제9장 기저와 차원

9.1 일차결합

[정의] 일차결합 (linear combination)

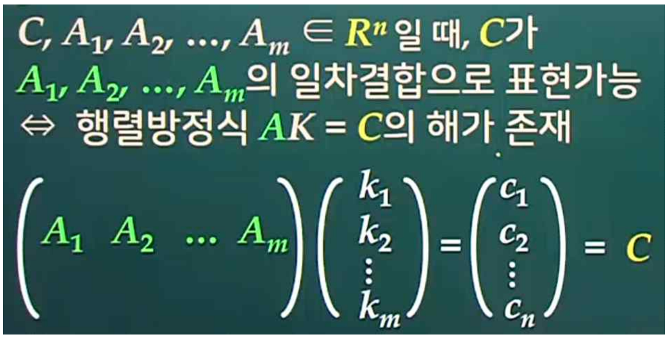
$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n \in V$(벡터공간)

$k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_n \in R$(실수체)

일 때,

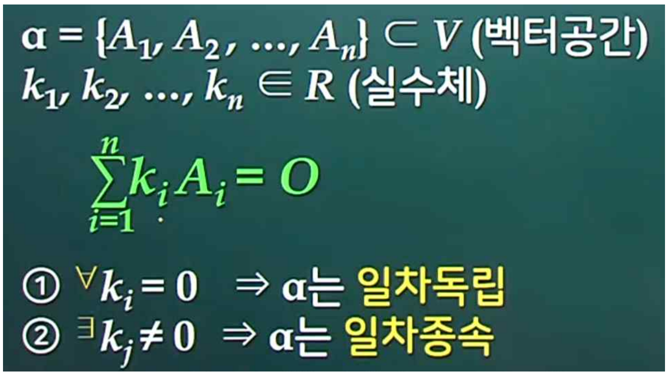
$\mathbf{k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_nA_n}$ 또는 $\sum_{i=1}^{n} k_iA_i$

[정리 9.1] 벡터의 일차결합 표현



9.2 벡터들의 일차독립성

[정의 9.1] 벡터들의 일차독립 및 일차종속



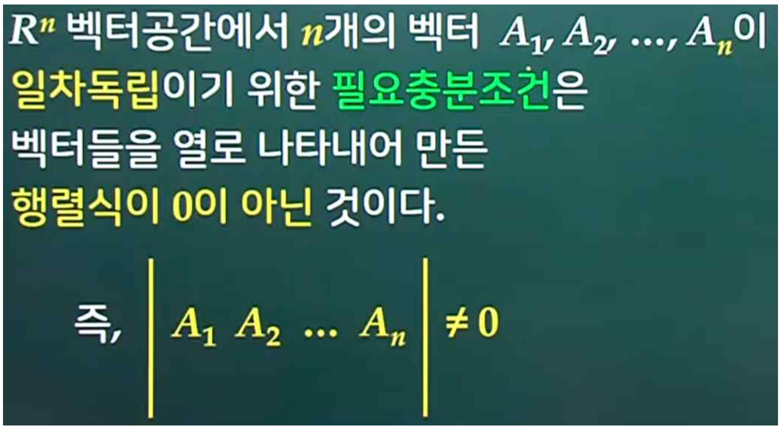
[정리 9.2] 벡터들의 일차종속

n개의 벡터 $A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_n$이 **일차종속**이기 위한 필요충분조건은 어떤 1개의 벡터를 나머지 n-1개의 벡터들의 일차결합으로 나타낼 수 있다는 것이다.

[정리 9.2] 따름정리

n개의 벡터 $A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_n$이 **일차독립**이기 위한 필요충분조건은 어떤 벡터도 나머지 n-1개의 벡터들의 일차결합으로 나타낼 수 없다는 것이다.

[정리 9.3] 벡터들의 일차독립과 행렬식



[정리 9.4] R^n 벡터들의 일차종속

R^n 벡터공간에서 벡터의 개수가 n보다 많은 경우, 이 벡터들은 항상 일차종속이다.

[정의 9.2] $i \times j$ 소행렬

M이 $m \times n$ 행렬일 때,
행렬 M에서 i개의 행을 뽑아서 $i \times n$ 행렬을 만들고,
여기에서 다시 j개의 열을 뽑아서 만든 $i \times j$ 행렬을
행렬 M의 $i \times j$ 소행렬이라고 부른다.
($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$)

[정리 9.5] R^n 벡터들의 일차독립과 행렬식

R^n 벡터공간에서 m개($m<n$)의 벡터
$A_1, A_2, \cdots A_m$에 대해서,
이 벡터들을 열로 써서 만든 $n \times m$ 행렬을
$A = (A_1\ A_2\ \cdots\ A_m)$ 이라 할 때,
$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 이 일차독립이기 위한 필요충분조건은
행렬 A의 $m \times m$ 소행렬 중 적어도 하나는 행렬식이 0이 아닌 것이다.

9.3 벡터공간의 기저와 차원

[정의 9.3] 벡터공간의 기저

벡터공간 V의 n개의 O아닌 벡터들의 집합
$a = \{ A_1, A_2, \cdots, A_n \}$ 이 다음 두 조건을 만족할 때
a를 V의 기저(basis)라 한다.

(1) a의 원소는 일차독립이다.
(2) V의 임의의 원소는 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 의 일차결합으로 표시된다.

[정의] R^n 벡터공간의 기본단위벡터 및 표준기저

○ R^n 벡터공간의 기본단위벡터

- R^n 벡터를 구성하는 n개의 각 성분 중 한 성분만 1이고 나머지는 모두 0인 벡터

[예] R^3 벡터공간에서 (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

○ R^n 벡터공간의 표준 기저 (standard basis)

- R^n 벡터공간의 기본단위벡터들의 집합은 R^n 벡터공간의 기저가 되고, 이를 R^n 벡터공간의 표준기저라 부름

$a = \{ e_1, e_2, \cdots, e_n \}$

[정리 9.6] 기저의 원소 개수

벡터공간 V의 기저를 구성하는 원소의 개수는 일정하다.

[정의 9.4] 벡터공간의 차원

벡터공간 V의 차원은 V의 기저를 구성하는 원소의 개수로 정의하고 dim V로 표시한다.

[정의 9.5] 영벡터공간의 차원

만인 $V = \{ O \}$ 인 경우는 $\dim V = 0$ 으로 정의한다.

[정리 9.7] 벡터공간 R^n의 차원

벡터공간 R^n의 차원은 n이다. 즉, $\dim R^n = n$

[정리 9.8] 부분공간의 차원

$S < V \Rightarrow \dim S \leq \dim V$

[정리 9.9] 부분공간의 차원

$S < V, \dim S = \dim V \Rightarrow S = V$