제11장 BS, Splay, AVL, BB

1. 이진 탐색 트리(BS 트리)

○ 이진 탐색 트리 (binary search tree)

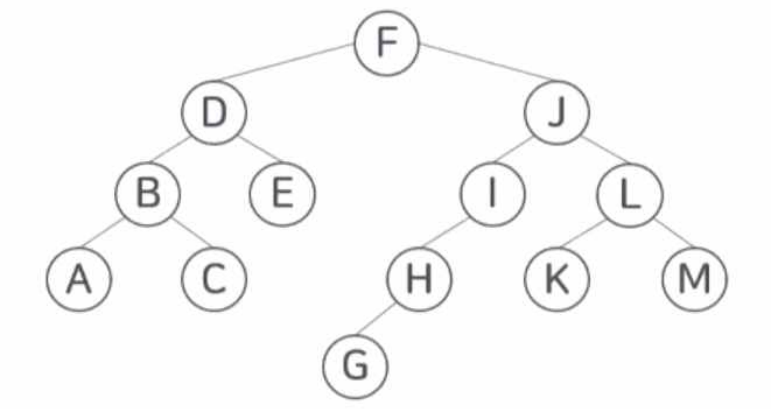
- 이진 탐색 트리: 트리에서 특정 데이터의 효과적인 검색을 위해 제한점을 가지는 이진 트리
- 특정데이터를 검색하고, 노드를 삽입/삭제하는 응용 문제에 가장 효과적인 이진 트리
- 탐색에 최적화된 이진 트리
- 키: 이진 트리의 노드의 데이터(노드를 특정할 수 있는 값)

- 노드 v_i의 키를 k_i라 할 때 각 노드 v_i가 다음을 만족하는 이진 트리를 이진 탐색 트리(BS 트리)라 함
  ① v_i의 왼쪽 서브트리에 있는 모든 노드의 키값은 v_i의 키값보다 작다.
  ② v_i의 오른쪽 서브트리에 있는 모든 노드의 키값은 v_i의 키값보다 크다.

○ BS 트리에서 키 값이 k인 노드를 찾는 과정

① 트리가 비어 있다면 탐색 실패, 아니면 k와 현재 루트 노드의 키값 ki를 비교한다.
② $k=k_i$이면 탐색 성공, 이때 찾은 정점은 v_i다.
③ $k<k_i$이면 v_i의 왼쪽 서브 트리를 탐색한다.
   즉, $v_i=v_{i,left}$로 바꾸고 ①로 간다.
④ $k>k_i$이면 v_i의 오른쪽 서브 트리를 탐색한다.
   즉, $v_i=v_{i,right}$로 바꾸고 ①로 간다.

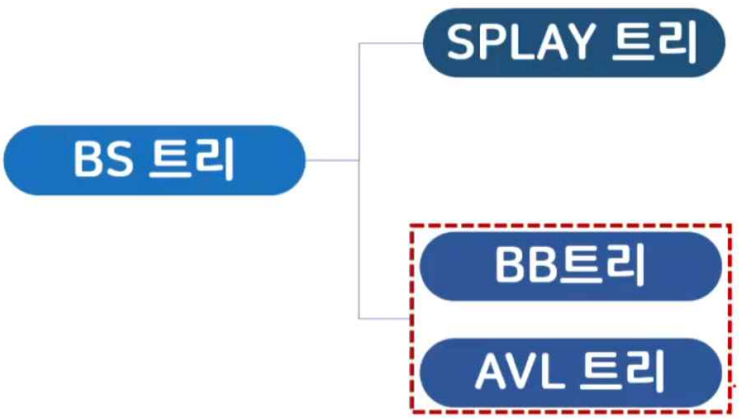
○ BS 트리의 노드 삭제



- 자식을 하나만 갖는 노드를 삭제하는 경우,
  [삭제한 노드를 가리키던 포인터]가
  [그 노드의 null이 아닌 서브트리의 루트]를 가리키게 할당함
  ex) 노드 H나 I의 삭제
- 두 개의 자식 노드를 가지는 노드는 삭제 시 항상 특정 방향의 자식 노드를 올리는 방법으로 구현(즉, 항상 오른쪽(혹은 왼쪽) 자식 노드를 삭제 위치로 이동)
  ex) 노드 B나 L의 삭제

2. Splay, AVL, BB 트리

○ BS 트리 - Splay 트리 - BB 트리 - AVL 트리



○ 이진 탐색 트리의 단점

- BS 트리의 성능은 트리의 구조와 특정 노드에 접근할 확률에 영향을 받음
- 트리의 성능이 구조에 영향을 받기 때문에 어떤 노드의 탐색/삽입/삭제를 위한 접근정보를 예측할 수 없는 상황에서는 최적의 BS 트리구조를 결정하기 어려움
- 휴리스틱 알고리즘을 사용하여 구축한 BS 트리의 성능이 최적에 가까움

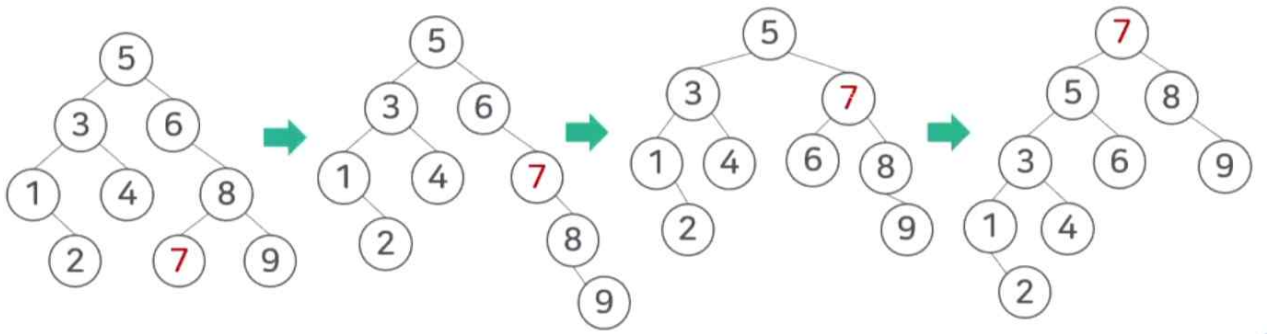
○ 좋은 성능의 BS 트리를 구축하는 방법 (휴리스틱)

→ 자주 탐색하는 키를 가진 노드를 트리의 루트에 가깝게 놓는다.

→ 트리가 균형(balace)이 되도록 유지한다. 즉, 각 노드에 대해 왼쪽과 오른쪽 서브트리가 가능한 한 같은 수의 노드를 갖게 한다.

○ Splay 트리

- 자주 탐색하는 키를 가진 노드를 루트에 가깝게 위치하도록 구성한 BS 트리
- Splay 연산: 최근에 접근한 노드 x를 (곧 사용할 것으로 예상하여) 루트에 위치시켜 트리를 재구성하는 연산
- Splay 트리: 가장 최근에 사용한 노드 x가 트리의 루트에 올 때까지 Splay 연산을 반복하여 적용하여 생성된 이진 트리
- Splay 트리의 연산: Zig, Zig-Zig, Zig-Zag



○ AVL 트리의 개념

- 제한 조건을 완화하여 트리가 (완전한) 균형이 아닌 것을 허용함
- 무너진 균형의 정도는 작아야 하고, 평균 탐색 길이도 완전 균형 트리의 탐색 길이와 크게 차이가 나지 않아야 함
- 거의 완전한 균형 트리의 한 형태로 높이가 균형잡힌 높이 균형 트리(height balanced tree)
- 직접 탐색 성능이 매우 좋음

○ AVL 트리의 조건

- 노드 v_i의 왼쪽 서브트리 높이와 오른쪽 서브트리 높이가 최대 1만큼 차이가 남

○ BB 트리의 정의

- BB(bound-balanced) 트리: 거의 완전히(대략) 균형 잡힌 트리의 다른 종류로 무게가 균형 잡힌 트리
- 각 노드의 양쪽 서브트리 무게가 균형을 유지하는 트리

$$\sqrt{2}-1 < \frac{\text{왼쪽 서브트리의 무게}}{\text{오른쪽 서브트리의 무게}} < \sqrt{2}+1$$

- β는 균형을 제어하기 위한 인수
- 균형 $\beta(0<\beta\leq 1/2)$ 라는 것은 임의의 노드 x에 대해 x의 한 쪽(보통 왼쪽) 서브트리에 x의 자식 노드 수의 비율이 β와 1-β 사이에 있도록 제한하는 경우
- 만일 $\beta=1/2$ 이면 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리는 같은 수의 노드를 가져야 함
  → 무게가 완전히 균형잡힌 상태

○ 균형 트리

- AVL 또는 BB 트리에 대하여 각각 무게 또는 크기(높이) 제한 조건을 만족시키는데 드는 비용은 트리를 완전히 균형 잡히게 유지하는 비용이나 노력보다 훨씬 작음
- 삽입이나 삭제 후에 트리를 완전히 균형 잡히게 유지하기 위해서는 O(n)의 노드를 옮겨야 하는 반면에 AVL 또는 BB 트리는 $O(\log_2 n)$ 개의 노드를 옮기면 되는 것으로 알려져 있음