과제#1

1. 하나의 주사위를 두 번 던져서 나타나는 주사위의 눈의 수를 관찰할 때, 두 주사위의 눈위 합이 7이 되는 확률을 구하여라.

X=첫 번째 주사위의 눈, Y=두 번째 주사위의 눈

X+Y = 7 : {(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)} = 6가지

{(1,1), ..., (6,6)} = 36가지

$P(X+Y=7) = \frac{6}{36}$

2. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

로 주어질 때, 상수 a와 확률 $P(0 \le X \le 1)$를 구하여라.

$$\int_0^2 ax\,dx = \frac{a2^2}{2} = 1, \quad a = \frac{1}{2},$$

$$P(0 \le X \le 1) = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}$$

3. 두 확률변수 X, Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

로 주어질 때, 상수 c와 X의 주변밀도함수를 구하여라.

$$\int_0^1 \int_0^1 cx^2ydxdy = c\int_0^1 y\frac{1}{3}dy = c\frac{1}{3}\frac{1}{2} = 1, \quad c = 6$$

$$f_X(x) = \int_0^1 6x^2ydy = \frac{6}{2}x^2 = 3x^2$$

4. 연속형 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같을 때, 물음에 답하시오.

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(a) 확률변수 X의 적률생성함수를 구하여라.

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx}2e^{-2x}dx \\ &= \int_0^\infty 2x^{-(2-t)x}dx \\ &= -\frac{2}{2-t}e^{-(2-t)x}\Big|_0^\infty = \frac{2}{2-t}, \quad t<2 \end{aligned}$$

(b) 확률변수 X의 기댓값을 구하여라.

$$E(X) = \left[\frac{d}{dt}M(t)\right]_{t=0} = \frac{1}{2}$$

5. X와 Y의 두 주식의 경제상황에 따른 예상수익률이 다음과 같다. 아래 물음에 답하여라.

경제상황	확률	수익률(%)	
		X	Y
불황	0.3	15	-10
보통	0.5	5	10
호황	0.2	-5	30

(a) X와 Y 두 주식의 기대수익률을 구하여라.

$E(X) = (15)(0.3) + (5)(0.5) + (-5)(0.2) = 6$

$E(Y) = (-10)(0.3) + (10)(0.5) + (30)(0.2) = 8$

(b) X와 Y 두 주식의 표준편차(위험률)를 구하여라.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= (15)^2(0.3) + (5)^2(0.5) + (-5)^2(0.2) - (6)^2 \\ &= 49 \end{aligned}$$

$sd(X) = \sqrt{49} = 7$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= (-10)^2(0.3) + (10)^2(0.5) + (30)^2(0.2) - (8)^2 \\ &= 196 \end{aligned}$$

$sd(Y) = \sqrt{196} = 14$

(c) X와 Y에 반반씩 투자한 상품의 기대수익률과 표준편차(위험률)를 구하여라.

$$\begin{aligned} Z &= 0.5X + 0.5Y \\ E(Z) &= 0.5E(X) + 0.5E(Y) = 0.5(6+8) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= (15)(-10)(0.3) + (5)(10)(0.5) + (-5)(30)(0.2) - (6)(8) \\ &= -98 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= (0.5)^2 Var(X) + (0.5)^2 Var(Y) + 2(0.5)^2 Cov(X, Y) \\ &= (0.5)^2[49 + 196 + 2(-98)] = 12.25 \\ sd(Z) &= \sqrt{12.25} = 3.5 \end{aligned}$$

6. 아래 표는 X와 Y의 결합확률분포이다. 다음 물음에 답하여라.

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$p(x,y)$	1/8	1/4	1/8	1/2

(a) 두 확률변수 X와 Y의 결합확률분포와 주변확률분포를 표로 나타내어라.

X \ Y	0	1	행의 합
0	1/8	1/4	3/8
1	1/8	1/2	5/8
열의 합	1/4	3/4	1

x	0	1	합계
P(X=x)	3/8	5/8	1

y	0	1	합계
P(Y=y)	1/4	3/4	1

(b) 두 확률변수 X와 Y의 공분산과 상관계수를 구하여라.

$E(X) = (0)(3/8) + (1)(5/8) = 5/8$, $\quad Var(X) = (1)^2(5/8) - (5/8)^2 = 0.23$

$E(Y) = (0)(2/8) + (1)(6/8) = 6/8$, $\quad Var(Y) = (1)^2(6/8) - (6/8)^2 = 0.19$

$Cov(X,Y) = (1/2) - (5/8)(6/8) = 0.03$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{sd(X)sd(Y)} = \frac{0.03}{\sqrt{0.23}\sqrt{0.19}} = 0.14$$

7. 주머니에 검은 공 3개, 붉은 공이 2개, 흰 공이 3개가 들어 있다고 하자. 임의로 공을 2개씩 꺼낼 때 X=검은 공의 개수, Y=붉은 공의 개수라고 할 때, 두 확률변수 X와 Y의 결합확률분포를 구하여라.

$$p(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-(x+y)}}{\binom{8}{2}}$$

y \ x	0	1	2	행의 합
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	6/28	6/28	0	12/28
2	1/28	0	0	1/28
열의 합	10/28	15/28	3/28	1

8. 두 개의 주사위를 던지는 경우를 생각해 보자. 첫 번째 던진 주사위의 눈이 두 번째 주사위의 눈보다 클 때, 두 주사위의 눈의 합이 10일 확률을 구하여라.

A=첫 번째 던진 주사위의 눈이 두 번째 주사위의 눈보다 큰 사건
= {(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(4,3),(5,3),(6,3),(5,4),(6,4),(6,5)}
B=두 주사위의 눈의 합이 10일 사건
= {(4,6),(5,5),(6,4)}
$A \cap B = (6,4)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{15}$$

9. 다음 표는 통계학과 학생 100명을 대상으로 조사한 성별에 따른 안경의 착용과 미착용을 조사한 것이다. 다음 물음에 답하여라.

	착용	미착용	계
남	30	20	50
여	10	40	50
계	40	60	100

(a) 임의로 선택한 학생이 남학생일 때, 그 학생이 안경을 착용하고 있을 확률을 구하여라.

M=한 사람을 뽑았을 때 남학생일 사건
A=안경을 착용할 사건

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{30/100}{50/100} = \frac{3}{5} = 0.6$$

(b) 임의로 뽑은 학생이 여학생이고 안경을 착용하고 있지 않을 확률을 구하고, 곱셈법칙이 성립함을 확인하여라.

F=한 사람을 뽑았을 때 여학생일 사건
B=안경을 착용하지 않을 사건
$P(B \cap F) = 40/100 = 0.4$

$P(B|F) = 40/50$, $P(F) = 50/100$, $P(F|B) = 40/60$, $P(B) = 60/100$

$P(B \cap F) = P(B|F)P(F) = P(F|B)P(B)$

(c) 임의로 뽑은 학생이 남학생인 사건과, 안경을 착용하고 있을 사건이 독립인지 판단하여라.

$P(A|M) = 0.6$, $P(A) = 0.4$
두 사건은 독립이 아니다.

10. 3강 강의노트 12p의 R코드를 참고하여 다음 확률을 계산하고, 이를 손으로도 직접 계산하여 비교하여라.

S={두 개의 주사위를 던질 때, 나오는 수의 집합} = {(1,1),(1,2), ..., (6,5),(6,6)}
A={두 주사위의 값이 일치하는 사건의 집합} = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}
B={두 주사위의 값의 합이 10이상인 사건의 집합} = {(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(5,5)}

(a) $P(A|B)$ = 1/3
(b) $P(B|A)$ = 1/3

※참고
R에서 library(prob)를 실행하기 전에 install.packages("prob")를 입력하여 실행할 것.