

10. 점추정 2

◆ 담당교수: 한국방송통신대 통계·데이터과학과 이궁희

연습문제

1. X_1, X_2, \dots, X_n 이 모평균이 μ , 모분산이 2인 모집단에서의 확률표본일 때 추정량 $\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ 이 불편통계량이며 일치통계량임을 보이시오.

<해설>

$E(\hat{\mu}_1) = E(\bar{X}) = \mu$ 이므로 불편통계량이며 약대수법칙에 따라 일치추정량이다.

2. $X_1, \dots, X_n \sim (\mu, 1)$ 인 확률표본 $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}\bar{X}$ 의 최대 손실을 비교하시오.

<해설>

$$\begin{aligned} MSE(\bar{X}) &= Var(\bar{X}) + [Bias(\bar{X})]^2 & MSE(\frac{1}{2}\bar{X}) &= \frac{1}{4n} + \frac{1}{4}\mu^2 \\ &= \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\bar{X} \text{의 최대 손실} : \frac{1}{n} \quad \frac{1}{2}\bar{X} \text{의 최대 손실} : \infty$$

$\therefore \hat{\mu}_1 = \bar{X}$ 가 최대손실관점에서 $\hat{\mu}_2$ 보다 우수

정리하기

❖ 불편성은 추정량 T 의 기대값이 모수 θ 가 되어 치우침이 없는 성질을 의미한다.

$$E(T) = \theta, \quad \theta \in \Omega$$

❖ 일치성은 추정량이 모수에 확률적으로 수렴하는 성질을 가지는 것을 의미한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta| < \epsilon] = 1$$

❖ 추정량 T 의 효율성은 추정량 분산의 역수로 정의된다.

$$eff(\hat{\theta}) = \frac{1}{Var(\hat{\theta})}$$

- ❖ 통계량 T 가 θ 의 추정통계량일 때 통계량 T 에 대한 평균제곱오차(MSE, mean squared error, MSE)는 통계량의 편의와 분산을 모두 고려한 통계량의 비교기준이다.

$$MSE(T) = E[(T - \theta)^2]$$

- ❖ 크래머-라오 하한은 불편추정량이 취할 수 있는 분산 하한이다.

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n Var\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_1; \theta)\right]}$$