제4장 역행렬

4.1 정칙행렬과 역행렬

행렬방정식 AX=B에서
A가 행렬 곱에 관한 역원(역행렬 A^{-1})을 갖는다면
A^{-1}을 방정식의 양변에 곱하여
해 $X = A^{-1}B$ 를 구할 수 있음

[정의 4.1] 정칙행렬, 역행렬
n차 정방행렬 A에 대해 행렬 B가 존재하여
 $AB = BA = I_n$ 을 만족할 때,
A를 정칙행렬(nonsingular matrix) 또는 역연산이 가능한 행렬(invertible matrix) 이라고 하며,
B를 A의 역행렬(inverse matrix)이라고 하고 $B = A^{-1}$ 로 나타낸다.

[정리 4.1] 정칙행렬의 유일성
A가 정칙행렬이면 A^{-1}은 유일하다.

[정리 4.2] 정칙행렬의 성질
A와 B가 n차 정칙행렬이라 하면 다음이 성립된다.
(1) A^{-1}도 정칙행렬이며 $(A^{-1})^{-1} = A$ 이다.
(2) AB도 정칙행렬이며 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 이다.
(3) cA도 정칙행렬이며 $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$ 이다. (단, $c \neq 0$)
(4) AT도 정칙해렬이며 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 이다.

4.2 역행렬 구하는 방법

[정의 4.2] 기본행렬
n차 단위행렬 I_n에 기본행연산을 한번만 적용하여 얻는 행렬 E를
기본행렬(elementary matrix)이라고 한다.
 ※ 기본행연산 R_{ij}, $R_i(c)$, $R_{i,j}(c)$에 대응하는 기본행렬을 각각 $E_{i,j}$, $E_i(c)$, $E_{i,j}(c)$로 표시

[정리 4.3] 기본행연산과 기본행렬의 관계
A, B를 n×p 행렬이라 하면 다음이 성립한다.
(1) A에 기본행연산 R을 적용한 결과는 EA와 같다. 단, 행렬 E는 n차 단위행렬에 동일한 기본행연산 R을 적용하여 얻은 기본행렬이다.
(2) A와 B가 행상등하다면 유한 개의 기본행렬 E_1, E_2, ⋯, E_k가 존재하여 다음

을 만족한다.

$A = E_1E_2 \cdots E_kB$

[정리 4.4] 기본행렬의 성질

기본행렬은 정칙행렬이며, 그 역행렬은 동일한 종류의 기본행렬이다.

(1) $(E_{i,j})^{-1} = E_{i,j}$

(2) $(E_i(c))^{-1} = E_i(c^{-1})$

(3) $(E_{i,j}(c))^{-1} = E_{i,j}(-c)$

[성질] 정칙행렬과 영행(영렬)

A가 n차 정칙행렬이라면 A에는 영행이나 영렬이 없다.

[정리 4.5] 정칙행렬의 특성

A가 n차 정방행렬일 때 다음은 서로 동치이다.

(1) A는 정칙행렬이다.

(2) A와 I_n은 행상등하다.

(3) A는 유한개의 n차 기본행렬들의 곱이다.

[정리 4.6] 역행렬 구하는 이론

n차 정방행렬 A, B, C에 대해

$(A|I_n)$과 소거행제형 행렬 $(B|C)$가 행상등하면 다음이 성립한다.

(1) B가 영행을 포함하면 A는 정칙행렬이 아니다.

(2) $B=I_n$ 이면 A는 정칙행렬이고 $C=A^{-1}$ 이 된다.

4.3 일차연립방정식과 역행렬

[정의 4.3] 위수

행렬 M에 기본행연산을 적용하여 행제형 행렬 R로 만들었을 때

R의 영행이 아닌 행의 수를 행렬 M의 위수(rank)라고 부른다.

[정리 4.7] 일차연립방정식의 해

방정식이 m개이고 미지수가 n개인 일차연립방정식

$AX = B$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) A의 위수와 $(A|B)$의 위수가 같기 위한 필요충분조건은
연립방정식이 해를 갖는 것이다.

(2) A의 위수와 $(A|B)$의 위수가 n과 같기 위한 필요충분조건은
연립방정식이 유일한 해를 갖는 것이다.

○ 정칙행렬과 일차연립방정식

- 알고리즘 2.3(가우스-조르단 소거법)
- 알고리즘 4.1(역행렬 구하는 방법)

⇨ 두 알고리즘은 같은 것이었다!

[정리 4.8] 행렬방정식 AX=B 의 해

A가 n차 정칙행렬이면 임의의 $n \times 1$ 행렬 B에 대해
행렬방정식 AX=B는 유일한 해 $X=A^{-1}B$ 를 갖는다.

[정리 4.9] 동차연립방정식

n차 정방행렬 A가 In과 행상등하기 위한 필요충분조건은
동차연립방정식 AX=O 이 오직 자명한 해만을 갖는 것이다.

[정리 4.10] 정칙행렬의 특성 정리

n차 정방행렬 A에 대한 다음 성질들은 서로 동치이다.

(1) A는 정칙행렬이다.
(2) A는 I_n과 행상등하다.
(3) A는 유한개의 n차 기본행렬의 곱이다.
(4) AX=O 는 오직 자명한 해만을 갖는다.
(5) $n \times 1$ 행렬 B 각각에 대해 AX=B는 유일한 해를 갖는다.