제7장 평면벡터와 공간벡터

7.1 평면벡터

7.2 R^3 공간벡터

○ R^3 공간에서의 직선의 방정식

(1) 두 점 P와 Q를 지나는 직선

$$k = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\text{where } P(x_1, y_1, z_1),\quad Q(x_2, y_2, z_2)$$

(2) 한 점 P를 지나고 벡터 A에 평행한 직선

$$k = \frac{x - x_1}{x_2} = \frac{y - y_1}{y_2} = \frac{z - z_1}{z_2}$$

$$\text{where } P(x_1, y_1, z_1),\quad A(x_2, y_2, z_2)$$

7.3 R^n 공간벡터

R^n 공간벡터의 정의

[정의 7.9] 유클리드 n차원 공간

n개의 실수들의 순서조 전체의 집합

$R^n = \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid {}^{\forall}x_i \in R, i=1,2,\cdots,n \}$

를 유클리드 n차원 공간(Euclidean n-space)라고 한다

※ 실수 x_i: $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 i번째 성분

벡터의 정의 및 상등 [정의 7.1, 7.5, 7.10]

R^2	R^3	R^n
$A = (a_1, a_2)$	$A = (a_1, a_2, a_3)$	$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$A = (a_1, a_2)$ $B = (b_1, b_2)$ $(a_1 = b_1, a_2 = b_2)$ $\rightarrow A = B$	$A = (a_1, a_2, a_3)$ $B = (b_1, b_2, b_3)$ $(a_1 = b_1, a_2 = b_2,$ $a_3 = b_3)$ $\rightarrow A = B$	$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $(\forall i, a_i = b_i)$ $\rightarrow A = B$

벡터의 크기 |A| [정의 7.2, 7.6, 7.11]

R^2	R^3	R^n
$A = (a_1, a_2)$	$A = (a_1, a_2, a_3)$	$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
$\lvert A \rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	$\lvert A \rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	$\lvert A \rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_1^n a_i^2}$

벡터의 실수곱 kA [정의 7.3, 7.7, 7.12]

R^2	R^3	R^n
$A = (a_1, a_2)$	$A = (a_1, a_2, a_3)$	$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
$kA = (ka_1, ka_2)$	$kA = (ka_1, ka_2, ka_3)$	$kA = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$

벡터의 벡터 합 A+B [정의 7.4, 7.8, 7.13]

R^2	R^3	R^n
$A = (a_1, a_2)$	$A = (a_1, a_2, a_3)$	$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
$A = (a_1, a_2)$ $B = (b_1, b_2)$ $A+B = (a_1+b_1, a_2+b_2)$	$A = (a_1, a_2, a_3)$ $B = (b_1, b_2, b_3)$ $A+B = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$	$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ $A+B = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$

R^n 공간 벡터의 성질 [정리 7.1, 7.2, 7.3]

$A, B, C \in R^n$, $k, l \in R$

(1) $A + B = B + A$ (덧셈의 교환법칙)

(2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ (덧셈의 결합법칙)

(3) $A+O = O+A = A$ (덧셈의 항등원)

(4) $A+(-A) = (-A)+A = O$ (덧셈의 역원)

(5) $k(A+B) = kA + kB$ (실수곱의 배분법칙)

(6) $(k+l)A = kA + lA$ (실수곱의 배분법칙)

(7) $k(lA) = (kl)A$ (실수곱의 결합법칙)

(8) $1A = A$ (실수곱의 항등원)

7.4 벡터의 내적

[정의 7.14] 벡터의 내적 (inner[dot] product)

R^n 공간의 두 벡터를

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

이라 할 때, 벡터 A와 벡터 B의 내적을

$A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ 으로 정의한다.

※ $A \cdot B = AB^T$

(벡터 A와 B의 내적은 n×1행렬 A와 1×n행렬 B의 행렬곱)

[정리 7.4] 내적의 성질

A, B, C를 R^n 공간의 벡터들이라고 하고,

k를 실수라 할 때 다음의 법칙들이 성립한다.

(1) $A \cdot B = B \cdot A$ (교환법칙)

(2) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ (배분법칙)

(3) $(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = A \cdot (kB)$ (결합법칙)

(4) $A \cdot A = |A|^2 \geq 0$ 이다.

$A \cdot A = 0$ 일 필요충분조건은 $A = O$ 이다.

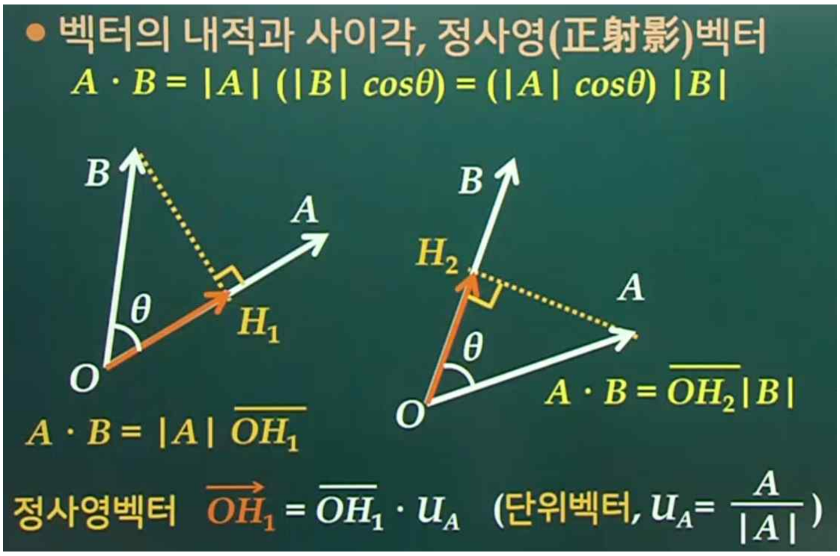
[정리 7.5] 벡터의 내적과 사이각

R2나 R3에서 벡터 A와 B의 사이각을 Θ라 하면

$A \cdot B = |A||B|\cos\Theta$

가 성립한다.

○ 벡터의 내적과 사이각, 정사영(正射影) 벡터



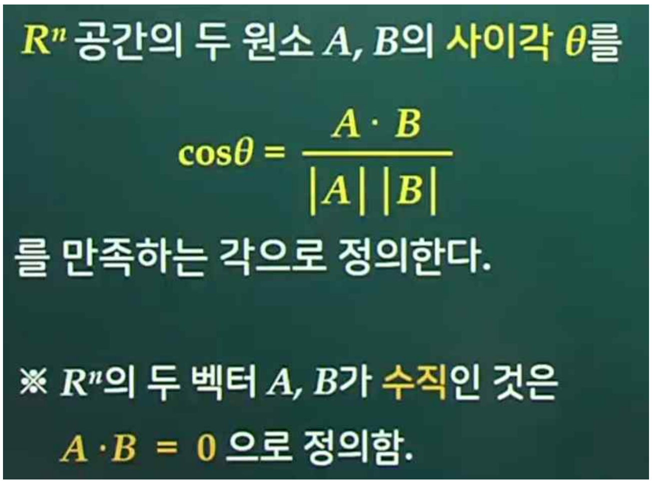
[정리 7.6] 두 벡터의 수직 조건

R2나 R3에서

영벡터가 아닌 두 벡터 A, B가 수직인 것은

$A \cdot B = 0$ 인 것과 동치이다.

[정의 7.15] R^n 공간 벡터의 사이각



7.5 벡터의 외적

[정의 7.16] 벡터의 외적

평행하지 않은 두 벡터

$A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$

모두에 수직인 벡터 중

$C = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

를 벡터 A, B 의 외적이라 하고,

$C = A \times B$ 로 표시한다.

$$
\begin{aligned}
A \times B &= (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} E_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} E_3 \\
&= \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

※ 기본단위벡터

$E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$

[정리 7.7] 외적의 성질

$A, B, C \in R^3$, $k, l \in R$ 이면

(1) $A \times B = -(B \times A)$

(2) $A \times A = O$

(3) $kA \times lB = kl(A \times B)$

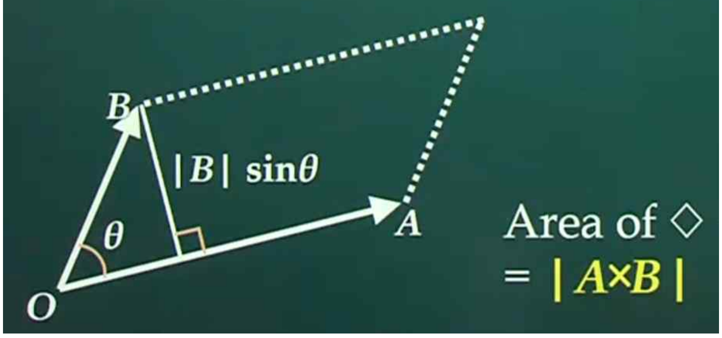
(4) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

[따름정리] 평행한 두 벡터의 외적은 O이다.

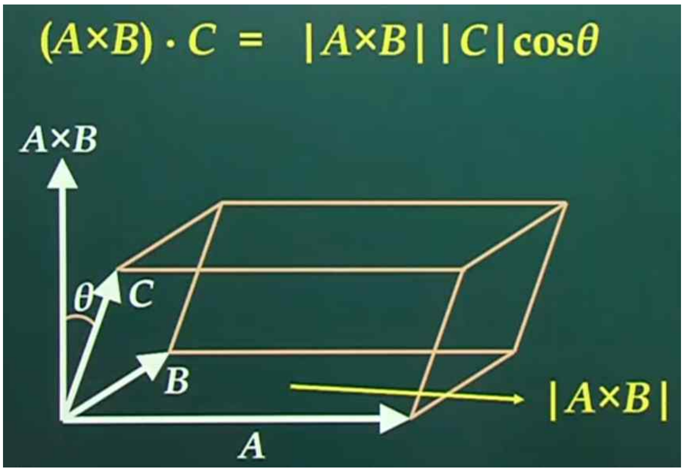
※ $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

[정리 7.8] 외적의 크기

$|A \times B| = |A|\,|B| \sin\theta$



○ 평행육면체의 부피 구하기



○ (A×B)·C 구하기

$A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$

$$(A\times B)\cdot C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$