09 강

통계적추론

점추정 1

한국방송통신대학교 통계·데이터과학과
이긍희 교수

학습내용

1. 통계적 추정의 개념을 이해한다.
2. 적률추정법을 이해한다.
3. 가능도함수를 이해한다.
4. 최대가능도추정법을 이해한다.

01

통계적 추정의 개념

1 통계적 추정

통계적 추정

- 모집단 : 확률변수 $X \sim f(x|\theta)$
- 표본 : $X_1, X_2, \cdots X_n$ 독립 추출$\sim f(x|\theta)$
- 추정 : 통계량으로 모수 θ 추정

1 통계적 추정

통계적 추정

- 점추정 : 모수에 대해 하나의 추정값만 제시
- 구간추정 : 모수 추정값과 더불어 정확도를 함께 제시

1 통계적 추정

통계적 추정

- 추정량 : 확률표본의 함수인 통계량
- 적률추정량, 최대가능도추정량, 베이즈 추정량

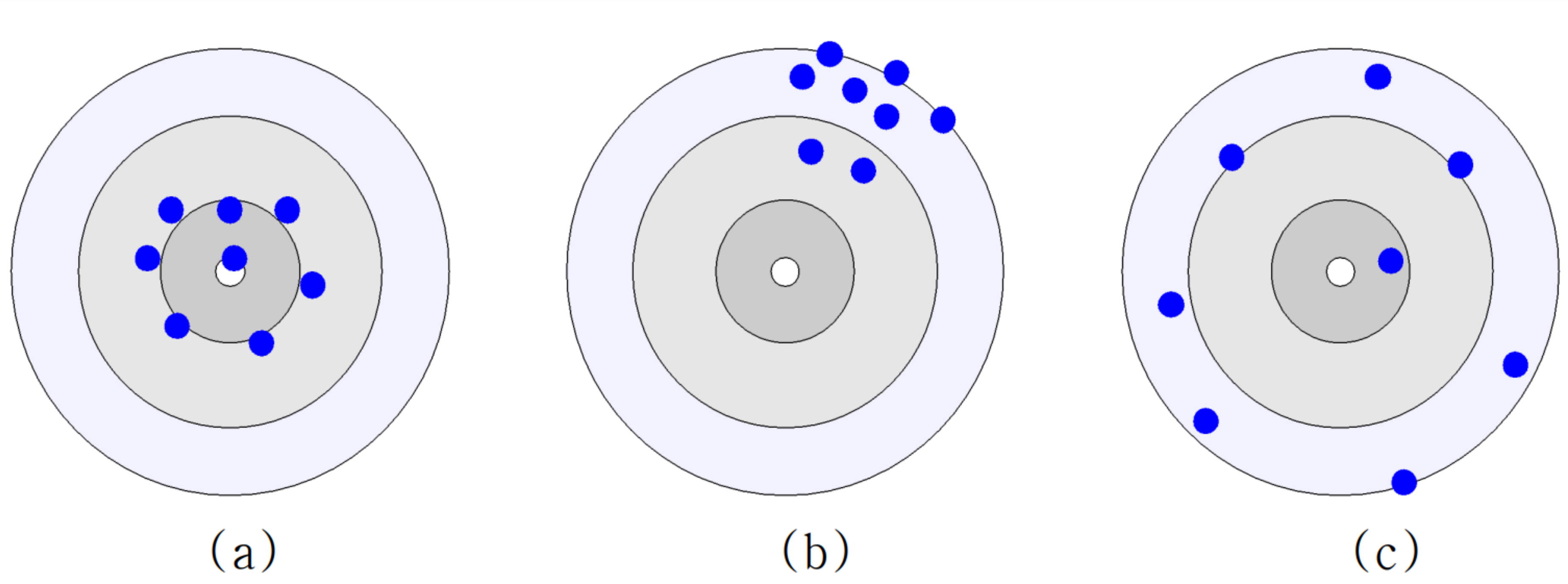
2 좋은 추정량

추정량과 추정값

- 추정량 : 모수 추정에 사용되는 통계량
- 추정값 : 추정량이 실현된 값

2 좋은 추정량

- 좋은 추정량 : 불편성, 효율성, 일치성



2 좋은 추정량

불편성, 효율성, 일치성

- 불편성 : $E(T_n(\boldsymbol{X})) = \theta$
- 효율성 : 추정량의 변동성이 작으면 신뢰도 높아짐
- 일치성 : 표본크기가 증가할수록 추정량의 분포가 모수값으로 집중되어 가는 성질

02

적률추정법

1 적률

모적률과 표본적률

- $X_1, X_2, \cdots X_n$: 모집단의 확률표본
- r**차 모적률** : $\mu_r = E(X_1{}^r)$
- r**차 표본적률** : $m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i{}^r$

2 적률추정량과 약대수 법칙

약대수 법칙

- $X_1, X_2, \cdots X_n$: 모집단의 확률표본
- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} E(X_1) = \mu$
- $m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \xrightarrow{p} E(X_1^r)$

3 적률추정법

적률추정법(1)

- $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$: X의 모적률은 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$의 함수

$$\mu_1 = g_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

$$\mu_2 = g_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

$$\vdots$$

$$\mu_k = g_k(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

3 적률추정법

적률추정법(2)

- 모수 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$의 해를 구함

$$\theta_1 = h_1(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$$

$$\theta_2 = h_2(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$$

$$\vdots$$

$$\theta_k = h_k(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$$

3 적률추정법

적률추정법(3)

- $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$에 대응하는 표본적률을 구함

$$m_1 = \bar{X}, m_2 = \bar{X}^2, \cdots, m_k = \bar{X}^k$$

- 표본적률을 대입하여 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 를 추정량을 구함

$$\hat{\theta}_1 = h_1(m_1, m_2, \cdots, m_k)$$

$$\hat{\theta}_2 = h_2(m_1, m_2, \cdots, m_k)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\theta}_k = h_k(m_1, m_2, \cdots, m_k)$$

3 적률추정법

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim (\mu,\ \sigma^2)$ 의 확률표본일 때 (μ, σ^2)의 적률추정량은?

3 적률추정법

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Gamma\left(\alpha, \frac{1}{\beta}\right)$ 의 확률표본일 때 (α, β)의 적률추정량은?

3 적률추정법

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Gamma\left(\alpha, \frac{1}{\beta}\right)$ 의 확률표본일 때 (α, β)의 적률추정량은?

3 적률추정법

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$의 확률표본일 때 λ의 적률추정량은?

3 적률추정법

적률추정법의 특징

- 계산이 간단하고, 일치추정량
- 불편추정량이 아닐 수도 있음
- 유일하게 도출되지 못할 수도 있음.

03

최대가능도추정법

1 최대가능도추정

예 상자 안에 빨간색과 파란색 공 3개. 빨간 공, 파란색 공 1개 이상. 공을 1개씩 3번 복원추출.
파란색 공의 개수로 상자 안 공의 구성을 추정하시오.

1 최대가능도추정

예 상자 안에 빨간색과 파란색 공 3개. 빨간 공, 파란색 공 1개 이상. 공을 1개씩 3번 복원추출.
파란색 공의 개수로 상자 안 공의 구성을 추정하시오.

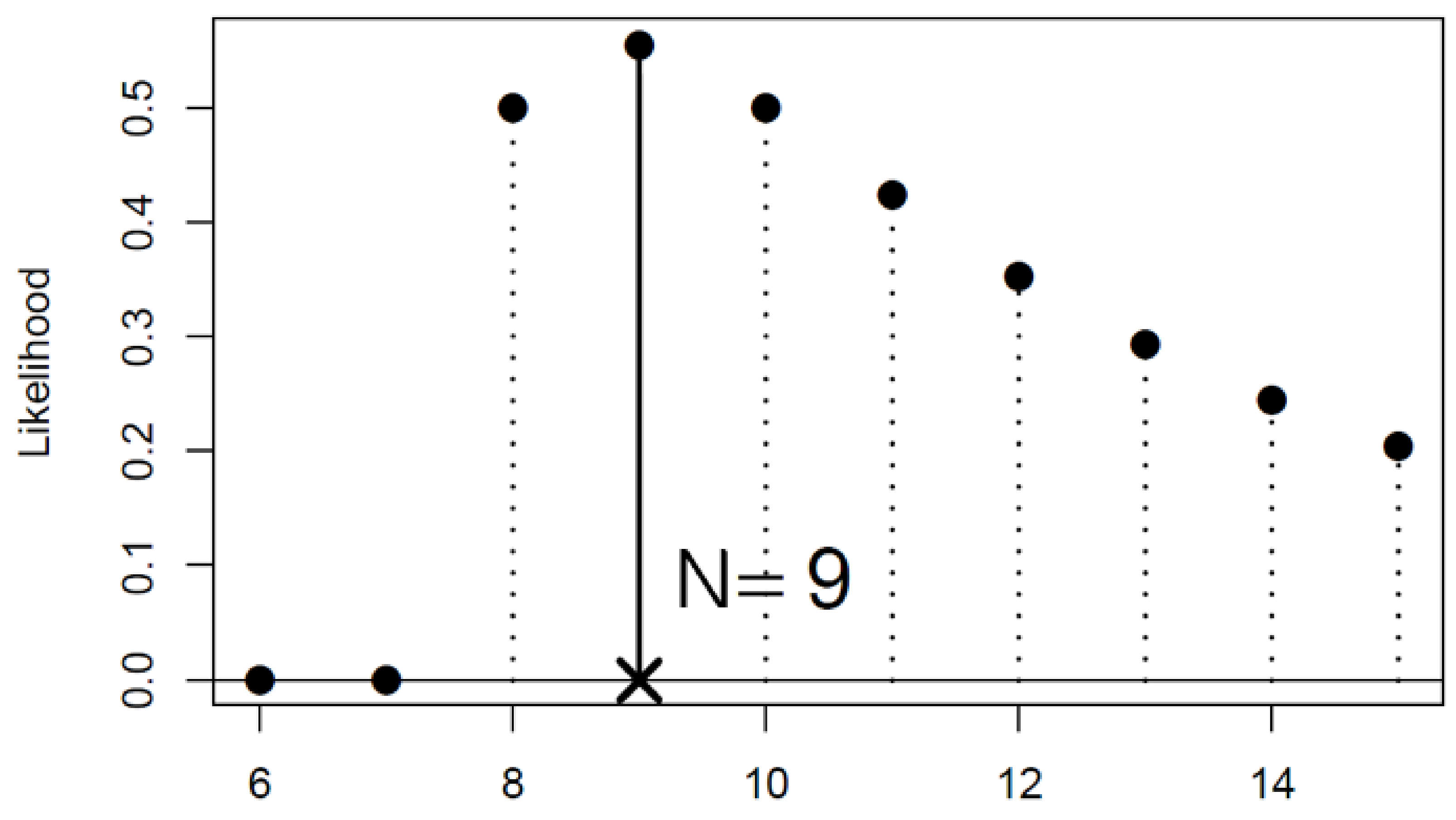
1 최대가능도추정

예 연못에 물고기가 살고 있다. 그러면 얼마나 많은 물고기가 연못에 살까?

1 최대가능도추정

예 연못에 물고기가 살고 있다. 그러면 얼마나 많은 물고기가 연못에 살까?

1 최대가능도추정



2 가능도함수

가능도함수(likelihood function)

- $X_i \sim f(x_i|\theta), i = 1,2,\cdots,n,$ 확률표본
- 가능도함수 : $L(\theta|\boldsymbol{x}) = L(\theta|x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$
- 가능도 함수에 확률표본에서 얻을 수 있는 모수의 모든 정보를 가지고 있음

2 가능도함수

가능도함수(likelihood function)

- θ_0 : 참모수, 모든 $\theta \neq \theta_0, \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}[L(\theta_0|\boldsymbol{x}) > L(\theta|\boldsymbol{x})]$

2 가능도함수

가능도함수(likelihood function)

- θ_0 : 참모수, 모든 $\theta \neq \theta_0, \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}[L(\theta_0|\boldsymbol{x}) > L(\theta|\boldsymbol{x})]$

2 가능도함수

가능도함수(likelihood function)

- θ_0 : 참모수, 모든 $\theta \neq \theta_0, \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}[L(\theta_0|\boldsymbol{x}) > L(\theta|\boldsymbol{x})]$

2 최대가능도추정량

최대가능도추정량(maximum likelihood estimator, mle)

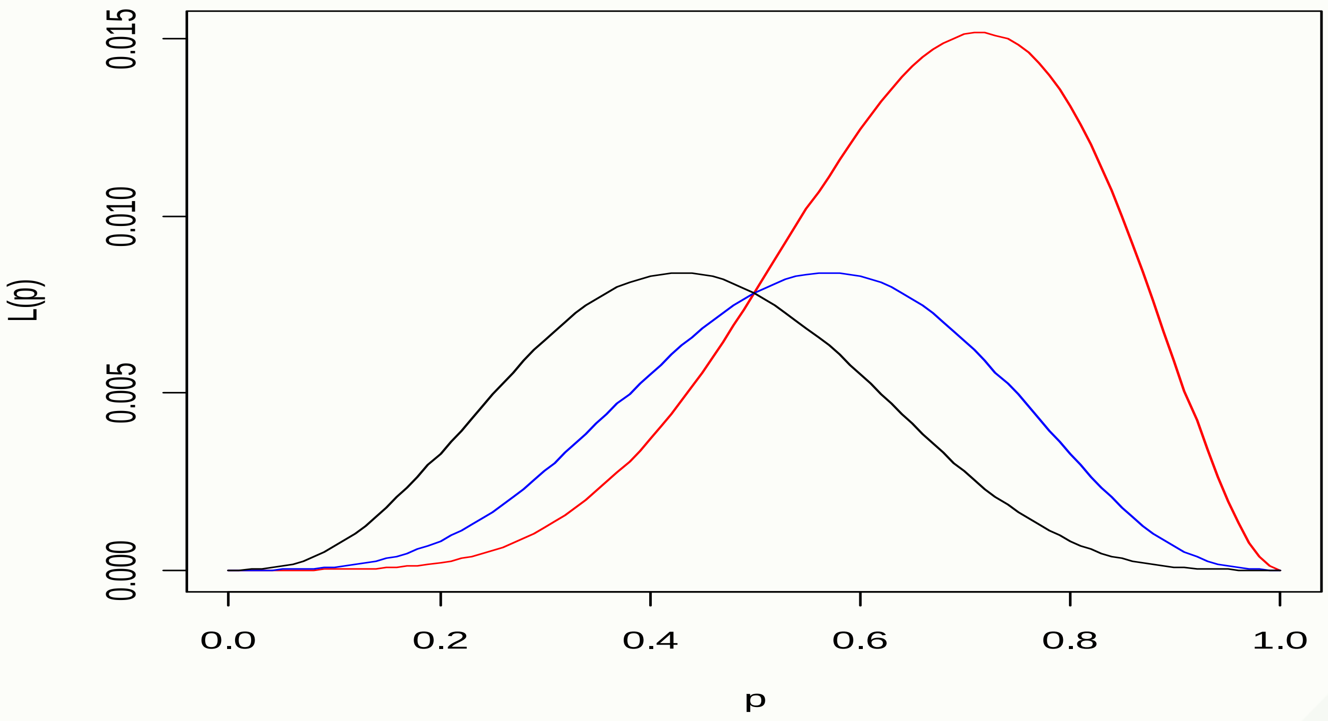
- 모든θ에 대해 가능도함수 $L(\theta|x)$를 최대로 하는 통계량
- $\hat{\theta} = argmax_{\theta} L(\theta|x_1, x_2, \cdots, x_n)$

3 최대가능도추정량

예 연못에 2종(A, B)의 물고기가 살고 있다.
'A종 물고기 비율'을 추정하시오.

3 최대가능도추정량

예 연못에 2종(A, B)의 물고기가 살고 있다.
'A종 물고기 비율'을 추정하시오.



3 최대가능도추정량

최대가능도추정량

- 표본점 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 에서 $\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$는 θ의 함수로서 $L(\theta|\boldsymbol{x})$가 최댓값을 갖는 추정량
- θ의 최대가능도추정량 $\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$:

$$\frac{d}{d\theta} logL(\theta|\boldsymbol{x}) = 0$$

- 확인 : $\frac{d^2}{d\theta^2} logL(\theta|\boldsymbol{x})|_{\theta=\hat{\theta}(\boldsymbol{X})} < 0$

3 최대가능도추정량

모수가 많을 때 가능도함수

- $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 에 대한 최대가능도추정량

$$\frac{d}{d\theta_1} logL(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k | \boldsymbol{x}) = 0$$

$$\frac{d}{d\theta_2} logL(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k | \boldsymbol{x}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{d\theta_k} logL(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k | \boldsymbol{x}) = 0$$

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Ber(p)$ 의 확률표본일 때 p 의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Ber(p)$의 확률표본일 때 p의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 연못에 A, B 2종의 물고기가 살고 있다. 잡은 32마리 중 13마리가 A종으로 나타났다면 A종 물고기의 비율의 최대가능도추정량 값은?

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 의 확률표본일 때 μ, σ^2 의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 의 확률표본일 때 μ, σ^2 의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 의 확률표본일 때 μ, σ^2 의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 의 확률표본일 때 μ, σ^2 의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim U(0, \theta)$ 의 확률표본일 때 θ 의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim U(0, \theta)$ 의 확률표본일 때 θ 의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

최대가능도추정량의 불변성

- $\eta = g(\theta)$의 최대가능도추정량

  $$\hat{\eta}^{MLE} = g(\hat{\theta}^{MLE})$$

3 최대가능도추정량

최대가능도추정량의 점근적 성질

- 일치추정량
- 근사적으로 정규분포로 수렴

3 최대가능도추정량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Ber(p)$의 확률표본일 때 p^2의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 단순회귀모형에서 오차항이 정규분포 $N(0,\sigma^2)$를 따를 때 회귀계수 β_0,β_1의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 단순회귀모형에서 오차항이 정규분포 $N(0,\sigma^2)$를 따를 때 회귀계수 β_0,β_1의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 단순회귀모형에서 오차항이 정규분포 $N(0, \sigma^2)$를 따를 때 회귀계수 β_0, β_1의 최대가능도추정량은?

3 최대가능도추정량

예 단순회귀모형에서 오차항이 정규분포 $N(0, \sigma^2)$를 따를 때 회귀계수 β_0, β_1의 최대가능도추정량은?

정리하기

- 통계적 추정은 표본 데이터에 근거하여 모집단 특성값을 추측하는 과정이다.
- 적률추정법은 표본적률을 이용하여 모적률을 추정하는 방법이고, 적률추정량은 적률추정법에 의해 구한 추정량으로 모수를 표본적률의 함수로 추정한다.
- 최대가능도법은 가능도함수를 최대로 하는 모수값으로 모수를 추정하는 방법이며, 최대가능도추정량은 최대가능도법으로 구한 추정량이다.

10 강

다음시간 안내

점추정 2