11 강

통계적추론

통계적 추정의 원리

한국방송통신대학교 통계·데이터과학과
이긍희 교수

학습내용

1. 통계적 추정의 원리를 이해한다.
2. 충분통계량을 이해한다.
3. 지수족을 이해한다.
4. 균일최소분산불편 추정량을 이해한다.

01

통계적 추정의 원리의 이해

1 통계적 추정의 구조

- 통계학 학파
  - 빈도론자(Frequentist)
  - 베이즈주의자($Bayesian$)

1 통계적 추정의 구조

- 통계적 실험 : $\mathrm{E} = (\chi, \Omega, p)$
  - χ : 표본공간(sample space)
  - Ω : 모수공간(parameter space)
  - p : 확률분포함수 $p = f(\boldsymbol{x}|\theta)$, $\boldsymbol{x} \in \chi$, $\theta \in \Omega$
  - 통계적 추정 : $(\mathrm{E}, \boldsymbol{x})$로부터 θ를 추정

1 통계적 추정의 구조

통계적 추정의 기본원리

- 충분성 원리(Sufficiency Principle)
- 불변성 원리(Invariance Principle)
- 조건부 원리(Conditionality Principle)
- 가능도 원리(Likelihood Principle)

→ 빈도론자(*Frequentist*)와 베이즈주의자(*Bayesian*)

공통으로 인정하는 원리 : 충분성 원리

2 통계적 추정의 기본원리

충분성 원리

- $\mathrm{E}=(\chi,\ \Omega,\ p)$: $\theta \in \Omega$의 정보 얻기 위해 $\boldsymbol{x} \in \chi$ 얻는 실험
- 통계량 $T(\boldsymbol{x})$: θ의 충분 통계량

  → $\boldsymbol{x}$와 $T(\boldsymbol{x})$ 가 포함하고 있는 θ의 정보는 동일
- 충분통계량 $T(\boldsymbol{x})=T(\boldsymbol{y}) \rightarrow (\mathrm{E},\ \boldsymbol{x}),(\mathrm{E},\ \boldsymbol{y})$의 θ 정보량 동일, 추론 동일

2 통계적 추정의 기본원리

불변성 원리

- $\mathrm{E} = (\chi, \Omega, p)$와 $\mathrm{E}' = (\chi', \Omega, p')$ 사이 $p(\boldsymbol{x}|\theta) = p'(g(\boldsymbol{x})|\theta)$관계의 1-1 함수 g 존재
- $(\mathrm{E}, \boldsymbol{x}), (\mathrm{E}', g(\boldsymbol{x}))$의 θ 정보량 동일, 추론 동일

2 통계적 추정의 기본원리

조건부 원리

- $\mathrm{E}_1 = (\chi_1, \Omega_1, p_1)$ 와 $\mathrm{E}_2 = (\chi_2, \Omega_2, p_2)$ 의 혼합실험
  $\mathrm{E} = (\chi,\ \Omega,\ p)$ 의 관측값 $\boldsymbol{x} = (i, \boldsymbol{x}_i)$
- $(\mathrm{E},\ \boldsymbol{x}), (\mathrm{E}_i,\ \boldsymbol{x}_i)$의 θ 정보량 동일, 추론 동일

2 통계적 추정의 기본원리

- 가능도 함수 : $L(\theta|\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}|\theta)$
  - $\boldsymbol{X} = (X_1, X_1, \cdots, X_n)$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$를 관측
  - $f(\boldsymbol{x}|\theta)$: θ 고정, $L(\theta|\boldsymbol{x})$: θ의 함수
  - $L(\theta_1|\boldsymbol{x}) > L(\theta_2|\boldsymbol{x}) \rightarrow \theta_1$가 θ_2 보다 그럴 듯

2 통계적 추정의 기본원리

가능도 원리

- $\mathrm{E} = (\chi, \Omega, p)$와 $\mathrm{E}' = (\chi', \Omega, p')$의 $(\mathrm{E}, \boldsymbol{x}), (\mathrm{E}', \boldsymbol{x}')$의 가능도함수 $L(\theta|\boldsymbol{x}), L'(\theta|\boldsymbol{x}')$가 비례관계
  $\rightarrow (\mathrm{E}, \boldsymbol{x}), (\mathrm{E}', \boldsymbol{x}')$의 θ 정보량 동일, 추론 동일

02

충분성

1 충분성의 정의

충분성의 정의

- 표본 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 의 정보
  - 모수의 정보 포함 부분/불포함 부분 구분
- 표본을 통계량으로 축약
  - 통계량이 정보는 손실되나 모수의 정보는 잃지 않을 경우

    →충분통계량

1 충분성의 정의

충분성의 예

- $X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$ 독립
  - $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ 로 변환
  - $X_1 + X_2 \sim N(2\mu, 2)$, $X_1 - X_2 \sim N(0, 2)$

    → $X_1 + X_2$, (X_1, X_2) : μ에 대한 정보가 동일
- $X_1 + X_2$ 는 (X_1, X_2) 의 μ에 대한 정보를 잃지 않고 축약

    → $X_1 + X_2$는 μ의 충분통계량

2 충분통계량

충분통계량

- 추정량 T가 주어졌을 때 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$의 조건부 분포가 θ에 의존하지 않을 때 T를 충분통계량이라고 함

 $\rightarrow (X_1, X_2, \dots, X_n)$의 θ 정보를 T로 축약

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n | T = t)$$

$$= k(x_1, \dots, x_n)$$

2 충분통계량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Ber(\theta)$의 확률표본일 때
$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$가 θ의 충분통계량인가?

2 충분통계량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Ber(\theta)$ 의 확률표본일 때
$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$가 θ의 충분통계량인가?

2 충분통계량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$의 확률표본일 때
$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$가 λ의 충분통계량인가?

2 충분통계량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$의 확률표본일 때
$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$가 λ의 충분통계량인가?

2 충분통계량

피셔-네이만 인수분해정리

- 확률표본 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 의 결합확률밀도함수가 아래와 같이 분해되면 $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 충분통계량

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n|\theta) = g(T(x_1,\cdots,x_n)|\theta)h(x_1,\cdots,x_n)$$

h : θ를 포함하지 않은 음이 아닌 함수

g : 음이 아닌 함수 T를 통해서만 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에 의존

2 충분통계량

피셔-네이만 인수분해정리

- $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 충분통계량

$$\Leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n | \theta) = g(T(x_1, \cdots, x_n) | \theta) h(x_1, \dots, x_n)$$

2 충분통계량

피셔-네이만 인수분해정리

- $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 충분통계량

$$\Leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n|\theta) = g(T(x_1, \cdots, x_n)|\theta)h(x_1, \dots, x_n)$$

2 충분통계량

피셔-네이만 인수분해정리

- $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 충분통계량

$$\Leftrightarrow f(x_1,\cdots,x_n|\theta) = g(T(x_1,\cdots,x_n)|\theta)h(x_1,\ldots,x_n)$$

2 충분통계량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$의 확률표본, σ^2는 기지,
θ의 충분통계량은?

2 충분통계량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$ 의 확률표본, σ^2 는 기지,
θ 의 충분통계량은?

2 충분통계량

충분통계량의 특성

- 충분통계량은 유일하지 않고, 다양하게 존재
  - 충분통계량의 1 – 1 함수도 충분통계량 :
    $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ 충분통계량
    $\rightarrow$ $\left(\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)$도 충분통계량

3 최소충분통계량

좋은 충분통계량은?

- 충분통계량 다양 : 원자료, 순서통계량 등
- 최소충분통계량(Minimal Sufficient Statistics) : 모수의 모든 정보를 포함하면서 자료 축약을 최대화할 수 있는 통계량

3 최소충분통계량

최소충분통계량 정리

- $f(\boldsymbol{x}|\theta)$가 $\boldsymbol{X}$의 확률밀도함수, 다음을 만족하면 $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 최소충분통계량
  - 두 표본점 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$에 대해 $f(\boldsymbol{x}|\theta)/f(\boldsymbol{y}|\theta)$가 θ에 대해 상수 $\Leftrightarrow T(\boldsymbol{x})=T(\boldsymbol{y})$

3 최소충분통계량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$의 확률표본, λ의 최소충분통계량은?

3 최소충분통계량

예 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$의 확률표본, λ의 최소충분통계량은?

4 보조통계량

보조(Ancillary) 통계량

- 보조통계량 : 통계량의 분포가 모수에 의존하지 않는 통계량
  - 보조통계량은 모수의 정보를 포함하지 않음
- 최소충분통계량은 보조통계량과 독립적

4 보조통계량

예 $X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$의 확률표본. $X_1 + X_2$가 μ의 최소충분통계량이고, $X_1 - X_2$가 μ의 보조통계량임을 보이시오.

4 보조통계량

예 $X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$의 확률표본. $X_1 + X_2$가 μ의 최소충분통계량이고, $X_1 - X_2$가 μ의 보조통계량임을 보이시오.

03

지수족과 완비성

1 지수족

지수족의 정의

- 확률밀도함수 집합 $\{f(x;\theta)\ ;\ \theta\in\Omega\}$이 다음 형태일 때 지수족(exponential family)이라 함

$$f(x;\theta) = \exp\{Q(\theta)K(x) + S(x) + C(\theta)\}I_A(x)$$

- 지수족 : 정규분포, 감마분포, 포아송분포 등

1 지수족

예 $N(0,\sigma^2)$ 이 지수족임을 보이시오.

2 완비통계량

완비통계량의 정의

- $E(g(T(\boldsymbol{X})|\theta) = 0 \Rightarrow P(g(T(\boldsymbol{X})) = 0) = 1$

  $\rightarrow T(\boldsymbol{X})$는 완비(Complete)통계량

- 완비충분통계량 : 충분통계량이면서 완비통계량

2 완비통계량

예 $X \sim B(n,p)$ 일 때, X가 완비통계량임을 보이시오.

2 완비통계량

예 $X \sim B(n,p)$ 일 때, X가 완비통계량임을 보이시오.

3 완비충분통계량

지수족의 완비충분통계량

- $X_1, \cdots, X_n \sim f(x;\theta)$ ← 지수족의 원소

$$f(x;\theta) = \exp\{Q(\theta)K(x) + S(x) + C(\theta)\}I_A(x)$$

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} K(X_i)$$: 완비충분통계량

3 완비충분통계량

예 $X_1, \cdots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$의 확률표본일 때 σ^2의 완비충분통계량을 구하시오.

3 완비충분통계량

완비충분통계량의 성질

- 완비충분통계량은 최소충분통계량
- 완비충분통계량의 1-1 함수도 완비충분통계량

3 완비충분통계량

Basu의 정리

- $T(X)$가 완비충분통계량 $\Rightarrow$ $T(X)$는 모든 보조통계량에 독립적

- Basu의 정리를 통해 두 통계량의 결합확률분포 파악 없이 두 통계량의 독립성을 파악

3 완비충분통계량

예 $X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$의 확률표본. $X_1 + X_2$와 $X_1 - X_2$가 독립임을 보이시오.

04

균일최소분산 불편추정량

1 균일최소분산불편 추정량

균일최소분산불편 추정량의 정의

- 평균제곱오차를 갖는 추정함수의 집합 내에서 불편추정량으로 한정하여 구한 최적의 추정량

  → 균일최소분산불편 추정량(UMVUE;

  Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator)

1 균일최소분산불편 추정량

균일최소분산불편 추정량의 정의

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$: $f(x|\theta)$의 확률표본, $\tau(\theta)$의 균일최소분산불편 추정량 $T^* = t^*(\boldsymbol{X})$

  - 불편성 : $E(T^*) = \tau(\theta)$

  - 최소분산성 : $\tau(\theta)$에 대한 어떤 불편추정량 T에 대해

$$Var_\theta(T^*) \le Var_\theta(T)$$

1 균일최소분산불편 추정량

라오-블랙웰(Rao-Blackwell) 정리

- $X_1, X_2, \cdots, X_n : f(x|\theta)$의 확률표본 $S : \theta$의 충분통계량, $T : \theta$의 불편추정량, $T^* = E[T|S]$ 는 다음이 성립하는 균일최소분산불편 추정량

  ① T^* : 충분통계량 S의 함수

  ② T^* : 불편추정량

  ③ 모든 θ에 대해 $Var(T^*) \le Var(T)$

1 균일최소분산불편 추정량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 의 확률표본.

λ 의 균일최소분산불편 추정량을 구하시오.

1 균일최소분산불편 추정량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Poisson(\lambda)$ 의 확률표본.

λ 의 균일최소분산불편 추정량을 구하시오.

1 균일최소분산불편 추정량

레만-쉐페(Lehmann-Scheffe) 정리

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$: $f(x|\theta)$의 확률표본
- T_1 : θ의 완비충분통계량, T_2 : θ의 불편추정량

  $\Rightarrow \rho(T_1) = E(T_2|T_1)$: θ의 균일최소분산불편 추정량

1 균일최소분산불편 추정량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Ber(\theta)$의 확률표본.

θ의 균일최소분산불편 추정량을 구하시오.

1 균일최소분산불편 추정량

예

$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$의 확률표본, σ^2 기지.

θ의 균일최소분산불편 추정량을 구하시오.

2 크래머-라오 하한

크래머-라오 하한

- $\hat{\theta}$는 θ의 불편추정량일 때 하한

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nVar\left(\frac{\partial}{\partial\theta} logf(X_1;\theta)\right)} = \frac{1}{nI(\theta)}$$

- 어떤 불편추정량의 분산이 크래머-라오 하한과 일치
  → 균일 최소분산 불편추정량

정리하기

- 통계량 T가 주어졌을 때 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$의 조건부 분포가 모수θ에 의존하지 않을 때 T를 θ의 충분통계량이라 한다.
- 확률밀도함수 집합 $\{f(x;\theta)\,;\theta \in \Omega\}$가 다음 형태일 때 지수족이라 부른다.

$$f(x;\theta) = \exp\{Q(\theta)K(x) + S(x) + C(\theta)\}I_A(x)$$

정리하기

- 모든 θ에 대해 $T(\boldsymbol{X})$의 함수 g 에 대해 다음이 성립할 때 $T(\boldsymbol{X})$를 완비통계량이라 한다.

$$E(g(T(\boldsymbol{X})|\theta) = 0 \Rightarrow P(g(T(\boldsymbol{X})) = 0) = 1$$

- 균일최소분산불편 추정량은 불편추정량 중에서 분산이 가장 작은 추정량이다.

12 강

다음시간 안내

가설검정 1