Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar

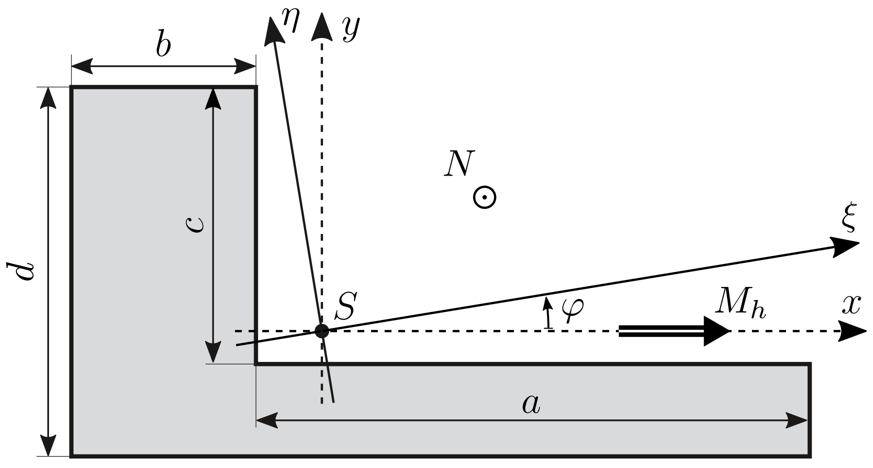
Szilárdságtan 1. Szorgalmi HF

Piri Barnabás

2020. május 15.

A feladat ismertetése:

Az ábrán vázolt keresztmetszet terhelései az x tengely hatásvonalába eső M_h hajlítónyomaték és a z irányú N normál-igénybevétel. A keresztmetszet b, c, d méretei adottak, a ξ és η tengelyek rendre az 1. és a 2. nyomatéki főtengelyeket jelölik.



1. ábra. A keresztmetszet és jellemző méretei, tulajdonságai

Látható, hogy a keresztmetszet két elemi téglalapból épül fel, amelyeknek közös súlypontját az S jelöli. Az 1. ábrán feltüntetett x és y tengelyek a súlyponti tengelyek.

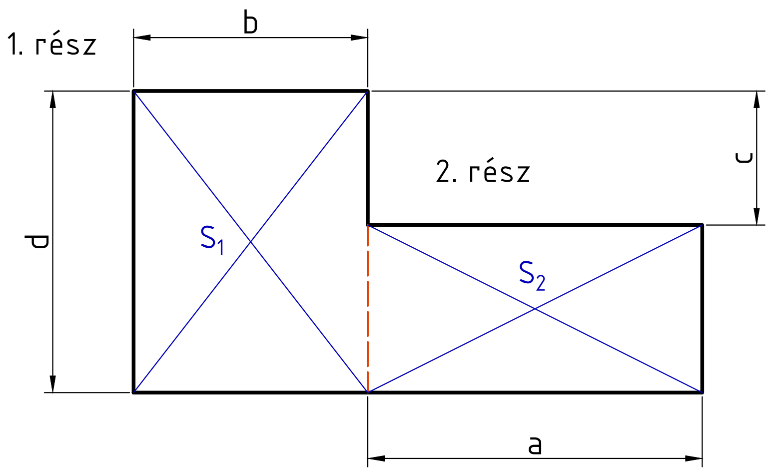
1. Feladat:

Ábrázolja az I_1 és I_2 fő másodrendű nyomatékokat és az 1-es nyomatéki főtengely (ξ tengely) x tengellyel bezárt φ szögét az a méret függvényében az $a \in [0,\ 100]$ mm-es tartományon!

A fő másodrendű nyomatéki tengelyek origójának helyzete megegyezik a súlyponti tengelyek origójának helyzetével. A nyomatéki főtengelyeket tulajdonképpen a súlyponti tengelyek origó (vagyis a súlypont) körüli φ szöggel való elforgatásából kapjuk.

Ahhoz, hogy a másodrendű nyomatékokat, illetve az 1-es nyomatéki főtengely és az x tengely által bezárt szöget meg tudjuk határozni szükségünk van a keresztmetszet másodrendű nyomatékaira a súlyponti x és y tengelyekre.

Ezeket csak elemi keresztmetszeteknél tudjuk meghatározni, tehát az 1. ábrán látható keresztmetszetet két elemi téglalapra bontjuk fel a 2. ábrán látható módon.



2. ábra. Elemi keresztmetszetekre bontás, a szaggatott vonal jelzi a szétvágás vonalát

Így már tudjunk a két elemi részt külön-külön vizsgálni a továbbiakban.

A feladatban adott mennyiségek:

$$b = 35\ [mm] \tag{1.1}$$

$$c = 20\ [mm] \tag{1.2}$$

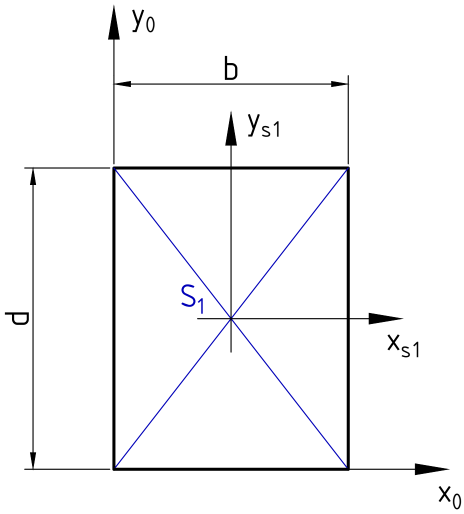
$$d = 45\ [mm] \tag{1.3}$$

$$N = 5\ [kN] \tag{1.4}$$

$$M_h = \ 2\ kNm] \tag{1.5}$$

$$\sigma_{meg} = 170\ [MPa] \tag{1.6}$$

1. rész vizsgálata:



3. ábra. 1. keresztmetszeti rész jellemző méretei, súlyponti tengelyei

Egy téglalap másodrendű nyomatéka a saját súlyponti tengelyére kiszámítható a következőképpen: a tengellyel párhuzamos oldal szorozva a rá merőleges oldal köbével, osztva 12-vel. Képlettel az (1.7) egyenlet írja le:

$$I_{tengely} = \frac{Oldal_{parh} \cdot Oldal^3_{mer}}{12} \tag{1.7}$$

Eszerint az 1. rész másodrendű nyomatékai:

$$I_{xs1} = \frac{b \cdot d^3}{12} \tag{1.8}$$

$$I_{ys1} = \frac{b^3 \cdot d}{12} \tag{1.9}$$

$$I_{xys1} = 0 \tag{1.10}$$

A (1.10) egyenletben szereplő tengelypárra számolt másodrendű nyomaték zérus, mivel a súlyponti tengelyek közül legalább egyik szimmetriatengely.

Szükség lesz még ezen kívül a keresztmetszet területére (A_1) és a súlypont koordinátáira (x_1 és y_1), amiket az 3. ábrán látható x_0 és y_0 koordináta rendszerekben értelmezünk:

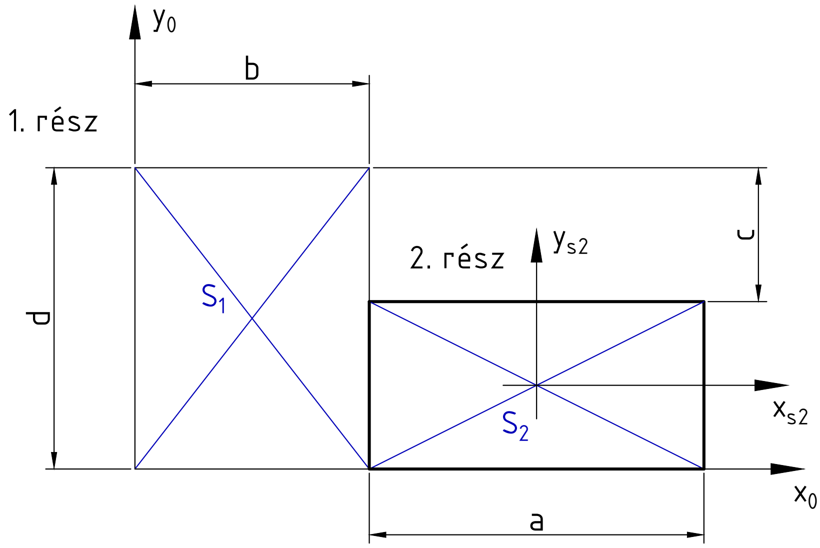
$$A_1 = b \cdot d \tag{1.11}$$

$$x_1 = \frac{b}{2} \tag{1.12}$$

$$y_1 = \frac{d}{2} \tag{1.13}$$

Az 1. keresztmetszeti részhez hasonlóan végezhető a 2. keresztmetszeti rész vizsgálata:

2. rész vizsgálata:



4. ábra. 2. keresztmetszeti rész jellemző méretei, súlyponti tengelyei

A másodrendű nyomatékok, hasonlóan az 1. részhez:

$$I_{xs2} = \frac{a \cdot (d-c)^3}{12} \tag{1.14}$$

$$I_{ys2} = \frac{a^3 \cdot (d-c)}{12} \tag{1.15}$$

$$I_{xys2} = 0 \tag{1.16}$$

A (1.16) egyenletben szereplő tengelypárra számolt másodrendű nyomaték zérus, mivel a súlyponti tengely itt is szimmetriatengely.

A keresztmetszet területe (A_2) és a súlypont koordinátái: (x_2 és y_2), amiket a 4. ábrán látható x_0 és y_0 koordináta rendszerekben értelmezünk:

$$A_2 = a \cdot (d-c) \tag{1.17}$$

$$x_2 = b + \frac{a}{2} \tag{1.18}$$

$$y_2 = \frac{d-c}{2} \tag{1.19}$$

Ahhoz, hogy ki tudjuk számítani az összetett keresztmetszet tengelyére a másodrendű nyomatékot, előbb meg kell keresnünk, hogy hol helyezkednek el ezek a tengelyek.

A súlyponti tengelyek origója maga az összetett keresztmetszet súlypontja lesz, amelyet a következőképpen tudunk számolni:

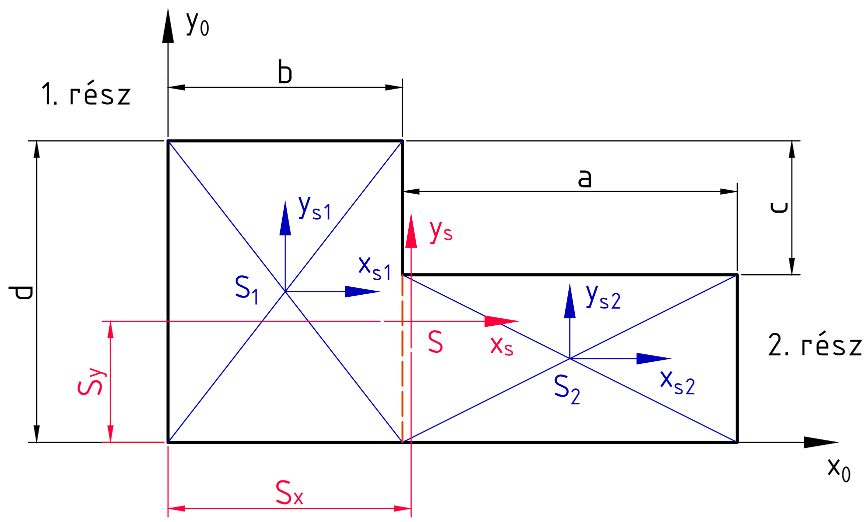
Az összetett keresztmetszet súlypontjának x_0 koordinátája:

$$S_x = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} \tag{1.20}$$

Az összetett keresztmetszet súlypontjának y_0 koordinátája:

$$S_y = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} \tag{1.21}$$

Az összetett keresztmetszet közös súlypontjának ábrázolása általános ($a \neq 0$ $[mm]$) esetben:



5. ábra. Az összetett keresztmetszet közös súlypontjának, súlyponti tengelyeinek elhelyezkedése

Az elemi keresztmetszetek másodrendű nyomatékai a közös súlyponti tengelyekre kiszámíthatóak a *Steiner-tétel* segítségével.

A *Steiner-tétel* általános alakja tengelyre számolva:

$$I_{xsulyp} = I_{xsajat} + A_{sajat} \cdot t^2 \tag{1.22}$$

ahol:

I_{xsajat}: az elemi saját súlyponti tengelyre számított másodrendű nyomaték,

A_{sajat}: az elemi keresztmetszet területe,

t: a közös súlyponti tengely és az elemi keresztmetszet saját súlyponti tengelyének távolsága, előjeles számként.

A *Steiner-tétel* általános alakja tengelypárra számolva:

$$I_{xysulyp} = I_{xysajat} \cdot A_{sajat} \cdot t_1 \cdot t_2 \tag{1.23}$$

ahol:

$I_{xysajat}$: a saját súlyponti tengelypárra számolt másodrendű nyomaték,

A_{sajat}: az elemi keresztmetszet területe,

t_1: a közös súlyponti x_s tengely és az elemi keresztmetszet saját súlyponti $x_{s1/2}$ tengelyének távolsága, előjeles számként,

t_2: a közös súlyponti y_s tengely és az elemi keresztmetszet saját súlyponti $y_{s1/2}$ tengelyének távolsága, előjeles számként.

Ezen képletek ismeretével számítható a két elemi keresztmetszet rész másodrendű nyomatéka a közös súlyponti tengelyekre:

1. rész másodrendű nyomatéka a közös súlyponti tengelyekre:

$$I_{xs}^{(1)} = I_{xs1} + A_1 \cdot (y_1 - S_y)^2 \tag{1.24}$$

$$I_{ys}^{(1)} = I_{ys1} + A_1 \cdot \big(- (S_x - x_1) \big)^2 \tag{1.25}$$

$$I_{xys}^{(1)} = I_{xys1} + A_1 \cdot (y_1 - S_y) \cdot \big(- (S_x - x_1) \big) \tag{1.26}$$

2. rész másodrendű nyomatéka a közös súlyponti tengelyekre:

$$I_{xs}^{(2)} = I_{xs2} + A_2 \cdot \big(- (S_y - y_2) \big)^2 \tag{1.27}$$

$$I_{ys}^{(2)} = I_{ys2} + A_2 \cdot (x_2 - S_x)^2 \tag{1.28}$$

$$I_{xys}^{(2)} = I_{xys2} + A_2 \cdot \big(- (S_y - y_2) \big) \cdot (x_2 - S_x) \tag{1.29}$$

Az összetett keresztmetszet súlyponti tengelyeire, illetve tengelypárjára számolt másodrendű nyomatékot úgy kapjuk meg, ha az 1. rész és a 2. rész közös súlyponti tengelyekre számolt másodrendű nyomatékait összegezzük:

$$I_x = I_{xs}^{(1)} + I_{xs}^{(2)} \tag{1.30}$$

$$I_y = I_{ys}^{(1)} + I_{ys}^{(2)} \tag{1.31}$$

$$I_{xy} = I_{xys}^{(1)} + I_{xys}^{(2)} \tag{1.32}$$

Ezen súlyponti tengelyre számolt másodrendű nyomatékok segítségével már számíthatók a fő másodrendű nyomatékok:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2} \tag{1.33}$$

ahol a kapott értékeket a következőképp rendezzük:

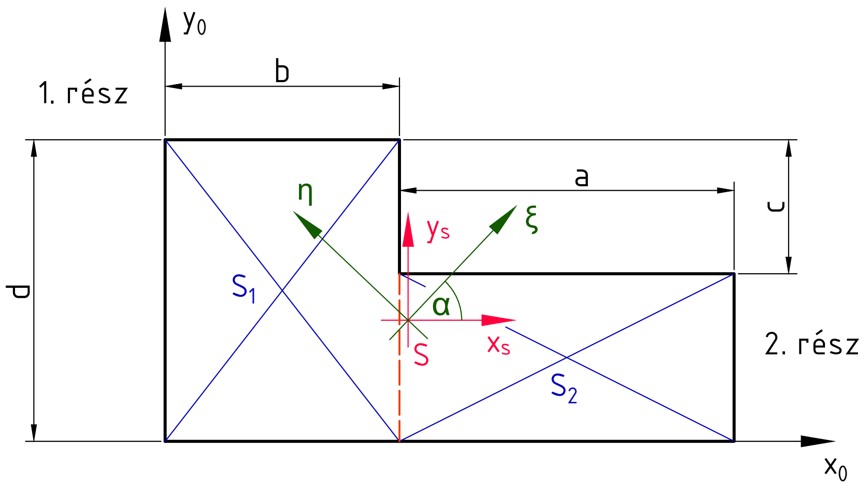
$$I_1 > I_2 \tag{1.34}$$

Az I_1 ismeretével már ki tudjuk számolni az 1-es fő másodrendű nyomatéki tengely (ξ tengely), illetve a súlyponti x_s tengely által bezárt szöget, amit jelöljünk α-val:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{I_y - I_1}{I_{xy}}\right) \tag{1.35}$$

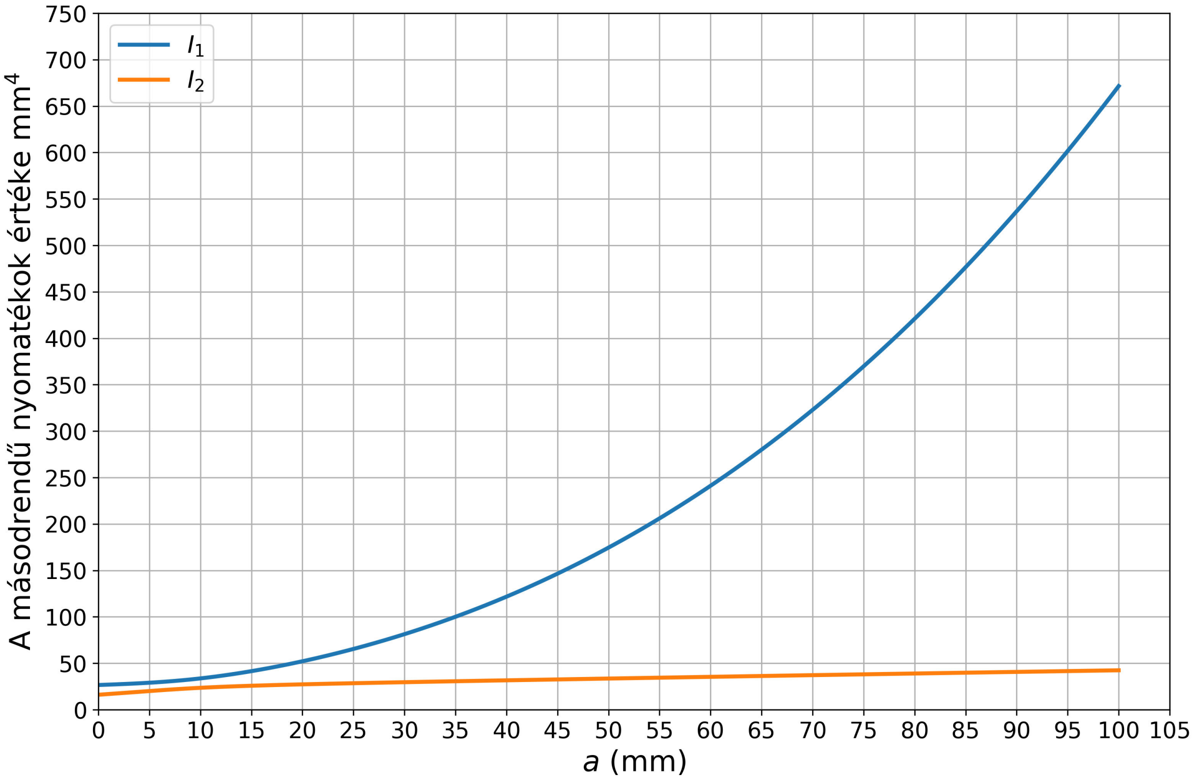
Látható, hogy az össze szükséges paraméter adott ezekhez a számításoktól, egyedül az a méret egy változó.

Így bármilyen programozási nyelv, például Python segítségével ábrázolni tudjuk a fő másodrendű nyomatékok változását, illetve az 1-es fő másodrendű nyomatéki tengely (ξ tengely) és a súlyponti x_s tengely által bezárt szöget az $a \in [0,\, 100]$ mm-es tartományon.

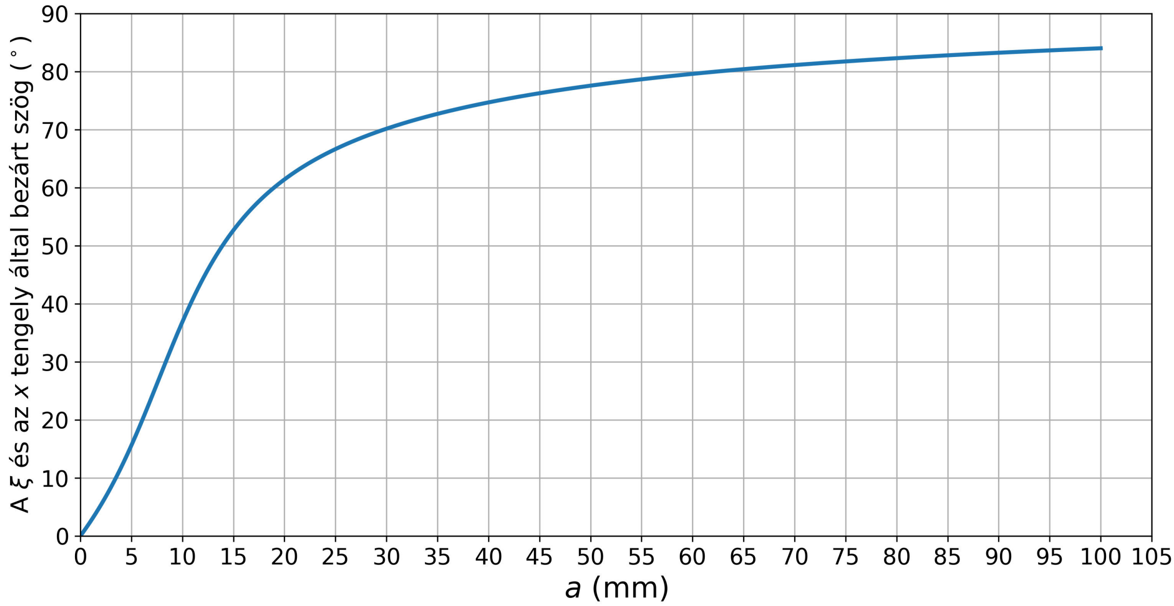


6. ábra. A fő másodrendű nyomatéki tengelyek és a ξ és az x_s tengely által bezárt szög

A dokumentáció mellett található *SZHF-HH7OAB.py* Python programfájlban található a számítási algoritmus, illetve a grafikon rajzolása.



7. ábra. A fő másodrendű nyomatékok értéke az a méret függvényében



8. ábra. A ξ tengely és az x_s súlyponti tengely által bezárt szög értéke az a méret függvényében

A 7. ábrán látható, hogy I_1 értéke rendre gyorsan növekszik, azonban I_2 értéke alig változik az teljes szélességen. A 8. ábrán a szöghelyzet változása az első 30 mm-en jelentős, utána a növekedés lelassul.

2. Feladat:
Ábrázolja a keresztmetszetben ébredő maximális $\boldsymbol{\sigma_z}$ normálfeszültséget az $\boldsymbol{a}$ méret függvényében az $\boldsymbol{a} \in [0, 100]$ mm-es tartományon!

A normálfeszültség jelen esetben két féle igénybevételből származik:

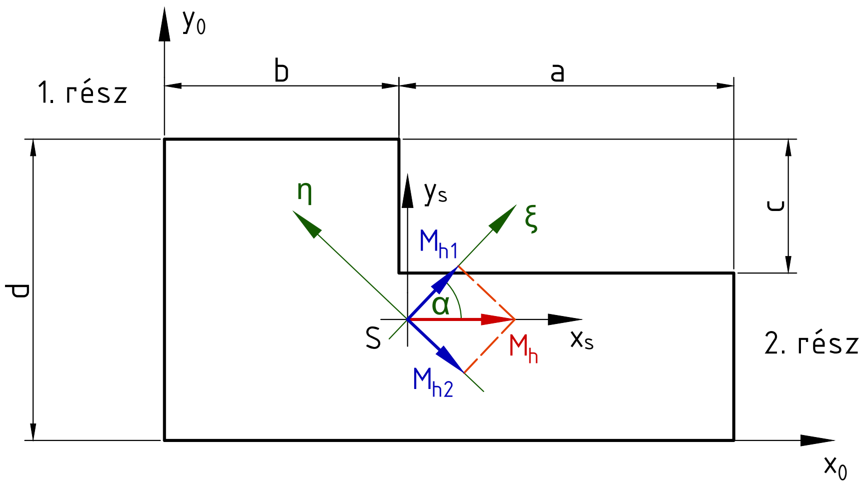
$N = 5$ [kN] normál igénybevételből

$M_h = 2$ [kNm] hajlító igénybevételből

Mivel az $a = 0$ [mm] esetet kivéve a hajlítás tengelye nem egyezik meg egyik nyomatéki főtengellyel sem, nem tiszta hajlításról beszélünk, így a ferde hajlítás képletét tudjuk alkalmazni:

$$\sigma(\eta, \xi) = \frac{N}{A_1 + A_2} + \frac{M_{h1}}{I_1} \cdot \eta + \frac{M_{h2}}{I_2} \cdot \xi \tag{2.1}$$

ahol M_{h1} és M_{h2} a nyomatéki főtengelyek irányába bontott hajlítónyomaték komponensek a 9. ábra szerint.



9. ábra. A hajlítónyomaték nyomaték felbontása komponensekre

Most már meg tudjuk határozni a pontokban ébredő feszültséget, de ehhez le kell tudnunk írni a pontok koordinátáját a nyomatéki főtengelyek (ξ és η tengely) koordináta rendszerében.

A maximális feszültség a sarkpontok valamelyikén fog ébredni, ezen pontok koordinátáját le tudjuk írni a súlyponti x_s és y_s tengelyek koordináta rendszerében. Ezeket a pontokat egy lineáris transzformáció segítségével át tudjuk számolni a a nyomatéki főtengelyek (ξ és η) koordináta rendszerébe.

Ez a transzformáció a síkbeli általános φ szögű óramutató járásával ellentétes forgatás mátrixa, ami a következőképp szól:

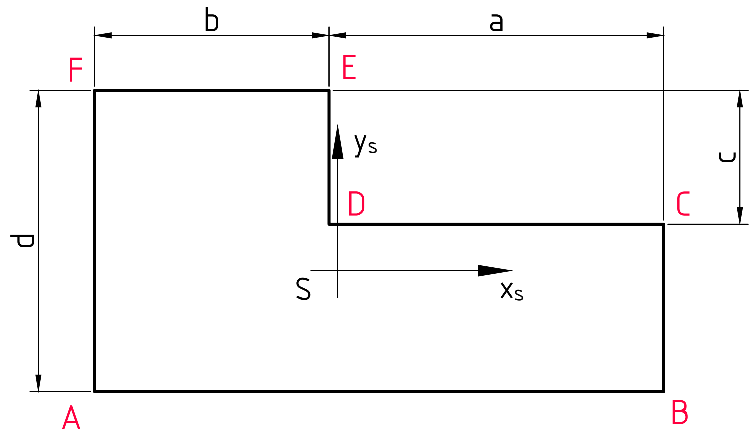
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

De jelen esetben a koordináta rendszer van elforgat forgatva α szöggel az óramutató járásával ellentétesen, ami olyan, mintha a keresztmetszet lenne elforgatva α szöggel az óramutató járásával megegyezően.

Tehát ehhez a transzformációhoz a (2.2) mátrix inverzét kell használni, amely a következőképpen néz ki:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

A koordináták leolvasásához szükséges egy ábrát rajzolnunk:



10. ábra. A sarokpontok pozíciója

A pontok koordinátája az x_s és y_s koordináta rendszerben:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -S_x \\ -S_y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b + a - S_x \\ -S_y \end{bmatrix}$$

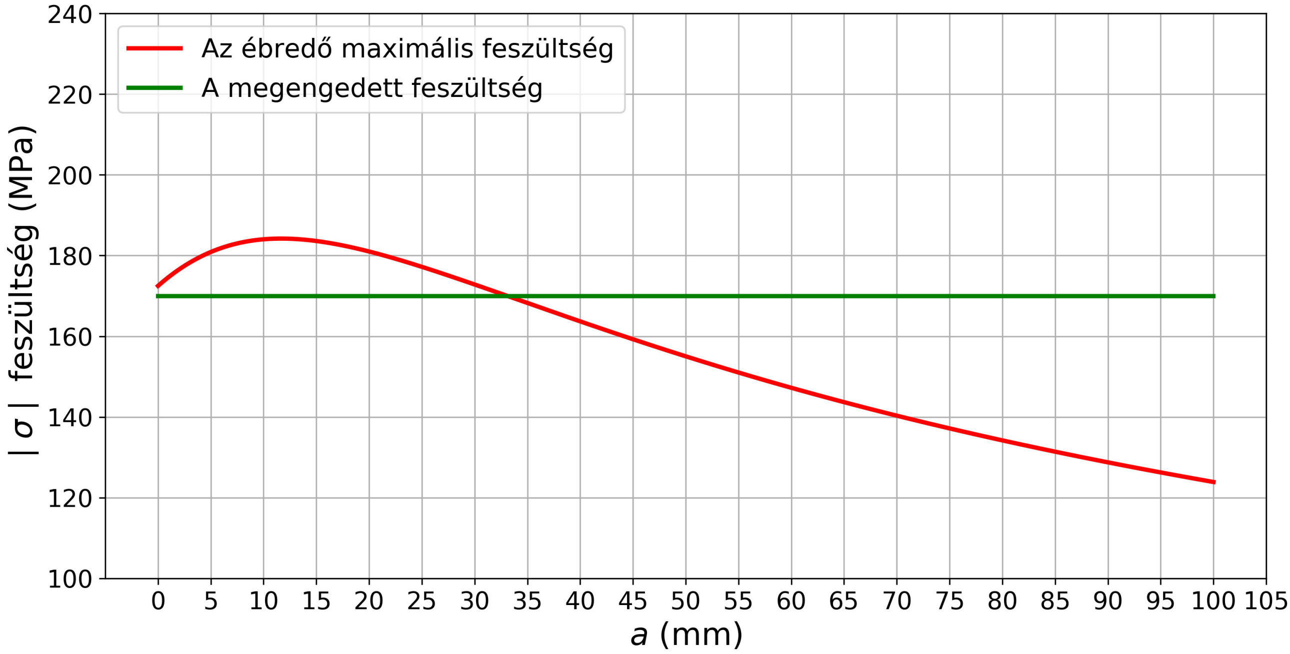
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b + a - S_x \\ d - c - S_y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} b - S_x \\ d - c - S_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} b - S_x \\ d - S_y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -S_x \\ d - S_y \end{bmatrix}$$

A pontok át transzformálásának menete:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

A Python kódban kiszámolva ezeket a pontokat, majd visszahelyettesítve az adatokat a (2.1) képletbe, a következő diagramot tudjuk rajzolni:



11. ábra. A maximálisan ébredő, illetve a megengedett feszültség ábrázolása

3. Feladat:

Méretezze a keresztmetszet *a* méretét 1 mm-re kerekítve, ha a megengedett feszültség σ_{meg}!

A keresztmetszet ott felel meg a terhelésnek, ahol az ébredő maximális σ_z feszültség kisebb mint a σ_{meg} megengedett feszültség. A 11. ábra alapján ránézésre meg tudjuk határozni, hogy a keresztmetszet milyen a méret felett felel meg a terhelésnek, de a teljesen pontos eredményt a programkód által kapunk:

$$a = 33.1 \sim 34 \ [mm] \tag{3.1}$$

Tehát mondhatjuk, hogy a keresztmetszet $a = 34$ [mm] felett megfelel.