12. 가설검정 1

◈ 담당교수: 한국방송통신대 통계·데이터과학과 이긍희

연습문제

(※ 1~3) X는 이항분포 B(3, θ)를 따를 때 X의 값을 바탕으로 한 검정 δ_1을 이용하여 다음 가설을 검정하고자 한다.

$$H_0 : \theta = 0.5 \ \ vs \ \ H_1 : \theta = 0.4$$
$$\delta_1 : X = 1 \text{일 때 귀무가설 기각}$$

1. 제1종의 오류는?

<해설>

제1종 오류는 참인 귀무가설을 기각하는 오류이므로 $\theta = 0.5$ *인데 이를 기각하는 오류이다.*

2. 검정 δ_1의 검정의 크기는?

<해설>

검정의 크기는 제1종 오류를 범할 확률의 최댓값이므로 검정의 크기는 $P(X=1|\theta=0.5)$ *이다.*

3. 검정 δ_1의 검정력은?

<해설>

검정력은 거짓 귀무가설을 기각할 확률이므로 검정의 크기는 $P(X=1|\theta=0.4)$ *이다.*

(※ 4~5) $X=(X_1, \ \cdots, \ X_n)$이 정규분포 $N(\theta, \ 1)$을 따르는 확률표본이라 할 때, 다음 가설에 대한 최강력 검정을 구하여라.

$$H_0 \ : \ \theta = 0 \quad vs \quad H_1 \ : \ \theta = 2$$

4. 최강력 검정에서의 가능도비는?

<해설>

$$f(x|\theta=0)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$$

$$f(x|\theta=2)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2\right\}=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-4x_i+4)\right\}$$

가능도비 : $\frac{f(x|\theta=2)}{f(x|\theta=0)}=\exp\{2n(\overline{x}-1)\}$

5. 최강력 검정을 구하시오.

<해설>

네이만-피어슨 보조정리에 따라

$\frac{f(x|\theta=2)}{f(x|\theta=0)}=\exp\{2n(\overline{x}-1)\}>k' \Rightarrow H_0$를 기각

$\therefore$ $\overline{X}>k$ *이면* H_0*를 기각* $\Rightarrow$ *최강력 검정*

정리하기

- ❖ 제1종의 오류와 제2종의 오류로 구분되는데 제1종 오류는 참인 귀무가설을 기각하는 오류이며, 제2종 오류은 거짓인 귀무가설을 채택하는 오류이다.
- ❖ 유의확률은 참 H_0을 잘못 기각할 확률이며, 검정력은 거짓 H_0을 기각할 확률이다.
- ❖ 단순가설 $H_0 : \theta=\theta_0 \quad vs \quad H_0 : \theta=\theta_1$에 대하여 $E(\delta(X)|\theta_0)\le\alpha_0$을 만족하는 모든 검정 중 가장 검정력이 큰 검정을 유의수준 α_0에서 최강력 검정이라 한다.
- ❖ 네이만-피어슨 보조정리 : 검정 δ는 단순가설 $H_0:\theta=\theta_0 \quad vs\, H_1:\theta=\theta_1$에 대한 유의수준 α_0의 최강력 검정이다.
  - $\frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_0)}>k,\ (k>0)$이면 $\delta(X)=1$
  - $E(\delta(X)|\theta_0)=\alpha_0$
- ❖ 복합가설 $H_0:\theta\in\Omega_0 \ vs \ H_1:\theta\in\Omega_1$에 대한 검정 $\delta^*(X)$를 유의수준 α_0에서 균일 최강력 검정이라 한다.
  - $\alpha(\delta)=sup_{\theta\in\Omega_0}k(\theta|\delta)$
  - $\alpha(\delta)\le\alpha_0$(유의수준)을 만족하는 모든 검정 $\delta(X)$에 대하여 $\alpha(\delta^*)\le\alpha_0$
  - $E(\delta^*(X)|\theta)\ge E(\delta(X)|\theta),\ \theta\in\Omega_1$