

제11장 선형변환과 행렬

11.1 좌표계

[정의 11.1] 일반벡터의 좌표

V : 벡터공간
 $\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$: V 의 기저
 $\forall C \in V, C = \sum k_i A_i$
 $C \equiv (k_1, k_2, \dots, k_n)_{\tilde{A}}$
기저 \tilde{A} 로 표현한 벡터 C 의 좌표(coordinate)
※ 기저의 순서가 바뀌면 좌표도 바뀜
→ 순서기저(ordered basis)

[정의 11.2] 사상의 행렬

V, W : 벡터공간
 $T: V \rightarrow W$ (사상)
 $\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 은 V 의 기저
 $\tilde{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 은 W 의 기저
이때 사상 T 에 의한 기저 \tilde{A} 의 상을 기저 \tilde{B} 로 표현한 행렬을
 $(T)_{\tilde{B}}^{\tilde{A}} = (T(A_1)_{\tilde{B}} \quad T(A_2)_{\tilde{B}} \quad \dots \quad T(A_n)_{\tilde{B}})$
으로 정의.

[복습]

사상 $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 가 선형변환

$\Leftrightarrow T$ 에 대응되는 행렬 M 이 $M = (T(E_1) \ T(E_2) \ \dots \ T(E_m))$

[정리 11.1]

사상 $T: V \rightarrow W$ 가 선형변환
 $\Leftrightarrow T$ 에 대응되는 행렬(T 에 의한 \tilde{A} 의 상을
기저 \tilde{B} 로 표현한 행렬)이
 $(T)_{\tilde{B}}^{\tilde{A}} = (T(A_1)_{\tilde{B}} \quad T(A_2)_{\tilde{B}} \quad \dots \quad T(E_n)_{\tilde{B}})$
으로 표시되는 것.
여기서, $\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 은 V 의 기저,
 $\tilde{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 은 W 의 기저

[정리 11.2]

$$\dim V = n, \dim W = m$$

$$\Leftrightarrow L(V, W) \approx M_{mn}(R)$$

→ (의미) 선형변환의 벡터공간과 행렬의 벡터공간은 동형공간

→ 선형변환 $T \in L(V, W)$ 의 성질을 알아 보는 것은,

행렬 $M \in M_{mn}(R)$ 의 성질을 알아보는 것과 같음

11.2 선형변환의 행렬표현

선형변환 T 의 행렬 표현
(기저의 변환에 따른 동일한 선형변환 T 의 행렬 변화)

$T \in L(V, V)$, \tilde{A}, \tilde{B} 는 V 의 기저

$$\begin{array}{ccc} (T)_{\tilde{A}}^{\tilde{A}} & \longrightarrow & (T)_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} \\ \tilde{A} & \longrightarrow & \tilde{B} \end{array}$$

[정의] 항등변환 (identify transformation) I

$$I \in L(V, V),$$

$$\forall A \in V, I(A) = A$$

[정의 11.3] 기저변환행렬 [$I \in L(V, V)$ 의 행렬]

$\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}, \tilde{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 은 V 의 기저

$$\begin{cases} I(A_1) = A_1 = b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + \dots + b_{1n}B_n \\ I(A_2) = A_2 = b_{21}B_1 + b_{22}B_2 + \dots + b_{2n}B_n \\ \vdots \\ I(A_n) = A_n = b_{n1}B_1 + b_{n2}B_2 + \dots + b_{nn}B_n \end{cases}$$
$$\rightarrow (I)_{\tilde{B}}^{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

\tilde{A} 에서 \tilde{B} 로의
기저변환행렬

■ 기저의 변환에 따른 T 의 행렬 변화

$\tilde{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$, $\tilde{B} = \{A_2, A_1 - A_2, A_2 + A_3\}$ 은 V 의 기저, $T, I \in L(V, V)$
 $T(A_1) = A_1 + A_3$, $T(A_2) = A_1 - A_3$, $T(A_3) = A_1 + A_2 - A_3$

(1) 예제 11.5

$$({}_T)_{\tilde{A}}^{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 예제 11.6

$$({}_T)_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) 예제 11.8

$$({}_I)_{\tilde{B}}^{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) 예제 11.9

$$({}_I)_{\tilde{A}}^{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$({}_T)_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = ({}_I)_{\tilde{B}}^{\tilde{A}} ({}_T)_{\tilde{A}}^{\tilde{A}} ({}_I)_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[정리 11.3]

$I, T \in L(V, V)$ (I 는 항등변환)

\tilde{A}, \tilde{B} : V 의 기저

$$({}_T)_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = ({}_I)_{\tilde{B}}^{\tilde{A}} ({}_T)_{\tilde{A}}^{\tilde{A}} ({}_I)_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}$$

[따름 정리]

\tilde{A} 에서 \tilde{B} 로의 기저변환행렬은

\tilde{B} 에서 \tilde{A} 로의 기저변환행렬의 역행렬

[증명] 정리 11.3에서 T 를 I 로 택하면

$$({}_I)_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = ({}_I)_{\tilde{B}}^{\tilde{A}} ({}_I)_{\tilde{A}}^{\tilde{A}} ({}_I)_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}$$