제5장 행렬식

5.1 행렬식

○ 행렬식(determinant)
- 정방행렬에 실수를 대응시키는 함수
- 정방행렬 A의 행렬식은 $|A|$ 또는 det A
- 행렬식의 귀납적 정의
  · n차 정방행렬의 행렬식은 (n-1)차 정방행렬의 행렬식과 관련지어 귀납적으로 정의

○ A = (a_{ij})를 n차 정방행렬이라 할 때
- A의 (i, j) 소행렬
  A에서 i번째 행과 j번째 열을 제거시켜 구성되는 (n-1)차 정방행렬
- A의 (i, j) 소행렬식(minor) M_{ij}
- A의 (i, j) 여인수(cofactor) $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

[정의 5.1] 행렬식

(1) 1차 정방행렬 A = (a)에 대해
 $|A| = a$

(2) $n \geq 2$ 일 때 n차 정방행렬 A = (a_{ij})에 대해
 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$
 $= \sum a_{1j}A_{1j}$ (단, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$)

※ 1번째 행에 의한 행렬식 $|A|$의 여인수 전개(cofactor expansion) 또는 라플라스 전개(Laplace expansion)

※ 'n차 정방행렬의 행렬식'을 'n차 행렬식'로 줄여부름

[설명] 3차 행렬식
 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

5.2 행렬식의 성질

[정리 5.2] n차 정방행렬 A = (aij) 가 영행을 갖는다면 $|A|=0$ 이다

[정리 5.3, 5.4, 5.5] 행렬식과 기본행연산과의 관련성

기본행 연산	행렬식
$A \to R_{ij} \to B$	$\lvert B\rvert = -\lvert A\rvert$
$A \to R_i(c) \to B$	$\lvert B\rvert = c\lvert A\rvert$
$A \to R_{i,j}(c) \to B$	$\lvert B\rvert = \lvert A\rvert$

[정리 5.6]
 n차 삼각행렬 $A = (a_{ij})$의 행렬식
$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$
$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

5.3 행렬연산과 행렬식
[정리 5.7] n차 기본행렬의 행렬식
 기본행연산 $R_{i,j}$, $R_i(c)$, $R_{i,j}(c)$에 대한
 n차 기본행렬을 각각 $E_{i,j}$, $E_i(c)$, $E_{i,j}(c)$이라 하면
(1) $|E_{i,j}| = -1$
(2) $|E_i(c)| = c$
(3) $|E_{i,j}(c)| = 1$

[정리 5.8]
n차 정방행렬 A에 대해
(1) E가 n차 기본행렬이면
 $|EA| = |E||A|$ 이다.
(2) A와 B가 행상등하면 유한개의 n차 기본행렬
 $E_1, E_2, \cdots, E_k$가 존재하며 다음을 만족한다.
 $|A| = |E_1||E_2|\cdots|E_k||B|$

[정리 5.9]
n차 정방행렬 A가 정칙행렬이기 위한
필요충분조건은 $|A| \neq 0$ 인 것이다.

[정리 5.10] 행렬곱 연산
A와 B가 n차 정방행렬이면
$|AB| = |A||B|$
※ $AB \neq BA$
※ $|A+B| \neq |A|+|B|$

[정리 5.11] 역행렬, 스칼라 배, 전치
(1) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$ (단, A는 정칙행렬)
(2) $|cA| = c^n|A|$ (단, c는 0이 아닌 상수)

(3) $|A^T| = |A|$ (단, $c \neq 0$)