14. 구간추정

◈ 담당교수: 한국방송통신대 통계·데이터과학과 이긍희

연습문제

1. $X_1, X_2, \cdots, X_n$은 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터 얻어진 랜덤 표본으로 표본평균 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 을 얻었다. 모분산 σ^2이 미지의 상수이고 표본분산이 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$일 때 모평균 μ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은?

<해설>

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \right| \le t(n-1;\alpha) \right\} = 1 - \alpha$$

따라서 모평균 μ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ *신뢰구간 :* $\left(\overline{X} \pm t(n-1\,;\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}} \right)$

※ (2~3) 쌍체비교 방법을 적용한 실험에서 두 모평균의 차이에 대해 추정하고자 한다. 각 쌍에 관한 관측값의 차이를 $D_i = X_i - Y_i \ (i = 1, 2, \cdots, 20)$로 정의하고,

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{20}, \quad S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}{19}$$ 라고 한다.

2. $\frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{20}}$의 확률분포는?

<해설>

$D_1, \cdots, D_n$*은 서로 독립이고* $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_D^2)$*을 따르고* $n = 20$ *이므로*

$$\frac{\overline{D} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_D/\sqrt{20}} \sim t(19)$$

3. 모평균의 차이에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은?

<해설>

$$P\left\{\left|\frac{\overline{D}-(\mu_1-\mu_2)}{S_D/\sqrt{n}}\right| \le t(n-1\ ;\ \alpha/2)\right\}=1-\alpha \text{ 이므로}$$

$$100(1-\alpha)\% \text{ 신뢰구간은 } \left(\overline{D} \pm t(19;\alpha/2)\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$$

정리하기

❖ 구간추정은 모수를 포함할 것으로 기대되는 구간을 제시하여 모수를 추정하는 방법을 말한다.

❖ $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$이 정규분포 $N(\mu,\ \sigma^2)$으로부터의 확률표본이고 모표준편차 σ를 모를 때, 모평균 μ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

❖ 표본크기가 충분히 클 때 모비율 p에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

❖ $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$이 정규분포 $N(\mu,\ \sigma^2)$으로부터의 확률표본일 때, 모분산 σ^2에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

❖ $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m$은 정규분포 $N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$으로부터의 확률표본, $Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n$은 정규분포 $N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$으로부터의 확률표본이며, 두 표본은 서로 독립이라고 하자. 모표준편차 σ를 모를 때 모평균의 차 $\mu_1-\mu_2$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{\alpha/2}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\right.$$
$$\left.(\overline{X}-\overline{Y})+t_{\alpha/2}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]$$

❖ $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m$ 은 정규분포 $N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$으로부터의 확률표본, $Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n$ 은 정규분포 $N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$으로부터의 확률표본이며, 두 표본은 서로 독립일 때, 두 모분산의 비 $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[\frac{S_2^2/S_1^2}{F_{\alpha/2}(n-1,\ m-1)},\ S_2^2/S_1^2\cdot F_{\alpha/2}(m-1,\ n-1)\right]$$