1. θ의 최대가능도 추정량을 구하시오

휴대폰이 첫 번째 고장이 나는 시간이 평균 θ인 지수분포는 다음과 같다.

$$f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \quad \text{for } x_i \geq 0$$

가능도 함수 $L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{20} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}}\right)$

$$= \left(\frac{1}{\theta}\right)^{20} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{20} x_i\right)$$

로그가능도함수 $l(\theta|x) = \operatorname{Log} L(\theta|x) = 20\log\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{20} x_i$

$$= -20\log\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

θ의 최대가능도 추정량을 구하기 위해 $\frac{d}{d\theta} l(\theta|x) = 0$ 을 계산

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta|x) = -\frac{20}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{20} x_i = 0.$$

$$\frac{20}{\theta} = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

$$20\cdot\theta = \sum_{i=1}^{20} x_i$$

$$\theta = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

//

2. θ의 균일최소불편 추정량을 구하시오.

레만-쉐페 정리에 따르면

$X_1, X_2 \cdots, X_{20}$ 이 $f(x_i|\theta)$ 의 확률표본일 때

T_1 이 θ의 완비충분통계량, T_2 가 θ의 불편추정량 이라 하면,

완비충분통계량 T_1을 구하고, T_1의 기대값이 불편추정량이 되는 변환을

찾으면 균일최소불편추정량은 구할 수 있다.

$$T^* = E(T_2 | T_1)$$

지수분포는 지수족이고 따라서 $T = \sum_{i=1}^{20} X_i$ 는 θ의 완비충분통계량이다.

X_i 가 지수분포를 따를 때 $\sum_{i=1}^{20} X_i$ 는 감마분포를 따른다.

$$T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim Gamma(n, \theta)$$

감마분포의 평균은 $n\theta$

$$\therefore E(T) = E(\sum_{i=1}^{20} X_i) = n\theta$$

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} X_i) = \theta$$

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} X_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i$ 는 θ의 완비충분통계량 T의 함수로 불편추정량이다

레만-쉐페의 정리에 따라서

$\overline{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i$ 는 θ의 균일최소불편추정량이다.

3. 휴대폰의 수가 커지면서 앞서 구한 최대가능도 추정량은 어떤 분포를 따르는가? (현재 20대를 ∞로 크게 변화시킨다고 가정).

중심극한정리에 따르면 독립적이고 동일하게 분포하는 임의의 확률변수 $X_1 \cdots X_n$의 평균 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$는 n이 충분히 클 때 모집단의 분포와 관계없이 다음의 정규분포에 근사한다.

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

지수분포를 따르는 확률변수 X_i는 평균 θ, 분산 θ^2를 가진다.

$$E(X_i) = \theta$$

$$Var(X_i) = \theta^2$$

$$\therefore \bar{X} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$$

그런데 최대가능도추정량 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$은 $\bar{X}$와 같다.

$$\therefore \hat{\theta} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$$

☐ 학생들의 통계적 추론 성적이 지난 학기 80점이었다. 이번에 새로운 교육방법을 도입한 후 그 교육방법이 성적을 향상시키는지 임의로 선발된 16명의 학생에 대해 시험을 실시하였다.

4. 성적이 지난해보다 향상되었는가에 대해 검정을 실시하려고 한다. 학생의 성적 $(X_1, X_2, \cdots, X_{16})$이 정규분포 $N(\theta, 9)$를 따른다고 할 때 가능도비 검정을 실시하시오.

귀무가설 $H_0 \Rightarrow \theta = 80$

대립가설 $H_1 \Rightarrow \theta > 80$

X_i의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x_i|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 9}} \exp\left(-\frac{1}{2\cdot 9}(x_i-\theta)^2\right)$$

가능도 함수 $L(\theta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 9}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\cdot 9}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)$$

가능도비 $\lambda(x) = \dfrac{\sup_{\theta\in\Omega} L(\theta|\underline{x})}{\sup_{\theta\in\Omega_0} L(\theta|\underline{x})}$

$$= \frac{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 9}}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2\cdot 9}\Sigma(x_i-\bar{x})^2\right)}{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 9}}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2\cdot 9}\Sigma(x_i-\theta_0)^2\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\cdot 9}\Sigma(x_i-\bar{x})^2 + \frac{1}{2\cdot 9}\Sigma(x_i-\theta_0)^2\right)$$

계속해서 $\lambda(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\cdot 9}\left(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right) + \frac{1}{2\cdot 9}\left(\sum_i x_i^2 - 2n\bar{x}\theta_0 + n\theta_0^2\right)\right)$

$$= \exp\left(\frac{n}{2\cdot 9}\left(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\theta_0 + \theta_0^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{n}{2\cdot 9}\left(\bar{x}-\theta_0\right)^2\right) \Rightarrow |\bar{x}-\theta_0| \text{ 의 증가함수}$$

따라서 $\lambda(x) > c' \Leftrightarrow |\bar{x}-\theta_0| > c$

$$\bar{X} \sim N\left(\theta_0, \frac{9}{16}\right) \Rightarrow \overbrace{\sqrt{\frac{16}{9}}\left(\bar{X}-\theta_0\right)}^{=Z} \sim N(0,1)$$

$$P_{\theta_0}\left(|\bar{X}-\theta_0| > c\right) = P\left(\sqrt{\frac{16}{9}}|\bar{X}-\theta_0| > \sqrt{\frac{16}{9}}c\right)$$

$$= P\left(|Z| > \sqrt{\frac{16}{9}}c\right) = P\left(Z > \sqrt{\frac{16}{9}}c\right) + P\left(Z < -\sqrt{\frac{16}{9}}c\right)$$

그런데 대립가설 H_1은 $\theta \neq 80$ 이 아니라 $\theta > 80$ 이어서 단측검정이다.

$$\alpha = P\left(Z > \sqrt{\frac{16}{9}}c\right)$$

$$\sqrt{\frac{16}{9}}c = z_\alpha \qquad \therefore c = \sqrt{\frac{9}{16}}z_\alpha = \frac{3}{4}z_\alpha$$

유의수준 α 에서의 가능도비 검정은 다음과 같다.

만약 $\bar{X} - 80 > \frac{3}{4}z_\alpha \Rightarrow H_0$ 기각.

5. 16명의 학생 성적 평균이 85점으로 나타났다. 이 성적이 지난 학기보다 향상되었다고 볼 수 있는지를 유의수준 5% 에서 검정하시오.

$\bar{X} = 85$ $\quad$ $z_{0.05} = 1.645$.

$\bar{X} - 80 > \frac{3}{4} \cdot 1.645$

$5 > 1.234$

$\therefore$ H_0 기각된다. 즉 새로운 교육방법으로 성적이 향상되었다고 할수 있다 (유의수준 5%)