를 알 수 없는 경우에는 모표준편차 σ를 추정량 S로 대치한 식을 사용

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

이 검정통계량은 모집단이 정규분포라는 가정하에서 자유도 n-1인 t분포를 따른다. n이 클 때(통상 30 이상) t분포는 정규분포와 비슷하므로 $t_{n-1,\alpha}$대신 z_α를 이용

할 수 있다.

❖ 모평균의 가설검정

가설	기각역을 이용한 검정	유의확률을 이용한 검정
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$T > t_{n-1,\alpha}$ 이면 H_0를 기각	$P(T>t_{obs}\mid H_0) < \alpha$ 이면 H_0를 기각
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$T < t_{n-1,\alpha}$ 이면 H_0를 기각	$P(T<t_{obs}\mid H_0) < \alpha$ 이면 H_0를 기각
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$\lvert T\rvert > t_{n-1,\alpha/2}$ 이면 H_0를 기각	$P(\lvert T\rvert>t_{obs}\mid H_0) < \alpha$ 이면 H_0를 기각

<예제 6-6>
(문제)
μ=12, α=0.05
$n=10,\ \overline{X}=12.2,\ \sigma=0.2$
(풀이)
H_0: μ=12 / H_1: μ≠12
$t_{9,0.025}$ = 2.262
$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{12.2-12}{0.2/\sqrt{10}}=3.16$$
|3.16| > 2.262 이므로 H_0를 기각
☞ 즉, 유의수준 0.05에서 이 아파트 주민의 인터넷 쇼핑몰 평균 방문횟수는 12가 아니다.

<예제 6-7>
(문제)
μ=12, α=0.05
$n=10,\ \overline{X}=12.2,\ \sigma=0.2$
(풀이1)
H_0: μ=12 / H_1: μ>12
$t_{9,0.05}$ = 1.833
$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{12.2-12}{0.2/\sqrt{10}}=3.16$$
3.16 > 1.833 이므로 H_0를 기각

(풀이2)

유의확률 P(T>3.16)은 약 0.006 (P(T>2.821)=0.01, P(T>3.250)=0.005)

0.006 < 0.05 이므로 H_0를 기각

☞ 즉, 유의수준 0.05에서 이 아파트 주민의 인터넷 쇼핑몰 평균 방문횟수는 12보다 크다.

<예제 6-8>

(문제)

μ=11, α=0.05

$\overline{X}=14.12,\ n=16,\ S=6.076$

(풀이1)

H_0: μ=11 / H_1: μ>11

$T>t_{n-1,\alpha}$ 이면 H_0 기각

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{14.12-11}{6.076/\sqrt{16}}=2.054$$

$t_{15,0.05}$=1.753

☞ $T>t_{n-1,\alpha}$ 이므로 H_0 기각

(풀이2)

유의확률 P(T>2.054)은 약 0.03 (P(T>1.761)=0.05, P(T>2.145)=0.025)

☞ $P(T>t_{obs}|H_0) < \alpha$ 이므로 H_0 기각

<예제 6-9>

(문제)

μ=160, α=0.05

$\overline{X}=163.2,\ n=15,\ S=4.329$

(풀이1)

H_0: μ=160 / H_1: μ>160

$T>t_{n-1,\alpha}$ 이면 H_0 기각

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{163.2-160}{4.329/\sqrt{15}}=2.863$$

$t_{14,0.05}$=1.761

☞ $T>t_{n-1,\alpha}$ 이므로 H_0 기각

(풀이2)

유의확률 P(T>2.863)은 약 0.006 (P(T>2.624)=0.01, P(T>2.977)=0.005)

☞ $P(T>t_{obs}|H_0) < \alpha$ 이므로 H_0 기각

6.3 모비율 가설검정

모비율의 검정에는 표본비율 $\hat{p}$를 이용

$$\hat{p} \sim N(p, \frac{(p(1-p)}{n})$$

표본의 크기가 충분히 큰 경우

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

여기서 n은 표본크기이고, $\hat{p}$는 표본비율이다.

❖ 모비율의 가설검정

가설	기각역을 이용한 검정	유의확률을 이용한 검정
H_0: $p = p_0$ H_1: $p > p_0$	$Z > z_\alpha$ 이면 H_0를 기각	$P(Z>z_{obs}|H_0) < \alpha$ 이면 H_0를 기각
H_0: $p = p_0$ H_1: $p < p_0$	$Z < -z_\alpha$ 이면 H_0를 기각	$P(Z<z_{obs}|H_0) < \alpha$ 이면 H_0를 기각
H_0: $p = p_0$ H_1: $p \neq p_0$	$|Z| > z_{\alpha/2}$ 이면 H_0를 기각	$P(|Z|>z_{obs}|H_0) < \alpha$ 이면 H_0를 기각

<예제 6-10>

(문제)

$p=0.6$, $\alpha=0.05$, $\hat{P}=0.7$, $n=50$

(풀이1)

H_0: $p=0.6$ / H_1: $p>0.6$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0.7-0.6}{\sqrt{0.6(1-0.6)/50}} = 1.443$$

$z_{0.05}=1.645$

☞ $Z > z_{0.05}$ 이 아니므로 H_0 기각 안됨

(풀이2)

$P(Z>1.443)$ = 약 0.074 ($P(Z>1.44)=0.0749$, $P(Z>1.45)=0.0735$)

☞ $P(T>t_{obs}|H_0) < \alpha$ 이 아니므로 H_0 기각 안됨

6.4 모분산 가설검정

모분산의 검정에는 표본분산 S^2을 이용한다.

표본크기가 n인 표본분산(S^2)의 분포는 자유도가 n-1인 χ^2분포를 따른다.

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

❖ 모분산의 가설검정

가설	기각역을 이용한 검정	유의확률을 이용한 검정
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{(n-1),\alpha}$ 이면 H_0 기각	$P(\chi^2 > \chi^2_{obs} \mid H_0) < \alpha$ 이면 H_0 기각
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n-1),1-\alpha}$ 이면 H_0 기각	$P(\chi^2 < \chi^2_{obs} \mid H_0) < \alpha$ 이면 H_0 기각
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{(n-1),\alpha/2}$ 또는 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n-1),1-\alpha/2}$이면 H_0 기각	$P(\chi^2 < \chi^2_{obs}$ or $\chi^2 > \chi^2_{obs} \mid H_0) < \alpha$ 이면 H_0 기각

<예제 6-11>

(문제)

σ^2=1, n=10, S^2=0.16, α=0.05

(풀이1)

H_0: σ^2=1, H_1: σ^2<1

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{9 \times 0.16}{1^2} = 1.44$$

$$\chi^2_{n-1,1-\alpha} = \chi^2_{9,0.95} = 3.325$$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n-1),1-\alpha}$ 이므로 H_0을 기각

☞회사에서 정한 기준(H_1: σ^2<1)에 부합함

<예제 6-12>

(문제)

σ^2=16, n=12, S^2=38.63, α=0.05

(풀이1)

H_0: σ^2=16, H_1: σ^2>16

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{11 \times 38.63}{4^2} = 26.56$$

$$\chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{11,0.05} = 19.68$$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{(n-1),\alpha}$ 이므로 H_0을 기각

☞ 전년도에 읽은 책의 표준편차는 4권보다 큼

6.5 가설검정과 구간추정

가설검정에서 귀무가설 H_0: $\theta=\theta_0$에 대해 귀무가설을 기각하지 못하는 관측값의 영역인 채택역을 정할 수 있다.

귀무가설 H_0: $\theta=\theta_0$에 대해 유의수준 α에서 채택역을 $A(\theta_0)$라고 할 때, 채택역 $A(\theta_0)$가 모수 θ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간이 된다.

$$P\{X \in A(\theta_0) \mid \theta=\theta_0\} = 1-\alpha$$