7 . 표본분포 2

◈ 담당교수: 한국방송통신대 통계·데이터과학과 이긍희

연습문제

※ (1 ~ 2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 성공률 p인 베르누이분포 $Ber(p)$로부터의 확률표본일 때 다음 물음에 답하시오.

1. 표본평균 $\overline{X}_n$는 표본의 수(n)가 커지면서 확률적으로 수렴하는 값은 무엇인가?

<해설> 약대수법칙에 따라서 표본평균은 p로 확률적으로 수렴한다.

2. $\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)$의 극한분포는 무엇인가?

<해설> $E(X_1) = p, \quad Var(X_1) = p(1-p)$

중심극한정리에 따라서 $\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)$는 $N(0, p(1-p))$에 수렴한다.

3. $X_1, \cdots X_n \sim (\mu, \sigma^2)$의 확률표본일 때 $Y_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{S_n / \sqrt{n}}$의 극한 분포는 ?

<해설>

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1)$$

$$Sn^2 \xrightarrow{p} \sigma^2 \Rightarrow \frac{S_n}{\sigma} \xrightarrow{p} 1$$

$$\therefore Y_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}}{\dfrac{S_n}{\sigma}} \xrightarrow{d} \frac{Z}{1} = Z$$

$$\sim N(0,\ 1)$$

정리하기

❖ $X_1, X_2, \cdots, X_m \sim N(\mu_1,\ \sigma^2)$ 확률표본, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \sim N(\mu_1,\ \sigma^2)$ 확률표본, σ^2는 미지일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

❖ $X_1, X_2, \cdots, X_m \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$ 확률표본, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \sim N(\mu_1,\ \sigma_2^2)$ 확률표본, X_i와 Y_j 독립일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,\ n-1)$$

❖ 약대수법칙 : $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 는 $E(X_i)=\mu$, $Var(X_i)=\sigma^2$인 모집단의 확률표본일 때 $\overline{X}_n$는 상수값 μ에 확률적으로 수렴한다.

❖ 중심극한정리 : $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 는 $E(X_i)=\mu$, $Var(X_i)=\sigma^2$인 모집단의 확률표본일 때 $Y_n = \sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)$ 는 평균 0, 분산 σ^2인 정규분포로 수렴한다.