Транспортная задача

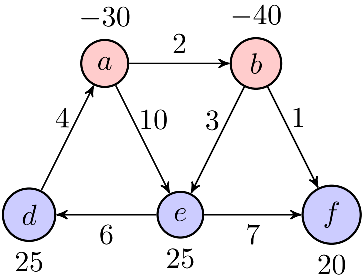
Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 03.10.2024

Транспортная задача

Дан граф



a, b – пункты производства,
d, e, f – пункты потребления.

Перевозить товар можно только в направлении стрелок.
$\sum$ производств $= \sum$ потреблений (пока что).
На дугах указаны стоимости перевозки единицы товара.

Задача: перевезти весь товар из пунктов производства в пункты потребления с минимальными затратами.

Матрица инциденции графа

	ab	ae	da	be	bf	ef	ed
a	-1	-1	$+1$	0	0	0	0
b	$+1$	0	0	-1	-1	0	0
d	0	0	-1	0	0	0	$+1$
e	0	$+1$	0	$+1$	0	-1	-1
f	0	0	0	0	$+1$	$+1$	0

-1 – начало дуги.
$+1$ – конец дуги.

$$\underbrace{x = \begin{pmatrix} x_{ab} \\ x_{ae} \\ x_{da} \\ \dots \\ x_{ed} \end{pmatrix}}_{\text{индексация по дугам}}, \quad \underbrace{x_{ab} \geq 0}_{\text{сколько везём}}, \quad \underbrace{B = \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 25 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}}_{\text{индексация по вершинам}}, \sum_i B_i = 0.$$

Тогда решаем задачу $\langle c, x \rangle \to \inf$ при $Ax = B, x \geq \mathbb{O}$, где $c = (c_{ab}, c_{ae}, \dots, c_{ed})$ – цены перевозки.

Алгоритм решения задачи

Утверждение

Ранг матрицы инциденции связного графа $=$ *число строк* -1.

Доказывается через остовное дерево.

Утверждение

Ранг матрицы инциденции $=$ *число строк* $-\#$ *компонент связности.*

Предположение о невырожденности: не существует допустимых перевозок по разрывным графам.

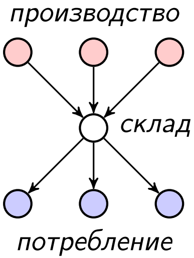
Базисный план: Связный подграф (столбцы, соответствующие дугам, – линейно независимы) $\Rightarrow$ это дерево – связный граф без циклов. Не все деревья пригодны для перевозки, т.к. есть направления. Т.к. дуги линейно независимы, $\exists$ не больше одной перевозки по дереву.

Алгоритм:

- Проверить, есть ли допустимые перевозки;
- Выбрать дерево;
- Проверка на оптимальность;
- Если нет, то перестраиваем в другое дерево.

Нахождение начальной перевозки

Вспомогательная задача: Дополнительная вершина "склад". В ней ничего не производится и не потребляется. Старые дуги становятся бесплатными, новые – платными (любые числа > 0).
План – всё увезти, потом всё привезти.



Решаем вспомогательную задачу ...
1°: Значение ЦФ на решении $= 0 \Rightarrow$ удалось провезти по старым дорогам.
2°: Значение ЦФ на решении $> 0 \Rightarrow$ перевозки по старым дорогам $\nexists$ и нет допустимых планов перевозки в исходной задаче.

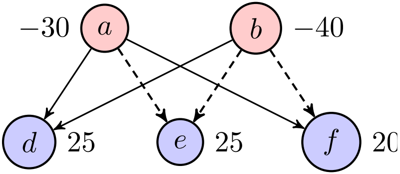
Замечание

Невыгодно, если вершин много.

Транспортная задача в матричной форме

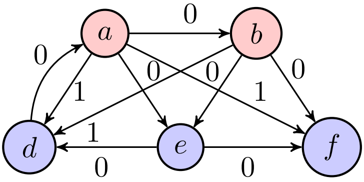
Транспортная задача в матричной форме: $\exists$ дуги из любого пункта производства в $\forall$ пункт потребления.

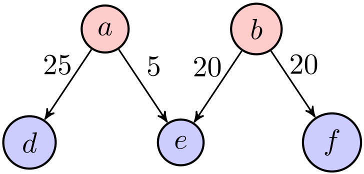
Метод северо-западного угла: Добавляются фиктивные дуги. Старые дуги бесплатные, новые – платные. Для новой задачи находим допустимый план.



Строим таблицу

	d 25	e 25	f 20
a 30			
b 40			





Проверка на оптимальность

Пусть x^0 – план перевозок по дереву. $Ax^0 = B, x^0 \geq \mathbb{O}, \langle c, x\rangle \to \inf$.
Двойственная задача: $\langle u, B\rangle \to \sup, uA \leq c$.
Если x^0 – оптимальный план, то по II-ой теореме двойственности $\exists u^0 :\ u^0 A \leq c$ и для пары (x^0, u^0) вып. условия дополнительности:

$$\begin{cases} u_i^0(\sum_j a_{ij}x_j^0 - b_i) = 0\ \forall i \leftarrow \text{всегда выполняется} \\ x_j^0(\sum_i u_i^0 a_{ij} - c_j) = 0\ \forall j \leftarrow \big(\Rightarrow (x_j^0 > 0 \Rightarrow \sum\limits_i u_i^0 a_{ij} = c_j)\big) \end{cases}$$

Пусть j соответствует дуге $\alpha\beta$: $x^0_{\alpha\beta} > 0 \Rightarrow \sum\limits_{i-\text{вершины графа}} u_i^0 a_{i,\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}$

$\sum\limits_i u_i^0 a_{i,\alpha\beta} = u^0_\beta - u^0_\alpha = c_{\alpha\beta}$ (из вида матрицы инциденции). Таких уравнений столько, сколько положительных дуг в графе перевозки. Однозначности нет. Интересуют только разности.

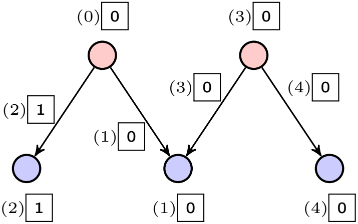
$x^0_{\gamma\delta} = 0 \Rightarrow u^0_\delta - u^0_\gamma \leq c_{\gamma\delta} \leftarrow$ допустимость в двойственной задаче.

Как найти вектор u^0?

Нахождение плана двойственной

В дереве перевозок выполняем процедуру:

- Отмечаем любую вершину 0,
- Отмечаем любую инцидентную ей 1. Дугу между ними тоже отмечаем 1,
- Затем делаем то же самое из помеченных в непомеченные (отмечаем дугу и вершину числом n).



Расставляем потенциалы: в 0 поставим $[0]$, остальное расставляем по значениям на дугах. Т.е. если потенциалы $\exists$, то с точностью до const они такие.

Теперь надо проверить допустимость (до $1^{\text{ой}}$ ошибки).

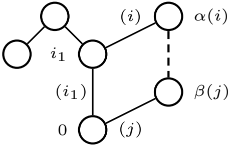
На дугах вне дерева проверяется, что разность потенциалов $\leq$ стоимости перевозки. Для дуги ed должно быть $u_d - u_e \leq 0$. Но $1 - 0 > 0$.

Значит план не оптимальный. Нужно перестроить план.

Перестройка плана

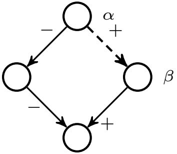
Допустим, что существует дуга (α, β), для которой $u_\beta - u_\alpha > c_{\alpha,\beta}$.

Перестройка: Добавляем дугу (α, β).



Пусть α имеет номер i, β – номер j. Пусть $i > 0$.
Тогда $\exists$ дуга из вершины i с номером i.
Другой конец имеет номер i_1, причём $i_1 < i$.
Аналогично для $i_1 \ldots$ и $i > i_1 > i_2 > \ldots > 0$.

Если у β номер 0, то всё хорошо. Если нет, то идём от β до 0. Берём объединение путей $(\alpha, 0)$ и $(\beta, 0)$ дугу (α, β). Из этих путей получается цикл. Ставим на новой дуге $+$ и обходим цикл в её направлении, проставляя $+$ и $-$. В цикле обязательно будет $-$.



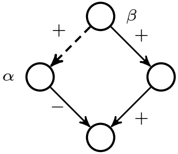
Если всё состоит из $+$: при проходе по циклу потенциалы возрастают. Получается $u_\alpha > u_\beta \Rightarrow u_\beta - u_\alpha < 0$. Но $u_\beta - u_\alpha > c_{\alpha,\beta}$.

Перестройка плана – 2

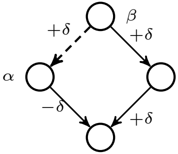
- На дугах, не вошедших в цикл, перевозки остаются.
- Выбираем минимальную перевозку из дуг, помеченных $-$. Отнимаем это число из дуг с $-$, прибавляем к дугам с $+$.
- Получили перевозку по (α, β), дуга с минимальной перевозкой исчезает. Снова перевозка по дереву.

Надо проверить, что значение ЦФ строго уменьшилось. Тогда метод завершит работу за конечное число шагов.

Было:



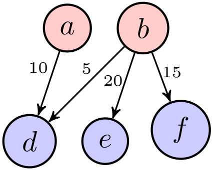
Изменение:



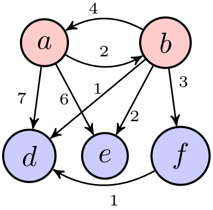
Изменение стоимости $=$ новая $-$ старая $= \delta c_{\alpha,\beta} + \delta c_{\beta,\gamma} + \ldots - \delta c_{\alpha,\psi} <$
$< \delta(u_\beta - u_\alpha + u_\gamma - u_\beta + \ldots - (u_\psi - u_\alpha)) = 0.$

Пример

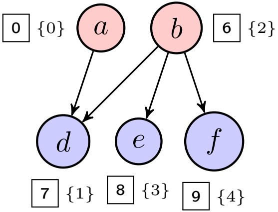
Перевозки:



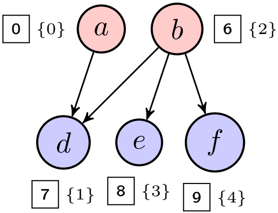
Цены:



Проверка плана
на оптимальность:

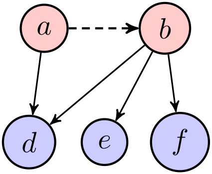


- Отмечаем дуги, по которым везём
- Наносим цены
- Размечаем вершины
- Определяем потенциалы. В 0 ставим любой (0). Проставляем потенциалы как ''потенциал конца – начала = цена''

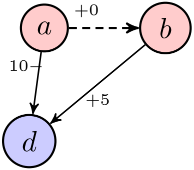


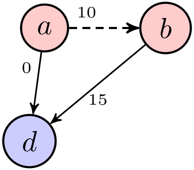
- Отмечаем дуги, по которым везём
- Наносим цены
- Размечаем вершины
- Определяем потенциалы. В 0 ставим любой (0). Проставляем потенциалы как "потенциал начала - конца $=$ цена"
- Дуги вне дерева: проверяем неравенства для потенциалов
- Если не выполняется неравенство, то перестраиваем.

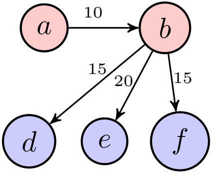
$(a, b) \mapsto u_b - u_a \leq c_{a,b} = 2$, но $u_b - u_a = 6 - 0 = 6 > 2$.
Добавляем дугу (a, b) к перевозке. Образуется цикл $((a, b, d, a))$. Проставляем "$+$" на ребро (a, b) и "$+$" на ребра, совпадающие с направлением движения по циклу, и "$-$" на ребра, противоположные движению. Находим минимальную стоимость на ребрах с "$-$".



Цикл:







- Получили новый план перевозки
- Проверяем на каждой итерации, что план допустимый
- В новом дереве считаем потенциалы, проверяем неравенства и т.д.

Замечание

Если входные данные целочисленные, то и ответ тоже целочисленный.