1번

다음 관계를 증명하고, R 프로그램의 난수를 이용하여 히스토그램을 그리고 이를 바탕으로 관계가 성립함을 보이시오.

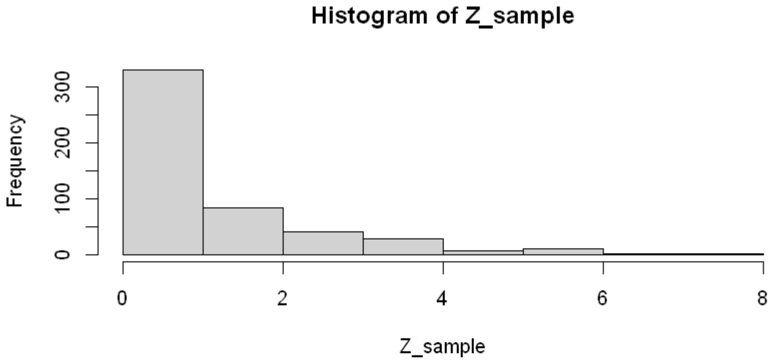
(1) X ~ Bin(n, p) 의 확률표본일 때, n이 커지면서 $\frac{(X-np)^2}{np(1-p)} \sim \chi^2(1)$

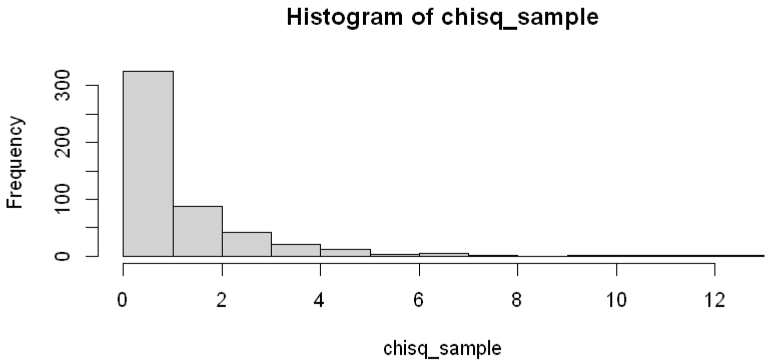
풀이 1-1) 관계 증명하기

- 자유도가 1인 카이제곱분포는 평균이 0이고, 표준편차가 1인 표준정규분포를 Z라고 할 때, Z의 제곱의 분포이다.
- X가 자유도 n, 성공확률 p인 이항분포일 때, X의 기댓값 E(X)=np, 분산 Var(X)=np(1-p)이다.
- $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 이라고 하면, X의 평균이 np이고, 분산이 np(1-p) 일 때, Z의 평균은 0, 분산은 1이 된다.
- Z의 제곱을 구하면 $Z^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(X-np)^2}{np(1-p)}$ 이다.
- 그리고 n의 값이 큰 경우 중심극한정리에 따라서 이항분포는 정규분포에 근사하게 된다.
- 따라서, $\frac{(X-np)^2}{np(1-p)} \sim \chi^2(1)$이 성립한다.

풀이 1-2) R 프로그램으로 히스토그램 그리기

In [ ]:
```r
par(mfrow=c(2,1))

# 이항분포 B(n,p)의 히스토그램 그리기
sample_size = 500
n = 100000
p = 0.5

X_sample = rbinom(sample_size, size=n, prob=p)
Z_sample <- (X_sample - n*p)^2 / (n*p*(1-p))
hist(Z_sample)

# 자유도가 1인 카이제곱분포의 히스토그램 그리기
chisq_sample = rchisq(sample_size, df=1)
hist(chisq_sample)
```





두 그래프가 거의 동일한 형태이므로 $\frac{(X-np)^2}{np(1-p)} \sim \chi^2(1)$이 성립한다고 할 수 있다.

(2) $X_1, \cdots, X_n \sim Uniform(0,1)$ 의 확률표본이고, $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ 를 순서통계량이라고 할 때, n이 커지면서 $n(1-X_{(n)}) \sim Exp(1)$

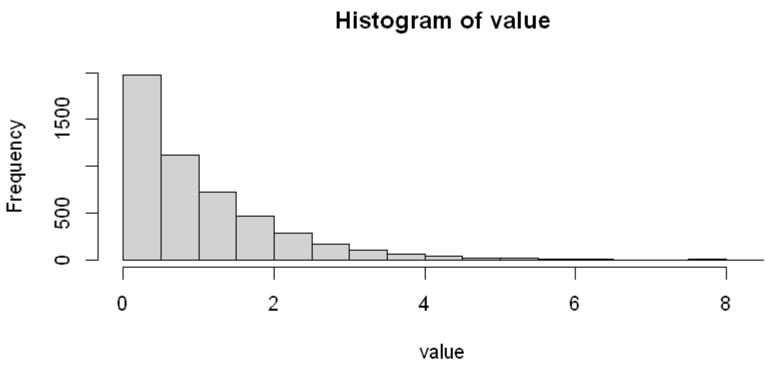
풀이 2-1) 관계 증명하기

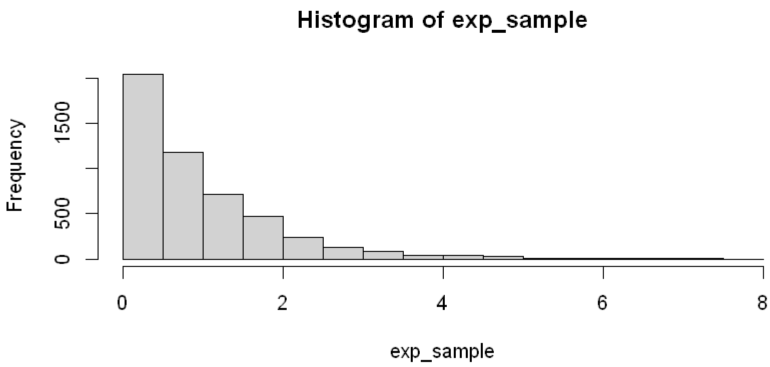
- 균등분포(0,1)의 확률밀도함수는 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0 \;\; or \;\; x > 1 \end{cases}$ 이고,
- 누적분포함수는 $F(x) = P(X \le x) = \int_0^x 1dt = x$ 이다.
- 그리고 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ 이므로, $F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \le x) = x^n$ 이다. (0≤x≤1)
- $n(1-X_{(n)})$의 누적분포함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.
  - $F_{n(1-X_{(n)})}(y) = P(n(1-X_{(n)}) \le y)$
  - 여기서 $n(1-X_{(n)}) \le y \Leftrightarrow X_{(n)} \ge 1 - \frac{y}{n}$을 이용하면,
    $F_{n(1-X_{(n)})}(y) = P(n(1-X_{(n)}) \le y)$
    $= P(X_{(n)} \ge 1 - \frac{y}{n}) = 1 - P(X_{(n)} < 1 - \frac{y}{n}) = 1 - F_{X_{(n)}}(1 - \frac{y}{n})$
    $= 1 - (1 - \frac{y}{n})^n$

- $n(1-X_{(n)})$의 누적분포함수를 미분하면 확률밀도함수를 구할 수 있다.
  - $f_{n(1-X(n))}(y) = F_{n(1-X(n))}(y)\frac{d}{dy} = (1-(1-\frac{y}{n})^n)\frac{d}{dy}$
    $= (1-\frac{y}{n})^{n-1}$
- n이 충분히 커지면 다음과 같은 식이 성립한다.
  - $\lim_{n\to\infty} f_{n(1-X(n))}(y) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{y}{n})^{n-1} = e^{-y}$
- 지수분포 Exp(λ)의 확률밀도함수는 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$인데, λ=1을 대입하면 두 식이 같아진다.
- 따라서, n이 커지면 $n(1-X_{(n)}) \sim Exp(1)$ 임을 확인할 수 있다.

풀이 2-2) R 프로그램으로 히스토그램 그리기

In [ ]:
```
par(mfrow=c(2,1))
n=5000
value = numeric(n)

for(i in 1:n) {
    uni_sample = runif(n)
    max_value = max(uni_sample)
    value[i] = n*(1-max_value)
}

hist(value)

exp_sample = rexp(n, rate=1)
hist(exp_sample)
```





두 그래프가 동일한 형태이므로 $n(1 - X_{(n)}) \sim Exp(1)$ 임을 확인할 수 있다.

문제2

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$의 확률표본일 때 다음 관계 중 (1)~(3)을 증명하고, (1), (2), (4)에 대해 R 프로그램의 난수(n=30을 가정)를 이용하여 히스토그램을 그리고 이를 바탕으로 관계가 성립함을 보이시오.

(1) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
(3) $\bar{X}$와 S^2은 서로 독립
(4) $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

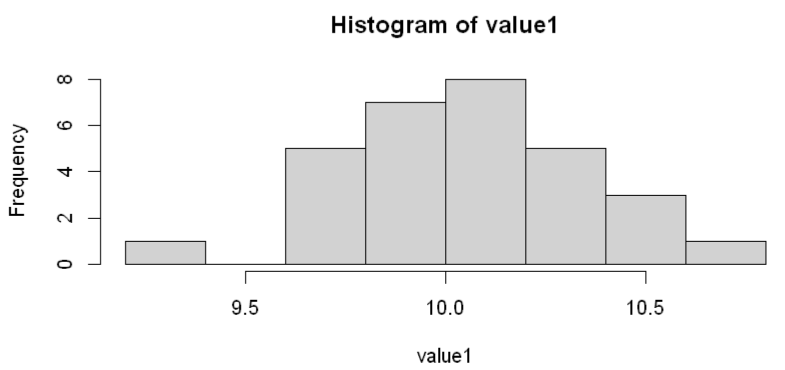
풀이 (1)

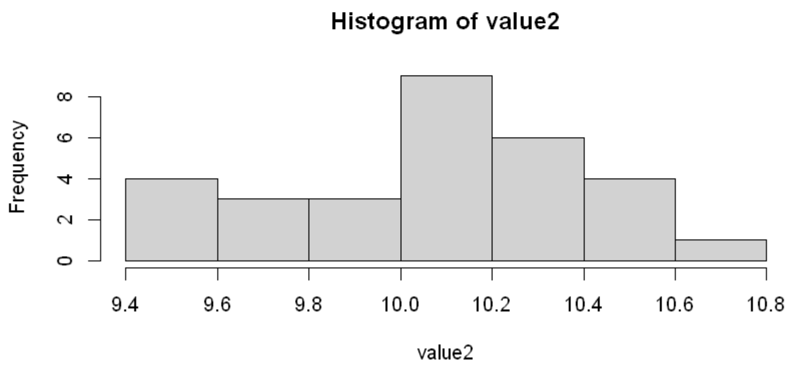
- Xi 확률변수 합의 분포는 적률생성함수를 곱해서 구할 수 있고, 평균을 구하려면 t를 n으로 나누면 된다.

$$M_{\bar{X}}(t) = (M_X(t/n))^n = (exp(\mu \cdot \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2(\frac{t}{n})^2))^n$$
$$= exp(\mu \cdot \frac{t}{n} \cdot n + \frac{1}{2}\sigma^2(\frac{t}{n})^2 \cdot n) = exp(\mu \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{n} \cdot t^2) \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

- 적률생성함수의 유일성에 따라 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 이 성립함이 증명된다.

In [ ]:
```
par(mfrow=c(2,1))
mu=10
sigma=2

n=30
value1 = numeric(n)

for(i in 1:n) {
    x_sample = rnorm(30, mean=mu, sd=sigma)
    x_mean = mean(x_sample)
    value1[i] = x_mean
}

hist(value1)

value2 = rnorm(n, mean=mu, sd=sigma/sqrt(n))
hist(value2)
```





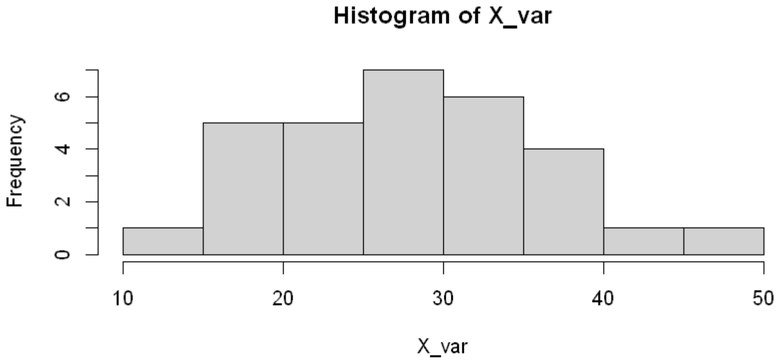
풀이 (2)

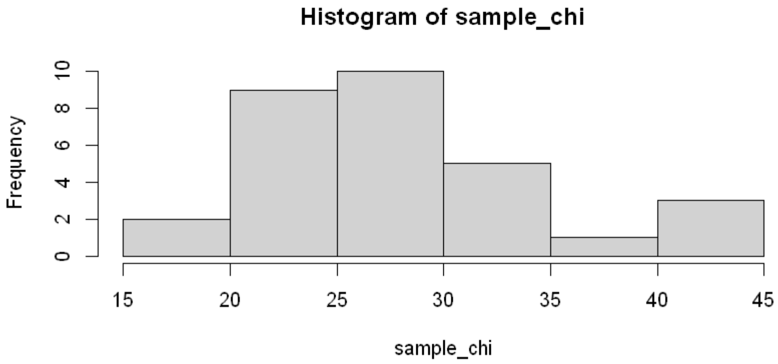
- 표본분산의 분포를 나타내는 식은 $+\bar{X} - \bar{X}$를 추가해서 제곱하고, 항을 정리하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

- $\dfrac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ 의 분포는 $\chi^2(1)$ 인데, n개를 합해야 하므로 첫번째 항은 $\chi^2(n)$ 분포로 나타낼 수 있다.
- $\dfrac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$ 은 X의 표본평균의 분포인데, Z로 정규화한 분포이다. Z의 분포는 $N(0,1)$을 따르고, 따라서 $\chi^2(1)$ 분포로 표현할 수 있다.
- 카이제곱의 가법성에 따라서 $\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \chi^2(n)-\chi^2(1)=\chi^2(n-1)$ 이다.
- 그런데, $\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \dfrac{(n-1)\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 이다.
- 따라서, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 이 성립한다.

In [ ]:
```
par(mfrow=c(2,1))

n=30
mu=0
sigma=2

X_var = numeric(n)

for(i in 1:30) {
    X_sample = rnorm(n, mean=mu, sd=sigma)
    X_var[i] = var(X_sample)
}

X_var = (X_var*(n-1))/(sigma^2)
hist(X_var)

sample_chi = rchisq(30, df=n-1)
hist(sample_chi)
```





풀이 (3)

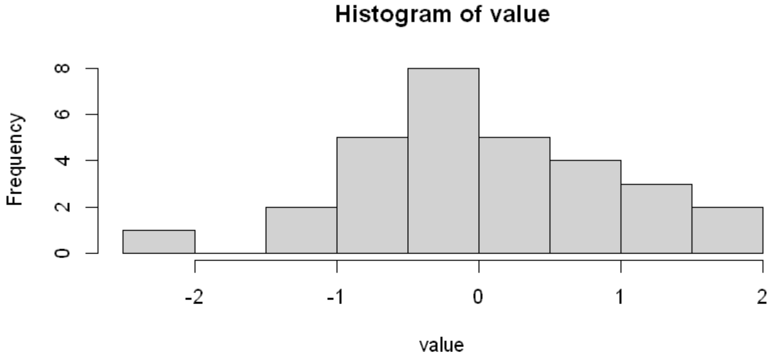
표본평균과 표본분산의 공분산이 0이면 독립이라고 할 수 있다.

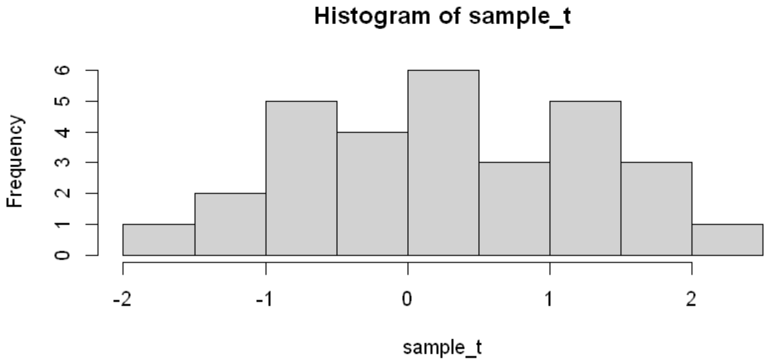
- $Cov(\bar{X}, S^2) = E((\bar{X} - E(\bar{X})(S^2 - E(S^2)) = 0$
- 그런데, 표본평균의 기댓값은 모집단의 평균이고, 표본분산의 기댓값은 모집단의 분산이다. 따라서 식을 다음과 같이 표현할 수 있다.
- $Cov(\bar{X}, S^2) = E[(\bar{X} - \mu)(S^2 - \sigma^2)] = 0$
- 표본평균은 모집단의 평균에 수렴하므로 $\bar{X} - \mu$는 0으로 수렴하고, 표본분산은 모집단의 분산에 수렴하므로 $S^2 - \sigma^2$도 0으로 수렴한다.
- 따라서, 표본평균과 표본분산의 공분산은 0이 되며, 두 변수는 독립임을 확인할 수 있다.

풀이 (4)

In [ ]:
```
par(mfrow=c(2,1))

n=30
mu=0
sigma=2

value = numeric(n)

for(i in 1:30) {
    X_sample = rnorm(n, mean=mu, sd=sigma)
    value[i] = (mean(X_sample)-mu)/(sd(X_sample)/sqrt(n))
}
```

```
hist(value)

sample_t = rt(30, df=n-1)
hist(sample_t)
```





3. Xi ~ Exp(2) 의 확률표본일 때 다음 물음에 답하시오.

(1) $\bar{X}$가 $E(X_1)$으로 확률적으로 수렴함을 증명하고, n=10, 100, 1000, 10000 일 때의 값과 $E(X_1)$의 값을 비교하시오.

$$E(X_i) = \mu = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X_i) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad E(\bar{X}_n) = \mu, \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

여기서 체비셰프 부등식을 사용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \\ &= P((\bar{X}_n - \mu)^2 < \epsilon^2) \geq 1 - \frac{E((\bar{X}_n - \mu)^2)}{\epsilon^2} = 1 - \frac{Var(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \end{aligned}$$

따라서, 표본평균 X는 표본분포의 기댓값인 1/λ, 즉 1/2에 수렴한다.

In [ ]:
```
lambda=2

x_10 = rexp(10, rate=lambda)
x_100 = rexp(100, rate=lambda)
x_1000 = rexp(1000, rate=lambda)
x_10000 = rexp(10000, rate=lambda)
```

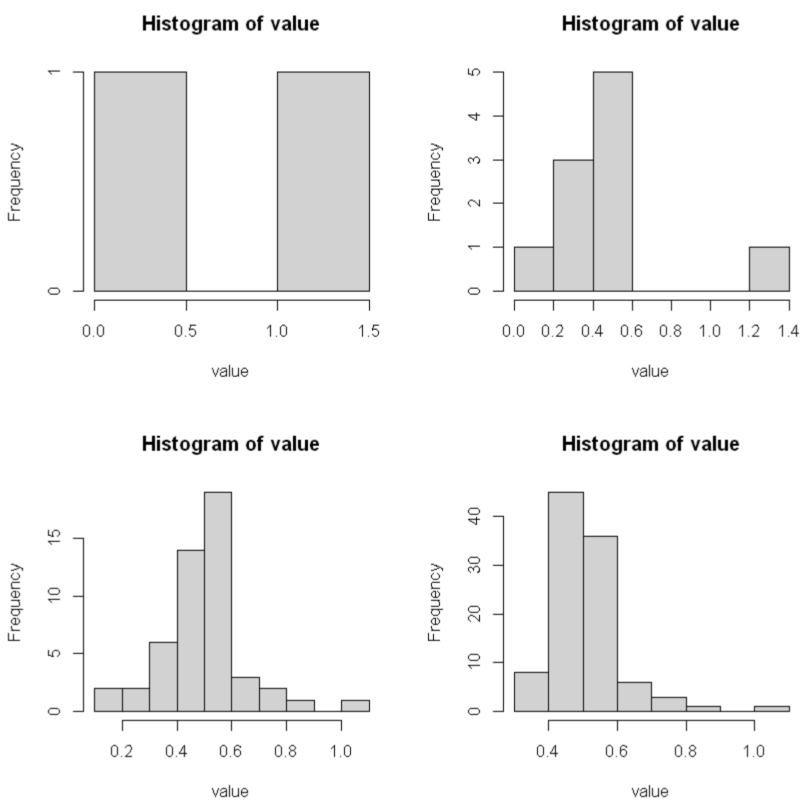
```
print(mean(x_10))
print(mean(x_100))
print(mean(x_1000))
print(mean(x_10000))
```

```
[1] 0.3123301
[1] 0.4405264
[1] 0.5188108
[1] 0.4953194
[1] 0.4405264
[1] 0.5188108
[1] 0.4953194
```

n = 10, 100, 1000, 10000 일때의 값은 0.5 로 수렴한다.

(2) $\bar{X}$의 분포를 n=2, 10, 50, 100 의 히스토그램을 그리고 중심극한정리로 그 의미를 정리하시오.

In [ ]:
```
par(mfrow=c(2,2))

n=c(2, 10, 50, 100)

for(i in n) {
    value = numeric(i)
    for(j in 1:i) {
        x_data = rexp(j, rate=2)
        value[j]=mean(x_data)
    }
    hist(value)
}
```



중심극한정리로 히스토그램의 의미를 정리하면 다음과 같다.

1. 표본의 크기가 커질수록 표본평균은 모평균에 근사한다. 즉, 표본을 늘릴수록 모평균의 값을 보다 정확하게 예측할 수 있다.
2. 다양한 확률변수라 할지라도 그 평균을 반복적으로 구한다면, 평균의 분포는 정규분포를 따른다.