Algo jegyzet

Princzes Barnabás

2023. március 21.

Kivonat

Lent hagytam a füzetem és jövő héten doga szóval time to kick ass! Írjunk egy jó kis jegyzetet.

1. Előadás

1.1. Alapok

Van a $\{B\}A\{K\}$ azaz a Bemeneti feltétel (egy logikai állítás) Algoritmus és Kimeneti feltétel (szintén egy logikai állítás).
Legyen A algoritmus. $e_1, \ldots, e_m$ elemi műveletek az algoritmusban és t_i az edott e_i-hez tartozó időigény. Az algoritmus tényleges futási ideje $T(A, x)$ ahol x egy bemenet és a bemenet mérete $|x|$ például (tömb, halmaz...) esetében az elemek száma. Az e_i és t_i és $|x|$ együtt a bonyolultság mértéke.

1.2. Esetek

- Legjobb eset:
$$T_{lj} = \min\{T(A, x) : |x| = n\}$$
- Legrosszabb eset:
$$T_{lr} = \max\{T(A, x) : |x| = n\}$$
- Átlagos eset: Legyen $\Pr(x)$ annak a valószínűsége, hogy épp x lesz A algoritmus bemenete, ekkor:
$$T_a(A, n) = \sum_{|x|=n} \Pr(x) T(A, x)$$

```
public static int Keres(int[] A, int x){
  int i=0;                              //c1
  while (i<A.length && A[i]!=x){        //c2
    i++;                                //c3
  }
  return i;                             //c4
}
```

Itt Keres(A, n, x) futási ideje: $c_1 + (i+1)c_2 + ic_3 + c_4$

$$T_{lj} = c_1 + c_2 + c_4 = O(1)$$

$$T_{lr} = c_1 + (n+1)c_2 + nc_3 + c_4 = (c_2 + c_3)n + c_1 + c_2 + c_4 = O(n)$$

Az átlagos eset számításához vezessünk be pár fogalmat:
Legyen B_0 a legjobb bemeneti eset amikor is egyből megtaláljuk a keresett elemet
Legyen B_n amikor nem találjuk meg.
Minden lehetséges bemenet $\in B_i \mid i = 0, \ldots, n-1$
Legyen D az Integer összes lehetséges értéke (nagy szám).
Annak hogy az keresendő számot pont kiszúrjuk a valószínűsége: $p = \frac{1}{D}$
Annak, hogy egy olyat találunk amelyik nem a keresett szám: $q = 1 - \frac{1}{D}$
$Pr((A, n, x) \in B_i) = q^i p, i = 0, \ldots, n-1$
Itt q^i jelöli, hogy hányszor nem találtuk meg és p amikor megtaláltuk. Az utolsó lehetséges esetnél viszont csak q eset fordul elő az pedig n-szer ugyanis végigmegyünk és nem találjuk meg a keresett elemet. $Pr((A, n, x) \in B_n) = q^n$,

$$T_a(n) = \sum_{i=0}^{n} Pr((A, n, x) \in B_i)(c1 + (i+1)c2 + ic3 + c4)$$

Az átlagos esetet úgy kapjuk meg, ha minden lehetséges bemenet futási idejét megszorozzuk az adott bemenet valószínűségével és az eseteket összeadjuk.
A B_n bemenetre vonatkozó eset specifikus így emeljük ki a többi közül:

$$T_a(n) = q^n(c1 + (n+1)c2 + nc3 + c4) + \sum_{i=0}^{n-1} q^i p(c1 + (i+1)c2 + ic3 + c4)$$

Mivel $q^n \to 0$ (0-hoz tart) ezért felfele kerekítjük 1-re. Mivel a Σ alatt mindent beszorzunk $p(\ldots)$-al ahol a zárojelben $i < n$ így azt ki is emelhetjük ugyanúgy felfele kerekítve i-t és $i+1$-et kicserélve n-re.

$$T_a(n) \lessapprox T_a\hat{(}n) = (c1 + (i+1)c2 + ic3 + c4) + (c_1 + n(c_2 + c_3) + c_4)p \sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

A Σ tag egyenlő a mértani sorozat összegképletével, behelyettesítjük:

$$T_a\hat{(}n) = (c1 + (i+1)c2 + ic3 + c4) + (c_1 + n(c_2 + c_3) + c_4)p\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Mivel $p = 1 - q$ ezért átalakítunk:

$$T_a\hat{(}n) = (c1 + (i+1)c2 + ic3 + c4) + (c_1 + n(c_2 + c_3) + c_4)(1 - q^n)$$

Mivel $(1 - q^n) \to 1$ megint felfele kerekítünk, majd összevonunk.

$$T_a\hat{(}n) \lessapprox T_a\hat{\hat{(}}n) = (2c_2 + 2c_3)n + 2c_1 + c_2 + 2c_4$$

Itt pedig n a domináns tag szóval:

$$T_a(n) = O(n)$$

1.3. Praktikus képletek

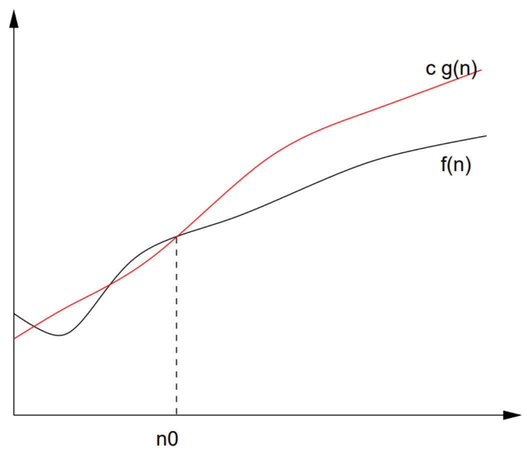
$$
\begin{aligned}
T_{lj} &= \min\{T(A,x) : |x| = n\} \\
T_{lr} &= \max\{T(A,x) : |x| = n\} \\
T_a(A,n) &= \sum_{|x|=n} \Pr(x)T(A,x) \\
\sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n(n+1)}{2} \qquad (a_1 = 1,\ d = 1 \text{ speciális számtani sorozat összegképlete}) \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{i=1}^{n} n &= n^2 \\
\sum_{i=m}^{n} q^i &= \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q} \qquad (\text{mértani sorozat összegképlete})
\end{aligned}
$$

2. Függvények növekedési rendje

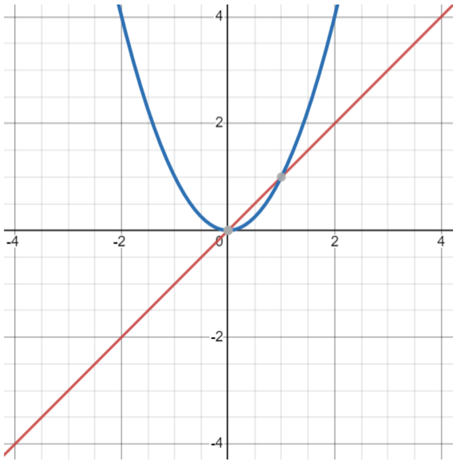
2.1. O - Nagy ordó

$$O(g(n)) = \{f(n) : (\exists c > 0, n_0 \geq 0)(\forall n \geq n_0)\underline{(0 \leq f(n) \leq cg(n))}\}$$

Nagy ordó egy halmaz amelyekben adott függvények vannak, jelöljünk egy ilyen függvényt $f(n)$-el. Ezek minden olyan $f(n)$ függvény ahol létezik egy c konstans úgy, hogy lesz egy n_0 küszöbszám amire igaz, hogy minden n_0-nál nagyobb n-számra $f(n)$ nem negatív és $cg(n)$ alatt van.
$f(n) \in O(g(n))$ helyett szoktuk a $f(n) = O(g(n))$ jelölést alkalmazni.



$f(n) = O(g(n))$ mivel $g(n)$-re tudunk választani olyan pozitív konstansot, hogy mindig $f(n)$ fölött maradjon.



Hasonlítsuk össze x és x^2 függvényt
Nem tudunk olyan c konstanst választani, hogy azzal $c\,x$ egy n_0 érték fölött mindig nagyobb legyen mint x^2 ezért:
$O(x) \neq O(x^2)$

2.2. Ω - Omega

Ugyanaz mint a O csak ez alulról korlátoz.

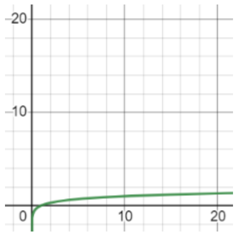
$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : (\exists c > 0, n_0 \geq 0)(\forall n \geq n_0)\underline{(0 \leq cg(n) \leq f(n))}\}$$

2.3. Θ - Theta

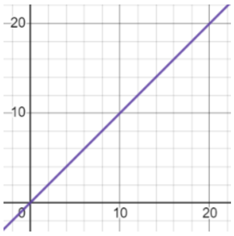
Ez alulról és felülről is korlátol. Azaz egy adott értéktől a legjobb és a legrosszabb eset is ugyanazt a nagyságrendet követi.

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : (\exists c_1, c_2 > 0, n_0 \geq 0)(\forall n \geq n_0)\underline{(0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n))}\}$$

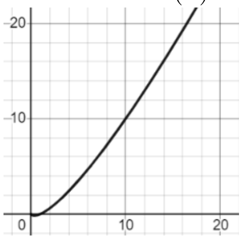
2.4. Nevezetes függvényosztályok



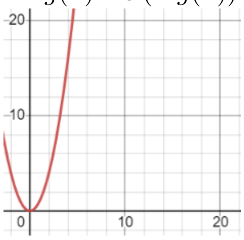
Logaritmikus - $O(lg(n))$



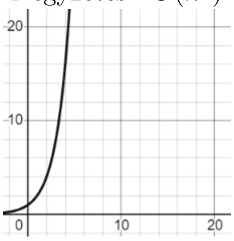
Lineáris - $O(n)$



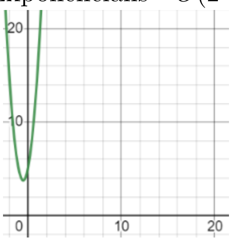
$nlog(n)$ - $O(nlg(n))$



Négyzetes - $O(n^2)$



Exponenciális - $O(2^x)$



$$\text{Polinomiális - } O(\sum_{i=0}^{k} a_i n^i)(a_k > 0)$$

Ez utóbbi a legösszetettebb így itt sokkal elővigyázatosabbnak kell lenni mikor azt nézzük, hogy melyiknél nagyobb.

3. Alkalmazás

A fenti definíciók következményei:

- Ha $f(n) = O(g(n))$ azaz $f(n)$-t felülről határolja $g(n)$ akkor:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

- Ha $f(n) = \Omega(g(n))$ azaz $f(n)$-t alulról határolja $g(n)$ akkor:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq \infty$$

- Ha $f(n) = \Theta(g(n))$ azaz $f(n)$-t alulról és felülről is határolja $g(n)$, azaz növekedési rendjük egyenesen arányos, akkor:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

3.1. Praktikus képletek

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4. Rekurzió

Egy P függvény rekurzív, ha utasításai közt előfordul P hívása.
Egy rekurzív összefüggés önmagának hívásából és egy leállási feltételből áll. A leállási feltétel a degenerált esetre vezet.

4.1. Partíciószám probléma: $P(n) = ?$

Legyen n egy szám ennek egy partíciója az a π ahol $\pi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ olyan a_i számokból álló sorozat amelyekre teljesül:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = n$$

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0$$

Ezek teljesülésekeor π nem más mint n-nek 1 partíciója. Jelöljük $P(n)$-el n szám összes partíciójának számát.
Mondjuk meg n szám partícióinak számát!

- Vezessünk be egy új jelölést:
  Legyen $P2(n, k)$ n-szám azon partíciójainak száma ahol $a_i \leq k$.
  Ezzel a jelöléssel $P2(n, n) = P(n)$.

- Ez azért segít nekünk mert így fel tudunk írni egy rekurzív feltételt:

$$P2(n,n) = P2(n,n-1) + 1$$

Példa:
$P2(4,3) = |\Big\{\{3,1\},\{2,2\},\{2,1,1\},\{1,1,1,1\}\Big\}| = 4$
$P2(4,4) = |\Big\{\{4\},\{3,1\},\{2,2\},\{2,1,1\},\{1,1,1,1\}\Big\}| = 5$
Egy esettel több mert abban az esetben ha a_i tartalmazza n -et akkor a partíció fogalma miatt nem tartalmazhat mást.

- Egy rekurzív összefüggésnek viszont szükséges meghatároznunk a degenerált esetet/eseteket:

$$P2(n,1) = P2(1,k) = 1$$

Példa:
$P2(4,1) = |\Big\{\{1,1,1,1\}\Big\}| = 1$
$P2(1,4) = |\Big\{\{1\}\Big\}| = 1$
A 4 -et egyesek összegéből 1 féle képpen tudjuk kirakni. Az 1 -et megpróbálhatjuk bármilyen nagy számokból kirakni, de csak egy darab 1-esből tudjuk.

- A fenti példából következik, hogy nem csak az egyest hanem a többi számot is feleslegesen próbálnánk meg nálánál nagyobból kirakni:

$$P2(n,k) = P2(n,n)\underline{\text{, ahol } n < k}$$

Példa:
$P2(4,5) = |\Big\{\{4\},\{3,1\},\{2,2\},\{2,1,1\},\{1,1,1,1\}\Big\}| = 5$
Nem tudunk 5 -öst használni mert a definíció gátolja.

- Mivel rájöttünk, hogy n generálja a speciális eseteket elgondolkodhatunk miben más $P2(n,k)$ és $P2(n,k-1)$:

$$P2(n,k) = P2(n,k-1) + P2(n-k,k), \text{ ahol } k < n$$

Példa:
$P2(5,3) = |\Big\{\{3,2\},\{3,1,1\},\{2,2\},\{2,1,1\},\{1,1,1,1\}\Big\}| = 5$
$P2(5,2) = |\Big\{\{2\},\{1,1\}\Big\}| = 2$
$P2(2,3) = |\Big\{\{2,2\},\{2,1,1\},\{1,1,1,1\}\Big\}| = 3$
Az első partícióban fellelhető az utolsó partíció összes eleme, ezentúl k mellé azért, hogy n legyen az összeg a második partícióval előállítható eseteket használhatjuk fel.

4.2. Összetett mi?

Felírtunk 4 szabályt:
$P2(n,k) = P2(n,k-1) + P2(n-k,k)$, ahol $k < n$
$P2(n,k) = P2(n,n)$, ahol $n < k$
$P2(n,n) = P2(n,n-1) + 1$
$P2(n,1) = P2(1,k) = 1$
Ezek alapján egy programmal így számolnánk:

```
public class Particio{
    public static long P(int n){
        return P2(n,n);
    }
    private static long P2(int n, int k){
        if (k==1 || n==1)
            return 1;
        if (k>=n)
            return P2(n,n-1)+1;
        return P2(n, k-1)+P2(n-k, k);
    }
}
```

Viszont nekünk egyszerűbb ha egy táblázatot csinálunk. A táblázat sorindexe legyen k, oszlopindexe n, cellái pedig $P(n, k)$:

$\dots k$							
6							
5							
4							
3							
2							
1							
	1	2	3	4	5	6	$\dots n$

Először töltsük ki ahol $n = 1$ vagy $k = 1$ ugyanis $P2(n, 1) = P2(1, k) = 1$:

$\dots k$	1						
6	1						
5	1						
4	1						
3	1						
2	1						
1	1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	4	5	6	$\dots n$

Mivel $P2(n, n) = P2(n, n-1)+1$ így $P(2, 2)$-őt ki tudjuk tölteni úgy, hogy az alatta lévő számhoz hozzáadunk egyet:

$\dots k$	1						
6	1						
5	1						
4	1						
3	1						
2	1	2					
1	1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	4	5	6	$\dots n$

Innen pedig 2 lehetőség áll fent, kezdjük azzal amikor $n < k$. Erre a szabályunk, hogy $P2(n, k) = P2(n, n)$, ahol $n < k$:

$\dots k$							
6	1	2					
5	1	2					
4	1	2					
3	1	2					
2	1	2					
1	1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	4	5	6	$\dots n$

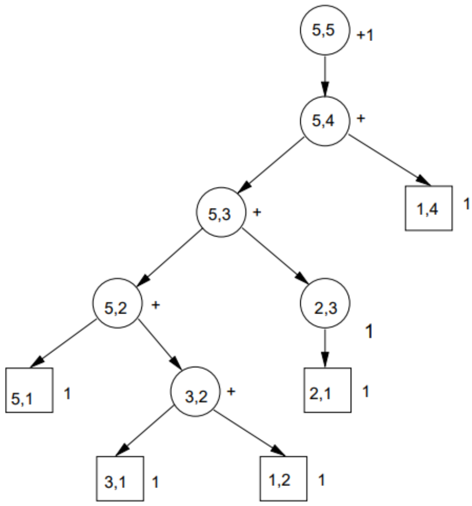
Amikor $n > k$ akkor is megvan a szabályunk:
$P2(n,k) = P2(n,k-1) + P2(n-k,k)$, ahol $k < n$
Ez a kitöltés során úgy fog kinézni, hogy (n,n) -től jobbra indulva összeadjuk a kitöltendő cella alatt lévő számot és azt a számot ami tőle balra van k-lépésre:

$\dots k$							
6	1	2					
5	1	2					
4	1	2					
3	1	2					
2	1	2	2	3	3	4	
1	1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	4	5	6	$\dots n$

Majd a fenti lépéseket ismételgetve folytatjuk:

$\dots k$							
6	1	2	3	5	7	11	
5	1	2	3	5	7	10	
4	1	2	3	5	6	9	
3	1	2	3	4	5	7	
2	1	2	2	3	3	4	
1	1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	4	5	6	$\dots n$

Rekurziós fa fogalma. Olyan fa, amelynek minden pontja egy eljáráshívást jelent adott aktuális paraméterekre, úgy, hogy a pont fiai megfelelnek azoknak az eljáráshívásoknak, amelyek végrehajtódnak az aktuális paraméterek esetén.



1. ábra. A $P2(5,5)$ eljáráshívás rekurziós fája