Линейные экстремальные задачи. Введение

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 05.09.2024

Повестка

- Обозначения и терминология
- Общая задача линейного программирования
- Прямая и двойственная задача
- Матричная форма записи. Индексная техника. Свойства.
- Постановка общей задачи ЛП в общем виде.
- Решение задач ЛП в канонической форме. Лемма о сведении.
- Базисные планы.

Общий вид экстремальной задачи

Определение

Общий вид экстремальной задачи

$$f(x) \to \inf_{x \in \Omega}$$

или

$$f(x) \to \sup_{x \in \Omega}$$

Обозначения и терминология

Ω – связное множество планов,

$x \in \Omega$ – план,

$f(x)$ – целевая функция (обычно непрерывная),

$\mu = \inf\limits_{x \in \Omega} f(x)$ – значение экстремальной задачи,

x^* – оптимальный план.

Цель задачи

Определение

Решить экстремальную задачу

$$f(x) \to \inf_{x \in \Omega}$$

означает найти

$$x^* \in \Omega : f(x) \geq f(x^*) \ \forall x \in \Omega$$

Определение

Для решения экстремальной задачи

$$f(x) \to \sup_{x \in \Omega}$$

необходимо найти

$$x^* \in \Omega : f(x) \leq f(x^*) \ \forall x \in \Omega.$$

Замечание

Экстремальная задача на максимизацию сводится к задаче на минимизацию:

$$f(x) \to \sup_{x\in\Omega} \Rightarrow -f(x) \to \inf_{x\in\Omega},$$

потому что

$$f(x) \le f(x^*) \Leftrightarrow -f(x) \ge -f(x^*).$$

Замечание

Линейные преобразования с $\alpha > 0$ *не меняют множества оптимальных планов:*

$$\alpha f(x) + \beta \to \inf_{x\in\Omega}, \alpha > 0 \Rightarrow f(x) \to \inf_{x\in\Omega},$$

потому что

$$\alpha f(x) + \beta \ge \alpha f(x^*) + \beta \Leftrightarrow f(x) \ge f(x^*).$$

Эквивалентные экстремальные задачи

Определение

Две задачи

$$f(x) \to \inf_{x \in \Omega} \tag{1}$$

$$g(y) \to \inf_{y \in \Lambda} \tag{2}$$

***эквивалентны**, если*

$$\forall x \in \Omega \ \exists y \in \Lambda : f(x) \geq g(y)$$

и

$$\forall y \in \Lambda \ \exists x \in \Omega : g(y) \geq f(x).$$

Лемма (Об эквивалентных экстремальных задачах)

Справедливо равенство для эквивалентных экстремальных задач:

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \inf_{y \in \Lambda} g(y)$$

Более того, обе задачи одновременно либо имеют решение, либо нет.

Доказательство леммы

Из определения эквивалентности

$$\forall x^{'} \in \Omega \ \exists y^{'} \in \Lambda : f(x^{'}) \geq g(y^{'}) \geq \inf_{y \in \Lambda} g(y)$$

Из этого следует, что $\inf\limits_{x \in \Omega} f(x) \geq \inf\limits_{y \in \Lambda} g(y)$ Аналогично

$$\forall y^{''} \in \Lambda \ \exists x^{''} \in \Omega : g(y^{''}) \geq f(x^{''}) \geq \inf_{x \in \Omega} f(x)$$

Откуда $\inf\limits_{y \in \Lambda} g(y) \geq \inf\limits_{x \in \Omega} f(x)$ Получили требуемое равенство.

Пусть $x^* \in \Omega$ – оптимальный план $1^{\text{ой}}$ задачи (т.е. она разрешима). По эквивалентности,

$$\exists y^{'} \in \Lambda : \inf_{x \in \Omega} f(x) = f(x^*) \geq g(y^{'}) \geq \inf_{y \in \Lambda} g(y)$$

Но $\inf\limits_{x \in \Omega} f(x) = \inf\limits_{y \in \Lambda} g(y) \Rightarrow f(x^*) = g(y^{'}) = \inf\limits_{y \in \Lambda} g(y)$

Пример эквивалентных ЭЗ

$$\varphi(x) \coloneqq \max_{i \in 1:n} f_i(x) \to \inf_{x \in \Omega}$$
$$\psi(x,t) \coloneqq t \to \inf_{(x,t) \in \Lambda}, \Lambda : f_i(x) \leq t, i \in 1:n, x \in \Omega.$$

Доказательство эквивалентности:

Возьмем план $1^{\text{ой}}$ задачи $x_0 \in \Omega$ и обозначим $t_0 \coloneqq \max_{i \in 1:n} f_i(x_0)$.
Тогда (x_0, t_0) – план $2^{\text{ой}}$ задачи и

$$\psi(x_0, t_0) = t_0 = \max_{i \in 1:n} f_i(x_0) = \varphi(x_0).$$

Рассмотрим теперь (x_1, t_1) – план $2^{\text{ой}}$ задачи $\Rightarrow x_1$ – план $1^{\text{ой}}$ и

$$\varphi(x_1) = \max_{i \in 1:n} f_i(x_1) \leq t_1 = \psi(x_1, t_1).$$

(x^*, t^*) – оптимальный план $2^{\text{ой}}$ $\Rightarrow t^* = \max_{i \in 1:n} f_i(x^*)$.

Линейные экстремальные задачи

Общая задача линейного программирования

Определение (Общая задача линейного программирования)

Минимизировать $f(x) := \sum\limits_{j \in N} c_j x_j \to \inf\limits_{x \in \Omega}$, *где* $|N| < +\infty$, *со следующими ограничениями*

$$\Omega \begin{cases} x_j \geq 0, & \forall j \in N_1 (N_1 \subset N) \\ \sum\limits_{j \in N} a_{ij} x_j \geq b_i, & i \in M_1 \\ \sum\limits_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i, & i \in M_2 \\ M_1 \cap M_2 = \emptyset \\ M = M_1 \cup M_2. \end{cases}$$

Ω – *по-прежнему множество планов.*

Пример: задача планирования производства

«Задача планирования производства»
Цех производит детали нескольких видов, из которых собираются изделия одного вида.

m – количество станков в цехе $(i \in 1:m)$.

n – количество видов производимых деталей $(k \in 1:n)$.

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ – ассортимент деталей для одного изделия. Каждый станок может производить любую из этих деталей.

x_{ik} – часть смены, которую i-й станок тратит на производство k-ой детали, $i \in 1:m, k \in 1:n$.

a_{ik} количество деталей k-го вида, которое производит i-й станок за всю смену.
$x = x_{ik}$ план цеха на смену.
Необходимо предложить такой план, чтобы выпустить **наибольшее** количество изделий.

Л.В. Канторович (1975) – Нобелевская премия по экономике «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Пример: математическая формулировка задачи ПП

$\forall k \ \sum_{i=1}^{m} a_{ik}x_{ik}$ – общее число деталей k-го вида, произведенных всеми станками за смену.

$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}x_{ik}}{p_k}$ – сколько изделий можно получить из этих деталей.

Общее количество изделий, которое смогут произвести за смену:

$$\min_{k\in 1:n} \frac{\sum_{i=1}^{m} a_{ik}x_{ik}}{p_k}$$

Значит стоит задача $\min\limits_{k\in 1:n} \dfrac{\sum_{i=1}^{m} a_{ik}x_{ik}}{p_k} \to \max$ с ограничениями

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1 & i \in 1:m \\ x_{ik} \geq 0 & i \in 1:m, k \in 1:n. \end{cases}$$

Двойственная задача

Определение (Двойственная задача)

Задача

$$\sum_{i\in M} u_i b_i \to \sup_{u\in\Lambda},$$

где

$$\Lambda \begin{cases} u_i \geq 0 & \forall i \in M_1 \\ \sum_{i\in M} u_i a_{ij} \leq c_j & j \in N_1 \\ \sum_{i\in M} u_i a_{ij} = c_j & j \in N_2 = N \setminus N_1, \end{cases}$$

называется ***двойственной*** *к задаче минимизации* $\sum\limits_{j\in N} c_j x_j \to \inf\limits_{x\in\Omega}$,

где

$$\Omega \begin{cases} x_j \geq 0, & \forall j \in N_1 (N_1 \subset N) \\ \sum_{j\in N} a_{ij} x_j \geq b_i, & i \in M_1 \\ \sum_{j\in N} a_{ij} x_j = b_i, & i \in M_2 \\ M_1 \cap M_2 = \emptyset \\ M = M_1 \cup M_2. \end{cases}$$

Преобразование двойственной

$$\sum_{i \in M} u_i(-b_i) \to \inf_{u \in \Lambda'}$$

$$\Lambda^{'}(=\Lambda) = \begin{cases} u_i \geq 0 & \forall i \in M_1 \\ \sum_{i \in M} u_i(-a_{ij}) \geq -c_j & j \in N_1 \\ \sum_{i \in M} u_i(-a_{ij}) = -c_j & j \in N_2 = N \setminus N_1. \end{cases}$$

Двойственная к преобразованной двойственной: $\sum_{j \in N} (-c_j) x_j \to \sup_{x \in \Omega'}$

$$\Omega^{'} \begin{cases} x_j \geq 0 & \forall j \in N_1 \\ \sum_{j \in N} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i & i \in M_1 \\ \sum_{j \in N} (-a_{ij}) x_j = -b_i & i \in M_2 \\ M_1 \cap M_2 = \emptyset \\ M = M_1 \cup M_2 \end{cases}$$

Пример составления двойственной задачи

$$5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 \to \inf_{x \in \Omega},$$

$$\Omega \begin{cases} x_1, x_3 & \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 & \geq 8, \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 & \geq 5 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 & = 4 \end{cases}$$

$N_1 = \{1, 3\}, N_2 = \{2, 4\}, M_1 = \{1, 2\}, M_2 = \{3\}$.

Целевая функция двойственной задачи: $8u_1 + 5u_2 + 4u_3 \to \sup\limits_{u \in \Lambda}$

$$\Lambda \begin{cases} u_1, u_2 & \geq 0 \end{cases}$$

$$\Lambda \begin{cases} u_1, u_2 & \geq 0, \\ 3u_1 + 6u_2 + 7u_3 & \leq 5, \\ -2u_1 - 4u_2 + 0u_3 & = -4, \end{cases}$$

Векторы и матрицы. Индексная техника

M, N – конечные индексные множества,
$\mathbb{R}^N$ – линейное пространтсво векторов.
$x = x[N]$ – вектор с компонентами $x[j],\ j \in N$.

$N = 1 : n \Rightarrow \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n$

$\mathbb{O} = \mathbb{O}[N]$ – нулевой вектор.
$e_i = e_i[N],\ i \in N$ – i-й орт. $(e_i[i] = 1, e_i[k] = 0$ при $k \neq i)$.

$\langle c, x\rangle = c[N] \times x[N] = \sum\limits_{j \in N} c[j] \times x[j]$ – скалярное произведение c и x.

$A = A[M, N]$ – матрица с элементами $A[i, j] = a_{ij},\ i \in M,\ j \in N$.
$A^T = A^T[N, M]$ – транспонированная матрица с элементами
$A^T[j, i] = A[i, j],\ i \in M,\ j \in N$.

Векторы и матрицы. Индексная техника

$A[M_1, N_1],\ M_1 \subset M,\ N_1 \subset N$ –подматрицы.

$A[M, j]$ – j-й столбец A, $A[i, N]$ – i-я строка.

$E[N, N]$ – единичная матрица $(E[i, i] = 1; E[i, k] = 0, i \neq k)$.

$y = Ax = A[M, N] \times x[N]$ – вектор с координатами
$y[i] = A[i, N] \times x[N],\ i \in M$.

$v = uA = u[M] \times A[M, N]$ – вектор с координатами
$v[j] = u[M] \times A[M, j],\ j \in N$.

$x[N] \geq \mathbb{O}[N] \Leftrightarrow x[j] \geq 0$ для $\forall j \in N$.

Свойства

$N_1 \subset N, N_2 = N \setminus N_1, M_1 \subset M, M_2 = M \setminus M_1$
1. $c[N] \times x[N] = c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \times x[N_2]$.

$\sum_{j \in N} = \sum_{j \in N_1} + \sum_{j \in N_2}$.

2. $A[M, N] \times x[N] = A[M, N_1] \times x[N_1] + A[M, N_2] \times x[N_2]$.
$u[M] \times A[M, N] = u[M_1] \times A[M_1, N] + u[M_2] \times A[M_2, N]$.

$\forall i \in M: \; A[i, N] \times x[N] = A[i, N_1] \times x[N_1] + A[i, N_2] \times x[N_2]$.

Следствие

$Ax = \sum_{j \in N} A[M, j] \times x[j], \;\; uA = \sum_{i \in M} u[i] \times A[i, N]$.

3. $E[N_1, N] \times x[N] = x[N_1]$, $x[N] \times E[N, N_1] = x[N_1]$.

4. $u[M] \times (A[M, N] \times x[N]) = (u[M] \times A[M, N]) \times x[N]$.
$\langle u, Ax \rangle = \langle uA, x \rangle$, $\langle u, Ax \rangle = \langle A^T u, x \rangle$,
$u[M] \times A[M, N] = A^T[N, M] \times u[M]$.

Общая и двойственная задачи ЛП в матричной форме

Определение (Общая задача линейного программирования)

Найти столбец $x = x[N]$, *минимизирующий* $c[N] \times x[N]$, *где* $|N| < +\infty$, *при ограничениях*

$$\Omega \left\{ \begin{array}{l} x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1], \\ A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ M_1 \cap M_2 = \emptyset, \\ M = M_1 \cup M_2 \end{array} \right.$$

Определение (Двойственная задача)

Найти строку $u = u[M]$, *максимизирующую* $u[M] \times b[M]$ *при*

$$\Lambda \left\{ \begin{array}{l} u[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1], \\ u[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1], \\ u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \end{array} \right.$$

Задача ЛП в канонической форме

Определение (Каноническая форма записи)

Задача вида $f(x) = c[N] \times x[N] \to \inf$ *при*

$$\begin{aligned} A[M,N] \times x[N] &= b[M] \\ x[N] &\geq \mathbb{O}[N], \end{aligned}$$

называется ***канонической задачей ЛП.***

Замечание

$f(x) = \langle c, x \rangle \to \min$ *при* $Ax = b, x \geq \mathbb{O}$.

Определение (Двойственная к канонической)

Задача вида $g(u) = u[M] \times b[M] \to \sup$ *при*

$$u[M] \times A[M,N] \leq c[N].$$

Замечание

$g(u) = \langle u, b \rangle \to \max$ *при* $uA \leq c$.

Сведение к задаче ЛП в канонической форме

Лемма (Лемма о сведении)

Задачу ЛП в общем виде можно свести к эквивалентной задаче ЛП в канонической форме.

Замечание

Для доказательства достаточно избавиться от неравенства и получить знаковое ограничение на все компоненты x.

Утверждение

$\forall \gamma \in \mathbb{R}\ \exists \alpha, \beta \geq 0\ \gamma = \alpha - \beta$

Доказательство леммы о сведении

Пусть x_0 – план общей задачи ЛП. Сначала *распространим равенство*. $x_0[N_2] = y_0[N_2] - z_0[N_2]$, где $y_0[N_2], z_0[N_2] \geq \mathbb{O}[N_2]$.

Введём обозначение $w_0[M_1] := A[M_1, N] \times x_0[N] - b[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$.

Тогда

$$\begin{aligned} b[M_1] &= A[M_1, N] \times x_0[N] - w_0[M_1] \\ &= A[M_1, N_1] \times x_0[N_1] + A[M_1, N_2] \times x_0[N_2] - w_0[M_1] \\ &= A[M_1, N_1] \times x_0[N_1] + A[M_1, N_2] \times y_0[N_2] - \\ &\quad - A[M_1, N_2] \times z_0[N_2] - w_0[M_1] \end{aligned}$$

$$b[M_2] = A[M_2, N_1] \times x_0[N_1] + A[M_2, N_2] \times y_0[N_2] - A[M_2, N_2] \times z_0[N_2]$$

$$\begin{pmatrix} b[M_1] \\ b[M_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A[M_1, N_1] \\ A[M_2, N_1] \end{pmatrix} \times x_0[N_1] + \begin{pmatrix} A[M_1, N_2] \\ A[M_2, N_2] \end{pmatrix} \times y_0[N_2] +$$

$$+ \begin{pmatrix} -A[M_1, N_2] \\ -A[M_2, N_2] \end{pmatrix} \times z_0[N_2] + \begin{pmatrix} -E[M_1, M_1] \\ \mathbb{O}[M_2, M_1] \end{pmatrix} \times w_0[M_1] = A_0 v_0$$

Доказательство леммы о сведении - 2

Тем самым получили каноническое ограничение на вектор

$$v_0 = (x_0[N_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$$

с матрицей ограничений

$$A_0 = \begin{pmatrix} A[M_1, N_1] & A[M_1, N_2] & -A[M_1, N_2] & -E[M_1, M_1] \\ A[M_2, N_1] & A[M_2, N_2] & -A[M_2, N_2] & -\mathbb{O}[M_2, M_1] \end{pmatrix}$$

Т.к. $\mathbb{O}[M_2, M_1] = -E[M_2, M_1]$, то
$A_0 = (A[M, N_1], A[M, N_2], -A[M, N_2], E[M, M_1])$ и $A_0 v_0 = b$ (и $v_0 \geq \mathbb{O}$).

ЦФ: $\langle c, x_0 \rangle = c[N] \times x_0[N] = c[N_1] \times x_0[N_1] + c[N_2] \times x_0[N_2] =$
$c[N_1] \times x_0[N_1] + c[N_2] \times y_0[N_2] - c[N_2] \times z_0[N_2] =: \langle c_0, v_0 \rangle$,
где $c_0 = (c[N_1], c[N_2], -c[N_2], \mathbb{O}[M_1])$

Итого: v_0 – план экстремальной задачи

Доказательство леммы о сведении - 3

В обратную сторону. Пусть

$$v_0 := (x_0[N_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$$

план задачи в канонической форме. Тогда

$$x_0 := (v_0[N_1], y_0[N_2] - z_0[N_2])$$

план общей задачи ЛП.

При этом

$$c[N] \times x_0[N] = c[N_1] \times x_0[N_1] + c[N_2] \times (y_0[N_2] - z_0[N_2]) = \langle c_0, v_0 \rangle$$

Итого, задачи приводятся одна к другой и обе эквивалентны.

Пример привидения к канонической форме записи

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \inf$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_3 \leq 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 - 9x_2 + 13x_3 \geq 5 \\ 11x_1 + 4x_2 - 12x_3 \leq 6 \end{cases}$$

$y_3 = -x_3$, $v_2 - w_2 = x_2$. Дополнительные переменные $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$.

$$2x_1 - v_2 + w_2 - 3y_3 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 \to \inf$$

$$\begin{cases} x_1, v_2, w_2, y_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0 \\ 4x_1 - 2v_2 + 2w_2 - 5y_3 = 4 \\ 6x_1 - 9v_2 + 9w_2 - 13y_3 - \varepsilon_2 = 5 \\ 11x_1 + 4v_2 - 4w_2 + 12y_3 + \varepsilon_3 = 6 \end{cases}$$

Двойственная к канонической

Найти $u = u[M] : u[M] \times b[M] \to \max$
$c_0 = (c[N_1], c[N_2], -c[N_2], \mathbb{O}[M_1])$

$$\begin{cases} j \in N_1 : & u[M] \cdot A_0[M,j] = c_j \\ j \in N_2 : & u[M] \cdot A_0[M,j] \leq c_j \\ j \in N_2 : & u[M] \cdot -A_0[M,j] \leq -c_j \\ i \in M_1 : & -u[j] \leq 0 \end{cases}$$

Из второго и третьего - $u[M] \cdot A_0[M,j] = c[j], j \in N_2$, $u_j \geq 0, i \in M_1$.

Итого

$$\begin{cases} j \in N : & u[M] \cdot A_0[M,j] = c_j \\ i \in M_1 : & u[j] \geq 0 \end{cases}$$

Базисный план канонической задачи

Рассмотрим задачу в канонической форме:

$$c[N] \times x[N] \to \inf$$
$$x \geq \mathbb{O},$$
$$Ax = b$$

Определение (Носитель)

Если x – допустимый вектор, то $N_+(x) = \{j : x_j > 0\}$ – носитель x.

Определение (Базисный план)

Допустимый вектор x канонической задачи называется ***базисным****, если или $N_+(x) = \emptyset$, или $\{A_{.j} | j \in N_+(x)\}$ –линейно независимы.*

Замечание

Если $b = \mathbb{O}$, то $x = \mathbb{O}$ – план; носитель его пуст $N_+(x) = \emptyset$. По определению будем считать его базисным.

Замечание

Базисные планы есть вершины некоторого выпуклого многогранника Ω – пересечения полупространств.

Пример. Базисные планы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Базисный план канонической задачи

Утверждение

Если x_1, x_2 – базисные планы и их носители совпадают, то $x_1 = x_2$.

$$Ax_1 = \sum_{j \in N} A_{.j} x_{1j} = \sum_{j \in N_+(x_1)} x_{1j} A_{.j} \text{ и } Ax_2 = \sum_{j \in N_+(x_1)} x_{2j} A_{.j}$$

Тогда

$$\sum_{j \in N_+(x_1)} (x_{1j} - x_{2j}) A_{.j} = 0,$$

и поэтому $x_{1j} - x_{2j} = 0$ для $j \in N_+(x_1)$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Следствие

Число базисных планов конечно.

Определение (Невырожденный базисный план)

*Если $|N_+(x)| = |M|$, то базисный план x – **невырожденный**. В этом случае матрица $A[M, N_+]$ квадратная и невырожденная (обратимая). Иначе x – **вырожденный**.*