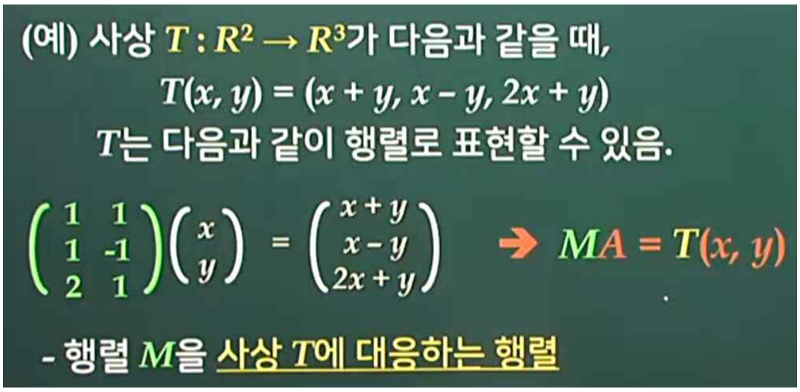
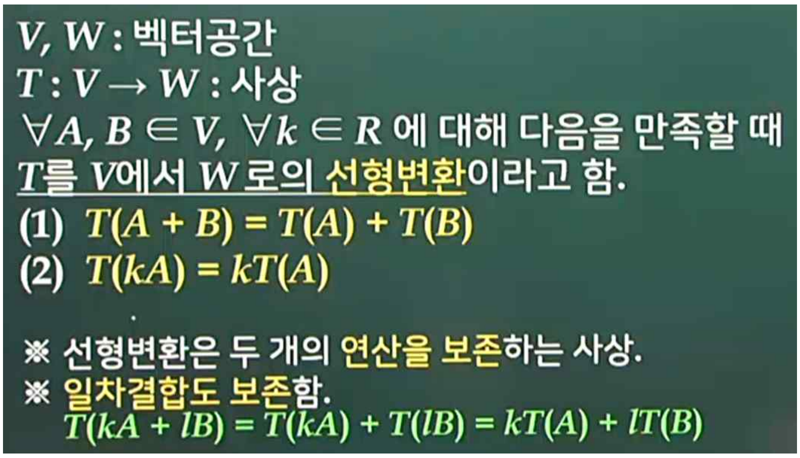
제10장 선형변환

10.1 선형변환

[정의] 사상 T에 대응하는 행렬



[정의 10.1] 선형변환



[정리 10.2]

T: V → W: 선형변환

∀A, B ∈ V 에 대해

(1) T(O) = O

(2) T(-A) = -T(A)

(3) T(A-B) = T(A) - T(B)

※ 선형변환은 덧셈의 항등원(O), 덧셈의 역원(-A), 뺄셈을 보존함

[정리 10.3]

사상 $T : R^m \to R^n$가 선형변환
⟷ T에 대응되는 행렬 M이
$$M = (T(E_1)\ \ T(E_2)\ \ \dots\ \ T(E_m))$$
으로 표시되는 것.

여기서, $E_1, E_2, \dots, E_m$ 은 R^m의 기본벡터들 [표준기저]
$T(E_i)$는 열벡터

[정리 10.4] 선형변환의 합성
S: U→V, T: V→W :선형변환
∀A∈U 에 대해
$T \circ S(A) = T(S(A))$ 로 정의하면,
$T \circ S$: U→W는 선형변환이다.

M: S에 대응하는 행렬
N: T에 대응하는 행렬
⇨ $T \circ S$에 대응하는 행렬: NM

10.2 선형변환의 성질
[정리 10.5] 일차결합의 보존

$T : V \to W$: 선형변환
$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in V$,
$\forall k_1, k_2, \dots, k_n \in R$ 에 대해
$$T(k_1A_1 + k_2A_2 + \dots + k_nA_n) = k_1T(A_1) + k_2T(A_2) + \dots + k_nT(A_n)$$
$$\boxed{T(\sum k_iA_i) = \sum k_iT(A_i)}$$

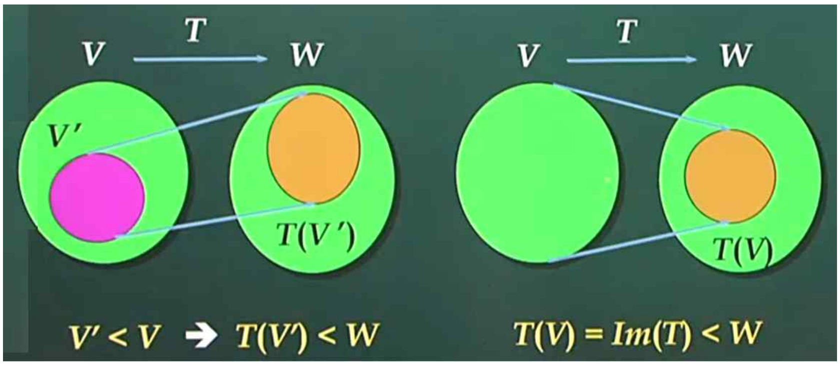
[정리 10.6] 기저의 상으로 선형변환 결정

$T : V \to W$: 선형변환
$\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$: V의 한 기저
$\forall B_i \in W\ (i = 1, 2, \dots, n)$에 대해
$T(A_i) = B_i$를 만족하는 선형변환이
유일하게 존재함.

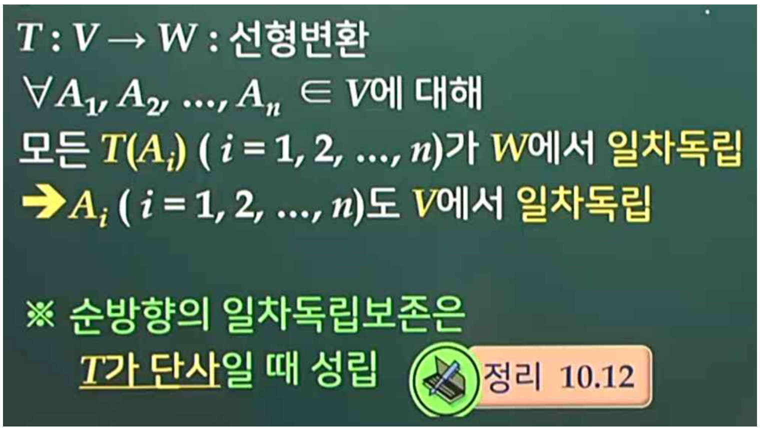
[정리 10.7] 부분공간의 보존
T: V→W :선형변환
V’ < V ⇨ T(V’) < W

T: V→W :선형변환
⇨ T(V) < W
※ T(V): T에 의한 V의 상(image), Im(T)로 표기

※ 그림으로 본 부분공간의 보존



[정리 10.8] 일차독립성의 보존



[정의 10.2]
S, T: V→W 선형변환 일 때,
∀A∈V, ∀k∈R 에 대해 S+T와 kT를 다음과 같이 정의한다.
(S+T)(A) = S(A)+T(A)
(kT)(A) = kT(A)

[정리 10.9]
사상 S+T와 kT는 V에서 W로의 선형변환이다.

[정의 10.3]
L(V, W): V에서 W로의 선형변환 전체의 집합
즉, L(V, W) = { T | T: V→W 는 선형변환 }

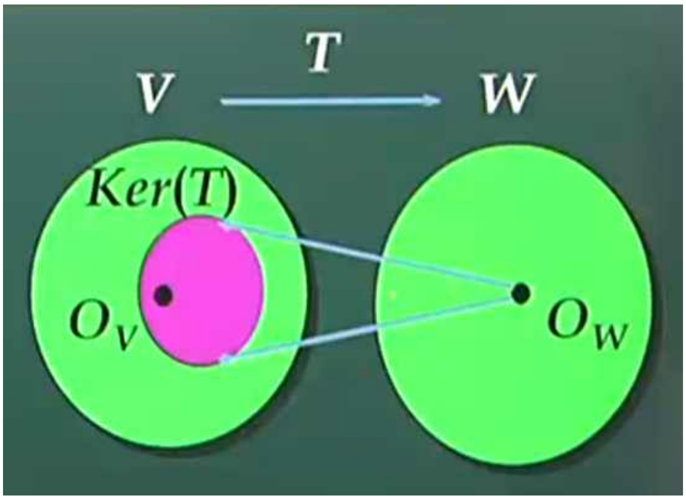
[정리 10.10]
L(V, W)는 벡터공간이다.

10.3 상과 핵

[정리 10.11] 부분공간의 보존(역방향)

$T \in L(V, W)$
$W' < W \;\rightarrow\; T^{-1}(W') < V$
※ $T^{-1}(W') = \{ A \in V \mid T(A) \in W' \}$

※ {O}<W ⇨ {O}의 원상 $T^{-1}(O)$: Ker(T)로 표시
Ker(T) = $T^{-1}(O)$ < V

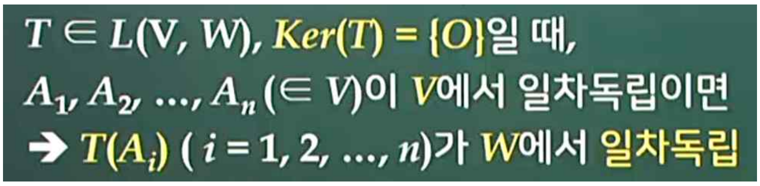


[정의 10.4] 선형변환의 핵(kernel)

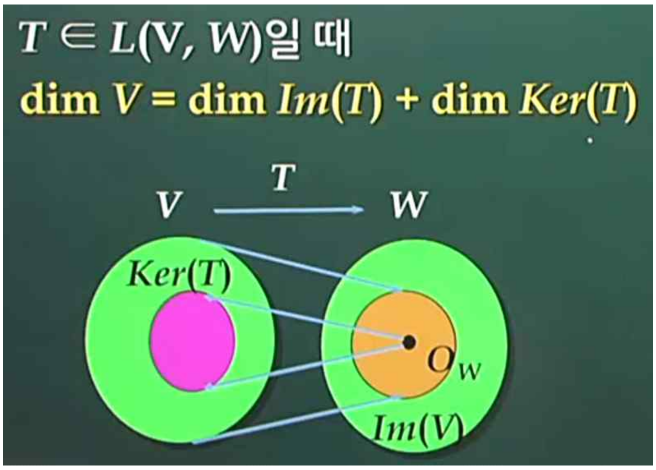
$T \in L(V, W)$
$T^{-1}(O) = \{ A \in V \mid T(A) = O \}$
→ T의 핵(kernel), 영공간. $Ker(T)$로 표기

※ $\{ O \} < W \;\rightarrow\; T^{-1}(O) = Ker(T) < V$ [정리 10.11]
※ $T^{-1}(O) \neq \varnothing$ ($\because T(O) = O$)

[정리 10.12] 일차독립성의 보존



[정리 10.13] 차원공식



[따름정리]

$T \in L(V, W)$, $\dim V = \dim W$, $Ker(T) = \{O\}$

⇨ T는 전사 (즉, $T(V) = Im(T) = W$)

[정리 10.14]

$T \in L(R^m, R^n)$

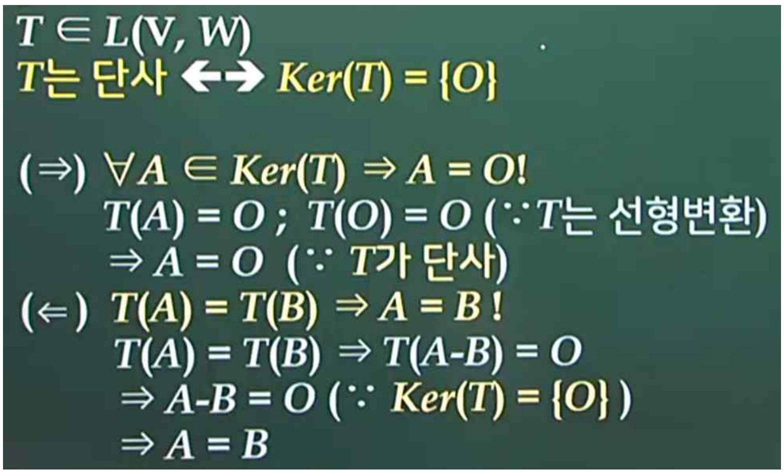
$M = (\ T(E_1) \ T(E_2) \ \cdots \ T(E_m) \ )$

⇨ $\dim T(R_m) = \dim Im(T) = rank(M)$

[따름정리]

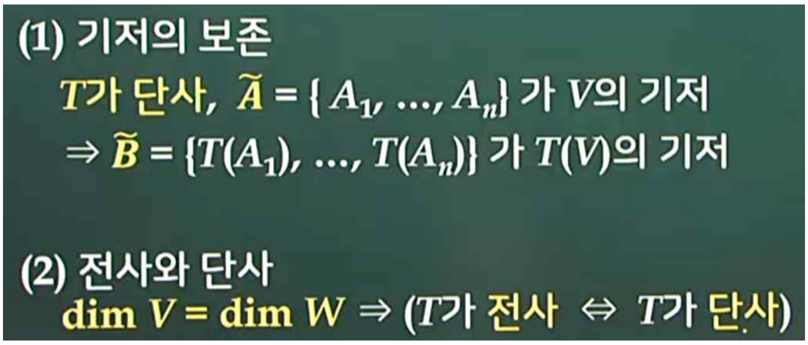
$\dim Ker(T) = m - rank(M)$

[정리 10.15]



[따름정리]

$T \in L(V, W)$



[정의 10.5] 동형변환, 동형공간

$T \in L(V, W)$이 전단사일 때,

T를 동형변환(isomorphism)

V와 W를 동형(isomorphic), $V \approx W$로 표기

※ 동형변환의 성질

$T \in L(V, W)$가 동형변환

(1) $Ker(T) = \{O\}$, $Im(T) = W$

(2) $\dim V = \dim W$