제15장 직교화 과정과 최소자승법

15.1 직교기저

[도입] 내적공간의 직교기저

$\{V, <, >\}$: 내적공간

$\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n \mid <A_i, A_j> = 0, \ i \neq j\}$

⇒ 직교집합 (*orthogonal set*)

⇒ 일차독립 (정리 14.2)

⇒ 직교기저 (*orthogonal basis*)

($\tilde{A}$가 생성하는 V의 부분공간 U의기저)

⇒ 단위직교기저 (*orthonormal basis*)

($\|A_i\| = 1, \ i = 1, 2, \dots, n$)

[정리 15.1] 벡터의 일차결합 표현

$\{V, <, >\}$: 내적공간

$\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$: 직교집합

U : $\tilde{A}$가 생성하는 부분공간

$\forall B \in U$,

$$B = \frac{<B, A_1>}{<A_1, A_1>}A_1 + \frac{<B, A_2>}{<A_2, A_2>}A_2 + \dots + \frac{<B, A_n>}{<A_n, A_n>}A_n$$

$$B = <B, A_1>A_1 + <B, A_2>A_2 + \dots + <B, A_n>A_n$$

($\tilde{A}$가 단위직교기저일 때 ; 즉, $<A_i, A_i> = 1$)

15.2 그램-슈미트 직교화

[정리 15.2] Gram-schmidt 직교화 과정

$\{V, <, >\}$: 내적공간, $U < V$

$\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$: U의 기저

⇒ $\tilde{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$는 U 의 직교기저

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - \frac{<A_2, B_1>}{<B_1, B_1>} B_1$$

$$B_3 = A_3 - \frac{<A_3, B_1>}{<B_1, B_1>} B_1 - \frac{<A_3, B_2>}{<B_2, B_2>} B_2$$

$$\vdots$$

$$B_k = A_k - \frac{<A_k, B_1>}{<B_1, B_1>} B_1 - \dots - \frac{<A_k, B_{k-1}>}{<B_{k-1}, B_{k-1}>} B_{k-1}$$

[정리 15.3] 단위직교기저

내적공간 { V, < , > } 의 부분공간 U는 단위직교기저를 갖는다.

U는 직교기저를 갖는다.[정리 15.2]

(Gram-Schmidt 직교화 과정)

⇨ 정규화과정을 거치면 U는 단위직교기저를 갖는다.

$$\frac{B_i}{\|B_i\|}$$

[정리 15.4] 직합(direct sum)

내적공간 { V, < , > } 의 부분공간 U에 대해

$U \cap U^{\perp} = \{O\}$, $V = U + U^{\perp}$

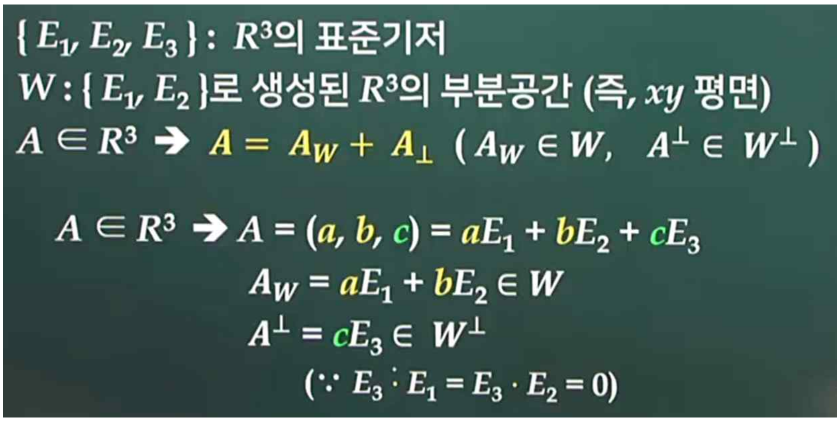
이 성립한다.

이 때, V는 U와 $U^{\perp}$의 직합(direct sum)으로 이루어졌다고 하고

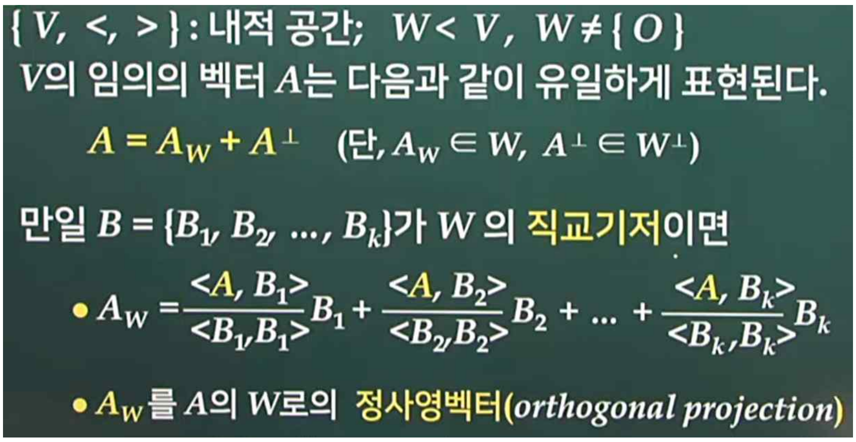
$V = U \oplus U^{\perp}$로 표시함

15.3 정사영벡터

[예제 15.9] 정사영벡터와 직합



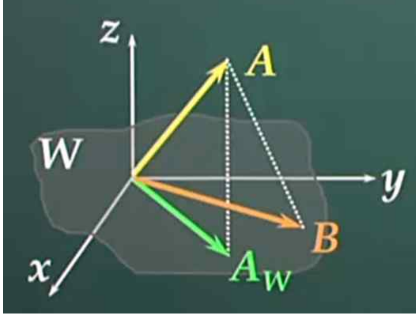
[정리 15.5] 벡터 A의 부분공간 W으로의 정사영벡터



[정리 15.6] 정사영벡터의 의미

$\{V, <, >\}$: 내적 공간; $W < V$, $W \neq \{O\}$

$^\forall A \in V, ^\forall B \in W$, $\|A - A_W\| \leq \|A - B\|$



■ 정사영벡터 : 가장 가까운 벡터

A_W는 W에서 A와 가장 가까운 (the best approximation) 벡터

$\|A - A_W\| \leq \|A - B\|$, $(\forall B \in W)$

15.4 최소자승법

[정의 15.1] 최소자승해

M이 $m \times n$ 행렬이고 $A \in R^m$일 때, 모든 $B \in R^n$에 대하여

$$\| A - M\hat{B} \| \leq \| A - MB \|$$

를 만족하는 $\hat{B} \in R^n$를 방정식 $MX = A$ 의 최소자승해 (least-square solution)

※ $MX = A \Rightarrow A - MX = O$

$\Rightarrow \| A - MX \| \leq \| A - M\hat{B} \| \leq \| A - MB \|$

여기서 $\hat{B} = A_W$.

[정의] 정규방정식

MX = A 에 대한 정규방정식(normal equation)

$$M^T M\hat{B} = M^T A$$

[정리 15.7] 최소자승해와 정규방정식

$M = (A_1\ A_2\ \dots\ A_n)$: $m \times n$ 행렬

$A \in R^m$, $\hat{B} \in R^n$

$\hat{B}$는 $MB = A$의 최소자승해

$\Leftrightarrow$ $\hat{B}$는 $MB = A$의 정규방정식($M^T MX = M^T A$)의 해

[정리 15.8] 최소자승해

$m \times n$ 행렬 M의 위수 $= n$ 이면
$MB = A$의 최소자승해 $\hat{B} \in R^n$ 는
$\hat{B} = (M^T M)^{-1} M^T A$