3. 단순 선형 회귀 모형 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ $\quad u_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

b_0, b_1은 β_0, β_1의 최소제곱추정량이라 하자.

(a) $Var(b_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$ 의 증명

$$b_1 = \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

위의 식에 분산을 취하면

$$Var(b_1) = Var\left[\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right] \quad (\because \beta_1 = \text{상수})$$

$$= \left[\frac{\sum(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]^2 Var(y_i-\bar{y}) \quad (\because x_i, \bar{x}\text{은 정해진 값})$$

$$= \left[\frac{\sum(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]^2 Var(u_i) \quad (\because u_i = y_i-\bar{y})$$

$$= \left[\frac{\cancel{\sum(x_i-\bar{x})}}{\sum(x_i-\bar{x})^{\cancel{2}}}\right]^2 \sigma^2 \quad (\because u_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2))$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

증명 끝.

(b) $Var(b_0) = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right]$ 의 증명

$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$

위의 식에 분산을 취하면

$Var(b_0) = Var(\bar{y} - b_1\bar{x})$

$= Var(\bar{y}) + (\bar{x})^2 Var(b_1) - 2\bar{x}\,Cov(\bar{y}, b_1)$

여기서 $Var(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}$, $Var(b_1) = \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$

$\bar{y}$ 와 b_1은 서로 관련이 없기 때문에 $Cov(\bar{y}, b_1) = 0$

을 적용하면

$= \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2} + 0$

$= \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]$ 증명 끝.

(c) 주어진 x 에서의 y의 추정 값을 $\hat{y}$라 할 때,

$$Var(\hat{y}) = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right]$$ 의 증명.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

위의 식에 분산을 취하면

$$Var(\hat{y}) = Var(b_0 + b_1 x)$$
$$= Var(b_0) + Var(b_1 x) + 2\,Cov(b_0, b_1 x)$$
$$= Var(b_0) + Var(b_1)\cdot x^2 + 2x \cdot Cov(b_0, b_1)$$
$$= \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right] + x^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2} + 2x \cdot Cov(b_0, b_1)$$

여기서 $Cov(b_0, b_1) = Cov(\hat{y} - b_1\bar{x}, b_1)$

$$= Cov(\hat{y}, b_1) - \bar{x}\cdot Cov(b_1, b_1)$$
$$= 0 - \bar{x}\frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$$

($\because$ $\hat{y}$와 b_1은 관련이 없음
$Cov(b_1, b_1) = Var(b_1)$)

이 식을 적용하면

$$= \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right] + \sigma^2 \cdot \frac{x^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2} - \sigma^2\frac{2\cdot\bar{x}\cdot x}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$$
$$= \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right]$$ 증명 끝.