Введение в вариационное исчисление

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 17.10.2024

Задача управления

Общая задача управления: максимизировать целевой функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + F(\mathbf{x}_1, t_1) \to \max_{\{\mathbf{u}(t)\}}$$

при условии, что $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$; $t_0, \mathbf{x}(t_0) = x_0$ фиксированы, $(\mathbf{x}(t), t) \in T$ при $t = t_1$ (T – **конечная поверхность**), $\{\mathbf{u}(t)\} \in U$.

t_0 – начальный момент времени (фиксирован).

t_1 – конечный момент времени (иногда требуется определить).

$\mathbf{x}(t)$ – фазовые координаты (характеризуют состояние системы).

$\{\mathbf{x}(t)\} = \left\{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \mid t_0 \le t \le t_1\right\}$ – **фазовая траектория**. Непрерывная вектор-функция t. Определяется уравнением движения $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.

$\mathbf{x}(t_0) = x_0$ – начальное состояние, $\mathbf{x}(t_1) = x_1$ – конечное состояние.

$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ – вектор **управляющих параметров (управляющий вектор)**. Каждый управляющий параметр – кусочно-непрерывная функция t; $\mathbf{u}(t) \in \Omega, t_0 \le t \le t_1$ – множество, определяющее ограничения на управляющий вектор.

$\{\mathbf{u}(t)\}$ – **управление** (траектория управления); $\{\mathbf{u}(t)\} \in U$ – множество допустимых управлений.

Виды задач управления

Задача Больца:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + F(\mathbf{x}_1, t_1) \to \max_{\{\mathbf{u}(t)\}}$$

$F(\mathbf{x}_1, t_1)$ – функция конечных параметров (фиксирована и $C^1[t_0, t_1]$).

Задача Лагранжа:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \to \max_{\{\mathbf{u}(t)\}}$$

Задача Майера:

$$J = F(\mathbf{x}_1, t_1) \to \max_{\{\mathbf{u}(t)\}}$$

Задачи эквивалентны. Например, Больц $\to$ Майер: введем фазовую координату x_{n+1}: $\dot{\mathbf{x}}_{n+1}(t) = I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), x_{n+1}(t_0) = 0$

$I = I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ – англ. instantaneous (running) cost, неотрицательный и выбирается так, чтобы наказывать (штрафовать) за нежелательное поведение, состояние. F – англ. terminal cost.

Пример задачи управления

Определение оптимальной траектории движения ракеты.

Управляющие параметры $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ – моменты включения двигателей и длительность их работы, величина и направление силы тяги, которую следует приложить к ракете в каждый отдельный момент времени.
Режим работы двигателей выбирается в зависимости от ряда ограничений (например, от общего количества ракетного топлива на борту).
Фазовые переменные $\mathbf{x}(t)$, описывающие траекторию ракеты, – масса, положение и скорость относительно фиксированной системы координат.
Зависимость фазовых координат от силы тяги выражается с помощью **системы ДУ**, полученных на основе законов физики.
Расчет траектории космического полета $\equiv$ нахождение максимума *некоторого* целевого функционала.

Цель – посадить корабль на Луну.
Максимизация полезной нагрузки последней ступени.
Известна конечная точка в пространстве и конечная скорость достаточно мала.

Важные частные случаи

Задача об оптимальном быстродействии (задача о минимальном времени перехода):

$$J = -(t_1 - t_0)$$

Классический пример: **задача о брахистохроне**. Материальная точка под силой тяжести скатывается (без трения) вдоль некоторой кривой из фиксированной верхней точки в фиксированную нижнюю. Какая кривая соответствует минимальному времени перехода?

Работа сервомеханизмов (автоматических следящих устройств): известны желаемые состояния объекта $x_0(t)$ в каждый момент определенного промежутка времени. Требуется обеспечить, чтобы фактические значения фазового вектора в каждый момент времени были достаточно близки к желаемым состояниям. Целевой функционал:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\mathrm{x}^0(t) - \mathrm{x}(t))\, dt$$

$\varphi(\cdot)$ – функция, измеряющая отрицательный эффект от различия между фактическим и желаемым состоянием.

Виды управления

Управление по разомкнутому контуру: решение общей задачи управления (оптимальное управление) определяется как функция времени $\mathbf{u}^*(t)$.

- Управление полностью определяется в начальный момент времени t_0.
- Фазовая траектория $\{\mathbf{x}(t)\}$ находится в результате интегрирования уравнений движения при фиксированных начальных условиях.
- Все решения принимаются заранее.

Управление по замкнутому контуру (с обратной связью): определяется как функция текущих фазовых координат и времени $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t), t)$. Решение можно пересматривать с учетом новой информации (в виде текущих фазовых координат).
Определение оптимального управления – **задача синтеза**.

Пример

сушилка для белья vs. отопление дома, денежная политика.

Обобщенная теорема Вейерштрасса

Автономную задачу управления можно рассматривать как задачу программирования в бесконечномерном пространстве:

$$\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(x,u)\,dt, \dot{x} = f(x,u)$$

где t_0, $x(t_0) = x_0$, t_1 – фиксированы, $\{\mathbf{u}(t)\} \in U$. В этой задаче один управляющий параметр и одна фазовая координата.
Разобьем промежуток времени: $\Delta = \frac{t_1 - t_0}{N}$.
Время дискретно: $t = t_0 + q\Delta$, $q \in 0 : N$. В эти моменты времени замеряются состояния и управления: $x^q = x(t_0 + q\Delta), u^q = u(t_0 + q\Delta)$.
Рассмотрим задача программирования с $N+1$ переменной $u^0, u^1, \ldots, u^N$:

$$\max_{u^0, u^1, \ldots, u^N} J^N = \sum_{q=0}^{N} I(x^q, u^q)\Delta, x^{q+1} - x^q = f(x^q, u^q)\Delta$$

где $q \in 0 : (N-1)$, $x_0 = x^0$, $u^q \in \Omega$. Тогда $\lim\limits_{N\to\infty, \Delta\to 0, N\Delta = t_1 - t_0} J^N = J$.

Теорема (Теорема Вейерштрасса)

Достаточные условия существования максимума. ЦФ – непрерывна, допустимое множество – компактно.

Теорема (Обобщенная теорема Вейерштрасса)

Обобщение на бесконечномерное пространство. Теорема о существовании для задач управления: решение общей задачи управления существует, если целевой функционал $J(\{\mathbf{u}\})$ непрерывен по функции управления и U – компактно.

Вариационное исчисление

Классическая задача вариационного исчисления:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I(x(t), \dot{x}(t), t) \to \max_{\{x(t)\}}$$

$I(x(t), \dot{x}(t), t)$ – фиксированная непрерывно дифференцируемая функция.
x_0, x_1, t_0, t_1 – фиксированы.

Можно трактовать как задачу Лагранжа (без функции конечных параметров). Задача зависит от одной фазовой координаты и от одного управляющего параметра – скорости изменения фазовой координаты.
Уравнение движения: $\dot{x} = u$.
Управляющий параметр может принимать любое значение ($\Omega = \mathbb{R}$).
$\{x(t)\}$ – **допустима**, если удовлетворяет граничным условиям и $x(t)$ – непрерывная, $\dot{x}(t)$ – кусочно-непрерывная функция времени.

Квадратичная вариационная задача

Интегральный квадратичный функционал:

$$Q = \int_a^b \left\{ p(t)\big(x'(t)\big)^2 + q(t)\big(x(t)\big)^2 - 2f(t)x(t) \right\} dt$$

где $p, q, f \in C[a, b]$, $x \in C^1[a, b]$.

Решаем оптимизационную задачу:

$$Q(x) \to \inf$$
$$x(a) = A, x(b) = B, x \in C^1[a, b]$$

Хотим найти такой $x_* \in \Omega$: $Q(x) \geq Q(x_*)$ для любого $x \in \Omega$.

Введем **множество допустимых вариаций**:

$$C_0^1[a, b] = \left\{ h \in C^1[a, b] \mid h(a) = 0, h(b) = 0 \right\}$$

и тогда $\forall x \in \Omega, h \in C_0^1[a, b] \Rightarrow x + \alpha h \in \Omega$.

Разложим

$$Q(x+\alpha h) = \int_a^b \Big\{ p \cdot \big(x' + \alpha h'\big)^2 + q \cdot \big(x + \alpha h\big)^2 - 2f \cdot (x + \alpha h) \Big\}\, dt$$

$$= Q(x) + 2\alpha \int_a^b \{ p x' h' + (qx - f)h \}\, dt + \alpha^2 \int_a^b \{ p(h')^2 + q h^2 \}\, dt$$

Введем обозначения:

$$\ell(x,h) \coloneqq \int_a^b \{ p x' h' + (qx - f)h \}\, dt$$

$$D(h) \coloneqq \int_a^b \{ p(h')^2 + q h^2 \}\, dt$$

и тогда $Q(x+\alpha h) = Q(x) + 2\alpha \ell(x,h) + \alpha^2 D(h)$

Замечание

Квадратичный член не зависит от x.

Достаточное условие неограниченности ЦФ

Лемма

Если существует $h_0 \in C_0^1[a, b] : D(h_0) < 0 \Rightarrow \inf Q(x) = -\infty$.

Док-во: Зафиксируем $x_0 \in \Omega$. Пусть $x_0 + \alpha h_0 \in \Omega$ для любого α.

Тогда $Q(x + \alpha h) = Q(x) + 2\alpha\ell(x, h) + \alpha^2 D(h)$ – квадратичный трехчлен от α, старший член $D(h) < 0$, т.е. парабола с ветвями вниз. $\square$

Замечание

В дальнейшем считаем, что $D(h) \geq 0 \ \forall h \in C_0^1[a, b]$. *Для этого достаточно, чтобы* $p(t) \geq 0, q(t) \geq 0 \ \forall t \in [a, b]$.

Критерий оптимальности ЭЗ с $l(x_*, h) = 0$

Теорема (Критерий оптимальности ЭЗ с обращением в ноль линейной части разложения)

$x_* \in \Omega$ – *оптимальный план* $\Leftrightarrow \ell(x_*, h) = 0, \ \forall h \in C_0^1[a, b]$.

Док-во: $\Rightarrow$: Фиксируем $h_0 \in C_0^1[a, b]$. Известно, что $x_* + \alpha h_0 \in \Omega$. Так что

$$0 \le Q(x_* + \alpha h_0) - Q(x_*) = 2\alpha \ell(x_*, h_0) + \alpha^2 D(h_0)$$

Делим на 2α и $\alpha \to +0$. Останется $\ell(x_*, h_0) \ge 0$.
Будет равенство, т.к. $-h_0 \in C_0^1[a, b]$, ℓ – линейный функционал и $\ell(x_*, -h_0) \ge 0 \Rightarrow -\ell(x_*, h_0) \ge 0$.

$\Leftarrow$: Фиксируем $x \in \Omega$. Обозначим $h_* = x - x_* \in C_0^1[a, b]$. Тогда

$$Q(x) = Q(x_* + h_*) = Q(x_*) + 2\underbrace{\ell(x_*, h_*)}_{=0} + \underbrace{D(h_*)}_{\ge 0} \ge Q(x_*)$$

Основная лемма вариационного исчисления

Лемма

Пусть $u \in C[a,b]$. *Тогда*

$$\int_a^b uh'\,dt = 0 \ \forall h \in C_0^1[a,b] \Rightarrow u(t) \equiv \mathrm{const}$$

Док-во: Введем первообразную $u_1(t) = \int_a^t u(\tau)\,d\tau$ и интерполяционный полином $p_1(t) = c_0 t + c_1$, $p_1(a) = u_1(a)$, $p_1(b) = u_1(b)$.
Рассмотрим $h_1(t) = u_1(t) - p_1(t)$, $h_1 \in C_0^1[a,b]$ и $h_1' = u - c_0$. Тогда

$$\int_a^b [u(t) - c_0]^2\,dt = \int_a^b [u(t) - c_0] h_1'(t)\,dt$$
$$= \underbrace{\int_a^b u(t) h_1'(t)\,dt}_{=0 \text{ по условию}} - \underbrace{c_0 \int_a^b h_1'(t)\,dt = 0.}_{=0, \text{ т.к. } h_1 \in C_0^1[a,b]}$$

Отсюда следует $u(t) \equiv \mathrm{const}$.

Лемма

Пусть $u, v \in C[a,b]$. *Тогда*

$$\int_a^b [uh' + vh]\,dt = 0 \;\forall h \in C_0^1[a,b] \Leftrightarrow u \in C^1[a,b], u'(t) \equiv v(t), t \in [a,b]$$

Док-во: $\Rightarrow$: Введем $v_1(t) = \int_a^t v(\tau)d\tau$ и рассмотрим

$$\int_a^b vhdt = \int_a^b v_1' hdt = \underbrace{v_1 h|_a^b}_{=0} - \int_a^b v_1 h' dt = -\int_a^b v_1 h' dt \Rightarrow$$

$$0 = \int_a^b [uh' + vh]\,dt = \int_a^b uh'\,dt - \int_a^b v_1 h' dt = \int_a^b (u - v_1)h' dt, \;\forall h \in C_0^1[a,b]$$

Оказались в условиях предыдущей леммы. Значит $u(t) - v_1(t) = c_0$, $u(t) = v_1(t) + c_0 \Rightarrow u \in u \in C^1[a,b], u'(t) = v(t)$.

$\Leftarrow$: По условию $\int_a^b [uh' + vh]\,dt = \int_a^b [uh' + u'h]\,dt = \int_a^b (uh)'\,dt = uh|_a^b = 0$, т.к. $h \in C_0^1[a,b]$.

Критерий оптимальности с использованием уравнения Штурма-Лиувилля

По критерию оптимальности, $x_* \in \Omega$ – оптимальный план, тогда и только тогда, когда

$$\ell(x_*, h) = \int_a^b \left\{ \underbrace{p x_*'}_{u} h' + \underbrace{(q x_* - f)}_{v} h \right\} dt = 0 \ \forall \ h \in C_0^1[a, b]$$

По основной лемме ВИ $x_* \in \Omega$ – оптимальный план, тогда и только тогда, когда $u' = v$: $p x_*' \in C^1[a, b]$ и $(p x_*')' = q x_* - f$.

Введем дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x, t) := -\frac{d}{dt}\left(p \frac{dx}{dt}\right) + qx$

Тогда x_* – решение квадратичной вариационной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет

$$\mathcal{L}(x, t) = f,$$
$$x(a) = A, x(b) = B$$

Уравнение Штурма-Лиувилля: $f = \mathcal{L}(x, t) = -\frac{d}{dt}\left(p \frac{dx}{dt}\right) + qx$

Пример решения при помощи уравнения Штурма-Лиувилля

Решить вариационную задачу

$$Q(x) = \int_0^1 \left[(x')^2 + tx\right] dt \to \min$$
$$x(0) = x(1) = 0$$

Решение: $p(t) = 1, q(t) = 0, f(t) = -\frac{1}{2}t; p, q \geq 0 \Rightarrow D(h) \geq 0$.

Запишем уравнение $f = \mathcal{L}(x, t)$:

$$-x'' = f \Rightarrow x'' = \frac{1}{2}t \Rightarrow x' = \frac{1}{4}t^2 + C_1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}t^3 + C_1 t + C_2$$

Требуется найти $x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ и $x(1) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{12}$.
Так что $x_*(t) = \frac{1}{12}t(t^2 - 1)$.