

Matematikai programcsomagok

Pozsgai Tamás

2024. március 4.

1 Függvényvizsgálat

- Feladat
- Megoldás

2 Integrálszámítás

- Határozatlan integrál
- Területszámítás

Teljes függvényvizsgálat

Végezze el az alábbi függvény teljes vizsgálatát!

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Értelmezési tartomány, zérushelyek

- Értelmezési tartomány: $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
- Zérushelyek:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = -2$$

Határértékek

- Határértékszámítás $-\infty$ -ben és ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 - x - 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 2x^2 - x - 2 = \infty$$

Menettulajdonságok

Menettulajdonságok az első derivált segítségével:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

\Downarrow

$$x_1 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \approx -1,549, \quad x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \approx -0,215$$

	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x > x_2$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow

Görbületi viszonyok

Görbületi viszonyok a második derivált segítségével:

$$f''(x) = 6x + 4 = 0$$

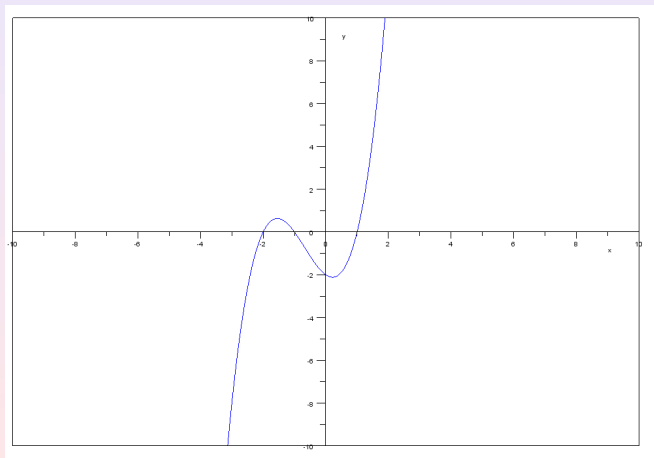
$$\Downarrow$$

$$x_3 = -\frac{2}{3}$$

	$x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	∪	inf. p.	∩

Ábra

A függvény grafikonja:



Határozatlan integrál

Adja meg az $f(x) = \frac{3}{x \ln^2(x)}$ függvény összes primitív függvényét!

Megoldás

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x \ln^2(x)} dx &= \int \frac{3}{x} \ln^{-2}(x) dx = \\ &= -3 \ln^{-1}(x) = \frac{-3}{\ln(x)} + C\end{aligned}$$

Területszámítás

Számolja ki az alábbi görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$y = 14 - x^2$$

Területszámítás

- Metszéspontok megkeresése:

$$x^2 - 2x + 2 = 14 - x^2$$

$$2(x^2 - x - 6) = 0$$

↓

$$x_1 = -3; x_2 = 2$$

- Metszéspontok megkeresése:

$$\int_{-3}^2 -2(x^2 - x - 6) \, dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x \right]_{-3}^2 = \frac{95}{3}$$