11. 통계적 추정의 원리

◈ 담당교수: 한국방송통신대 통계·데이터과학과 이긍희

연습문제

(※ 1~3) $X_1,\cdots,X_n \sim Poisson(\theta)$의 확률표본일 때 다음 물음에 답하시오.

1. θ의 충분통계량은 무엇인가?

<해설>

$$
\begin{aligned}
L(\theta\ ;\ x_1,\ \cdots,\ x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i\ ;\ \theta) \\
&= k_1(t_1\ ;\ \theta)\cdot k_2(x_1,\ \cdots,\ x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_i^{x} e^{-\theta}}{x_i!} \\
&= \theta^{\sum x_i} e^{-n\theta} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}
\end{aligned}
$$

피셔- 네이만의 인수분해정리에 따라 $\sum_{i=1}^{n} X_i$*는 충분통계량이다.*

2. θ의 불편추정량은 무엇인가?

<해설>

$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n\theta$이다. *따라서* $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \theta$

3. θ의 균일최소분산불편추정량을 구하시오.

<해설>

포아송 분포는 지수족이고 $\sum_{i=1}^{n} X_i$*는 완비충분통계량이다.* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$*는* $\sum_{i=1}^{n} X_i$*의 함수이면서 불편추정량이므로* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$*는* θ*의 균일최소분산추정량이다.*

정리하기

- 통계량 T가 주어졌을 때 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$의 조건부분포가 모수 θ에 의존하지 않을 때 T를 θ의 충분통계량이라 한다.
- 확률밀도 함수 집합 $\{f(x;\theta)\ ;\ \theta \in \Omega\}$에 대해 다음 형태일 경우 지수족이라 부른다.

$$f(x;\theta) = \exp\{Q(\theta)K(x) + S(x) + C(\theta)\}I_A(x)$$

- 모든 θ에 대해 $T(\boldsymbol{X})$의 함수 g에 대해 다음이 성립할 때 $T(\boldsymbol{X})$는 완비통계량이라 한다.

$$E(g(T(\boldsymbol{X}))|\theta) = 0 \text{일 때 } P(g(T(\boldsymbol{X})) = 0) = 1$$

- 균일최소분산불편추정량은 같은 평균제곱오차를 갖는 추정함수의 집합 내에서 최소분산불편추정량이다.