

## 제8장 벡터공간

### 8.1 벡터와 벡터공간

[정의 8.1] 체 (field)

집합  $F$ 의 원소를  $k, l, m$ 으로 표시할 때,  
집합  $F$ 가 두 연산 덧셈과 곱셈에 대해서 닫혀있고  
다음의 성질들을 만족할 때,

- (1)  $k+l = l+k$
- (2)  $k+(l+m) = (k+l)+m$
- (3)  $\forall k \in F, \exists 0 \in F$  such that  $k+0=k$
- (4)  $\forall k \in F, \exists -k \in F$  such that  $k+(-k)=0$
- (5)  $k \cdot l = l \cdot k$
- (6)  $k \cdot (l \cdot m) = (k \cdot l) \cdot m$
- (7)  $\forall k \in F, \exists 1 \in F$  such that  $k \cdot 1=k$
- (8)  $\forall k(\neq 0) \in F, \exists k^{-1} \in F$  such that  $k \cdot k^{-1}=1$
- (9)  $k \cdot (l+m) = (k \cdot l)+(k \cdot m)$

이 집합  $F$ 를 체(field)라고 한다.

체의 원소는 스칼라(scalar)라고 부른다.

[정의 8.2] 벡터공간 (Vector Space)

집합  $V$ 의 원소를  $A, B, C, \dots$  로 표시하고,  
체  $F$ 의 원소를  $k, l$ 로 표시할 때,  
두 가지 연산(덧셈과 곱셈)에 대하여

- (1)  $V$ 는 덧셈(+)에 관하여 닫혀있고 다음을 만족하고,
  - (가)  $A+B=B+A$
  - (나)  $A+(B+C) = (A+B)+C$
  - (다)  $\forall A \in V, \exists 0 \in V$  such that  $A+O=A$
  - (라)  $\forall A \in V, \exists -A \in V$  such that  $A+(-A)=O$
- (2)  $V$ 는 곱셈( $\cdot$ )에 관하여 닫혀있고 다음을 만족할 때,
  - (가)  $(kl) \cdot A=k \cdot (l \cdot A)$
  - (나)  $k \cdot (A+B) = k \cdot A+k \cdot B$
  - (다)  $(k+l) \cdot A=k \cdot A+l \cdot A$
  - (라)  $1 \cdot A=A$

$V$ 를 체  $F$ 위에 정의된 벡터공간이라고 한다.

$V$ 의 원소를 벡터(vector)라고 한다.

※ 벡터공간  $V$ 의 표기:  $\langle V, +, \cdot, F \rangle$  또는  $\langle V, +, \cdot \rangle$  over  $F$

[정리 8.1] 행렬집합  $M_{mn}(R)$

원소가 실수인  $m \times n$  행렬 전체 집합  $M_{mn}(R)$ 은 체를 실수 집합  $R$ 로 선택하고, 벡터공간의 두 연산(합과 곱)을 각각 '행렬의 합'과 '행렬의 스칼라 배'로 정의하면 벡터공간이 된다. [제3강 참조 (정리 3.1 & 3.2)]

$$M_{mn}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in R \right\}$$

[정의 8.3] 행 벡터공간 및 열 벡터공간

(1) 정리 8.1에서  $m = 1$ 인 경우 ( $M_{1n}(R)$ )를  $n$ 차 행벡터 공간(row vector space)라 한다.

$$M_{1n}(R) = \{ (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \mid a_i \in R \}$$

(2) 정리 8.1에서  $n = 1$ 인 경우 ( $M_{m1}(R)$ )를  $m$ 차 열벡터 공간(column vector space)라 한다.

$$M_{m1}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mid a_j \in R \right\}$$

## 8.2 부분공간

[정의 8.4] 부분공간 (Subspace)

$V$ 를 체  $F$ 위의 벡터공간이라 할 때  $V$ 의 부분집합  $S$ 가 다음 두 가지 성질을 만족하면 집합  $S$ 를 벡터공간  $V$ 의 부분공간이라 한다.

- (1)  $A, B \in S$  이면  $A + B \in S$  이다.
- (2)  $A \in S, k \in F$  이면  $kA \in S$  이다.