1. $X_1, \cdots, X_n$ 이 균등분포 $U(\theta-1, \theta+1)$ 로부터의 확률분포일 때,

θ의 최대가능도추정량이 유일하지 않음을 보이시오.

균등분포 $U(\theta-1, \theta+1)$의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x_i|\theta) = \frac{1}{(\theta+1)-(\theta-1)} = \frac{1}{2} \quad , \quad \theta-1 < x_i < \theta+1$$

가능도 함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) I_{[\theta-1, \theta+1]}(x_i)$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & , \ \theta-1 \le x_i \le \theta+1 \\ 0 & , \ \text{otherwise} \end{cases}$$

이 때 $\theta-1 \le x_i \le \theta+1$ 을 만족하는 모든 x_i 에 대해서 가능도함수의 값이

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$으로 동일하고, 이것이 최대가능도추정량이 된다.

$\therefore$ θ의 최대가능도추정량은 유일하지 않다.

$X_1, \cdots, X_n$이 포아송분포 $Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$을 따를 때

다음의 물음에 답하시오.

2. λ에 대한 적률추정량을 구하시오.

$m_1 = E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} = \lambda$ $\qquad$ $\therefore$ λ의 적률추정량 $= \overline{X}$

$m_2 = Var(X) = E(X^2) - (E(X)^2)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \lambda$ $\qquad$ $\therefore$ λ의 적률추정량 $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

3. λ에 대한 최대가능도추정량을 구하시오.

포아송분포의 확률질량함수 $P(X_i = x_i) = \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$

n개의 표본 $X_1, \cdots, X_n$의 결합가능도 함수

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$

결합가능도함수의 로그를 취하면

$l(\lambda) = \log L(\lambda) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \log\left(\dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_i \log\lambda - \lambda - \log(x_i!))$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \log\lambda - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!)$

로그가능도함수를 최대화하기 위해 λ에 대해 미분한 값이 0이 되어야 한다.

$\dfrac{dl(\lambda)}{d\lambda} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n = 0$ $\qquad$ $\therefore$ $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$

4. 지수족임을 보이시오.

확률밀도함수 $f(x|\theta)$ 이 다음 형태일 때 지수족이라 한다.

$$f(x|\theta) = \exp(Q(\theta)K(x) + S(x) + C(\theta))\, I_A(x)$$

포아송분포의 확률밀도 함수 $f(x_i|\lambda) = \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$

$$f(x_i|\lambda) = \exp(x_i \log\lambda - \lambda - \log(x_i!))$$

$\lambda = \theta$ 라 하면 $Q(\theta)K(x) = \log\lambda \cdot x_i$

$S(x) = -\log(x_i!)$

$C(\theta) = -\lambda$

그리고 $A = \{x_i | -\infty < x_i < \infty\}$ 로 표현할 수 있다.

$\therefore$ 포아송분포는 지수족이다.

5. λ에 대한 완비충분 통계량을 구하시오.

지수족의 완비충분통계량은

$f(x|\theta) = \exp\{Q(\theta)K(x) + S(x) + C(\theta)\}\, I_A(x)$ 일 때

$Y = \sum_{i=1}^{n} K(x_i)$ 이다.

포아송분포의 확률밀도함수 $f(x_i|\lambda) = \exp(x_i \log\lambda - \lambda - \log(x_i!))$

에서 $K(x_i) = x_i$ 이므로

완비충분통계량 $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 이다.

$X_1, \cdots, X_n$ 이 베르누이분포 $Ber(p)$로부터의 확률표본일 때, 물음에 답하시오.

6. p 의 최대가능도추정량을 구하시오.

베르누이분포의 확률질량함수 $P(X_i = x_i | p) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

n개의 표본 $X_1, \cdots, X_n$ 의 결합 가능도 함수

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

결합가능도 함수의 로그를 취하면

$$\begin{aligned} l(p) = \log L(p) &= \log \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i \log p + (1-x_i)\log(1-p)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log p + \sum_{i=1}^{n} (1-x_i) \cdot \log(1-p) \end{aligned}$$

로그가능도함수를 최대화하기 위해 p에 대해 미분한 값이 0이 되어야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{dl(p)}{dp} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{p} + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i) \cdot \frac{-1}{1-p} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}{1-p} \\ &= \frac{(1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i - np + p\sum_{i=1}^{n} x_i}{p \cdot (1-p)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np}{p(1-p)} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow$ p의 최대가능도추정량은 표본평균이다.

7. p의 균일최소분산불편추정량을 구하시오.

베르누이분포의 확률질량함수 $f(x_i|p) = p^{x_i}(1-p)^{(1-x_i)}$

지수형태로 나타내면 $f(x_i|p) = \exp(x\cdot(\log p - \log(1-p)) + \log(1-p))$

$$f(x|\theta) = \exp\{Q(\theta)K(x) + S(x) + C(\theta)\} I_A(x)$$ 일 때

$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} K(x)$ 가 완비충분통계량 임을 적용하면

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 는 p의 완비충분통계량 이다.

그리고 $E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = np$. 이므로

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = p.$$

$\therefore$ $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 는 p의 완비충분통계량 함수이며 불편추정량이다.

$\therefore$ 레만-쉐페 정리에 의해 $\overline{X}$는 p의 균일최소불편추정량이다.

8. $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $0 < x < \infty$, $\theta > 0$

피셔 정보량 $I(\theta) = E\left(-\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\log f(x|\theta)\right)$

$$\log \theta e^{-\theta x} = \log\theta - \theta x$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\log\theta - \theta x) = \frac{1}{\theta} - x$$

$$\frac{\partial}{\partial^2\theta}(\log\theta - \theta x) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\theta} - x\right) = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$\therefore I(\theta) = E\left(\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}$$

θ의 정보량부등식 하한은 $\frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}$ 이다.

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 일때 $Var(\bar{X})$를 구하면

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$ 인데.

$$E(X_i) = \int_0^\infty x \cdot \theta \cdot e^{-\theta x}dx = \left[x(-e^{-\theta x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\theta x}dx$$

$$= \left[\frac{-1}{\theta}e^{-\theta x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\theta}$$

$$E(X_i^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \theta e^{-\theta x}dx$$

$$= \left[x^2\left(-\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\right)(2x\,dx)$$

$$= +\frac{2}{\theta}\int_0^\infty x e^{-\theta x}dx = \frac{2}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta} = \frac{2}{\theta^2}$$

$$\therefore Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

그런데 $\tau(\theta)=\frac{1}{\theta}$ 이므로 $Var(X_i)$는 $\frac{1}{\theta^2}$이 아니라 θ^2로 표시.

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$$

$\therefore$ $\bar{X}$는 $\tau(\theta)=\frac{1}{\theta}$ 에 대한 균일최소분산추정량이다.