

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Курсовая работа №1
Часть 1
По дискретной математике
Вариант 84

Выполнил:
Студент группы Р3110
Бармичев Григорий Андреевич
Преподаватель:
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург 2024

$f(X)$ принимает значение 1 при $2 \leq |x_1 1x_5 - x_4 x_2 x_3| < 5$ и неопределенное при $|x_1 1x_5 - x_4 x_2 x_3| = 5$

Таблица истинности

| № | $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$ | $X_1 1 X_5$ | $(X_1 1 X_5)_{10}$ | $X_4 X_2 X_3$ | $(X_4 X_2 X_3)_{10}$ | $ - $ | f |
|----|-----------------------|-------------|--------------------|---------------|----------------------|-------|---|
| 0 | 00000 | 010 | 2 | 000 | 0 | 2 | 1 |
| 1 | 00001 | 011 | 3 | 000 | 0 | 3 | 1 |
| 2 | 00010 | 010 | 2 | 100 | 4 | 2 | 1 |
| 3 | 00011 | 011 | 3 | 100 | 4 | 1 | 0 |
| 4 | 00100 | 010 | 2 | 001 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 00101 | 011 | 3 | 001 | 1 | 2 | 1 |
| 6 | 00110 | 010 | 2 | 101 | 5 | 3 | 1 |
| 7 | 00111 | 011 | 3 | 101 | 5 | 2 | 1 |
| 8 | 01000 | 010 | 2 | 010 | 2 | 0 | 0 |
| 9 | 01001 | 011 | 3 | 010 | 2 | 1 | 0 |
| 10 | 01010 | 010 | 2 | 110 | 6 | 4 | 1 |
| 11 | 01011 | 011 | 3 | 110 | 6 | 3 | 1 |
| 12 | 01100 | 010 | 2 | 011 | 3 | 1 | 0 |
| 13 | 01101 | 011 | 3 | 011 | 3 | 0 | 0 |
| 14 | 01110 | 010 | 2 | 111 | 7 | 5 | d |
| 15 | 01111 | 011 | 3 | 111 | 7 | 4 | 1 |
| 16 | 10000 | 110 | 6 | 000 | 0 | 6 | 0 |
| 17 | 10001 | 111 | 7 | 000 | 0 | 7 | 0 |
| 18 | 10010 | 110 | 6 | 100 | 4 | 2 | 1 |
| 19 | 10011 | 111 | 7 | 100 | 4 | 3 | 1 |
| 20 | 10100 | 110 | 6 | 001 | 1 | 5 | d |
| 21 | 10101 | 111 | 7 | 001 | 1 | 6 | 0 |
| 22 | 10110 | 110 | 6 | 101 | 5 | 1 | 0 |
| 23 | 10111 | 111 | 7 | 101 | 5 | 2 | 1 |
| 24 | 11000 | 110 | 6 | 010 | 2 | 4 | 1 |
| 25 | 11001 | 111 | 7 | 010 | 2 | 5 | d |
| 26 | 11010 | 110 | 6 | 110 | 6 | 0 | 0 |
| 27 | 11011 | 111 | 7 | 110 | 6 | 1 | 0 |
| 28 | 11100 | 110 | 6 | 011 | 3 | 3 | 1 |
| 29 | 11101 | 111 | 7 | 011 | 3 | 4 | 1 |
| 30 | 11110 | 110 | 6 | 111 | 7 | 1 | 0 |
| 31 | 11111 | 111 | 7 | 111 | 7 | 0 | 0 |

КДНФ: $f(X) = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5) \vee$
 $(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5) \vee$
 $(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee$
 $(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee$
 $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5) \vee$
 $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5)$

ККНФ: $f(X) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge$
 $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \wedge$
 $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \wedge$
 $(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge$
 $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5)$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

| K^0 | K^1 | K^2 | $Z(f)$ |
|-------------|-------------------|------------------|-----------|
| 1. 00000 ✓ | 1. 0000x 1-2 | 1. 0xx10 4-13 ✓ | 1. 0000x |
| 2. 00001 ✓ | 2. 000x0 1-3 | 2. 0x11x 8-15 ✓ | 2. 000x0 |
| 3. 00010 ✓ | 3. 00x01 2-4 | 3. 01x1x 12-15 ✓ | 3. 00x01 |
| 4. 00101 ✓ | 4. 00x10 3-5 ✓ | 4. 11x0x 19-22 ✓ | 4. x0010 |
| 5. 00110 ✓ | 5. 0x010 3-7 ✓ | | 5. 001x1 |
| 6. 00111 ✓ | 6. x0010 3-11 | | 6. x0111 |
| 7. 01010 ✓ | 7. 001x1 4-6 | | 7. 1001x |
| 8. 01011 ✓ | 8. 0011x 5-6 ✓ | | 8. 10x11 |
| 9. 01110 ✓ | 9. 0x110 5-9 ✓ | | 9. 1x100 |
| 10. 01111 ✓ | 10. 0x111 6-10 ✓ | | 10. 0xx10 |
| 11. 10010 ✓ | 11. x0111 6-14 | | 11. 0x11x |
| 12. 10011 ✓ | 12. 0101x 7-8 ✓ | | 12. 01x1x |
| 13. 10100 ✓ | 13. 01x10 7-9 ✓ | | 13. 11x0x |
| 14. 10111 ✓ | 14. 01x11 8-10 ✓ | | |
| 15. 11000 ✓ | 15. 0111x 9-10 ✓ | | |
| 16. 11001 ✓ | 16. 1001x 11-12 | | |
| 17. 11100 ✓ | 17. 10x11 12-14 | | |
| 18. 11101 ✓ | 18. 1x100 13-17 | | |
| | 19. 1100x 15-16 ✓ | | |
| | 20. 11x00 15-17 ✓ | | |
| | 21. 11x01 16-18 ✓ | | |
| | 22. 1110x 17-18 ✓ | | |

Таблица импликант

| Простые импликанты (максимальные кубы) | 0-кубы | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--------|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|---|---|-----|---|-----|
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0000x | * | * | | | | | | | | | | | | | |
| 000x0 | * | | * | | | | | | | | | | | | |
| 00x01 | | * | | * | | | | | | | | | | | |
| x0010 | | | * | | | | | | | * | | | | | |
| 001x1 | | | | * | | * | | | | | | | | | |
| x0111 | | | | | | * | | | | | | * | | | |
| 1001x | | | | | | | | | | * | * | | | | |
| 10x11 | | | | | | | | | | | * | * | | | |
| 1x100 | | | | | | | | | | | | | | * | |
| 0xx10 | | | * | | * | | * | | | | | | | | |
| 0x11x | | | | | * | * | | | * | | | | | | |
| 01x1x | | | | | | | * | (*) | * | | | | | | |
| 11x0x | | | | | | | | | | | | | (*) | * | (*) |

Ядро покрытия:

$$T = \begin{pmatrix} 01x1x \\ 11x0x \end{pmatrix}$$

Упрощенная таблица

| Простые импликанты (максимальные кубы) | 0-кубы | | | | | | | | | |
|--|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0000x | A | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
| 000x0 | B | * | * | | | | | | | |
| 00x01 | C | | * | | * | | | | | |
| x0010 | D | | | * | | | | * | | |
| 001x1 | E | | | | * | | * | | | |
| x0111 | F | | | | | | * | | | * |
| 1001x | G | | | | | | | * | * | |
| 10x11 | H | | | | | | | | * | * |
| 0xx10 | I | | | * | | * | | | | |
| 0x11x | J | | | | | * | * | | | |

Метод Петрика

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (A \vee B) (A \vee C) (B \vee D) (B \vee I) (C \vee E) (I \vee J) (E \vee F \vee J) (D \vee G) (G \vee H) (F \vee H)$$

Выражение в ДНФ:

$$Y = A E F G I \vee A E G H I \vee A D E H I \vee A C D H J \vee A D E H J \vee A C F G I \vee A D E F G J \vee A C D F G J \vee A C G H I J \vee A B E F G J \vee A B E G H J \vee A C D F H I \vee B C F G J \vee B C G H J \vee B C D H J \vee B C F G I \vee B C E G H I \vee B C D F H I \vee B C D E H I$$

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ E \\ F \\ G \\ I \end{pmatrix} & C_2 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ E \\ G \\ H \\ I \end{pmatrix} & C_3 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ D \\ E \\ H \\ I \end{pmatrix} & C_4 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ C \\ D \\ H \\ J \end{pmatrix} & C_5 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ D \\ E \\ H \\ J \end{pmatrix} & C_6 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ C \\ F \\ G \\ I \end{pmatrix} & C_7 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ D \\ E \\ F \\ G \\ J \end{pmatrix} \\ Sa = 28 & Sa = 28 & Sa = 28 & Sa = 28 & Sa = 28 & Sa = 28 & Sa = 33 \\ Sb = 35 & Sb = 35 & Sb = 35 & Sb = 35 & Sb = 35 & Sb = 35 & Sb = 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} C_8 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ C \\ D \\ F \\ G \\ J \end{pmatrix} & C_9 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ C \\ G \\ H \\ I \\ J \end{pmatrix} & C_{10} = \begin{pmatrix} T \\ A \\ B \\ E \\ F \\ G \\ J \end{pmatrix} & C_{11} = \begin{pmatrix} T \\ A \\ B \\ E \\ G \\ H \\ J \end{pmatrix} & C_{12} = \begin{pmatrix} T \\ A \\ C \\ D \\ F \\ H \\ I \end{pmatrix} & C_{13} = \begin{pmatrix} T \\ B \\ C \\ F \\ G \\ J \end{pmatrix} & C_{14} = \begin{pmatrix} T \\ B \\ C \\ G \\ H \\ J \end{pmatrix} \\ Sa = 33 & Sa = 33 & Sa = 33 & Sa = 33 & Sa = 33 & Sa = 28 & Sa = 28 \\ Sb = 39 & Sb = 39 & Sb = 39 & Sb = 39 & Sb = 39 & Sb = 35 & Sb = 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} C_{15} = \begin{pmatrix} T \\ B \\ C \\ D \\ H \\ J \end{pmatrix} & C_{16} = \begin{pmatrix} T \\ B \\ C \\ F \\ G \\ I \end{pmatrix} & C_{17} = \begin{pmatrix} T \\ B \\ C \\ E \\ G \\ H \\ I \end{pmatrix} & C_{18} = \begin{pmatrix} T \\ B \\ C \\ D \\ F \\ H \\ I \end{pmatrix} & C_{19} = \begin{pmatrix} T \\ B \\ C \\ D \\ E \\ H \\ I \end{pmatrix} \\ Sa = 28 & Sa = 28 & Sa = 33 & Sa = 33 & Sa = 33 \\ Sb = 35 & Sb = 35 & Sb = 39 & Sb = 39 & Sb = 39 \end{array}$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{min} = \begin{pmatrix} 01x1x \\ 11x0x \\ 0000x \\ 001x1 \\ 1001x \\ 10x11 \\ 0xx10 \end{pmatrix} \quad Sa = 28 \quad Sb = 35$$

Этому покрытию соответствует МДНФ следующего вида:

$$f(X) = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_5) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee (\neg x_1 \wedge x_4 \wedge \neg x_5)$$

Минимизация булевой функции на картах Карно.

Определение МДНФ

| | | | | | | |
|--------|----|--------|----|----|----|--|
| | | x4, x5 | | | | |
| | | 00 | 01 | 11 | 10 | |
| x2, x3 | 00 | 1 | 1 | | 1 | |
| | 01 | | 1 | 1 | 1 | |
| | 11 | | | 1 | 1 | |
| | 10 | | | 1 | d | |
| | | x1 = 0 | | | | |

| | | | | | | |
|--------|----|--------|----|----|----|--|
| | | x4, x5 | | | | |
| | | 00 | 01 | 11 | 10 | |
| x2, x3 | 00 | | | 1 | 1 | |
| | 01 | d | | 1 | | |
| | 11 | 1 | d | | | |
| | 10 | 1 | 1 | | | |
| | | x1 = 1 | | | | |

$$C_{min} = \begin{pmatrix} 01x1x \\ 11x0x \\ 0000x \\ 001x1 \\ 1001x \\ 10x11 \\ 0xx10 \end{pmatrix} \quad S_a = 28 \quad S_b = 35$$

$$f(X) = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_5) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee (\neg x_1 \wedge x_4 \wedge \neg x_5)$$

Определение МКНФ

| | | | | | | |
|--------|----|--------|----|----|----|--|
| | | x4, x5 | | | | |
| | | 00 | 01 | 11 | 10 | |
| x2, x3 | 00 | | | 0 | | |
| | 01 | 0 | | | | |
| | 11 | 0 | 0 | | | |
| | 10 | 0 | 0 | | d | |
| | | x1 = 0 | | | | |

| | | | | | | |
|--------|----|--------|----|----|----|--|
| | | x4, x5 | | | | |
| | | 00 | 01 | 11 | 10 | |
| x2, x3 | 00 | 0 | 0 | | | |
| | 01 | d | 0 | | 0 | |
| | 11 | | d | 0 | 0 | |
| | 10 | | | 0 | 0 | |
| | | x1 = 1 | | | | |

$$C_{\min} = \begin{pmatrix} 00011 \\ 01x0x \\ 10x0x \\ 11x1x \\ 0x100 \\ 1x110 \end{pmatrix} \quad S_a = 32 \quad S_b = 39$$

$$f(X) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторное преобразование для МДНФ:

$$f(X) = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_5) \vee \\ (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee (\neg x_1 \wedge x_4 \wedge \neg x_5)$$

Декомпозиция невозможна

$$x_1 \wedge ((x_2 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_4 \wedge (\neg x_3 \vee x_5))) \vee \neg x_1 \wedge (x_4 \wedge ((x_2) \vee (\neg x_5))) \vee \neg x_2 \wedge ((\neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_3 \wedge x_5))) \\ (S_q = 30)$$

Факторное преобразование для МКНФ:

$$f(X) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

Декомпозиция невозможна

$$(x_1 \vee (x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_2 \vee x_4)) \wedge (\neg x_1 \vee (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4)) \wedge \\ (\neg x_3 \vee x_5 \vee (x_1 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4))$$

$$(S_q = 34)$$

Синтез комбинационных схем в булевом базисе

Схема по упрощенной МДНФ

$S_Q=30$ $T=6\tau$

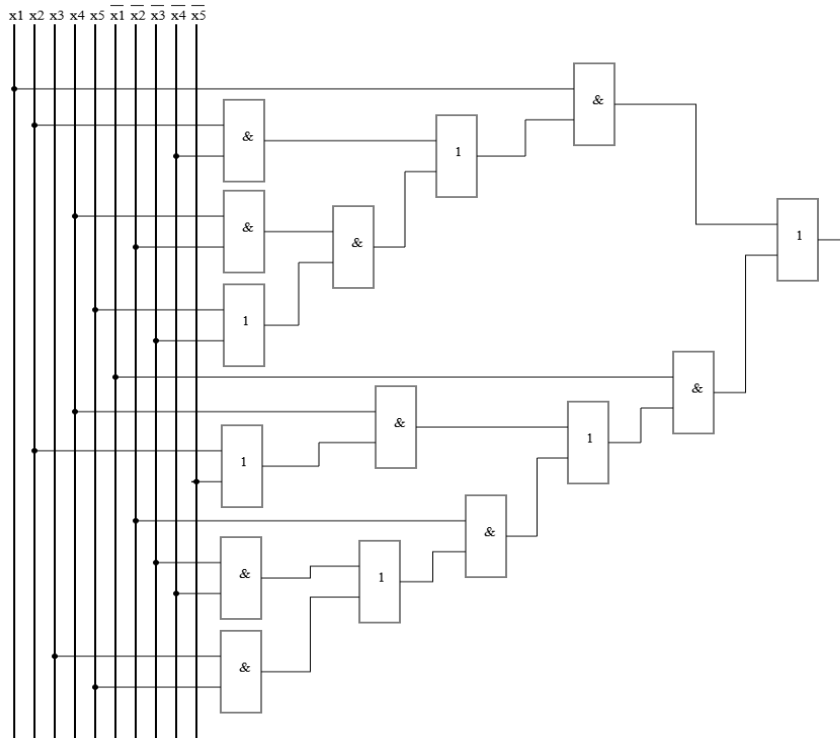
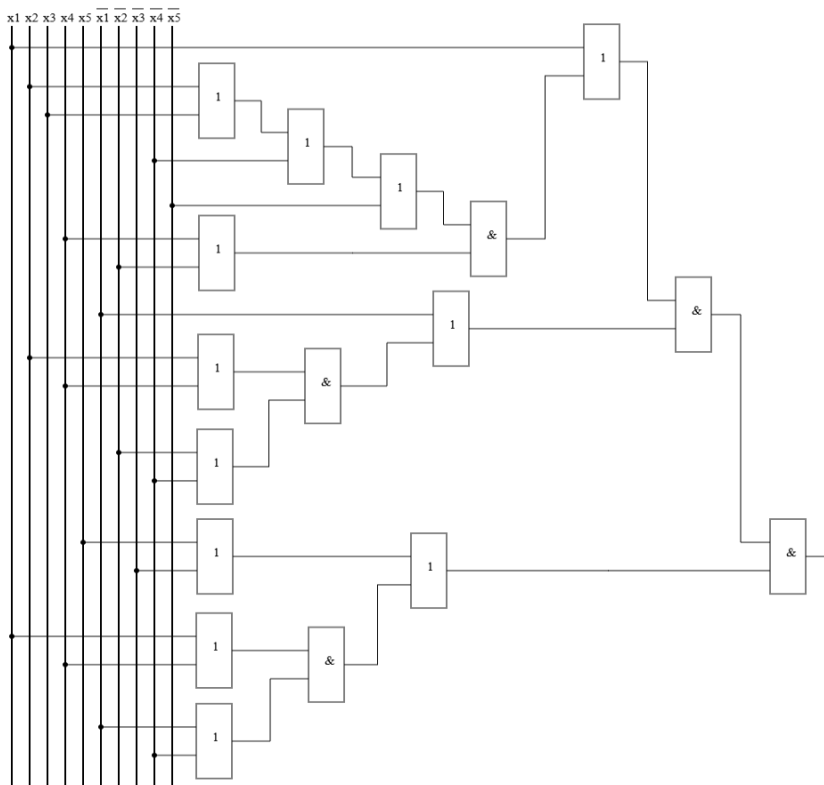


Схема по упрощенной МКНФ

$S_Q=34$ $T=7\tau$



Сокращенный булев базис (И-НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе (И-НЕ)

$$(x_1 | (\neg x_2 | \neg(x_4 | (x_3 | \neg x_5)))) | (\neg x_1 | ((x_4 | \neg x_2 | x_5)) | (\neg x_2 | ((\neg x_3 | \neg x_4) | (x_3 | x_5))))$$

$$S_Q=30 \quad T=7\tau$$

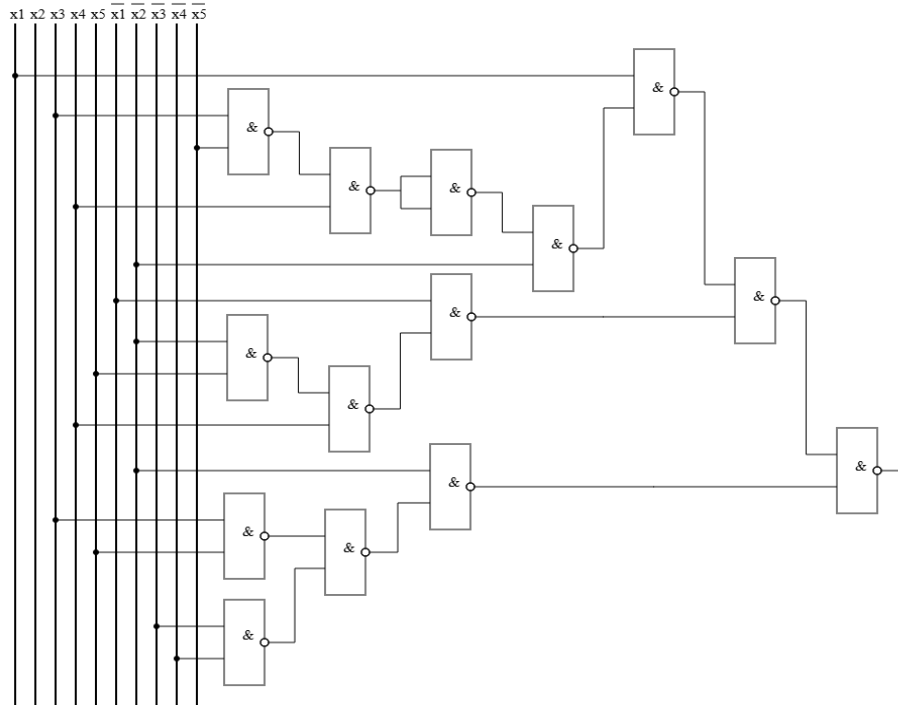


Схема по упрощенной МКНФ в базисе (И-НЕ)

$$\neg(\neg((\neg x_1 | \neg((\neg x_2 | \neg x_3 | x_4 | x_5) | (x_2 | \neg x_4))) | (x_1 | ((\neg x_2 | \neg x_4) | (x_2 | x_4)))) | (x_3 | \neg(\neg x_5 | ((\neg x_1 | \neg x_4) | (x_1 | x_4))))$$

$$S_Q=40 \quad T=9\tau$$

