

Содержание

1	Введение	2
1.1	Полнота пространств L_p	2
1.2	Неполнота $\mathbb{R}L_p$	5
1.3	Функции ограниченной вариации	5
1.4	Абсолютно непрерывные функции	8
2	Ряды Фурье	9
2.1	Неформальная идея	9
2.2	Строгая теория	10
2.3	Компактная форма записи	10
2.4	Теорема Римана–Лебега	10
2.5	Вторая теорема о среднем	11

1 Введение

1.1 Полнота пространств L_p

(X, \mathfrak{M}, μ) — п-во с мерой.

$p \in [1, +\infty]$

$\tilde{L}_p(\mu)$ — полунормированное линейное пространство. Лишь *полунормированное* потому, что равенство 0 интеграла в p -ой степени от функции не означает равенство 0 этой функции, а лишь равенство этой функции нулю почти всюду.

$L_p(\mu)$ — нормированное линейное пространство.

Это всё было в прошлом семестре, теперь же мы докажем полноту пространства L_p .

Определение 1.1. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — л.н.п. Оно называется *полным*, если

\forall фундаментальная (по норме $\|\cdot\|$) п-ть $\{x^n\}$ п-ва E сходится по норме пространства E к некоторому элементу $x \in E$.

Определение 1.2. Дано $E = (E, \|\cdot\|)$ — л.н.п. Пара последовательностей $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ и $\{S^k\}_{k=1}^\infty$, где

$$S^k := \sum_{n=1}^k x^n,$$

называется *формальным рядом* в E . При этом $\{S^k\}_{k=1}^\infty$ называется последовательностью *частичных сумм* ряда, а $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ — членами ряда. Часто пишут просто

$$\sum_{k=1}^\infty x^k \text{ — формальный ряд.}$$

Примечание. В определении выше ряд мы называем *формальным* потому, что ещё не было ничего сказано про его сходимость.

Определение 1.3. Ряд $\sum_{k=1}^\infty x^k$ называется *сходящимся* в л.н.п. E , если

$$\exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=1}^n x^k \right\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Определение 1.4. Ряд $\sum_{k=1}^\infty x^k$ называется *абсолютно сходящимся* в л.н.п. E , если

$$\sum_{k=1}^\infty \|x^k\| \text{ — сходится}$$

Теорема 1.1. (*Критерий полноты*) E — л.н.п. *полно* $\iff \forall$ абсолютно сходящийся в E ряд является сходящимся.

Доказательство.

$\triangleright \implies$

Пусть E полно.

Пусть $\sum_{k=1}^\infty x^k$ — сходится абсолютно $\implies \sum_{k=1}^\infty \|x^k\|$ — сходится \implies

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=n}^m \|x^k\| < \varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника: $\left\| \sum_{k=n}^m x^k \right\| \leq \sum_{k=n}^m \|x^k\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \{S^n\}_{n=1}^\infty$ — посл. частичных сумм фундаментальна в E .

Но E — полно $\Rightarrow \exists x \in E : \|x - S^n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^\infty x^k$ — сходится в E

▷ \Leftarrow

Пусть $\{x^n\}$ — фунд. посл-ть в E . Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Берём $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_k = 2^{-k}$.

$\exists \{N_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_k \hookrightarrow \|x^n - x^m\| \leq 2^{-k}.$$

Рассмотрим $\{x^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность п-ти $\{x^n\}$.

Возьмём $y_k := x^{N_{k+1}} - x^{N_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Положим $y_0 := x^{N_1}$.

Рассмотрим формальный ряд $\sum_{k=0}^\infty y_k$. В силу выбора подпосл-ти, если в качестве n выбрать

N_k , а в качестве m выбрать N_{k+1} , то неравенство $\|x^n - x^m\| \leq 2^{-k}$ будет выполнено $\Rightarrow \|y_k\| \leq 2^{-k} \Rightarrow \sum_{k=0}^\infty y_k$ абсолютно сходится в E .

Но по условию доказываемого утверждения, любой абсолютно сходящийся в E ряд сходится в E , значит

$$\text{ряд } \sum_{k=0}^\infty y_k \text{ сходится} \Rightarrow \exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=0}^l y_k \right\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty.$$

При этом

$$\sum_{k=0}^l y_k = y_0 + y_1 + \dots + y_l = x^{N_1} + x^{N_2} - x^{N_1} + \dots + x^{N_{l+1}} - x^{N_l} = x^{N_{l+1}}.$$

Объединив два последних результата, получим

$$\exists x \in E : \|x - x^{N_l}\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty.$$

В итоге доказали существование эл-та $x \in E$ т.ч. к нему сходится подпосл-ть $\{x^{N_l}\}_{l=1}^\infty$.

Теперь остаётся воспользоваться условием фундаментальности и получить сходимость всей последовательности.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L \in \mathbb{N} : \forall l \geq L \hookrightarrow \|x - x^{N_l}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq M \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N := \max\{L, M\} \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow \|x - x^n\| \leq \|x - x^{N_m}\| + \|x^{N_m} - x^n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Теорема 1.2. Пусть $p \in [1, +\infty]$. Тогда $L_p(\mu)$ полно.

Доказательство. Разберём случай $p \in [1, +\infty)$. В силу предыдущей теоремы достаточно док-ть, что любой абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$ сходится в $L_p(\mu)$.

Пусть $\sum_{k=1}^\infty f_k$ — абсолютно сход. ряд в $L_p(\mu)$. То есть $\sum_{k=1}^\infty \|f_k\|$ сходится.

$$\forall N \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^N |f_k| \right)^p \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^N \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_p < +\infty.$$

Определим $F_n := \left(\sum_{k=1}^N |f_k| \right)^p$. Тогда $\{F_N\}_{N=1}^\infty$ — монотонная (неубывающая) функциональная последовательность.

Напоминание. Монотонность функциональной последовательности — это монотонность по n при каждом x

Тогда по теореме Леви

$$\begin{aligned} \exists \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_X F_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p} &= \left(\int_X \lim_{N \rightarrow \infty} F_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \\ \Rightarrow \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^\infty |f_k| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_p < +\infty. \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty |f_k(x)| &\text{ конечна при } \mu\text{-п.в. } x \in X. \end{aligned}$$

При фиксированном x $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ — обычный числовой ряд, а для него из абсолютной сходимости следует сходимость.

$$\Rightarrow \text{при } \mu\text{-п.в. } x \in X \quad \sum_{k=1}^\infty f_k(x) \text{ конечна.}$$

Положим $F(x) := \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$, эта функция корректно определена μ -п.в. При этом μ — полная мера (меру считаем полной, если не было оговорено обратного).

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x), \text{ этот предел существует для } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

Остаётся доказать, что $\left\| F - \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Обозначим n -ый член этой последовательности как J_n .

$$J_n = \left(\int_X \left| \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\int_X \left(\sum_{k=n+1}^\infty |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad \otimes$$

Рассмотрим сумму ряда, как предел:

$$\sum_{k=n+1}^\infty |f_k(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)|.$$

Вспомним лемму Фату:

$$\text{При } g_k \geq 0 \text{ верно } \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) d\mu(x) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) d\mu(x).$$

Тогда по лемме Фату:

$$\left(\int_X \left(\sum_{k=n+1}^\infty |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \otimes \sum_{k=n+1}^\infty \left(\int_X |f_k(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Итого $J_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. □

1.2 Неполнота \mathbb{RL}_p

Определение 1.5. Пусть $\mathbb{RL}_p([a, b])$ — лин. пр-во ф-ий, p -ая степень модуля которых интегрируема по Риману.

Замечание. С таким определением это не является нормированным пространством. Чтобы сделать его нормированным, нужно аккуратно ввести класс эквивалентности.

Теорема 1.3. Пространство $\mathbb{RL}_p([a, b])$ неполно.

Доказательство.

Без ограничения общности, $[a, b] = [0, 1]$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Перенумеруем рациональные точки отрезка $[0, 1]$: $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_k\}$.

$$G_n := \bigcup_{k=1}^n \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right) \cap [0, 1].$$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Тогда χ_{G_n} интегрируема по Риману по критерию Лебега, потому что как характеристическая ф-ия объединения конечного набора интервалов, пересечённых с отрезком, она обладает конечным числом разрывов.

Докажем, что χ_G имеет мн-во точек разрыва положительной меры Лебега. Для этого рассмотрим $F = [0, 1] \setminus G$. Тогда $\chi_G(F) = 0$, но так как \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} , во всех точках F ф-ия χ_G разрывна. При этом по счётной полуаддитивности меры Лебега $\mathcal{L}^n(G) \leq \frac{1}{2}$, а значит $\mathcal{L}^n(F) \geq \frac{1}{2} > 0$.

Введём обозначения

$$E_k := \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right) \cap [0, 1]$$

$$G_m^n := \bigcup_{k=n}^m E_k$$

(в новых обозначениях $G_n = G_n^1$) и покажем фундаментальность последовательности $\{\chi_{G_n}\}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\chi_{G_m}(x) - \chi_{G_n}(x)| dx &= \text{так как } G_n \subseteq G_m = \int_0^1 \chi_{G_m \setminus G_n}(x) dx \leq \int_0^1 \chi_{G_m^n}(x) dx \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \int_0^1 \chi_{E_k}(x) dx = \sum_{k=n+1}^m \frac{\varepsilon}{2^k} \rightarrow 0, \text{ при } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итого, последовательность $\{\chi_{G_n}\} \subset \mathbb{RL}_p([0, 1])$ фундаментальна, но её предел χ_G не лежит в пространстве $\mathbb{RL}_p([0, 1])$, значит это пространство не полно. \square

1.3 Функции ограниченной вариации

Определение 1.6. Пусть T — разбиение отрезка $[a, b]$, т.е.

$$T = \{x_i\}_{i=0}^{N_T}, \quad N_T \in \mathbb{N}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_T} = b.$$

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$V_T(f)$ — вариация ф-ии f по разбиению T

$$V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

$$V_a^b(f) := \sup_{T - \text{разб. } [a,b]} V_T(f)$$

Определение 1.7. f называется ф-ией ограниченной вариации на $[a, b]$, если

$$V_a^b(f) < +\infty.$$

Обозначается $f \in BV([a, b])$

Теорема 1.4. $BV([a, b])$ — линейное пространство.

Доказательство.

Покажем, что $f_1, f_2 \in BV([a, b]) \implies \alpha f_1 + \beta f_2 \in BV([a, b])$.

Пусть T — произвольное разбиение $[a, b]$. Тогда по неравенству треугольника

$$V_T(\alpha f_1 + \beta f_2) \leq |\alpha| V_T(f_1) + |\beta| V_T(f_2).$$

□

Лемма 1.1. Если $\forall f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна на $[a, b]$, то $f \in BV([a, b])$ и её $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 1.2. Пусть $-\infty < a < c < b < +\infty$. Тогда

$$f \in BV([a, b]) \iff \begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$$

В случае, если $f \in BV([a, b])$, тогда

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Доказательство.

1. \implies и \geq

Пусть $f \in BV([a, b])$, T_1 — произв. разб. $[a, c]$, T_2 — произв. разб. $[c, b]$.

$T = T_1 \cup T_2$ — разб. о-ка $[a, b]$.

$$V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_T(f) \leq V_a^b(f).$$

Взяв \sup сначала по T_1 , а потом по T_2 , получим $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$.

2. \longleftarrow и \leq

$$\text{Пусть } \begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$$

Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^N$ — произв. разб. отрезка $[a, b]$.

Если $c = x_i$ при некотором i , то это простой случай, так как тогда можно $\{x_j\}_{j=0}^i$ выбрать в качестве T_1 , а $\{x_j\}_{j=i}^N$ выбрать в качестве T_2 . И тогда очевидным образом $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$, а взяв \sup по всем T получим $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$.

Теперь рассмотрим более интересный случай, когда ни при каком i x_i не равно c . Тогда $c \in (x_i, x_{i+1})$ при некотором i .

$$\begin{aligned} V_T(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(c)| + |f(c) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \otimes \end{aligned}$$

Обозначим разбиения:

$$T_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_i, c\},$$

$$T_2 = \{c, x_{i+1}, \dots, x_N\}.$$

Тогда полученный ранее результат можно оценить как

$$\otimes V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Итого $V_T(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Взяв \sup по всем T , получим:

$$\sup_T V_T(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Если оба слагаемых в правой части конечны, то и V_a^b конечна.

Итого из первого и второго пункта

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

□

Теперь воспользуемся этой леммой для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.5. Пусть $f \in BV([a, b])$. Тогда ϕ -ия $g(x) := V_a^x$ монотонно не убывает на $[a, b]$

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда применим только что доказанную лемму, выбрав $a = a, c = x_1, b = x_2$.

$$\begin{aligned} V_a^{x_2}(f) &= V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) \\ V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) &= V_{x_1}^{x_2}(f) \geq 0 \\ g(x_2) - g(x_1) &\geq 0 \\ g(x_2) &\geq g(x_1) \end{aligned}$$

□

Теорема 1.6. Пусть $f \in BV([a, b])$. Тогда $\exists f_1$ и f_2 монотонно неубывающие на $[a, b]$ такие, что $f = f_1 - f_2$.

Доказательство. Определим $f_1(x) := V_a^x(f) \quad \forall x \in [a, b]$. По только что доказанной теореме это монотонно неубывающая функция.

Докажем, что ф-ия $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ монотонно не убывает.

$$a \leq x \leq y \leq b.$$

$$f_2(y) - f_2(x) = [f_1(y) - f(y)] - [f_1(x) - f(x)] = [f_1(y) - f_1(x)] - [f(y) - f(x)] \stackrel{(1)}{=} V_x^y(f) - [f(y) - f(x)].$$

(1) В силу аддитивности вариации по отрезкам

Заметим, что $V_x^y(f) = \sup_T V_T(f) \geq V_{\{x,y\}}(f) = |f(y) - f(x)|$. Тогда предыдущее выражение не меньше 0, а значит f_2 не убывает. \square

Следствие. $\forall f \in BV([a, b])$ имеет не более чем счётное множество т. разрыва 1-го рода.

1.4 Абсолютно непрерывные функции

Определение 1.8. Ф-ия $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной на $[a, b]$, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \text{ дизъюнктивной системы } \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |a_k - b_k| < \delta(\varepsilon) \\ \hookrightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$AC([a, b])$ — мн-во всех абсолютно непрерывных на $[a, b]$ ф-ий.

Замечание. $f \in AC([a, b])$ является непрерывной на $[a, b]$. Обратное неверно

Контрпример.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \in C([0, 1])$, но $f \notin BV([0, 1])$, а значит по теореме, которая будет доказана ниже, $f \notin AC([0, 1])$.

Теорема 1.7. Если $f \in AC([a, b])$, то $f \in BV([a, b])$.

Доказательство. Запишем (1.4.1) при $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta = \delta(1) > 0 : \forall$ конечного попарно непересекающегося набора интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |b_k - a_k| < \delta \hookrightarrow \sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < 1$. Теперь разобьём отрезок $[a, b]$. Пусть $\mathbb{N} \ni M := \left\lceil \frac{|b-a|}{\delta} \right\rceil + 1$.

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= a + \frac{b-a}{M} \\ &\vdots \\ x_M &= a + b - a = b. \end{aligned}$$

То есть поделили отрезок $[a, b]$ на одинаковые куски.

Так как $x_{i+1} - x_i < \delta$ (специально для выполнения этого было взято достаточно большое M), то \forall разб. о-ка $[x_i, x_{i+1}]$ образует естественным образом конечным набор дизъюнктивных интервалов суммарной длины меньше δ , а значит по абсолютной непрерывности $V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < 1 \quad \forall i$

Тогда в силу аддитивности вариации

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{M-1} V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < \sum_{i=0}^{M-1} 1 = M < +\infty.$$

\square

2 Ряды Фурье

Идея представления функции тригонометрическим рядом являлась одной из центральных на рубеже 18-19 веков. Однако, строгая теория оформилась лишь к началу 20-века.

2.1 Неформальная идея

Прежде чем переходить к строгим формулировкам, поясним неформально корни идей, лежащих в основе теории рядов Фурье.

Если $V := (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – конечномерное евклидово пространство, а $\{e_n\}_{n=1}^N$ – ортогональный базис в V , то любой вектор $x \in V$ имеет следующее разложение по базису $\{e_n\}_{n=1}^N$:

$$x = \sum_{n=1}^N \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n. \quad (2.1.1)$$

Естественно поставить вопрос, имеется ли аналог (2.1.1) для бесконечномерных евклидовых пространств?

Оказывается, в некоторых важных случаях ответ на этот вопрос положительный. Более точно, если $H := (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – бесконечномерное гильбертово пространство (то есть евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением), а $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в нем, то для всякого $x \in H$ имеем

$$x = \sum_{n=1}^\infty \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n. \quad (2.1.2)$$

При этом числа

$$c_n(x) := \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1.3)$$

называются *коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$* , а ряд в правой части (2.1.2) – *рядом Фурье элемента x по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$* .

Частный случай гильбертова пространства – $L_2([-l, l])$, где $l > 0$ – фиксированное число. Действительно, скалярное произведение, порождающее L_2 -норму, задается формулой (мы рассматриваем случай комплексного пространства)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-l}^l f(x) \bar{g}(x) dx.$$

Можно показать, что система функций

$$1, \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \dots \quad (2.1.4)$$

является ортогональным базисом в пространстве $L_2([-l, l])$. Иными словами, для любой функции $f \in L_2([-l, l])$ ее ряд Фурье сходится к ней в смысле среднего квадратичного. Кроме того, ортогональным базисом является также система комплексных экспонент

$$\{e^{\frac{i\pi k x}{l}}\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (2.1.5)$$

Отметим, однако, что формально, при $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты

$$a_k(f) := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx, \quad b_k(f) := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx$$

имеют смысл для $f \in L_1([-l, l])$.

2.2 Строгая теория

Без ограничения общности будем работать с элементами $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Каждому такому элементу можно сопоставить формальный ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе

$$f \sim a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx),$$

а также по системе комплексных экспонент

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}.$$

При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим оператор n -ой частичной суммы ряда Фурье $S_n : L_1([-\pi, \pi]) \rightarrow C([-\pi, \pi])$. При $f \in L_1([-\pi, \pi])$ положим

$$S_n[f](x) := a_0(f) + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx).$$

2.3 Компактная форма записи

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \cos(kx) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \sin(kx) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

где D_n – ядро Дирихле, то есть

$$\begin{aligned} D_n(x) &:= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})} \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \sin\left(k\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(k\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \right] \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\pi \sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Свойства ядра Дирихле:

- 1) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$;
- 2) D_n – четная 2π -периодическая функция.

2.4 Теорема Римана–Лебега

Докажем теперь важную теорему Римана–Лебега об осцилляции.

Теорема 2.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Лебегу множество и $f \in L_1(E)$. Тогда

$$I(y) := \int_E f(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx \rightarrow 0, \quad \|y\| \rightarrow +\infty. \quad (2.4.1)$$

Доказательство. Будем считать функцию f продолженной нулем вне множества E . При $y \neq 0$ рассмотрим вектор $h = h(y) := \frac{\pi y}{\|y\|^2}$. Тогда сделав замену переменной $x = x' - h$ имеем

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x' - h) e^{-i\pi} e^{i\langle x', y \rangle} dx' = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x - h) e^{i\langle x, y \rangle} dx.$$

Таким образом, поскольку $h(y) \rightarrow 0$, $\|y\| \rightarrow \infty$, получим

$$2|I(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - h(y))) e^{i\langle x, y \rangle} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - h(y))| dx \rightarrow 0, \quad \|y\| \rightarrow +\infty. \quad (2.4.2)$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f \in L_1([-\pi, \pi])$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k(f) = 0.$$

2.5 Вторая теорема о среднем

В этом пункте мы докажем одно вспомогательное утверждение из теории интеграла Римана, которое будет очень важно при доказательстве достаточных условий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 2.2. Пусть $g \in R([a, b])$, а f нестрого монотонна на $[a, b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx. \quad (2.5.1)$$

Если, кроме того, f неотрицательна на $[a, b]$, то справедливы более простые формулы:

а) если f нестрого убывает, то при некотором $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx; \quad (2.5.2)$$

б) если f нестрого возрастает, то при некотором $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx. \quad (2.5.3)$$

Доказательство. Отметим, что $fg \in R([a, b])$, что легко следует из критерия Лебега. Поэтому, левые части формул (2.5.1)–(2.5.3) имеют смысл.

Мы докажем лишь формулу (2.5.2), поскольку (2.5.3) доказывается аналогично, а равенство (2.5.1) легко вытекает из (2.5.2) и (2.5.3).

Step 1. Итак, пусть f неотрицательна и нестрого убывает на $[a, b]$. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. То есть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Тогда, очевидно, в силу линейности интеграла Римана имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x) dx =: \Sigma_1(T) + \Sigma_2(T). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Step 2. Поскольку $g \in R([a, b])$, она ограничена на $[a, b]$. Следовательно, $\sup_{x \in [a, b]} |g(x)| < +\infty$. Легко видеть, что

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) |x_i - x_{i+1}|,$$

где $\omega_i := \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$ – колебание функции f на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Таким образом, в силу критерия интегрируемости, имеем (здесь и далее через $l(T)$ обозначена мелко́сть разбиения T)

$$\Sigma_1(T) \rightarrow 0, \quad l(T) \rightarrow 0. \quad (2.5.5)$$

Step 3. Рассмотрим функцию $G(x) := \int_a^x g(t) dt$. Очевидно, что G непрерывна на $[a, b]$. Используя преобразование Абеля, имеем (здесь использовано, что $G(x_0) = G(a) = 0$)

$$\begin{aligned} \Sigma_2(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i) \\ &= f(x_{n-1})G(b) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i))G(x_i). \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

В силу непрерывности G на $[a, b]$ найдутся константы m, M , для которых $m \leq G(x) \leq M$ при всех $x \in [a, b]$. Ключевое наблюдение состоит в том, что в силу невозрастания f , имеем $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$ при всех i . Суммируя сделанные наблюдения, имеем

$$\begin{aligned} mf(a) &= m \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + mf(x_{n-1}) \\ &\leq \Sigma_2(T) \leq M \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + Mf(x_{n-1}) = Mf(a). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Из (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.7) следует, что $\exists \lim_{l(T) \rightarrow 0} \Sigma_1(T) = \int_a^b f(x)g(x) dx$ и, кроме того,

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mf(a). \quad (2.5.8)$$

Step 4. Если $f(a) = 0$, то в силу (2.5.8) в качестве ξ можно взять любую точку отрезка $[a, b]$. Если $f(a) \neq 0$, то в силу теоремы о промежуточном значении, примененной к непрерывной функции G , из (2.5.8) выводим, что найдется точка $\xi \in [a, b]$, для которой

$$G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (2.5.9)$$

Теорема полностью доказана.