# 제3장 행렬연산

## 3.1 기본 개념

[정의 3.1] $m \times n$ 행렬 A에 대하여

① i번째 행의 j번째 원소 ⇨ (i, j) 원소[성분] $a_{ij}$

② 행렬 A의 표현 ⇨ $A = (a_{ij})$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$

③ m=n 일 때 ⇨ A는 n차 정방행렬(square matrix of order n)

④ A가 정방행렬일 때 ⇨ $a_{ii}(1 \le i \le n)$를 A의 주대각원소[성분]

[정의 3.2] n차 정방행렬 $A = (a_{ij})$에 대하여

1) $a_{ij}=0$ (단, $i \neq j$) ⇨ 대각행렬(diagonal matrix)

 ① $a_{ii}=c$ $(1 \le i \le n)$ ⇨ 스칼라행렬(scalar matrix)

 ② $a_{ii}=1$ $(1 \le i \le n)$ ⇨ 단위행렬(identity matrix)

2) $a_{ij}=0$ (단, $i<j$) ⇨ 하삼각행렬(lower triangular matrix)

3) $a_{ij}=0$ (단, $i>j$) ⇨ 상삼각행렬(upper triangular matrix)

[정의 3.3] 행렬의 상등

$A = (a_{ij})$와 $B = (b_{ij})$를 $m \times n$ 행렬이라 할 때,

모든 i,j $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ 에 대해

 $a_{ij} = b_{ij}$ 인 경우

A와 B는 서로 같다 또는 상등하다 고 말한다.

## 3.2 행렬의 합

[정의 3.4] 행렬의 합

$A = (a_{ij})$와 $B = (b_{ij})$를 $m \times n$ 행렬이라 하면

A와 B의 합(sum)은 $m \times n$ 행렬 $C = (c_{ij})$로서

 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$

으로 정의된다.

이런 경우 $A + B = C$ 로 표시한다.

[정리 3.1] 행렬의 합의 성질

$M_{mn}$이 $m \times n$ 행렬 전체의 집합이고, $A, B, C \in M_{mn}$일 때 다음이 성립한다.

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A + O = A$를 만족하는 유일한 행렬 O가 $M_{mn}$에 존재함

 ※ 행렬 O: $m \times n$ 크기의 영행렬(zero matrix)

(4) A + D = O을 만족하는 행렬 D가 A에 대해 유일하게 $M_{mn}$에 존재함
※ 행렬 D = -A라 표기하며 A의 음행렬(negative matrix)

**3.3 행렬의 스칼라곱**
[정의 3.5] 행렬의 스칼라 배
A = $(a_{ij})$가 m×n 행렬이고 c를 임의의 수라고 하면
A와 c의 스칼라 배(scalar multiple) cA는 m×n 행렬로서
cA = $(ca_{ij})$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$
으로 정의된다.

[정리 3.2] 행렬의 스칼라 배의 성질
A, B, C ∈ $M_{mn}$, c, d를 임의의 수
(1) (c+d)A = cA + dA
(2) c(A+B) = cA + cB
(3) c(dA) = (cd)A
(4) 1A = A

**3.4 행렬의 곱**
[정의 3.6] A = $(a_{ij})$가 m×p 행렬이고, B = $(b_{ij})$가 p×n 행렬이면
A, B의 곱 AB는 m×n 행렬 C = $(c_{ij})$로 다음과 같이 정의한다.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$$

이런 경우 AB = C로 표시한다.

[유의사항] 행렬 곱의 특이 사항
m×p 행렬 A와 p×n 행렬 B에 대해 AB는 정의되지만
BA는 다음 4가지 경우가 있음
① BA가 정의되지 않는 경우 $(n \neq m)$
② BA가 정의되나, AB와 크기가 같지 않은 경우$(n=m,\ p \neq n)$
즉, AB는 n×n 행렬, BA는 p×p 행렬이다.
③ BA가 정의되고, AB와 크기도 같으며 AB≠BA 인 경우
③ BA가 정의되고, AB와 크기도 같으며 AB=BA 인 경우

[정리 3.3] 행렬의 곱의 성질
행렬 A, B, C와 임의의 수 c에 대해

행렬의 곱이 정의되는 경우, 다음이 성립한다.
(1) $A(B+C) = AB + AC$
(2) $(A+B)C = AC + BC$
(3) $A(BC) = (AB)C$
(4) $A(cB) = c(AB) = (cA)B$

[유의사항] 행렬 곱의 항등원
행렬의 곱에도 항등원이 있는가?
- 임의의 수 a에 대해 $1a = a1 = a$를 만족하는 수 1과 유사한 기능을 갖는 행렬
- 행렬의 곱에서 $AI = IA = A$를 만족하는 행렬 I
  → 단위행렬(정의 3.2)
- 만일 $A = (aij)$가 $m \times n$ 행렬이라면
 $AI_n = A$, $I_mA = A$가 된다.
 즉, 단위행렬은 행렬의 곱에 대한 항등원

**3.5 행렬의 전치**
[정의 3.7] 행렬의 전치
$A = (a_{ij})$가 $m \times n$ 행렬이라 하면
A의 전치행렬(transpose of A)는
$n \times m$ 행렬 $A^T = (a_{ij}^T)$로서
 $a_{ij}^T = a_{ji}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$
를 만족한다.

[정리 3.5] 행렬 전치의 성질
c가 임의의 수이고 A와 B가 행렬일 때
연산이 정의되는 경우에 있어 다음이 성립한다.
(1) $(A^T)^T = A$
(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
(3) $(AB)^T = B^TA^T$
(4) $(cA)^T = cA^T$

[정의] 대칭행렬
$A^T = A$인 행렬 A를 대칭행렬(symmetric matrix)이라고 한다.
 ※ 행렬 A가 대칭행렬이기 위해서는
  - A는 정방행렬이어야 하며
  - $a_{ij} = a_{ji}$를 만족해야 함