제13장 행렬의 대각화

[도입] 대각행렬의 특성

M, N: n차 대각행렬

(1) MN 도 대각행렬

(2) 대각행렬 M의 행렬식 : $a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

(3) 대각행렬의 역행렬

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

(4) 대각행렬의 고유값 : 주대각원소

(5) 대각행렬의 거듭제곱(멱승)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{k} = \begin{pmatrix} a_{11}^{k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{k} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{k} \end{pmatrix}$$

13.1 행렬의 대각화 가능성

[정의 13.1] 대각화 가능

M, N : n차 정방행렬

D : 대각행렬

(1) N = PMP^{-1}를 만족하는 P가 존재

⇔ M과 N이 유사하다(similar)

[M과 N은 닮은 행렬, 또는 상사행렬]

(2) M과 D가 유사하다. 즉, M = PDP^{-1}

⇔ M이 대각화 가능하다(diagonalizable)

13.2 행렬의 대각화

[도입] diagonalizing a matrix

n차 정방행렬 M이 대각화 가능하다.

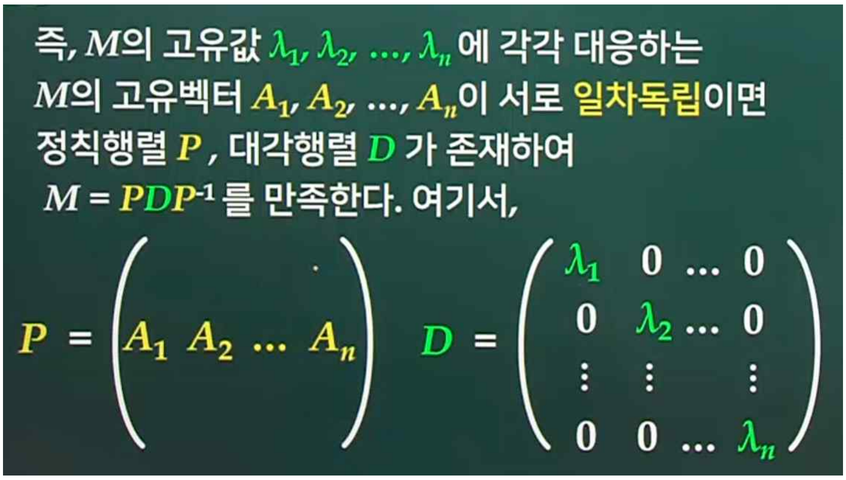
⇨ M의 거듭제곱도 쉽게 구할 수 있음

(1) 어떤 행렬이 대각화 가능할까?

(2) 대각화 가능하다면

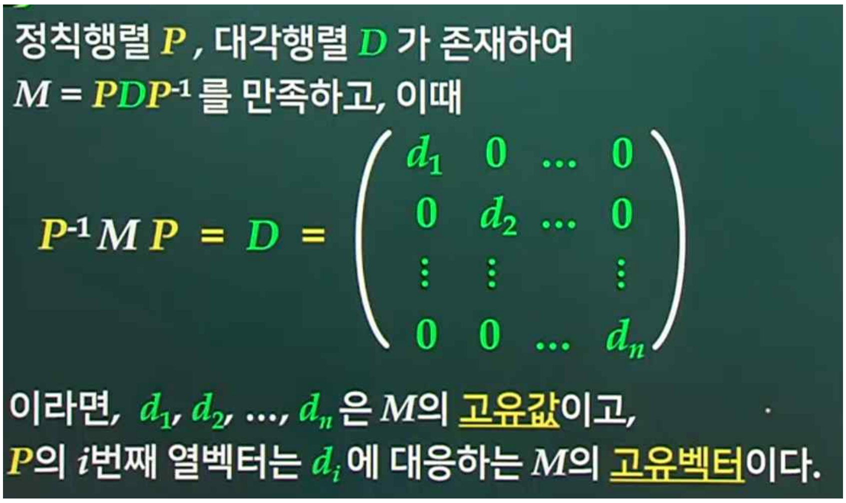
M = PDP^{-1} 를 만족하는 정칙행렬 P와 대각행렬 D는 어떻게 구할까?

[정리 13.1] 대각화 가능
n차 정방행렬 M이 서로 일차독립인 n개의 고유벡터를 가지면
⇨ M은 대각화 가능하다.



[따름정리]
n차 정방행렬 M이 n개의 서로 다른 고유값을 가지면 M은 대각화 가능하다.

[정리 13.2] 대각화 가능[정리 13.1의 역]
n차 정방행렬 M이 대각화 가능하면
⇨ M은 서로 일차독립인 n개의 고유벡터를 가진다.



13.3 응용: 피보나치 수열