# 3차 과제 모범답안

**1. $X_1, \dots, X_n$ 이 균등분포 $U(\theta-1, \theta+1)$로부터의 확률표본일 때, $\theta$의 최대가능도추정량이 유일하지 않음을 보이시오.**

A> $X_1, \dots, X_n$ 이 균등분포 $U(\theta-1, \theta+1)$를 따르면 확률밀도함수는 $f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (\theta-1 \le x \le \theta+1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$로 나타낼 수 있다.

이때, 주어진 표본에 대한 가능도함수를 구하면 $L(\theta|X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i|\theta) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$이 된다.

양변을 미분하면 $\ln L(\theta|X_1, \dots, X_n) = n\ln(\frac{1}{2}) = -n\ln(2)$이고, 이 값은 $\theta$에 관계없이 상수이므로 가능도함수를 최대로 하는 $\theta$의 값은 존재하지 않는다. 따라서 $\theta$의 최대가능도추정량(MLE)은 유일하지 않다.

**[2-5].** $X_1, \dots, X_n$ **이 포아송 분포** $Poisson(\lambda),\ \lambda > 0$**을 따를 때, 다음의 물음에 답하시오.**

**2.** $\lambda$**에 대한 적률추정량을 구하시오.**

A> $X_1, \dots, X_n$ 이 포아송 분포 $Poisson(\lambda),\ \lambda > 0$을 따르면 $\lambda = E(X_1) = \mu$ 이므로 $m_1 = \overline{X}$가 $\lambda$의 적률추정량이 된다. 또한, $\lambda = V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$도 $\lambda$의 적률추정량이 된다.

**3.** $\lambda$**에 대한 최대가능도추정량을 구하시오.**

A> 포아송 분포의 확률질량함수를 $P(x;\lambda)$ 라 하면, $X_i$의 가능도함수는 $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$ 이다. 미분의 용이성을 위해 로그를 취하면 $\log L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(-\lambda + x_i \log(\lambda) - \log(x_i!))$이 되고, 이를 $\lambda$에 대해 미분하면 $\frac{d(\log L(\lambda))}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n}(-1 + \frac{x_i}{\lambda}) = 0$이 되며, $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\hat{\lambda}} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$이므로 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$이다.

위 식을 한 번 더 미분하면 $\frac{d^2(\log L(\lambda))}{d\lambda^2} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\lambda^2} < 0$로 항상 음수이므로, 위에서 찾은 값이 최대가능도추정량(MLE)임을 확인할 수 있다.

**4. 지수족임을 보이시오.**

A> 지수족(Exponential family)이란 확률밀도함수가 $f(x;\theta) = a(\theta)b(x)\exp\left[\sum_{i=1}^{k} c_i(\theta)t_i(x)\right]$ 형태로 나타낼 수 있을 때 이를 n개의 모수 $\theta_1, \dots, \theta_k$를 가진 지수족에 속한다고 정의한다. 포아송 분포에서 $f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\frac{1}{x!}\exp(x log \lambda)$이다.

따라서, $\theta = \lambda$라 했을 때 위의 식의 형태와 일치하는지 확인해 보면 $a(\lambda) = e^{-\lambda}$, $b(x) = \frac{1}{x!}$, $c(\lambda) = \log\lambda$, $t(x) = x$가 되므로 $f(x;\theta) = a(\theta)b(x)\exp\left[\sum_{i=1}^{k} c_i(\theta)t_i(x)\right]$의 형태로 나타낼 수 있음을 확인할 수 있다. 포아송 분포에서 $x$의 구간은 $x > 0$이다. 따라서 포아송 분포는 지수족이다.

**5.** $\lambda$**에 대한 완비충분통계량을 구하시오.**

A> 지수족에 속하는 확률밀도함수 $f(x;\theta) = a(\theta)b(x)\exp\left[\sum_{i=1}^{k} c_i(\theta)t_i(x)\right]$로부터 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$을 얻었을 때, 통계량 $S_1 = \sum_{i=1}^{n} t_1(X_i), \dots, S_k = \sum_{i=1}^{n} t_k(X_i)$는 모수 $\theta_1, \dots, \theta_k$에 대한 완비충분통계량이다.

4번 문항에서 $t(x) = x$이므로, 포아송 분포에서 $\lambda$에 대한 완비충분통계량(CSS)은 $\sum_{i=1}^{n} X_i$이다.

**[6-7].** $X_1, \ldots, X_n$ **이 베르누이분포** $Ber(p)$**로부터의 확률표본일 때, 물음에 답하시오.**

**6.** $p$**의 최대가능도추정량을 구하시오.**

A> 이항분포의 확률질량함수는 $f(x;n,p) = p^x(1-p)^{n-x}$이다. 최대가능도추정량을 구하기 위해 먼저 $x_1, \ldots, x_n$까지의 모든 확률질량함수를 곱해 가능도함수를 구하면

$L(p;x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;n,p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}$이고, 미분의 용이성을 위해 양변에 로그를 취하면

$\log L(p;x_1,\ldots,x_n) = \log(p)\sum_{i=1}^{n} x_i + \log(1-p)\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$가 된다.

위 식을 p에 대해 미분하여 0이 되는 값을 찾아보면 $\frac{d\log L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{1-p} = 0$이고, 식을 정리하면 $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$이다.

가능도함수를 한 번 더 미분하면 $\frac{d^2\log L(p)}{dp^2} = -\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{p^2} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{(1-p)^2} = 0$이고, 위에서 $\sum_{i=1}^{n} x_i = np$이므로 대입하여 정리하면 $\frac{d^2\log L(p)}{dp^2} = -\frac{n}{p} - \frac{n}{1-p} = -n\left(\frac{1}{p(1-p)}\right)$이다. 이 값은 항상 음수이므로 $L(p)$는 $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$에서 극대값을 가진다. 따라서 $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$은 p의 최대가능도추정량(MLE)임을 확인할 수 있다.

**7.** $p$**의 균일최소분산불편추정량을 구하시오.**

A> $X_1, \ldots, X_n$ 이 베르누이분포 $Ber(p)$를 따를 때, 베르누이 분포는 지수족이므로 $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$는 $p$의 완비충분통계량(CSS)이다.

$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = np$이므로 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(\overline{X}) = p$이고, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$는 $p$의 완비충분통계량의 함수로 불편추정량이다.

따라서 레만-쉐페(Lehmann-Scheffe)의 정리에 따라 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$는 $p$의 균일최소분산불편추정량(UMVUE)이다.

※ 레만-쉐페(Lehmann-Scheffe)의 정리

$T_1 : \theta$의 완비충분통계량, $T_2 : \theta$의 불편추정량일 때, $\rho(T_1) = E(T_2 | T_1)$이 $\theta$의 균일최소분산불편추정량(UMVUE)이다.

**8.** $X_1, \ldots, X_n$ **이 다음의 확률밀도함수를 가지는 확률표본일 때,** $\theta$**의 정보량 부등식 하한을 구하고** $\overline{X}$**가** $\tau(\theta) = 1/\theta$**에 대한 균일최소분산추정량인지 점검하시오.**

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x},\ 0 < x < \infty,\ \theta > 0$$

A> $\theta$의 크래머-라오 하한은 $\dfrac{1}{nI(\theta)}$이며, 여기에서 $I(\theta)$는 피셔의 정보량으로 $I(\theta) = E\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right]^2$ $= E\left[-\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]$이다. $\log f(x;\theta) = \log\theta - \theta x$이므로 이를 두 번 미분하면 $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta) = -\dfrac{1}{\theta^2}$이다. 따라서 $E\left[-\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right] = \dfrac{1}{\theta^2}$이므로 크래머-라오 하한은 $\dfrac{1}{nI(\theta)} = \dfrac{\theta^2}{n}$가 된다.

$E(\overline{X}) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i) = \dfrac{1}{n}\int_0^\infty x\theta e^{-\theta x}dx = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\theta} = \dfrac{1}{\theta}$이므로 표본 평균 $\overline{X}$의 기댓값이 $\dfrac{1}{\theta}$이므로 $\tau(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$에 대한 불편추정량임을 알 수 있다.

$V(\overline{X}) = V\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$이고, $V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \int_0^\infty x^2\theta e^{-\theta x}dx - \left(\dfrac{1}{\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{\theta^2}$이다.

따라서 $V(\overline{X}) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\theta^2} = \dfrac{1}{n\theta^2}$이고, $\tau(\theta) = 1/\theta$에 대한 크래머-라오 하한은 $\dfrac{1}{nI(1/\theta)} = \dfrac{1}{n\theta^2}$로 두 값이 일치하므로 $\overline{X}$는 $\tau(\theta) = 1/\theta$에 대한 균일최소분산추정량이라 할 수 있다.