제14장 내적공간과 직교벡터

14.1 내적공간과 직교벡터

[정의 14.1] 일반 벡터공간에서의 내적

벡터공간 V의 임의의 두 벡터 A, B에 대해 실수 <A, B>를 대응시키는 관계가 다음을 만족할 때 <A, B>를 A와 B의 내적이라고 한다.

A, B, C $\in$V, k$\in$R (실수집합)

(1) <A, B> = <B, A>

(2) <A, B+C> = <A, B> + <A, C>

(3) <kA, B> = k<A, B>

(4) <A, A> $\geq$ 0 이고, <A, A> = 0 일 필요충분조건은 A=O

[정의] 내적공간

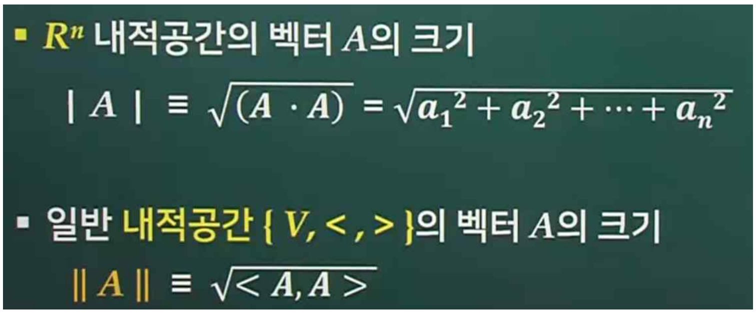
< , >: 벡터공간 V에 정의된 내적

⇨ V를 내적공간 (inner product space)

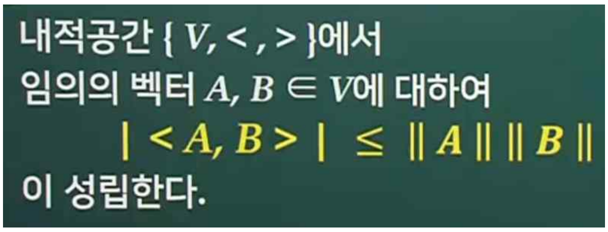
{ V, < , > }로 표시함

→ R^n 벡터공간은 내적공간으로서 { R^n, · } 로 표시됨

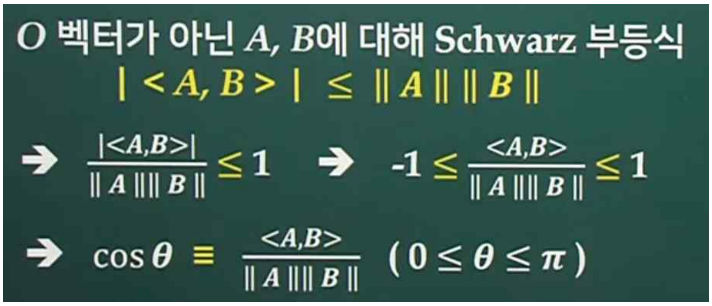
[정의] 내적공간의 벡터 크기



[정리 14.1] Schwarz 부등식



[정의] 벡터 사이의 각(사이각)



[정의 14.2] 벡터의 직교

<A, B> = 0 이면, A, B는 직교(orthogonal)한다.

[정리 14.2] 직교벡터들의 일차독립성

내적공간 { V, < , > } 에서

벡터 A_1, A_2, ⋯, A_n (단, $A_i \neq O$)이 서로 직교하면 이 벡터들은 일차독립이다.

[정의] 직교집합, 단위직교집합

(1) 직교집합 (orthogonal set)

서로 직교인 O 아닌 벡터[직교벡터]들의 집합

(2) 단위직교집합 (orthonomal set)

길이가 1인 직교벡터들의 집합

[정의 14.3] 직교보공간

내적공간 { V, < , > } 에서

벡터 A가 V의 부분공간 U의 모든 벡터들과 직교하면,

벡터 A는 U와 직교한다고 함

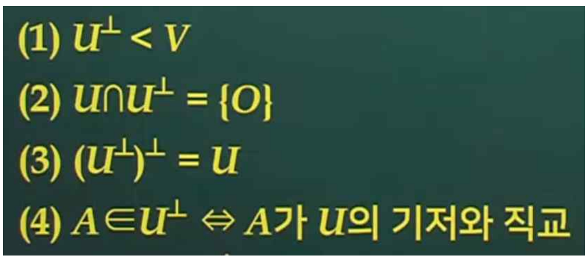
U와 직교하는 V의 모든 벡터들의 집합을

U의 직교보공간(orthogonal complement)이라고 함

$U^{\perp} = \{A \in V,\ \forall B \in U,\ <A, B> = 0\}$

[정리 14.3] 직교보공간의 성질

내적공간 {V, < , >}에서 U를 V의 부분공간이라 하면



14.2 직교행렬

[정의 14.4] 직교행렬

M: n차 정칙행렬

$M^{-1} = M^T$ ⇨ M은 직교행렬(orthogonal matrix)

※ $MM^{-1} = MM^T = I$

[정리 14.5] 직교행렬의 행렬식

M이 직교행렬 → M의 행렬식은 1 또는 -1

[정리 14.6] 2차 직교행렬의 특성

2차 정방행렬 M이 직교행렬

⇨ M은 평면에서의 회전변환 또는 대칭변환에 대응하는 행렬

[정리 14.7] 대칭행렬의 대각화

대칭행렬 M은 직교행렬에 의해 대각화된다.

14.3 직교변환

[정의 14.5] 직교변환

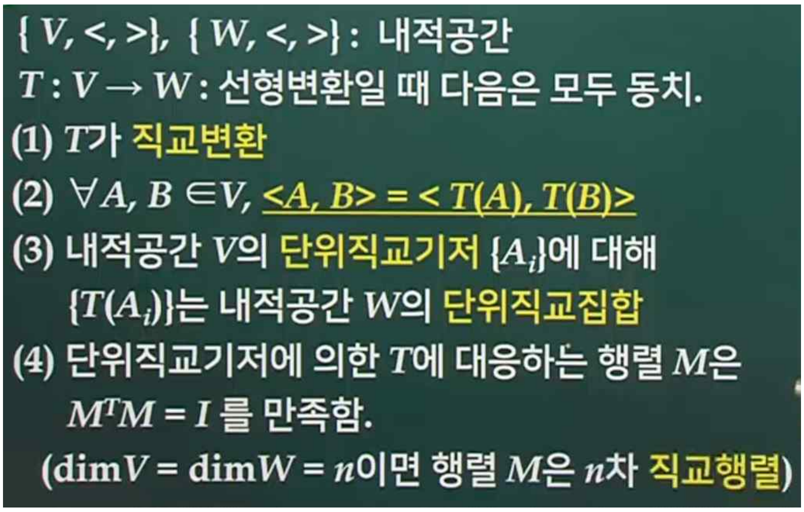
{ V, < , > }, { W, < , > } : 내적공간일 때

T: V→W: 선형변환이고,

$\| T(A) \| = \| A \|$ 이면

T를 직교변환(orthogonal transformation)이라 한다.

[정리 14.8] 직교변환의 성질



[성질] 직교변환과 직교행렬의 관계

내적공간 $\{V, <, >\}$에 대해
$A, B \in V$이고, $T : V \to V$가 직교변환,
M을 T의 행렬로서 n차 직교행렬($M^T M = I$)이라고 하면,

(1) 길이 보존 : $\| T(A) \| = \| A \|$?

$$\| MA \|^2 = < MA, MA > = (MA)^T (MA)$$
$$= (A^T M^T)(MA) = A^T (M^T M) A$$
$$= A^T I A = A^T A = \| A \|^2 = < A, A >$$

(2) 각 보존 : $\theta = \theta_T$?

$$- \ \cos\theta = \frac{<A, B>}{\|A\| \ \|B\|}$$

$$- \ \cos\theta_T = \frac{<T(A), T(B)>}{\|T(A)\| \ \|T(B)\|} = \frac{<MA, MB>}{\|MA\| \ \|MB\|}$$
$$= \frac{<MA, MB>}{\|A\| \ \|B\|} \cdot (\because \| MA \| = \| A \|)$$
$$= \frac{(MB)^T MA}{\|A\| \ \|B\|} = \frac{B^T M^T MA}{\|A\| \ \|B\|} = \frac{B^T A}{\|A\| \ \|B\|} = \cos\theta$$