

제13장 행렬의 대각화

[도입] 대각행렬의 특성

M, N: n차 대각행렬

- (1) MN 도 대각행렬
- (2) 대각행렬 M의 행렬식 : $a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$
- (3) 대각행렬의 역행렬

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

- (4) 대각행렬의 고유값 : 주대각원소
- (5) 대각행렬의 거듭제곱(멱승)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow M^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}$$

13.1 행렬의 대각화 가능성

[정의 13.1] 대각화 가능

M, N : n차 정방행렬

D : 대각행렬

- (1) $N = PMP^{-1}$ 를 만족하는 P가 존재
 \Leftrightarrow M과 N이 유사하다(similar)
[M과 N은 닮은 행렬, 또는 상사행렬]
- (2) M과 D가 유사하다. 즉, $M = PDP^{-1}$
 \Leftrightarrow M이 대각화 가능하다(diagonalizable)

13.2 행렬의 대각화

[도입] diagonalizing a matrix

n차 정방행렬 M이 대각화 가능하다.

\Rightarrow M의 거듭제곱도 쉽게 구할 수 있음

- (1) 어떤 행렬이 대각화 가능할까?
- (2) 대각화 가능하다면

M = PDP^{-1} 를 만족하는 정칙행렬 P와 대각행렬 D는 어떻게 구할까?

[정리 13.1] 대각화 가능

n 차 정방행렬 M 이 서로 일차독립인 n 개의 고유벡터를 가지면

$\Rightarrow M$ 은 대각화 가능하다.

즉, M 의 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 에 각각 대응하는
 M 의 고유벡터 A_1, A_2, \dots, A_n 이 서로 일차독립이면
정칙행렬 P , 대각행렬 D 가 존재하여
 $M = PDP^{-1}$ 를 만족한다. 여기서,

$$P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[따름정리]

n 차 정방행렬 M 이 n 개의 서로 다른 고유값을 가지면 M 은 대각화 가능하다.

[정리 13.2] 대각화 가능 [정리 13.1의 역]

n 차 정방행렬 M 이 대각화 가능하면

$\Rightarrow M$ 은 서로 일차독립인 n 개의 고유벡터를 가진다.

정칙행렬 P , 대각행렬 D 가 존재하여
 $M = PDP^{-1}$ 를 만족하고, 이때

$$P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

이러면, d_1, d_2, \dots, d_n 은 M 의 고유값이고,
 P 의 i 번째 열벡터는 d_i 에 대응하는 M 의 고유벡터이다.

13.3 응용: 피보나치 수열