

제10장 선형 변환

10.1 선형 변환

[정의] 사상 T 에 대응하는 행렬

(예) 사상 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 다음과 같을 때,

$$T(x, y) = (x + y, x - y, 2x + y)$$

T 는 다음과 같이 행렬로 표현할 수 있음.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+y \end{pmatrix} \rightarrow MA = T(x, y)$$

- 행렬 M 을 사상 T 에 대응하는 행렬

[정의 10.1] 선형 변환

V, W : 벡터공간

$T: V \rightarrow W$: 사상

$\forall A, B \in V, \forall k \in \mathbb{R}$ 에 대해 다음을 만족할 때
 T 를 V 에서 W 로의 선형변환이라고 함.

(1) $T(A + B) = T(A) + T(B)$

(2) $T(kA) = kT(A)$

※ 선형변환은 두 개의 연산을 보존하는 사상.

※ 일차결합도 보존함.

$$T(kA + lB) = T(kA) + T(lB) = kT(A) + lT(B)$$

[정리 10.2]

$T: V \rightarrow W$: 선형 변환

$\forall A, B \in V$ 에 대해

(1) $T(O) = O$

(2) $T(-A) = -T(A)$

(3) $T(A - B) = T(A) - T(B)$

※ 선형변환은 덧셈의 항등원(O), 덧셈의 역원($-A$), 뺄셈을 보존함

[정리 10.3]

사상 $T: R^m \rightarrow R^n$ 가 선형변환

\leftrightarrow T 에 대응되는 행렬 M 이

$$M = (T(E_1) \ T(E_2) \ \dots \ T(E_m))$$

으로 표시되는 것.

여기서, E_1, E_2, \dots, E_m 은 R^m 의 기본벡터들 [표준기저]
 $T(E_i)$ 는 열벡터

[정리 10.4] 선형변환의 합성

$S: U \rightarrow V, T: V \rightarrow W$: 선형변환

$\forall A \in U$ 에 대해

$T \circ S(A) = T(S(A))$ 로 정의하면,

$T \circ S: U \rightarrow W$ 는 선형변환이다.

M : S 에 대응하는 행렬

N : T 에 대응하는 행렬

$\Rightarrow T \circ S$ 에 대응하는 행렬: NM

10.2 선형변환의 성질

[정리 10.5] 일차결합의 보존

$T: V \rightarrow W$: 선형변환

$$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in V,$$

$\forall k_1, k_2, \dots, k_n \in R$ 에 대해

$$\begin{aligned} T(k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_n A_n) \\ = k_1 T(A_1) + k_2 T(A_2) + \dots + k_n T(A_n) \end{aligned}$$

$$T(\sum k_i A_i) = \sum k_i T(A_i)$$

[정리 10.6] 기저의 상으로 선형변환 결정

$T: V \rightarrow W$: 선형변환

$\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$: V 의 한 기저

$\forall B_i \in W$ ($i = 1, 2, \dots, n$)에 대해

$T(A_i) = B_i$ 를 만족하는 선형변환이
유일하게 존재함.

[정리 10.7] 부분공간의 보존

$T: V \rightarrow W$: 선형변환

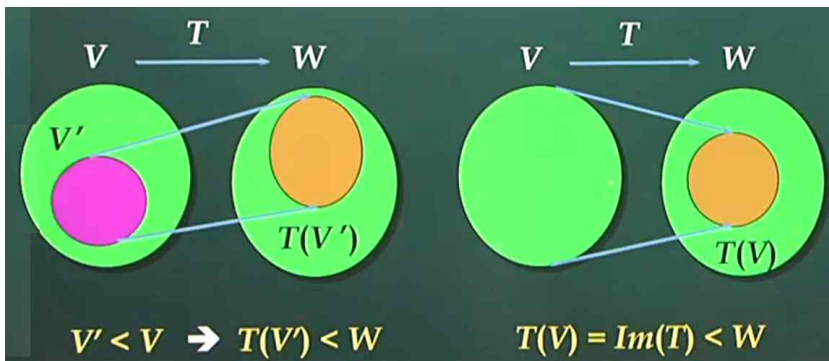
$V' < V \Leftrightarrow T(V') < W$

$T: V \rightarrow W$: 선형변환

$\Leftrightarrow T(V) < W$

※ $T(V)$: T 에 의한 V 의 상(image), $\text{Im}(T)$ 로 표기

※ 그림으로 본 부분공간의 보존



[정리 10.8] 일차독립성의 보존

$T: V \rightarrow W$: 선형변환

$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in V$ 에 대해

모든 $T(A_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)가 W 에서 일차독립

$\Rightarrow A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)도 V 에서 일차독립

※ 순방향의 일차독립보존은

T 가 단사일 때 성립



정리 10.12

[정의 10.2]

$S, T: V \rightarrow W$ 선형변환 일 때,

$\forall A \in V, \forall k \in \mathbb{R}$ 에 대해 $S+T$ 와 kT 를 다음과 같이 정의한다.

$$(S+T)(A) = S(A) + T(A)$$

$$(kT)(A) = kT(A)$$

[정리 10.9]

사상 $S+T$ 와 kT 는 V 에서 W 로의 선형변환이다.

[정의 10.3]

$L(V, W)$: V 에서 W 로의 선형변환 전체의 집합

즉, $L(V, W) = \{ T \mid T: V \rightarrow W \text{ 는 선형변환} \}$

[정리 10.10]

$L(V, W)$ 는 벡터공간이다.

10.3 상과 핵

[정리 10.11] 부분공간의 보존(역방향)

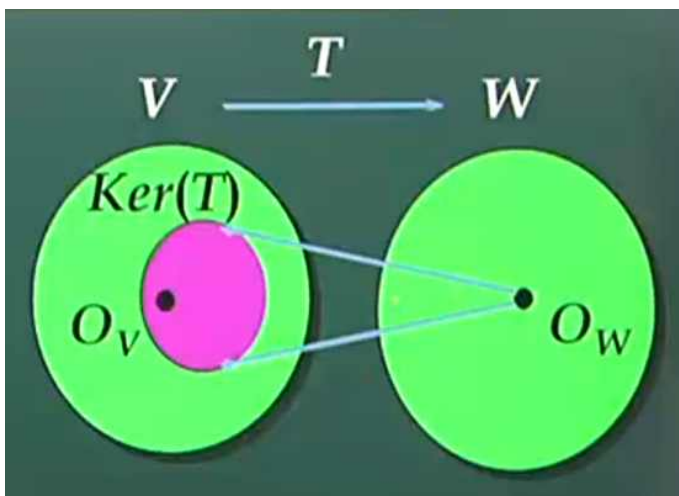
$$T \in L(V, W)$$

$$W' < W \rightarrow T^{-1}(W') < V$$

$$\ast T^{-1}(W') = \{ A \in V \mid T(A) \in W' \}$$

$\ast \{0\} < W \Leftrightarrow \{0\}$ 의 원상 $T^{-1}(0)$: $\text{Ker}(T)$ 로 표시

$$\text{Ker}(T) = T^{-1}(0) < V$$



[정의 10.4] 선형변환의 핵(kernel)

$$T \in L(V, W)$$

$$T^{-1}(0) = \{ A \in V \mid T(A) = 0 \}$$

$\rightarrow T$ 의 핵(kernel), 영공간. $\text{Ker}(T)$ 로 표기

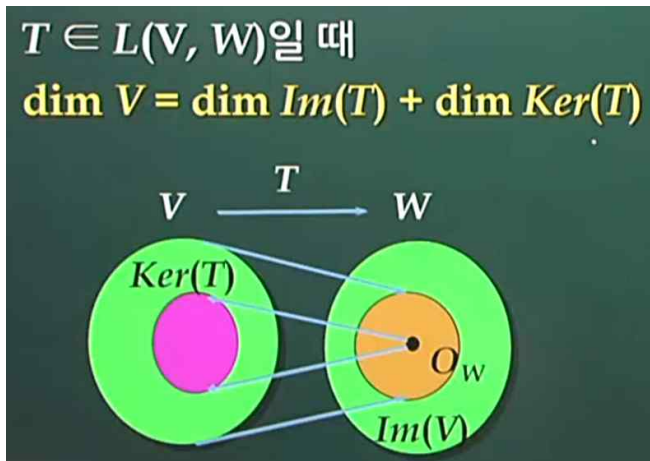
$$\ast \{0\} < W \rightarrow T^{-1}(0) = \text{Ker}(T) < V \text{ [정리 10.11]}$$

$$\ast T^{-1}(0) \neq \emptyset \quad (\because T(0) = 0)$$

[정리 10.12] 일차독립성의 보존

$T \in L(V, W)$, $\text{Ker}(T) = \{O\}$ 일 때,
 $A_1, A_2, \dots, A_n (\in V)$ 이 V 에서 일차독립이면
 $\rightarrow T(A_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 가 W 에서 일차독립

[정리 10.13] 차원공식



[따름정리]

$T \in L(V, W)$, $\dim V = \dim W$, $\text{Ker}(T) = \{O\}$
 $\Leftrightarrow T$ 는 전사 (즉, $T(V) = \text{Im}(T) = W$)

[정리 10.14]

$T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$M = (T(E_1) \ T(E_2) \ \cdots \ T(E_m))$

$\Leftrightarrow \dim T(\mathbb{R}_m) = \dim \text{Im}(T) = \text{rank}(M)$

[따름정리]

$\dim \text{Ker}(T) = m - \text{rank}(M)$

[정리 10.15]

$T \in L(V, W)$
 T 는 단사 $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{O\}$

$(\Rightarrow) \forall A \in \text{Ker}(T) \Rightarrow A = O!$
 $T(A) = O ; T(O) = O (\because T$ 는 선형변환)
 $\Rightarrow A = O (\because T$ 가 단사)

$(\Leftarrow) T(A) = T(B) \Rightarrow A = B!$
 $T(A) = T(B) \Rightarrow T(A-B) = O$
 $\Rightarrow A-B = O (\because \text{Ker}(T) = \{O\})$
 $\Rightarrow A = B$

[따름정리]

$$T \in L(V, W)$$

(1) 기저의 보존

T 가 단사, $\tilde{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ 가 V 의 기저
 $\Rightarrow \tilde{B} = \{T(A_1), \dots, T(A_n)\}$ 가 $T(V)$ 의 기저

(2) 전사와 단사

$\dim V = \dim W \Rightarrow (T \text{가 전사} \Leftrightarrow T \text{가 단사})$

[정의 10.5] 동형변환, 동형공간

$T \in L(V, W)$ 이 전단사일 때,

T 를 동형변환(isomorphism)

V 와 W 를 동형(isomorphic), $V \approx W$ 로 표기

※ 동형변환의 성질

$T \in L(V, W)$ 가 동형변환

(1) $\text{Ker}(T) = \{0\}$, $\text{Im}(T) = W$

(2) $\dim V = \dim W$