

Analízis

Princzes Barnabás

2023. április 14.

Kivonat

Analízis jegyzet Krasznai pdf-jeiből

1. Összetett függvény

1.1. Leírás

$f \circ g$ -vel szoktuk jelölni az összetett függvényt más néven kompozíciót.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ilyenkor szokás szerint a belső függvénnyel kezdünk szóval x -et viszi valahova $g(x)$ ezután pedig az így képezett y -okat vesszük $f(x)$ bemenetének, ebből következik, hogy $f \circ g$ értelmezési tartománya $(D(f \circ g))$ azok az elemek ahol g és g képe is értelmezve van:

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$$

1.2. Példa

$$f(x) = 3x + 1, \quad x \in [0, 7]$$

$$g(x) = x^2 - 9, \quad x \in [0, 5]$$

1.2.1. Értelmezési tartomány

Értelmezési tartomány megadása a képlet szerint:

$$D(g): 0 \leq x \leq 5$$

$$D(f): 0 \leq x^2 - 9 \leq 7 \Rightarrow 9 \leq x^2 \leq 16 \Rightarrow 3 \leq |x| \leq 4 \Rightarrow \underline{-4 \leq x \leq -3 \text{ vagy } 3 \leq x \leq 4}$$

Csak ott értelmezhető f ahol g is:

$$D(g) \cap D(f) = D(f \circ g) = [3, 4]$$

1.2.2. Hozzárendelési utasítás

Egyszerűen f függvényébe beletesszük x helyére $g(x)$ -et:

$$3(x^2 - 9) + 1 = 3x^2 - 26$$

1.2.3. Megoldás

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 26, \quad x \in [3, 4]$$

1.3. Megjegyzések

Ha $D(g) \cap D(f) = \emptyset$ akkor $f \circ g$ nem létezik.

2. Inverz függvény

2.1. Leírás

f függvény invertálható, ha akárhogyan választunk az értékkészletéből két elemet $(x_1, x_2 \in D(f))$ akkor képeik nem azonosak $(f(x_1) \neq f(x_2))$

f^{-1} inverze f -nek, ha $R(f)$ -et képezi $D(f)$ -be.

Invertálhatóság leolvasható a függvény grafikonjáról is: Ha tudunk vízszintes vonalat húzni úgy, hogy kétszer metsze el a függvényt, akkor az nem invertálható.

2.2. Példa

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in (-\infty, 0)$$

2.2.1. Létezik f^{-1} ?

Ha f minden különböző x -ből különböző $f(x)$ -be visz akkor két ugyanazon x -ből ugyanoda kell vinnie.

Jelenleg következik-e a két kép egyezéséből a két kiindulási pont egyezése?

Bizonyítsuk, hogy: $1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ ahol $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$:

Ha elkezdünk számolni $1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$, ami csak negatív számokon van értelmezve így csak a negatív x -eket kell behelyettesíteni: $-x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

2.2.2. Értelmezési tartomány

f^{-1} értelmezési tartománya f értékkészlete. Elinulunk $D(f)$ -ből $x \in (-\infty, 0) = x < 0$ és addig alakítjuk amíg f függvény formáját fel nem veszi:

$$x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1$$

$$D(f^{-1})$$