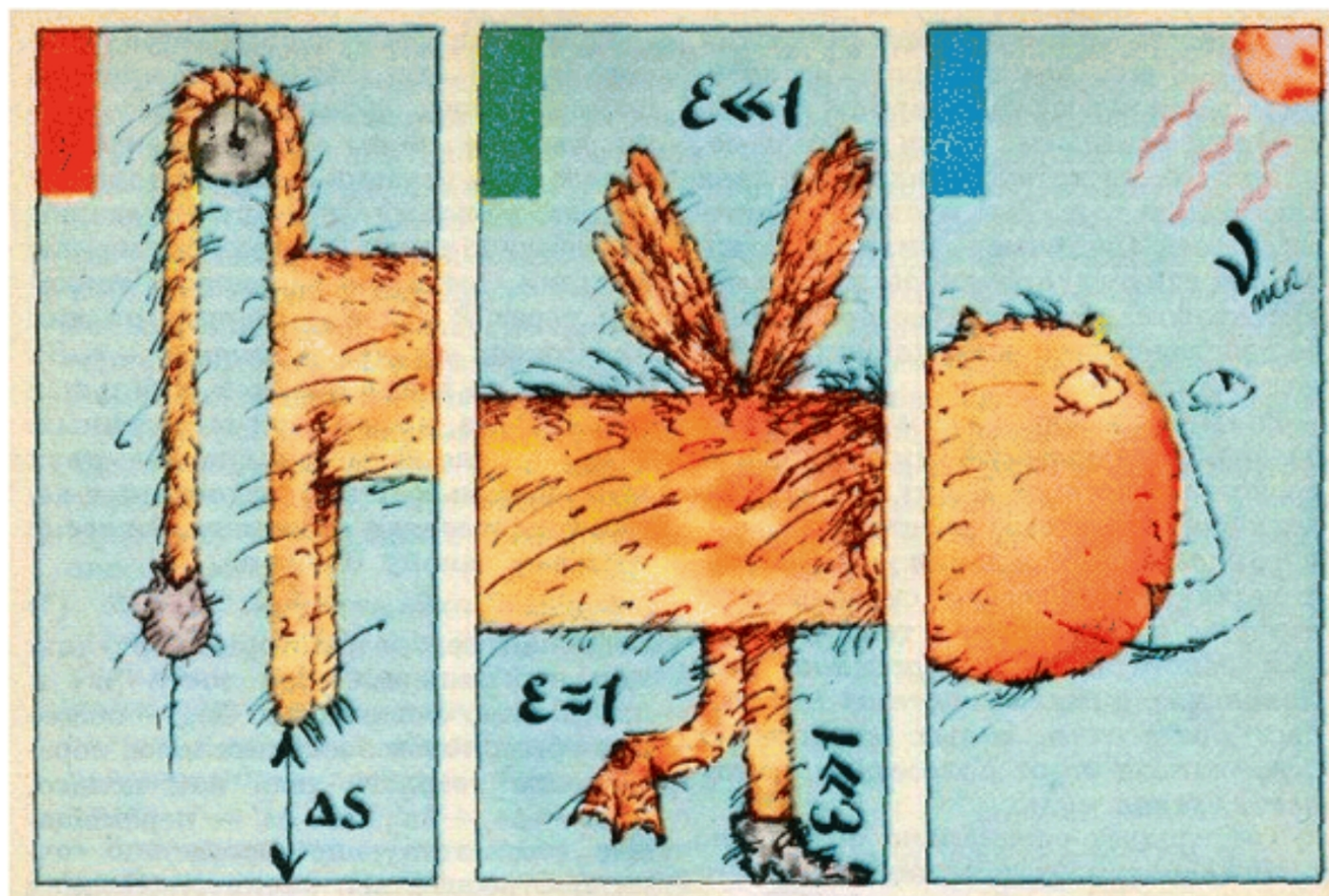


Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики



*Лектор: Генерал теории Меры, Александр Иванович Тюленев*

Для вас техали: *Потапов Станислав,  
Сысоева Александра,  
Цеденов Артем,  
Бадоля Пётр,  
Баронов Михаил,  
Шуминов Эзра  
Петракова Анастасия*

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Полнота пространств $L_p$	2
1.2	Неполнота $\mathbb{R}L_p$	5
1.3	Функции ограниченной вариации	6
1.4	Абсолютно непрерывные функции	8
<b>2</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>9</b>
2.1	Неформальная идея	9
2.2	Строгая теория	10
2.3	Компактная форма записи	11
2.4	Теорема Римана–Лебега	11
2.5	Вторая теорема о среднем	12
<b>3</b>	<b>Лекции 3, 4</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Лекция 5</b>	<b>13</b>
4.1	Теорема Фейера	14
4.2	Скорость убывания коэффициентов Фурье	15
<b>5</b>	<b>Лекция 6</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Аппроксимация функций</b>	<b>17</b>
6.1	Аппроксимативная единица	20

# 1 Введение

## 1.1 Полнота пространств $L_p$

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$  — пространство с мерой.

$p \in [1, +\infty]$

$\tilde{L}_p(\mu)$  — полунормированное линейное пространство. Лишь *полунормированное* потому, что равенство 0 интеграла в  $p$ -ой степени от функции не означает равенство 0 этой функции, а лишь равенство этой функции нулю почти всюду.

$L_p(\mu)$  — нормированное линейное пространство.

Это всё было в прошлом семестре, теперь же мы докажем полноту пространства  $L_p$ .

**Определение 1.1.** Пусть  $E = (E, \|\cdot\|)$  — линейное нормированное пространство (л.н.п.) Оно называется *полным*, если

$\forall$  фундаментальная (по норме  $\|\cdot\|$ ) последовательность  $\{x^n\}$  пространства  $E$  сходится по норме пространства  $E$  к некоторому элементу  $x \in E$ .

**Определение 1.2.** Дано  $E = (E, \|\cdot\|)$  — л.н.п. Пара последовательностей  $\{x^n\}_{n=1}^\infty$  и  $\{S^k\}_{k=1}^\infty$ , где

$$S^k := \sum_{n=1}^k x^n,$$

называется *формальным рядом* в  $E$ . При этом  $\{S^k\}_{k=1}^\infty$  называется последовательностью *частичных сумм* ряда, а  $\{x^n\}_{n=1}^\infty$  — членами ряда. Часто пишут просто

$$\sum_{k=1}^\infty x^k \text{ — формальный ряд.}$$

**Примечание.** В определении выше ряд мы называем *формальным* потому, что ещё не было ничего сказано про его сходимость.

**Определение 1.3.** Ряд  $\sum_{k=1}^\infty x^k$  называется *сходящимся* в л.н.п.  $E$ , если

$$\exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=1}^n x^k \right\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

**Определение 1.4.** Ряд  $\sum_{k=1}^\infty x^k$  называется *абсолютно сходящимся* в л.н.п.  $E$ , если:

$$\sum_{k=1}^\infty \|x^k\| \text{ — сходится}$$

**Напоминание.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *фундаментальной*, если выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall m \geq N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

1. Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, но не каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу из своего пространства.
2. Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, называется *полным*.

3. Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

**Теорема 1.1.** (Критерий полноты)  $E$  — л.н.н. полно  $\iff \forall$  абсолютно сходящийся в  $E$  ряд является сходящимся.

*Доказательство.*

( $\implies$ )

Пусть  $E$  полно и  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$  — сходится абсолютно  $\implies \sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$  — сходящийся числовой ряд, а значит последовательность частичных сумм фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=n}^m \|x^k\| < \varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника:  $\left\| \sum_{k=n}^m x^k \right\| \leq \sum_{k=n}^m \|x^k\| < \varepsilon$ .

Тогда  $\{S^n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность частичных сумм исходной последовательности фундаментальна в  $E$ .

Но  $E$  — полно  $\implies \exists x \in E : \|x - S^n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \implies$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$  — сходится в  $E$

( $\impliedby$ )

Пусть  $\{x^n\}$  — фундаментальная последовательность в  $E$ . Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Берём  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_k = 2^{-k}$ .

$\exists \{N_k\}$  — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_k \hookrightarrow \|x^n - x^m\| \leq 2^{-k}.$$

Рассмотрим  $\{x^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$  — подпоследовательность п-ти  $\{x^n\}$ .

Возьмём  $y_k := x^{N_{k+1}} - x^{N_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Положим  $y_0 := x^{N_1}$ .

Рассмотрим формальный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ . В силу выбора подпоследовательности, если в качестве  $n$  выбрать  $N_k$ , а в качестве  $m$  выбрать  $N_{k+1}$ , то неравенство  $\|x^n - x^m\| \leq 2^{-k}$  будет выполнено  $\implies \|y_k\| \leq 2^{-k} \implies \sum_{k=0}^{\infty} y_k$  абсолютно сходится в  $E$ .

Но по условию доказываемого утверждения, любой абсолютно сходящийся в  $E$  ряд сходится в  $E$ , значит

$$\text{ряд } \sum_{k=0}^{\infty} y_k \text{ сходится} \implies \exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=0}^l y_k \right\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty.$$

При этом

$$\sum_{k=0}^l y_k = y_0 + y_1 + \dots + y_l = x^{N_1} + x^{N_2} - x^{N_1} + \dots + x^{N_{l+1}} - x^{N_l} = x^{N_l}.$$

Объединив два последних результата, получим

$$\exists x \in E : \|x - x^{N_l}\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty.$$

В итоге доказали существование элемента  $x \in E$  т.ч. к нему сходится подпоследовательности  $\{x^{N_l}\}_{l=1}^{\infty}$ .

Теперь остаётся воспользоваться условием фундаментальности и получить сходимость всей последовательности.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L \in \mathbb{N} : \forall l \geq L \hookrightarrow \|x - x^{N_l}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq M \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N := \max\{L, M\} \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow \|x - x^n\| \leq \|x - x^{N_m}\| + \|x^{N_m} - x^n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Теорема 1.2.** Пусть  $p \in [1, +\infty]$ . Тогда  $L_p(\mu)$  полно.

*Доказательство.* Разберём случай  $p \in [1, +\infty)$ . В силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что любой абсолютно сходящийся ряд в  $L_p(\mu)$  сходится в  $L_p(\mu)$ .

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  — абсолютно сходящийся ряд в  $L_p(\mu)$ . То есть  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p$  сходится как числовой ряд. Используем неравенство Минковского:

$$\forall N \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left( \int_X \left( \sum_{k=1}^N |f_k| \right)^p \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^N \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

Определим  $F_n := \left( \sum_{k=1}^N |f_k| \right)^p$ . Тогда  $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$  — монотонная (неубывающая) функциональная последовательность.

**Напоминание.** Монотонность функциональной последовательности — это монотонность последовательность по  $n$  при каждом фиксированном  $x$ .

Тогда по теореме Леви

$$\begin{aligned} \exists \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_X F_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p} &= \left( \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} F_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \\ \Rightarrow \left( \int_X \left( \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty. \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| &\text{ конечна при } \mu\text{-п.в. } x \in X. \end{aligned}$$

При фиксированном  $x$  имеем  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  — обычный числовой ряд, а для него из абсолютной сходимости следует сходимость.

$$\Rightarrow \text{при } \mu\text{-п.в. } x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ конечна.}$$

Положим  $F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ , эта функция корректно определена  $\mu$ -п.в. При этом  $\mu$  — полная мера (меру считаем полной, если не было оговорено обратного).

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x), \text{ этот предел существует для } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

Остаётся доказать, что  $\left\| F - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Обозначим  $n$ -ый член этой последовательности как  $J_n$ .

$$J_n = \left( \int_X \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left( \int_X \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad \otimes$$

Рассмотрим сумму ряда, как предел:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)|.$$

Вспомним лемму Фату:

$$\text{При } g_k \geq 0 \text{ верно } \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) d\mu(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) d\mu(x).$$

Тогда по лемме Фату:

$$\left( \int_X \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \otimes \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \int_X |f_k(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Итого  $J_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . □

## 1.2 Неполнота $\mathbb{R}L_p$

**Определение 1.5.** Пусть  $\mathbb{R}L_p([a, b])$  — лин. пространство функций,  $p$ -ая степень модуля которых интегрируема по Риману.

**Замечание.** С таким определением это не является нормированным пространством. Чтобы сделать его нормированным, нужно аккуратно ввести класс эквивалентности.

**Теорема 1.3.** Пространство  $\mathbb{R}L_p([a, b])$  неполно.

*Доказательство.*

Без ограничения общности,  $[a, b] = [0, 1]$ .

Пусть  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ .

Перенумеруем рациональные точки отрезка  $[0, 1]$ :  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_k\}$ .

$$G_n := \bigcup_{k=1}^n \left( r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right) \cap [0, 1].$$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Тогда  $\chi_{G_n}$  интегрируема по Риману по критерию Лебега, потому что как характеристическая функция объединения конечного набора интервалов, пересечённых с отрезком, она обладает конечным числом разрывов.

Докажем, что  $\chi_G$  имеет мн-во точек разрыва положительной меры Лебега. Для этого рассмотрим  $F = [0, 1] \setminus G$ . Тогда  $\chi_G(F) = 0$ , но так как  $\mathbb{Q}$  плотно в  $\mathbb{R}$ , во всех точках  $F$  ф-ия  $\chi_G$  разрывна. При этом по счётной полуаддитивности меры Лебега  $\mathcal{L}^n(G) \leq \frac{1}{2}$ , а значит  $\mathcal{L}^n(F) \geq \frac{1}{2} > 0$ .

Введём обозначения

$$E_k := \left( r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right) \cap [0, 1]$$

$$G_m^n := \bigcup_{k=n}^m E_k$$

(в новых обозначениях  $G_n = G_n^1$ ) и покажем фундаментальность последовательности  $\{\chi_{G_n}\}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\chi_{G_m}(x) - \chi_{G_n}(x)| dx &= \text{так как } G_n \subseteq G_m = \int_0^1 \chi_{G_m \setminus G_n}(x) dx \leq \int_0^1 \chi_{G_m^n}(x) dx \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \int_0^1 \chi_{E_k}(x) dx = \sum_{k=n+1}^m \frac{\varepsilon}{2^k} \rightarrow 0, \text{ при } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итого, последовательность  $\{\chi_{G_n}\} \subset \mathbb{RL}_p([0, 1])$  фундаментальна, но её предел  $\chi_G$  не лежит в пространстве  $\mathbb{RL}_p([0, 1])$ , значит это пространство не полно.  $\square$

### 1.3 Функции ограниченной вариации

**Определение 1.6.** Пусть  $T$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ , т.е.

$$T = \{x_i\}_{i=0}^{N_T}, \quad N_T \in \mathbb{N}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_T} = b.$$

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$V_T(f)$  — вариация ф-ии  $f$  по разбиению  $T$

$$V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

$$V_a^b(f) := \sup_{T - \text{разб. } [a, b]} V_T(f)$$

**Определение 1.7.**  $f$  называется ф-ией ограниченной вариации на  $[a, b]$ , если

$$V_a^b(f) < +\infty.$$

Обозначается  $f \in BV([a, b])$

**Теорема 1.4.**  $BV([a, b])$  — линейное пространство.

*Доказательство.*

Покажем, что  $f_1, f_2 \in BV([a, b]) \implies \alpha f_1 + \beta f_2 \in BV([a, b])$ .

Пусть  $T$  — произвольное разбиение  $[a, b]$ . Тогда по неравенству треугольника

$$V_T(\alpha f_1 + \beta f_2) \leq |\alpha| V_T(f_1) + |\beta| V_T(f_2).$$

$\square$

**Лемма 1.1.** Если  $\forall f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна на  $[a, b]$ , то  $f \in BV([a, b])$  и её  $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$ .

*Доказательство.* Очевидно.  $\square$

**Лемма 1.2.** Пусть  $-\infty < a < c < b < +\infty$ . Тогда

$$f \in BV([a, b]) \iff \begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$$

В случае, если  $f \in BV([a, b])$ , тогда

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

*Доказательство.*

1.  $\implies$  и  $\geq$

Пусть  $f \in BV([a, b])$ ,  $T_1$  — произв. разб.  $[a, c]$ ,  $T_2$  — произв. разб.  $[c, b]$ .

$T = T_1 \cup T_2$  — разб. о-ка  $[a, b]$ .

$$V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_T(f) \leq V_a^b(f).$$

Взяв  $\sup$  сначала по  $T_1$ , а потом по  $T_2$ , получим  $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$ .

2.  $\impliedby$  и  $\leq$

$$\text{Пусть } \begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$$

Пусть  $T = \{x_i\}_{i=0}^N$  — произв. разб. отрезка  $[a, b]$ .

Если  $c = x_i$  при некотором  $i$ , то это простой случай, так как тогда можно  $\{x_j\}_{j=0}^i$  выбрать в качестве  $T_1$ , а  $\{x_j\}_{j=i}^N$  выбрать в качестве  $T_2$ . И тогда очевидным образом  $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$ , а взяв  $\sup$  по всем  $T$  получим  $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$ .

Теперь рассмотрим более интересный случай, когда ни при каком  $i$   $x_i$  не равно  $c$ . Тогда  $c \in (x_i, x_{i+1})$  при некотором  $i$ .

$$\begin{aligned} V_T(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(c)| + |f(c) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \otimes \end{aligned}$$

Обозначим разбиения:

$$T_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_i, c\},$$

$$T_2 = \{c, x_{i+1}, \dots, x_N\}.$$

Тогда полученный ранее результат можно оценить как

$$\otimes V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Итого  $V_T(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$ . Взяв  $\sup$  по всем  $T$ , получим:

$$\sup_T V_T(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Если оба слагаемых в правой части конечны, то и  $V_a^b$  конечна.



Итого из первого и второго пункта

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

□

Теперь воспользуемся этой леммой для доказательства следующей теоремы.

**Теорема 1.5.** Пусть  $f \in BV([a, b])$ . Тогда ф-ия  $g(x) := V_a^x$  монотонно не убывает на  $[a, b]$

*Доказательство.* Пусть  $x_2 > x_1$ . Тогда применим только что доказанную лемму, выбрав  $a = a, c = x_1, b = x_2$ .

$$\begin{aligned} V_a^{x_2}(f) &= V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) \\ V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) &= V_{x_1}^{x_2}(f) \geq 0 \\ g(x_2) - g(x_1) &\geq 0 \\ g(x_2) &\geq g(x_1) \end{aligned}$$

□

**Теорема 1.6.** Пусть  $f \in BV([a, b])$ . Тогда  $\exists f_1$  и  $f_2$  монотонно неубывающие на  $[a, b]$  такие, что  $f = f_1 - f_2$ .

*Доказательство.* Определим  $f_1(x) := V_a^x(f) \quad \forall x \in [a, b]$ . По только что доказанной теореме это монотонно неубывающая функция.

Докажем, что ф-ия  $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$  монотонно не убывает.

$$a \leq x \leq y \leq b.$$

$$f_2(y) - f_2(x) = [f_1(y) - f(y)] - [f_1(x) - f(x)] = [f_1(y) - f_1(x)] - [f(y) - f(x)] \stackrel{(1)}{=} V_x^y(f) - [f(y) - f(x)].$$

(1) В силу аддитивности вариации по отрезкам

Заметим, что  $V_x^y(f) = \sup_T V_T(f) \geq V_{\{x, y\}}(f) = |f(y) - f(x)|$ . Тогда предыдущее выражение не меньше 0, а значит  $f_2$  не убывает. □

**Следствие.**  $\forall f \in BV([a, b])$  имеет не более чем счётное множество т. разрыва 1-го рода.

## 1.4 Абсолютно непрерывные функции

**Определение 1.8.** Ф-ия  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется абсолютно непрерывной на  $[a, b]$ , если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \text{ дизъюнктивной системы } \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |a_k - b_k| < \delta(\varepsilon) \\ \hookrightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

$AC([a, b])$  — мн-во всех абсолютно непрерывных на  $[a, b]$  функций.

**Замечание.**  $f \in AC([a, b])$  является непрерывной на  $[a, b]$ . Обратное неверно

**Контрпример.**

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \in C([0, 1])$ , но  $f \notin BV([0, 1])$ , а значит по теореме, которая будет доказана ниже,  $f \notin AC([0, 1])$ .

**Теорема 1.7.** Если  $f \in AC([a, b])$ , то  $f \in BV([a, b])$ .

*Доказательство.* Запишем (1.4.1) при  $\varepsilon = 1$ . Тогда  $\exists \delta = \delta(1) > 0 : \forall$  конечного попарно непересекающегося набора интервалов  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |b_k - a_k| < \delta \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < 1$ . Теперь разобьём отрезок  $[a, b]$ . Пусть  $\mathbb{N} \ni M := \left\lceil \frac{|b-a|}{\delta} \right\rceil + 1$ .

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= a + \frac{b-a}{M} \\ &\vdots \\ x_M &= a + b - a = b. \end{aligned}$$

То есть поделили отрезок  $[a, b]$  на одинаковые куски.

Так как  $x_{i+1} - x_i < \delta$  (специально для выполнения этого было взято достаточно большое  $M$ ), то  $\forall$  разб. о-ка  $[x_i, x_{i+1}]$  образует естественным образом конечным набор дизъюнктивных интервалов суммарной длины меньше  $\delta$ , а значит по абсолютной непрерывности  $V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < 1 \quad \forall i$

Тогда в силу аддитивности вариации

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{M-1} V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < \sum_{i=0}^{M-1} 1 = M < +\infty.$$

□

## 2 Ряды Фурье

Идея представления функции тригонометрическим рядом являлась одной из центральных на рубеже 18-19 веков. Однако, строгая теория оформилась лишь к началу 20-века.

### 2.1 Неформальная идея

Прежде чем переходить к строгим формулировкам, поясним неформально корни идей, лежащих в основе теории рядов Фурье.

Если  $V := (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  – конечномерное евклидово пространство, а  $\{e_n\}_{n=1}^N$  – ортогональный базис в  $V$ , то любой вектор  $x \in V$  имеет следующее разложение по базису  $\{e_n\}_{n=1}^N$ :

$$x = \sum_{n=1}^N \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n. \quad (2.1.1)$$

Естественно поставить вопрос, имеется ли аналог (2.1.1) для бесконечномерных евклидовых пространств?

Оказывается, в некоторых важных случаях ответ на этот вопрос положительный. Более точно, если  $H := (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  – бесконечномерное гильбертово пространство (то есть евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением), а  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  – ортонормированный базис в нем, то для всякого  $x \in H$  имеем

$$x = \sum_{n=1}^\infty \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n. \quad (2.1.2)$$

При этом числа

$$c_n(x) := \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1.3)$$

называются *коэффициентами Фурье элемента  $x$  по системе  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$* , а ряд в правой части (2.1.2) – *рядом Фурье элемента  $x$  по системе  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$* .

Частный случай гильбертова пространства –  $L_2([-l, l])$ , где  $l > 0$  – фиксированное число. Действительно, скалярное произведение, порождающее  $L_2$ -норму, задается формулой (мы рассматриваем случай комплексного пространства)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-l}^l f(x) \bar{g}(x) dx.$$

Можно показать, что система функций

$$1, \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \dots \quad (2.1.4)$$

является ортогональным базисом в пространстве  $L_2([-l, l])$ . Иными словами, для любой функции  $f \in L_2([-l, l])$  ее ряд Фурье сходится к ней в смысле среднего квадратичного. Кроме того, ортогональным базисом является также система комплексных экспонент

$$\{e^{\frac{i\pi k x}{l}}\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (2.1.5)$$

Отметим, однако, что формально, при  $k \in \mathbb{N}$  коэффициенты

$$a_k(f) := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx, \quad b_k(f) := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx$$

имеют смысл для  $f \in L_1([-l, l])$ .

## 2.2 Строгая теория

Без ограничения общности будем работать с элементами  $f \in L_1([-\pi, \pi])$ . Каждому такому элементу можно сопоставить формальный ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе

$$f \sim a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx),$$

а также по системе комплексных экспонент

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}.$$

При  $n \in \mathbb{N}$  рассмотрим оператор  $n$ -ой частичной суммы ряда Фурье  $S_n : L_1([-\pi, \pi]) \rightarrow C([-\pi, \pi])$ . При  $f \in L_1([-\pi, \pi])$  положим

$$S_n[f](x) := a_0(f) + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx).$$

## 2.3 Компактная форма записи

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \cos(kx) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \sin(kx) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

где  $D_n$  – ядро Дирихле, то есть

$$\begin{aligned} D_n(x) &:= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})} \left[ \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \sin\left(k\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(k\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \right] \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\pi \sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Свойства ядра Дирихле:

- 1)  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$ ;
- 2)  $D_n$  – четная  $2\pi$ -периодическая функция.

## 2.4 Теорема Римана–Лебега

Докажем теперь важную теорему Римана–Лебега об осцилляции.

**Теорема 2.1.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$  – измеримое по Лебегу множество и  $f \in L_1(E)$ . Тогда

$$I(y) := \int_E f(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx \rightarrow 0, \quad \|y\| \rightarrow +\infty. \quad (2.4.1)$$

*Доказательство.* Будем считать функцию  $f$  продолженной нулем вне множества  $E$ . При  $y \neq 0$  рассмотрим вектор  $h = h(y) := \frac{\pi y}{\|y\|^2}$ . Тогда сделав замену переменной  $x = x' - h$  имеем

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x' - h) e^{-i\pi} e^{i\langle x', y \rangle} dx' = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x - h) e^{i\langle x, y \rangle} dx.$$

Таким образом, поскольку  $h(y) \rightarrow 0$ ,  $\|y\| \rightarrow \infty$ , получим

$$2|I(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - h(y))) e^{i\langle x, y \rangle} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - h(y))| dx \rightarrow 0, \quad \|y\| \rightarrow +\infty. \quad (2.4.2)$$

Теорема доказана.

**Следствие.** Если  $f \in L_1([-\pi, \pi])$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k(f) = 0.$$

## 2.5 Вторая теорема о среднем

В этом пункте мы докажем одно вспомогательное утверждение из теории интеграла Римана, которое будет очень важно при доказательстве достаточных условий сходимости ряда Фурье в точке.

**Теорема 2.2.** Пусть  $g \in R([a, b])$ , а  $f$  нестрого монотонна на  $[a, b]$ . Тогда существует точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx. \quad (2.5.1)$$

Если, кроме того,  $f$  неотрицательна на  $[a, b]$ , то справедливы более простые формулы:

а) если  $f$  нестрого убывает, то при некотором  $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx; \quad (2.5.2)$$

б) если  $f$  нестрого возрастает, то при некотором  $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx. \quad (2.5.3)$$

*Доказательство.* Отметим, что  $fg \in R([a, b])$ , что легко следует из критерия Лебега. Поэтому, левые части формул (2.5.1)–(2.5.3) имеют смысл.

Мы докажем лишь формулу (2.5.2), поскольку (2.5.3) доказывается аналогично, а равенство (2.5.1) легко вытекает из (2.5.2) и (2.5.3).

*Step 1.* Итак, пусть  $f$  неотрицательна и нестрого убывает на  $[a, b]$ . Пусть  $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  – произвольное разбиение отрезка  $[a, b]$ . То есть  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Тогда, очевидно, в силу линейности интеграла Римана имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x) dx =: \Sigma_1(T) + \Sigma_2(T). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

*Step 2.* Поскольку  $g \in R([a, b])$ , она ограничена на  $[a, b]$ . Следовательно,  $\sup_{x \in [a, b]} |g(x)| < +\infty$ . Легко видеть, что

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x) dx \right| \leqslant \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) |x_i - x_{i+1}|,$$

где  $\omega_i := \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$  – колебание функции  $f$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ . Таким образом, в силу критерия интегрируемости, имеем (здесь и далее через  $l(T)$  обозначена мелкость разбиения  $T$ )

$$\Sigma_1(T) \rightarrow 0, \quad l(T) \rightarrow 0. \quad (2.5.5)$$

*Step 3.* Рассмотрим функцию  $G(x) := \int_a^x g(t) dt$ . Очевидно, что  $G$  непрерывна на  $[a, b]$ . Используя преобразование Абеля, имеем (здесь использовано, что  $G(x_0) = G(a) = 0$ )

$$\begin{aligned}\Sigma_2(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i) \\ &= f(x_{n-1})G(b) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i))G(x_i).\end{aligned}\tag{2.5.6}$$

В силу непрерывности  $G$  на  $[a, b]$  найдутся константы  $m, M$ , для которых  $m \leq G(x) \leq M$  при всех  $x \in [a, b]$ . Ключевое наблюдение состоит в том, что в силу невозрастания  $f$ , имеем  $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$  при всех  $i$ . Суммируя сделанные наблюдения, имеем

$$\begin{aligned}mf(a) &= m \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + mf(x_{n-1}) \\ &\leq \Sigma_2(T) \leq M \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + Mf(x_{n-1}) = Mf(a).\end{aligned}\tag{2.5.7}$$

Из (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.7) следует, что  $\exists \lim_{l(T) \rightarrow 0} \Sigma_1(T) = \int_a^b f(x)g(x) dx$  и, кроме того,

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mf(a).\tag{2.5.8}$$

*Step 4.* Если  $f(a) = 0$ , то в силу (2.5.8) в качестве  $\xi$  можно взять любую точку отрезка  $[a, b]$ . Если  $f(a) \neq 0$ , то в силу теоремы о промежуточном значении, примененной к непрерывной функции  $G$ , из (2.5.8) выводим, что найдется точка  $\xi \in [a, b]$ , для которой

$$G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx.\tag{2.5.9}$$

Теорема полностью доказана.

### 3 Лекции 3, 4

*В светлом будущем*

### 4 Лекция 5

**Замечание.** Рассуждая аналогично, в случае  $\alpha = 1$  можно получить более грубую оценку:

$$\|S_n[f] - f\|_{C([- \pi, \pi])} \leq \frac{C \ln^2 n}{n}.$$

Но на самом деле можно при условии  $f \in LIP(\mathbb{R})$  справедлива более сильная оценка:

$$\|S_n[f] - f\|_C \leq \frac{C \ln n}{n}.$$

## 4.1 Теорема Фейера

**Теорема 4.1.** Пусть  $f \in C([-\pi, \pi])$  и  $f$  —  $2\pi$ -периодична. Тогда  $\sigma_n[f] \xrightarrow[\mathbb{R}]{} f$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* В силу периодичности  $\sigma_n[f]$  и  $f$  достаточно доказать, что  $\sigma_n[f] \xrightarrow{[-\pi, \pi]} f$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку  $f \in C([-\pi, \pi])$ , то по теореме Кантора она равномерно непрерывна. Значит её модуль непрерывности стремится к нулю:

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x', x'' \in [-2\pi, 2\pi] \\ |x' - x''| < \delta}} |f(x') - f(x'')| \rightarrow 0, \delta \rightarrow +0.$$

Формально, описанное выше выражение определено для  $\delta \in (0, 4\pi)$ . Запишем по определению сумму Фейера:

$$\sigma_n[f](x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Phi_n(x-t) dt, \text{ где } \Phi_n(t) \text{ — ядро Фейера.}$$

Тогда:

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x) dt \right| \leq I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt = I_1(\delta) + I_2(\delta).$$

$$I_1(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt \leq \omega_\delta[f] \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) dt \leq \omega_\delta[f].$$

В этой оценке мы ограничиваем сверху  $|f(x-t) - f(x)|$  через модуль непрерывности,

$$\text{а } \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) dt \leq 1.$$

$$I_2(\delta) = \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \Phi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt.$$

Так как  $f$  — непрерывна на  $[-2\pi, 2\pi]$ , то  $\exists M > 0$  такое, что  $|f(x)| \leq M \forall x \in [-2\pi, 2\pi]$ . Тогда можем оценить  $|f(x-t) - f(x)| \leq |f(x)| + |f(x-t)| \leq 2M$ .

Из вышеприведенного утверждения и того, что  $\forall \delta > 0 \sup_{\delta < |u| < \pi} \Phi_n(u) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  и ограничения,

описанного выше, получаем:

$$I_2(\delta) \leq 2M \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \Phi_n(t) dt \leq 2M \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$\forall \varepsilon > 0$  найдем  $\delta(\varepsilon)$  такое, что  $I_1(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Затем, при фиксированном  $\delta(\varepsilon)$  выберем  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  таким, что  $\forall n > N(\varepsilon) I_2(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Итого, получается,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\delta(\varepsilon)) = \tilde{N}(\varepsilon)$  такой, что  $\forall n > \tilde{N}(\varepsilon) \Leftrightarrow I_n < \varepsilon$ . □

**Определение 4.1.** Функция  $T_n(x) = c_0 + \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=0}^n b_k \sin(kx)$  называется тригонометрическим полиномом степени  $n$ , если  $|a_n| + |b_n| \neq 0$ .

**Следствие** (Первая теорема Вейерштрасса). Пусть  $f \in C([-\pi, \pi])$  и  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Тогда,  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  тригонометрический полином  $T_\varepsilon$  такой, что  $\|f - T_\varepsilon\|_{C([-\pi, \pi])} \leq \varepsilon$ .

**Следствие** (Теорема Вейерштрасса). Пусть  $-\infty < a < b < \infty$  и  $f \in C([a, b])$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  полином  $P_\varepsilon[f]$  такой, что  $\|f - P_\varepsilon[f]\|_{C([a, b])} < \varepsilon$ .

*Доказательство.* Для удобства доказательства перенесем отрезок  $[a, b]$  в отрезок  $[0, \pi]$ . Пусть  $x \in [a, b]$ , а  $t \in [0, \pi]$ . Обозначим  $\varphi(x)$  — взаимно однозначная функция, преобразующая точку из первого отрезка в точку из второго отрезка. Тогда  $x(t) = \varphi^{-1}(t) = a + \frac{b-a}{\pi}t$ .

Заметим, что  $f \circ \varphi \in C([0, \pi])$ . Продолжим  $f$  чётным образом. Получим функцию  $\tilde{f} \in C([-\pi, \pi])$  и  $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$ .

Применим теорему Фейера к функции  $\tilde{f}$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \sigma_n[\tilde{f}] \text{ такая, что } \|\tilde{f} - \sigma_n[\tilde{f}]\|_{C([-\pi, \pi])} < \varepsilon.$$

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k[\tilde{f}], \text{ где } S_k[\tilde{f}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j(\tilde{f}) \cos(jx) + \sum_{j=1}^k b_j(\tilde{f}) \sin(jx)$$

Вспомним, что  $\cos(jx)$  и  $\sin(jx)$  — аналитические  $\forall j \in \mathbb{N}$ . Следовательно, на любом отрезке  $[-A, A] \subset \mathbb{R}$  к ним равномерно сходятся их ряды Тейлора. Тогда мы можем приблизить  $\cos(jx)$  и  $\sin(jx)$  полиномами Тейлора настолько, чтобы после сложения получилось что-то «небольшое». Обозначим  $P_j(x)$  — полином Тейлора для  $\sin(jx)$ , а  $Q_j(x)$  — полином Тейлора для  $\cos(jx)$ .

Можно выбрать полиномы Тейлора так, чтобы существовали  $\varepsilon_j$  и  $\tilde{\varepsilon}_j$  такие, что:

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |P_j(x) - \sin(jx)| < \varepsilon_j$$

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |Q_j(x) - \cos(jx)| < \tilde{\varepsilon}_j$$

И при этом выполнялось:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k |a_j| \varepsilon_j + |b_j| \tilde{\varepsilon}_j \right) < \varepsilon$$

Тогда, полагая

$$P_\varepsilon[\tilde{f}] := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j(\tilde{f}) Q_j + b_j(\tilde{f}) P_j \right)$$

$P_\varepsilon[f](t)$  «живет» на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Теперь мы хотим перенести его на  $[0, 1]$ .

Положим  $t(x) = \frac{x-a}{b-a}\pi$ . Тогда  $P_\varepsilon[f] = P_\varepsilon[\tilde{f}](t(x))$  — искомый полином, так как  $\tilde{f}(t(x)) = f(x)$ .

Тогда заметим, что  $\sup_{t \in [-\pi, \pi]} |\tilde{f}(t) - P_\varepsilon[\tilde{f}](t)| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P_\varepsilon[f](x)| < \varepsilon$ .  $\square$

## 4.2 Скорость убывания коэффициентов Фурье

Общая концепция: чем более гладкая функция, тем быстрее убывают коэффициенты Фурье.

**Лемма 4.1** (Основная). Пусть  $f \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ . Тогда  $c_f(y) = f(x)e^{-ixy} = O(\frac{1}{n}), y \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Так как  $f \in BV(\mathbb{R})$ , то  $f(x) = u(x) + v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , где  $u(x)$  — нестрого возрастающая функция на  $\mathbb{R}$ , а  $v(x)$  — нестрого убывающая функция на  $\mathbb{R}$ .

Тогда можно записать  $\forall a, b : -\infty < a < b < \infty$ :

$$c_{[a, b]}(y) = \int_a^b f(x) e^{-ixy} dx = \int_a^b u(x) e^{-ixy} dx + \int_a^b v(x) e^{-ixy} dx \Rightarrow$$



$$\begin{aligned} \exists \xi \in [a, b], \zeta \in [a, b] : c_{[a,b]}(y) = u(a+0) \int_a^\xi e^{-ixy} dx + u(b-0) \int_\xi^b e^{-ixy} dx + \\ + v(a+0) \int_a^\zeta e^{-ixy} dx + v(b-0) \int_\zeta^b e^{-ixy} dx. \end{aligned}$$

Ключевое наблюдение: если  $f \in BV(\mathbb{R})$  и интегрируема, то  $f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ .

Пусть  $f \not\rightarrow 0$ . Тогда  $\exists > 0$  такой, что  $\forall \delta > 0 \exists x : |f(x)| > C$ . Но при этом,  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , так как интегрируема. Тогда,  $\exists \tilde{x} : |\tilde{x}| > \delta, |f(\tilde{x})| < \frac{C}{2}$ . Получаем противоречие, так как можно получить бесконечный набор точек  $\{x_n\}$  и  $\{\tilde{x}_n\}$ , которые мы набираем по описанному выше условию.

Ограничим:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^\xi e^{-ixy} dx \right| &< \frac{2}{|y|} & \left| \int_\xi^b e^{-ixy} dx \right| &< \frac{2}{|y|} \\ \left| \int_a^\zeta e^{-ixy} dx \right| &< \frac{2}{|y|} & \left| \int_\zeta^b e^{-ixy} dx \right| &< \frac{2}{|y|} \\ u(a+0) &\leq V_{\mathbb{R}}(f) & u(b-0) &\leq V_{\mathbb{R}}(f) \\ v(a+0) &\leq V_{\mathbb{R}}(f) & v(b-0) &\leq V_{\mathbb{R}}(f) \end{aligned}$$

Получаем:  $|c_{[a,b]}(y)| \leq \frac{8V_{\mathbb{R}}(f)}{|y|}$  — оценка не зависит от выбора интервала  $[a, b]$ . Устремляя  $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$ , получаем требуемое.  $\square$

**Теорема 4.2** (б/д). Пусть  $F \in AC([a, b])$ . Тогда  $F$  почти всюду имеет классическую производную  $u$ , более того, восстанавливается через свою производную по формуле Ньютона - Лейбница.

**Теорема 4.3** (Интегрирование по частям, б/д). Пусть  $F \in AC([a, b]), g \in L_1([a, b])$ . Тогда верна формула интегрирования по частям:  $\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx$ ,

$$\text{где } G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

**Следствие.** Пусть функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  —  $2\pi$ -периодическая, такая, что  $f^{(k-1)} \in AC([-\pi, \pi])$ . Пусть  $f^{(k)}$  почти всюду может быть изменена на множестве меры ноль таким образом, что  $f^{(k)} \in BV([-\pi, \pi])$ . Тогда  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$ .

*Доказательство.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{inx}dx = f(x)e^{inx}|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Прделаем эту операцию  $k$  раз. Так как  $f$  —  $2\pi$ -периодична и  $f^{(k)} \in AC([-\pi, \pi])$  — тоже  $2\pi$ -периодична:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}e^{-inx}dx = (in)^k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Но  $f^{(k)}$  можно считать  $BV([-\pi, \pi])$ .

Рассмотрим функцию  $F = \begin{cases} f^{(k)}(x), & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ . Тогда  $F \in BV([-\pi, \pi])$  и  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx =$

$\int_{\mathbb{R}} F(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$  в силу леммы. С учетом того, что  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{(in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{inx}dx$  получаем требуемое.  $\square$

## 5 Лекция 6

*В светлом будущем*

## 6 Аппроксимация функций

Для наших целей понадобится приближать наши функции другими, более понятными.

**Определение 6.1.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется ступенчатой, если она является линейной комбинацией индикаторов ячеек.

Теперь докажем, что такие функции приближают по норме  $L_p$ .

**Теорема 6.1.** Пусть множество  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  измеримо,  $f \in L_p(E)$ , где  $p \in [1, +\infty)$ . Тогда верно следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ ступенчатая функция } h_\varepsilon : \|f - h_\varepsilon\|_{L_p(E)} < \varepsilon.$$

Идея доказательства: как обычно мы доказываем это сначала для простых функций, а позже для всех, сводя к уже доказанному с помощью приближений.

*Доказательство.* Разобьем доказательство на шаги

1. Пусть  $f = I_G$ , где множество  $G$  имеет конечную меру. Тогда из определения верхней меры следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \{P_k\}_{k=1}^\infty : \lambda^n(G) + \varepsilon \geq \sum_{k=1}^\infty \lambda(P_k).$$

Теперь из сходимости ряда мер ячеек следует, что можно взять такой большой номер  $N$  :

$$\sum_{k=N+1}^\infty \lambda^n(P_k) < \varepsilon.$$

По теореме о дизъюнктном представлении в полукольце существует набор непересекающихся  $\{Q_l\}_{l=1}^m : P_1 \cup \dots \cup P_N = \bigsqcup_{l=1}^m Q_l$ . Обозначим за  $A = \bigcup_{i=1}^\infty P_k, B = P_1 \cup \dots \cup P_N$ . Тогда

$$I_B = \sum_{l=1}^m I_{Q_l}.$$

Возьмем в качестве приближающей ступенчатой функции  $I_B$ . Осталось доказать, что она приближает с точностью до  $\varepsilon$  по норме.

$$\begin{aligned} \|f - h\|_{L_p} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_A(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\mathbb{R}^n} |I_A(x) - I_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= (\lambda^n(A \setminus G))^{\frac{1}{p}} + (\lambda^n(A \setminus B))^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

2. Если  $f$  – простая, то есть линейная комбинация индикаторов множеств конечной меры, явно сводится к пункту 1 с помощью неравенства треугольника.
3.  $f \in L_p(E)$  произвольная, тогда из определения интеграла Лебега можно ее приблизить простой с точностью до  $\varepsilon/2$ , а простые мы уже умеем приближать ступенчатыми с точностью до  $\varepsilon/2$ . Осталось применить неравенство треугольника и требуемое будет доказано

□

Теперь, благодаря доказанной технике можем доказать следующую теорему:

**Теорема 6.2.** Пусть  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ , где  $p \in [1, +\infty)$ . Тогда верно следующее:

$$\|f(x) - f(x - h)\|_{L_p} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

Идея доказательства: Обозначим за  $f_h(x) = f(x - h)$ , заметим, что в силу неравенства треугольника:

$$\|f - f_h\| \leq \|f - g\| + \|g - g_h\| + \|f_h - g_h\| \quad \forall g \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

Ясно, что можно  $g$  можно подобрать, чтобы 1 и 3 слагаемые были маленькими, проблема лишь в том, чтобы уменьшить второе слагаемое.

*Доказательство.* Заметим, что для любой функции  $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ :

$$\begin{aligned} \|f_h - g_h\| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - h) - g(x - h)| dx = \{\text{выполним замену переменной } t = x - h\} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)| dt = \|f - g\| \end{aligned}$$

Тогда в качестве  $g$  возьмем ступенчатую функцию, которая приближает  $f$ . Осталось теперь доказать, что  $g$  можно приблизить  $g_h$ . Из теоремы о дизъюнктном представлении следует, что  $g$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^n a_k I_{Q_k}(x), \quad Q_k - \text{ячейка} \\ \|g - g_h\|_p &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot \|I_{Q_k} - I_{Q_k+h}\| \end{aligned}$$

Что стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ .

□

**Лемма 6.1.** Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  измеримая функция, тогда отображения

$$(x, y) \rightarrow f(x - y)$$

$$(x, y) \rightarrow f(x + y)$$

измеримы.

*Доказательство.* Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Обозначим за  $E_c = \{x \mid f(x) > c\}$ , оно является измеримым из условия леммы. Теперь рассмотрим следующее линейное отображение:

$$T : (x, y) \rightarrow (x - y, y).$$

Оно обратимо, так как определено обратное отображение  $T^{-1}((x, y)) = (x + y, y)$ . Осталось лишь заметить, что верно:

$$\{(x, y) \mid x - y \in E_c\} = T^{-1}(E_c \times \mathbb{R}^n) = \{(x, y) \mid f(x - y) > c\}.$$

Отсюда следует требуемое.

□

Теперь мы готовы к определению свертки функций и к доказательству корректности этого определения.

**Теорема 6.3.** Пусть  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Тогда

1. Для  $\lambda$ -почти всех  $x \in \mathbb{R}^n$  корректно определена функция (будет называть ее сверткой)  
 $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ .
2.  $f * g$  измерима в широком смысле.
3.  $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$
4.  $\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$

*Доказательство.* Рассмотрим следующую функцию:

$$H(x, y) = |f(x-y)| \cdot |g(y)|.$$

Ясно, что это неотрицательная, измеримая функция, тогда по теореме Тонелли:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} H(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx \right) dy.$$

Подробнее остановимся на втором интеграле, внутренний интеграл преобразуется так:

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx = |g(y)| \cdot \|f\|_{L_1}$$

Тогда весь интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx \right) dy = \|f\|_{L_1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy = \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1} < +\infty$$

Теперь применим теорему Фубини для  $F(x, y) = f(x-y)g(y)$ , так как выше мы показали, что  $F(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$ . Тогда пункты 1, 2 из нее сразу следуют. Покажем оставшиеся:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \right) dx = \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$$

□

Сформулируем еще одну теорему

**Теорема 6.4.** Пусть  $p \in [1, +\infty)$ ,  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Тогда:

1.  $f * g(x)$  корректно определена для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ .
2.  $f * g(x)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Докажем последовательно

1. По неравенству Гельдера получаем:

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_{p'}} < +\infty$$

2. Обозначим за  $(f * g)_h(x) = f * g(x - h)$ ,  $f_h(x) = f(x - h)$ . Верно равенство:

$$(f * g)_h(x) - f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y - h)g(y)dy - f * g(x) = f_h * g(x) - f * g(x)$$

Теперь оценим отклонение свертки при сдвиге:

$$|(f * g)_h(x) - f * g(x)| = |f_h * g(x) - f * g(x)| \leq \|f_h - f\| * |g(x)| \leq \|f - f_h\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L'_p}$$

Теперь по уже доказанному утверждению, получаем, что правая часть стремится к 0 и при этом оценка не зависит от  $x$ . Таким образом, требуемое доказано.

3. Осталось рассмотреть случаи, когда одно из  $p, p'$  равно  $+\infty$ . А именно рассмотрим случай, когда  $p = \infty, p' = 1$ . Для этого случая достаточно лишь заметить, что совершенно аналогично доказывается неравенство:

$$|f * g(x)| \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_\infty}$$

□

## 6.1 Аппроксимативная единица

**Определение 6.2.** Назовем семейство функций  $\{w_t(x)\}_{t \in (0, +\infty)}$  аппроксимативной единицей, если  $\forall t > 0$ :

1.

$$w_t(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2.

$$\int_{\mathbb{R}^n} w_t(x) dx = 1$$

3.

$$\forall \delta > 0 \lim_{t \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} w_t(x) dx = 0$$

**Пример.** Соболевской шапкой назовем следующую функцию:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-||x||^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$$