제12장 고유값과 고유벡터

12.1 고유값과 고유벡터

○ 도입

T를 벡터공간 V에서 V로의 선형변환이고,
M을 T에 대응하는 행렬이라 할 때,
M에 의한 벡터 A의 변환은
일반적으로 벡터 A를 다양한 크기와 방향으로 변환시킨다.
그러나, 어떤 특정한 벡터들은 원래 벡터와 같은 방향이거나 또는 정반대 방향으로만 변환된다.

[정의 12.1] 고유값과 고유벡터
M: n차 정방행렬, λ: 실수
MA = λA 를 만족하는 벡터 A가 존재 (단, A$\neq$O)
⇨ λ: M의 고유값 (eigenvalue)
　A: λ에 대응하는 M의 고유벡터 (eigenvector)
고유벡터란 어떤 벡터에 선형변환을 취했을 때,
방향은 변하지 않고 크기만 변환되는 벡터를 의미하고,
고유값이란 고유벡터가 변환되는 크기를 의미함

[따름정리]
λ를 M(n차 정방행렬)에 대한 고유값이라 할 때,
λ에 대응하는 모든 고유벡터들은 O벡터와 함께 Rn 벡터공간의 부분공간을 이룬다.
이때 이 부분공간을 고유값 λ에 대응하는 M의 고유공간(eigenspace)이라고 한다.

12.2. 특성방정식

[정의] 특성방정식
λ가 정방행렬 M의 고유값
$\Leftrightarrow$ MA = λA (A$\neq$O)
$\Leftrightarrow$ MA - λA = MA - λIA = (M - λI)A = O
$\Leftrightarrow$ $|M - \lambda I| = 0$ ⇦ 행렬 M의 특성방정식

※ [정리 4.10]
・동차연립방정식 AX=O가 오직 자명한 해만 가질 필요충분조건:
　$|A| \neq 0$
・동차연립방정식 (M - λI)A=O가 O이 아닌 해 A를 가질 필요충분조건:

$$|M - \lambda I| \neq 0$$

[정리 12.3] 고유값과 특성방정식

M: n차 정방행렬

실수 λ가 M의 고유값

$\Leftrightarrow$ λ가 M의 특성방정식의 해

[보충설명]

· $|M - \lambda I| = 0$: λ에 관한 n차 실계수방정식

· 복소수 고유값도 가능

· 실수 고유값만 취급한다면 → n개 이하의 고유값

· M이 삼각행렬이라면 특성방정식은?

→ 주대각원소값이 λ임

○ 특성방정식의 활용

M: n차 정방행렬

(1) 특성방정식을 이용하여 고유값을 구함

⇨ $|M - \lambda I| = 0$ 을 풀면 고유값 λ를 구할 수 있음

(2) 각 고유값에 대응하는 고유벡터를 구함

⇨ $(M - \lambda I_n)A = O$ 를 풀면 고유벡터 A를 구할 수 있음

(3) 각 고유값에 대응하는 고유벡터를 표현해주는 일차독립인 벡터를 구하여 고유공간의 기저를 구함