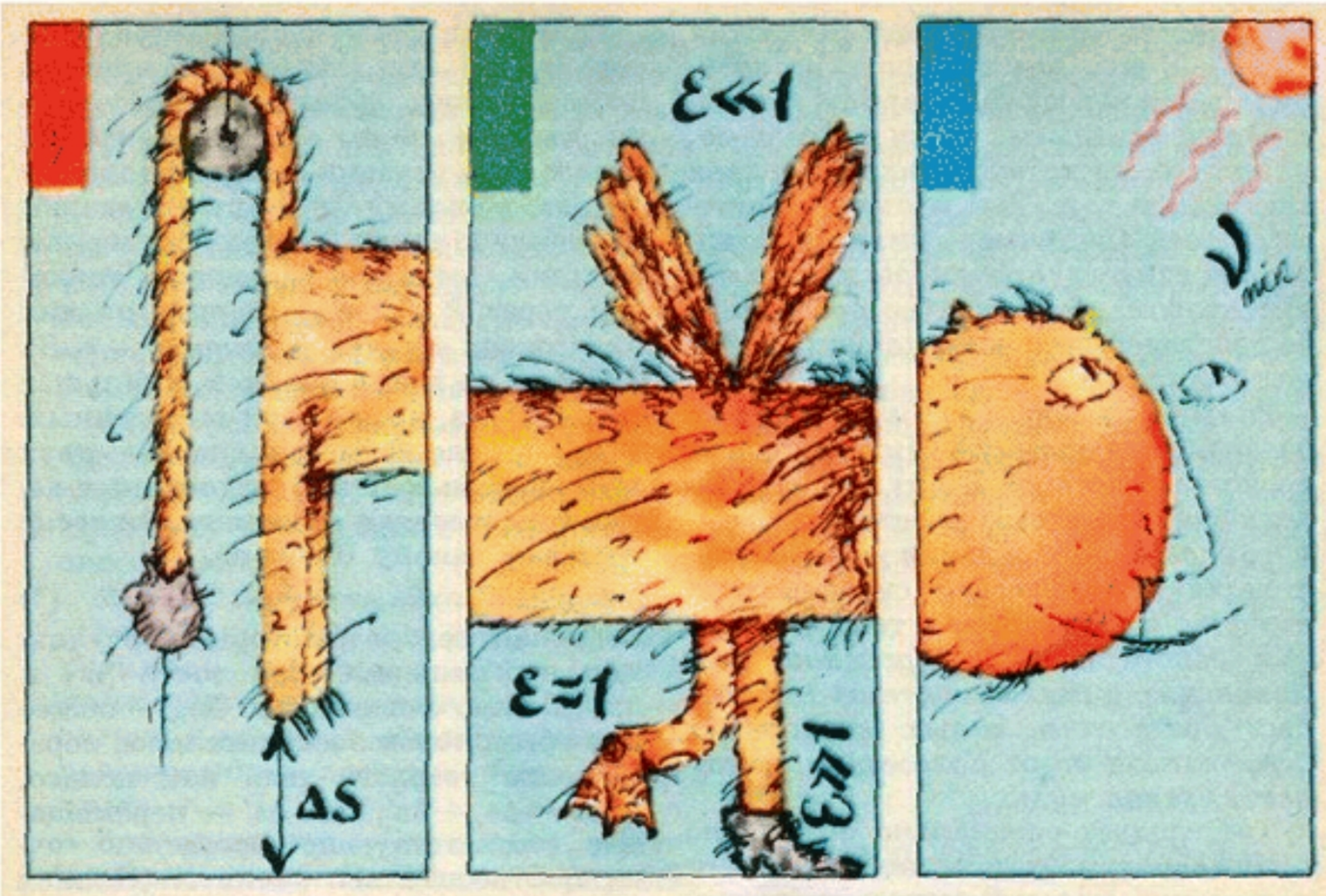
Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики



Лектор: Генерал теории Меры, Александр Иванович Тюленев

Для вас техали: *Потапов Станислав*,
Сысоева Александра,
Цеденов Артем,
Бадоля Пётр,
Баронов Михаил,
Шуминов Эзра
Петракова Анастасия
Наседкин Эрнест
Габидулин Андрей
Некрылов Леонид
Обухов Леонид
Тюленев Александр

Содержание

1 Введение

1.1 Полнота пространств L_p

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — пространство с мерой.

$p \in [1, +\infty]$

$\widetilde{L}_p(\mu)$ — полунормированное линейное пространство. Лишь *полу*нормированное потому, что равенство 0 интеграла в p-ой степени от функции не означает равенство 0 этой функции, а лишь равенство этой функции нулю почти всюду.

$L_p(\mu)$ — нормированное линейное пространство.

Это всё было в прошлом семестре, теперь же мы докажем полноту пространства L_p.

Напоминание. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, \forall m \geqslant N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

1. Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, но не каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу из своего пространства.

2. Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, называется полным.

3. *Числовая* последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Определение 1.1. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированое пространсвто (л.н.п.) Оно называется *полным*, если

$\forall$ фундаментальная (по норме $\|\cdot\|$) последовательность $\{x^n\}$ пространства E сходится по норме пространства E к некоторому элементу $x \in E$.

Определение 1.2. Дано $E = (E, \|\cdot\|)$ — л.н.п. Пара последовательностей $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S^k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S^k := \sum_{n=1}^{k} x^n,$$

называется формальным рядом в E. При этом $\{S^k\}_{k=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм ряда, а $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ — членами ряда. Часто пишут просто

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \text{ — формальный ряд.}$$

Примечание. В определении выше ряд мы называем *формальным* потому, что ещё не было ничего сказано про его сходимость.

Определение 1.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ называется сходящимся в л.н.п. E, если

$$\exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x^k \right\| \to 0, n \to \infty$$

Определение 1.4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ называется абсолютно сходящимся в л.н.п. E, если:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\| \text{ — сходится}$$

Теорема 1.1. *(Критерий полноты) E — л.н.п. полно $\Longleftrightarrow$ $\forall$абсолютно сходящийся в E ряд является сходящимся.*

Доказательство.
($\Longrightarrow$)

Пусть E полно и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится абсолютно $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$ — сходящийся числовой ряд, а значит последовательность частичных сумм фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n,m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=n}^{m} \|x^k\| < \varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника: $\left\|\sum\limits_{k=n}^{m} x^k\right\| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} \|x^k\| < \varepsilon$.
Тогда $\{S^n\}_{n=1}^{\infty}$ — поседовательность частичных сумм исходной последовательности фундаментальна в E.
Но E — полно $\Longrightarrow$ $\exists x \in E : \|x - S^n\| \to 0, n \to \infty$ $\Longrightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится в E
($\Longleftarrow$)
Пусть $\{x^n\}$ — фундаментальная последовательнота в E. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Берём $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_k = 2^{-k}$.
$\exists \{N_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N_k \hookrightarrow \|x^n - x^m\| \leqslant 2^{-k}.$$

Рассмотрим $\{x^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность последовательности $\{x^n\}$.
Возьмём $y_k := x^{N_{k+1}} - x^{N_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Положим $y_0 := x^{N_1}$.
Рассмотрим формальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$. В силу выбора подпоследовательности, если в качестве n выбрать N_k, а в качестве m выбрать N_{k+1}, то неравенство $\|x^n - x^m\| \leqslant 2^{-k}$ будет выполнено $\Longrightarrow$ $\|y_k\| \leqslant 2^{-k}$ $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ абсолютно сходится в E.
Но по условию доказываемого утверждения, любой *абсолютно сходящийся в E* ряд *сходится* в E, значит
ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ сходится $\Longrightarrow$ $\exists x \in E : \left\|x - \sum\limits_{k=0}^{l} y_k\right\| \to 0, l \to \infty$.
При этом

$$\sum_{k=0}^{l} y_k = y_0 + y_1 + \cdots + y_l = x^{N_1} + x^{N_2} - x^{N_1} + \cdots + x^{N_{l+1}} - x^{N_l} = x^{N_{l+1}}.$$

Объединив два последних результата, получим

$$\exists x \in E : \left\|x - x^{N_l}\right\| \to 0, l \to \infty.$$

В итоге доказали существование элемента $x \in E$ т.ч. к нему сходится подпоследовательности $\{x^{N_l}\}_{l=1}^{\infty}$.
Теперь остаётся воспользоваться условием фундаментальности и получить сходимость всей последовательности.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists L \in \mathbb{N} : \forall l \geqslant L \hookrightarrow \|x - x^{N_l}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant M \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N := \max\{L, M\} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \hookrightarrow \|x - x^n\| \leqslant \|x - x^{N_M}\| + \|x^{N_M} - x^n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Теорема 1.2. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$. *Тогда* $L_p(\mu)$ *полно.*

Доказательство. Разберём случай $p \in [1, +\infty)$. В силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что любой абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$ сходится в $L_p(\mu)$.

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ — абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$. То есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p$ сходится как числовой ряд. Используем неравенство Минковского:

$$\forall N \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

Определим $F_n := \left(\sum\limits_{k=1}^{N} |f_k|\right)^p$. Тогда $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ — монотонная (неубывающая) функциональная последовательность.

Напоминание. Монотонность функциональной последовательности — это монотонность последовательность по n при каждом фиксированом x.

Тогда по теореме Леви

$$\exists \lim_{N\to\infty} \left(\int\limits_X F_n(x) d\mu(x)\right)^{1/p} = \left(\int\limits_X \lim_{N\to\infty} F_n(x) d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$\Longrightarrow \left(\int\limits_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \text{ конечна при } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

При фиксированном x имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ — обычный числовой ряд, а для него из абсолютной сходимости следует сходимость.

$$\Longrightarrow \text{ при } \mu\text{-п.в.} x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ конечна.}$$

Положим $F(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, эта функция корректно определена μ-п.в. При этом μ — полная мера (меру считаем полной, если не было оговорено обратного).

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \text{ этот предел существует для } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

Остаётся доказать, что $\left\|F - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right\|_p \to 0, n \to \infty$. Обозначим n-ый член этой последовательности как J_n.

$$J_n = \left(\int\limits_X \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \textcircled{\leqslant}$$

Рассмотрим сумму ряда, как предел:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)|.$$

Вспомним лемму Фату:

$$\text{При } g_k \geqslant 0 \text{ верно} \int\limits_X \lim_{k\to\infty} g_k(x) d\mu(x) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_X g_k(x) d\mu(x).$$

Тогда по лемме Фату:

$$\left(\int\limits_X \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \textcircled{\leqslant} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\int\limits_X |f_k(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \to 0, n \to \infty.$$

Итого $J_n \to 0, n \to \infty$. □

1.2 Неполнота $\mathbb{R}\mathrm{L}_p$

Определение 1.5. Пусть $\mathbb{R}\mathrm{L}_p([a,b])$ — линейное пространство функций, p-ая степень модуля которых интегрируема по Риману.

Замечание. С таким определением это не является нормированным пространством. Чтобы сделать его нормированным, нужно аккуратно ввести класс эквивалентности.

Теорема 1.3. *Пространство* $\mathbb{R}\mathrm{L}_p([a,b])$ *неполно.*

Доказательство.
Без ограничения общности, $[a,b] = [0,1]$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Перенумеруем рациональные точки отрезка $[0,1]$: $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_k\}$.

$$G_n := \bigcup_{k=1}^{n} \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \cap [0,1].$$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Тогда χ_{G_n} интегрируема по Риману по критерию Лебега, потому что как характеристическая функция объединения конечного набора интервалов, пересечённых с отрезком, она обладает конечным числом разрывов.

Докажем, что χ_G имеет множество точек разрыва положительной меры Лебега. Для этого рассмотрим $F = [0,1] \setminus G$. Тогда $\chi_G(F) = 0$, но так как $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, во всех точках F функция χ_G разрывна. При этом по счётной полуаддитивности меры Лебега $\mathcal{L}^n(G) \leqslant \frac{1}{2}$, а значит $\mathcal{L}^n(F) \geqslant \frac{1}{2} > 0$.

Введём обозначения

$$E_k := \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \cap [0,1]$$

$$G_m^n := \bigcup_{k=n}^{m} E_k$$

(в новых обозначениях $G_n = G_n^1$) и покажем фундаментальность последовательности $\{\chi_{G_n}\}$:

$$\int_0^1 |\chi_{G_m}(x) - \chi_{G_n}(x)| dx = \text{так как } G_n \subseteq G_m = \int_0^1 \chi_{G_m \setminus G_n}(x) dx \leqslant \int_0^1 \chi_{G_m^n}(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_0^1 \chi_{E_k}(x) dx = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} \to 0, \text{ при } n, m \to \infty.$$

Итого, последовательность $\{\chi_{G_n}\} \subset \mathbb{R}\mathrm{L}_p([0,1])$ фундаментальна, но её предел χ_G не лежит в пространстве $\mathbb{R}\mathrm{L}_p([0,1])$, значит это пространство не полно. □

1.3 Функции ограниченной вариации

Определение 1.6. Пусть T — разбиение отрезка $[a,b]$, т.е.

$$T = \{x_i\}_{i=0}^{N_T}, \quad N_T \in \mathbb{N}$$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N_T} = b.$$

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $V_T(f)$ — вариация функции f по разбиению T

$$V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T - 1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

$$V_a^b(f) := \sup_{T \text{ - разбиение } [a,b]} V_T(f)$$

Определение 1.7. f называется функцией ограниченной вариации на $[a,b]$, если

$$V_a^b(f) < +\infty.$$

Обозначается $f \in BV([a,b])$. От английского Bounded Variation.

Теорема 1.4. $BV([a,b])$ — *линейное пространство.*

Доказательство.
Покажем, что $f_1, f_2 \in BV([a,b]) \implies \alpha f_1 + \beta f_2 \in BV([a,b])$. Пусть T — произвольное разбиение $[a,b]$. Тогда по неравенству треугольника

$$V_T(\alpha f_1 + \beta f_2) \leqslant |\alpha| V_T(f_1) + |\beta| V_T(f_2).$$

□

Лемма 1.1. *Если* $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *монотонна на* $[a,b]$, *то* $f \in BV([a,b])$ *и её* $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

Доказательство. Все $V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ одного знака, те модуль раскрывается оиднаково, а тогда соседние слагаемые друг друга уничтожают. □

Лемма 1.2. *Пусть* $-\infty < a < c < b < +\infty$. *Тогда*

$$f \in BV([a, b]) \Longleftrightarrow \begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$$

В случае, если $f \in BV([a, b])$, *тогда*

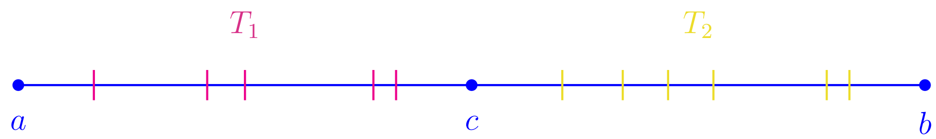
$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Доказательство.
Шаг 1. ($\Longrightarrow$) и $\geqslant$

Пусть $f \in BV([a, b])$. Обозначим:

- ▷ T_1 — произвольное разбиение $[a, c]$,
- ▷ T_2 — произвольное разбиение $[c, b]$.
- ▷ $T = T_1 \cup T_2$ — разбиение отрезка $[a, b]$.

Тогда имеем, что $V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_T(f) \leqslant V_a^b(f)$.



Взяв sup сначала по T_1, а потом по T_2, получим $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leqslant V_a^b(f)$.

Шаг 2. ($\Longleftarrow$) и $\leqslant$

Пусть $\begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$

Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^N$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$.

Если $c = x_{i^*}$ при некотором i^*, то это простой случай, так как тогда можно $\{x_j\}_{j=0}^{i^*}$ выбрать в качестве T_1, а $\{x_j\}_{j=i^*}^N$ выбрать в качестве T_2. И тогда очевидным образом $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$, а взяв sup по всем T получим $V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$.

Теперь рассмотрим более интересный случай, когда ни при каком i x_i не равно c. Тогда $c \in (x_i, x_i + 1)$ при некотором i.

$$\begin{aligned} V_T(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(c)| + |f(c) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \end{aligned}$$

Обозначим разбиения:

- ▷ $T_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, c\}$,
- ▷ $T_2 = \{c, x_{i+1}, \ldots, x_N\}$.

Тогда полученный ранее результат можно оценить как

$$\lesseqgtr V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Итого $V_T(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Взяв sup по всем T, получим:

$$\sup_T V_T(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

$$V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Если оба слагаемых в правой части конечны, то и V_a^b конечна. Итого из первого и второго пункта

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

□

Теперь воспользуемся этой леммой для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.5. *Пусть $f \in BV([a,b])$. Тогда функция $g(x) := V_a^x$ монотонно не убывает на $[a,b]$*

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда применим только что доказанную лемму, выбрав $a = a, c = x_1, b = x_2$.

$$V_a^{x_2}(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f)$$
$$V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f) \geqslant 0$$
$$g(x_2) - g(x_1) \geqslant 0$$
$$g(x_2) \geqslant g(x_1)$$

□

Теорема 1.6. *Пусть $f \in BV([a,b])$. Тогда $\exists f_1$ и f_2 монотонно неубывающие на $[a,b]$ такие, что $f = f_1 - f_2$.*

Доказательство. Определим $f_1(x) := V_a^x(f) \quad \forall x \in [a,b]$. По только что доказанной теореме это монотонно неубывающая функция.
Докажем, что функция $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ монотонно не убывает.

$$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b.$$

$$f_2(y)-f_2(x) = \Big[f_1(y)-f(y)\Big]-\Big[f_1(x)-f(x)\Big] = \Big[f_1(y)-f_1(x)\Big]-\Big[f(y)-f(x)\Big] \overset{(1)}{=} V_x^y(f)-[f(y)-f(x)].$$

(1) В силу аддитивности вариации по отрезкам
Заметим, что $V_x^y(f) = \sup\limits_T V_T(f) \geqslant V_{\{x,y\}}(f) = |f(y) - f(x)|$. Тогда предыдущее выражение не меньше 0, а значит f_2 не убывает. □

Следствие. $\forall f \in BV([a,b])$ имеет не более чем счётное множество точек разрыва, при том все они 1-го рода. (Из 1 семестра, помним что монотонная функция имеет не более чем счетное число точек разрыва, при том все они первого рода)

1.4 Абсолютно непрерывные функции

Определение 1.8. функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной на $[a,b]$, если

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\ \underline{\text{дизъюнктивной}} \text{ системы } \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{N} : \sum_{k=1}^{N} |a_k - b_k| < \delta(\varepsilon)$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

$AC([a, b])$ — множество всех абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций. От английского Absolutely Continuous.

Замечание. $f \in AC([a, b])$ является непрерывной на $[a, b]$. (Так как из абсолютной непрерывности следует равномерная непрерывность.) Обратное неверно

Контрпример.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \in C([0, 1])$, но $f \notin BV([0, 1])$, а значит по теореме, которая будет доказана ниже, $f \notin AC([0, 1])$.

Теорема 1.7. *Если $f \in AC([a, b])$, то $f \in BV([a, b])$.*

Доказательство. Запишем определение абсолютной непрерывности при $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta = \delta(1) > 0$: $\forall$ конечного попарно непересекающегося набора интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{N}$: $\sum\limits_{k=1}^{N} |b_k - a_k| < \delta \hookrightarrow \sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| < 1$.
Теперь разобъём отрезок $[a, b]$. Пусть $\mathbb{N} \ni M := \left[\frac{|b-a|}{\delta}\right] + 1$.

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= a + \frac{b-a}{M} \\ &\vdots \\ x_M &= a + b - a = b. \end{aligned}$$

То есть поделили отрезок $[a, b]$ на одинаковые куски.
Так как $x_{i+1} - x_i < \delta$ (специально для выполнение этого было взято достаточно большое M), то $\forall$ разбиение отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ образует естественным образом конечным набор дизъюнктных интервалов суммарной длины меньше δ, а значит по абсолютной непрерывности $V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < 1 \quad \forall i$
Тогда в силу аддитивности вариации

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{M-1} V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < \sum_{i=0}^{M-1} 1 = M < +\infty.$$

□

2 Ряды Фурье

Идея представления функции тригонометрическим рядом являлась одной из центральных на рубеже 18-19 веков. Однако, строгая теория оформилась лишь к началу 20-века.

2.1 Неформальная идея

Прежде чем переходить к строгим формулировкам, поясним неформально корни идей, лежащих в основе теории рядов Фурье.

Если $V := (V, < \cdot, \cdot >)$ – конечномерное евклидово пространство, а $\{e_n\}_{n=1}^N$ – ортогональный базис в V, то любой вектор $x \in V$ имеет следующее разложение по базису $\{e_n\}_{n=1}^N$:

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{< x, e_n >}{< e_n, e_n >} e_n. \tag{2.1.1}$$

Естественно поставить вопрос, имеется ли аналог (2.1.1) для бесконечномерных евклидовх пространств?

Оказывается, в некоторых важных случаях ответ на этот вопрос положительный. Более точно, если $H := (H, < \cdot, \cdot >)$ – бесконечномерное гильбертово пространство (то есть евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением), а $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в нем, то для всякого $x \in H$ имеем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< x, e_n >}{< e_n, e_n >} e_n. \tag{2.1.2}$$

При этом числа

$$c_n(x) := \frac{< x, e_n >}{< e_n, e_n >}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.3}$$

называются *коэффициентами Фурье элемента x по системе* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, а ряд в правой части (2.1.2) – *рядом Фурье элемента x по системе* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Частный случай гильбертова пространства – $L_2([-l, l])$, где $l > 0$ – фиксированное число. Действительно, скалярное произведение, порождающее L_2–норму, задается формулой (мы рассматриваем случай комплексного пространства)

$$< f, g > := \int_{-l}^{l} f(x)\overline{g}(x)\, dx.$$

Можно показать, что система функций

$$1, \sin(\frac{\pi x}{l}), \cos(\frac{\pi x}{l}), ..., \sin(\frac{\pi n x}{l}), \cos(\frac{\pi n x}{l}), ... \tag{2.1.4}$$

является ортогональным базисом в пространстве $L_2([-l, l])$. Иными словами, для любой функции $f \in L_2([-l, l])$ ее ряд Фурье сходится к ней в смысле среднего квадратичного. Кроме того, ортогональным базисом является также система комплексных экспонент

$$\{e^{\frac{i\pi k x}{l}}\}_{k \in \mathbb{Z}}. \tag{2.1.5}$$

Отметим, однако, что формально, при $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты

$$a_k(f) := \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos(\frac{\pi k x}{l})\, dx, \quad b_k(f) := \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin(\frac{\pi k x}{l})\, dx$$

имеют смысл для $f \in L_1([-l, l])$.

Примечание. Здесь и далее a_k, b_k это коффиценты перед косинусом и синусом соответсвенно, а c_k перед компелксной экспонентой.

2.2 Строгая теория

Определение 2.1. Гильбертово пространство — это вещественное линейное пространство H, на котором задано скалярное произведение

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющее следующим аксиомам для всех $x, y, z \in H$ и $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (симметричность),
2. $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ (линейность по первому аргументу),
3. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, причём $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$ (положительная определённость).

При этом пространство H считается **полным** по норме, индуцированной внутренним произведением:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

То есть всякая фундаментальная последовательность в H сходится в H.

Определение 2.2. (Топологический базис или базис Шаудера) Пусть у нас есть X - л.н.п, будем говорить что система ненулевых векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом Шаудера пространства X, если:

$$\forall x \in X \exists! \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R} \hookrightarrow \|x - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) e_k\| \to 0, N \to \infty$$

То есть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) e_k$. Из единственности в определнии следует линейная независимость системы векторов.

Без ограничения общности будем работать с элементами $f \in L_1([-\pi,\pi])$. Каждому такому элементу можно сопоставить формальный ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе

$$f \sim a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx),$$

а также по системе комплексных экспонент

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}.$$

При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим оператор n-ой частичной суммы ряда Фурье $S_n : L_1([-\pi,\pi]) \to C([-\pi,\pi])$. При $f \in L_1([-\pi,\pi])$ положим

$$S_n[f](x) := a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx).$$

2.3 Компактная форма записи

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x)\,dt, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где D_n — ядро Дирихле:

$$D_n(x) := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{2.3.2}$$

Свойства ядра Дирихле:
1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$;
2) D_n – четная 2π-периодическая функция.

2.4 Теорема Римана–Лебега

Докажем теперь важную теорему Римана–Лебега об осцилляции.

Примечание. (От редакторов) Эту теорему более наглядной делает ее более простая версия, без комплексных экспонент, а с тригонометрическими функциями, тогда мы понимаем что $y = \omega$ это "частота колебаний"нашего синуса:

Функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(\omega x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,dx = 0.$$

Теорема 2.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$–измеримое по Лебегу множество и $f \in L_1(E)$. Тогда*

$$I(y) := \int\limits_E f(x)e^{i<x,y>}\,dx \to 0, \quad \|y\| \to +\infty. \tag{2.4.1}$$

Доказательство. Будем считать функцию f продолженной нулем вне множества E. При $y \neq 0$ рассмотрим вектор $h = h(y) := \frac{\pi y}{\|y\|^2}$. Тогда сделав замену переменной $x = x' - h$ имеем

$$I(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i<x,y>}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x'-h)e^{-i\pi}e^{i<x',y>}\,dx' = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{i<x,y>}\,dx.$$

Таким образом, поскольку $h(y) \to 0$, $\|y\| \to \infty$, получим

$$2|I(y)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-h(y)))e^{i<x,y>}\,dx\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-h(y))|\,dx \to 0, \quad \|y\| \to +\infty. \tag{2.4.2}$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f \in L_1([-\pi,\pi])$, то

$$\lim_{k\to\infty} a_k(f) = \lim_{k\to\infty} b_k(f) = \lim_{k\to\infty} c_k(f) = 0.$$

2.5 Вторая теорема о среднем

В этом пункте мы докажем одно вспомогательное утверждение из теории интеграла Римана, которое будет очень важно при доказательстве достаточных условий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 2.2. *Пусть $g \in R([a,b])$, а f нестрого монотонна на $[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{2.5.1}$$

Если, кроме того, f неотрицательна на $[a,b]$, то справедливы более простые формулы:
а) если f нестрого убывает, то при некотором $\xi \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx; \tag{2.5.2}$$

б) если f нестрого возрастает, то при некотором $\xi \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{2.5.3}$$

Доказательство. Отметим, что $fg \in R([a,b])$, что легко следует из критерия Лебега. Поэтому, левые части формул (2.5.1)–(2.5.3) имеют смысл.

Мы докажем лишь формулу (2.5.2), поскольку (2.5.3) доказывается аналогично, а равенство (2.5.1) легко вытекает из (2.5.2) и (2.5.3).

Step 1. Итак, пусть f неотрицательна и нестрого убывает на $[a,b]$. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. То есть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогда, очевидно, в силу линейности интеграла Римана имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)\,dx\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx + \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(f(x)-f(x_i))g(x)\,dx =: \Sigma_1(T)+\Sigma_2(T).\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Step 2. Поскольку $g \in R([a,b])$, она ограничена на $[a,b]$. Следовательно, $\sup_{x\in[a,b]}|g(x)| < +\infty$. Легко видеть, что

$$\Big|\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(f(x)-f(x_i))g(x)\,dx\Big| \leqslant \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)|x_i - x_{i+1}|,$$

где $\omega_i := \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x')-f(x'')|$ – колебание функции f на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$. Таким образом, в силу критерия интегрируемости, имеем (здесь и далее через $l(T)$ обозначена мелкость разбиения T)

$$\Sigma_1(T) \to 0, \quad l(T) \to 0. \tag{2.5.5}$$

Step 3. Рассмотрим функцию $G(x) := \int\limits_a^x g(t)\,dt$. Очевидно, что G непрерывна на $[a,b]$. Используя преобразование Абеля, имеем (здесь использовано, что $G(x_0) = G(a) = 0$)

$$\begin{aligned}\Sigma_2(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1})-G(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i))\\ &= f(x_{n-1})G(b) + \sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1})-f(x_i))G(x_i).\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

В силу непрерывности G на $[a,b]$ найдутся константы m,M, для которых $m \leqslant G(x) \leqslant M$ при всех $x \in [a,b]$. Ключевое наблюдение состоит в том, что в силу невозрастания f, имеем $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geqslant 0$ при всех i. Суммируя сделанные наблюдения, имеем

$$\begin{aligned} mf(a) &= m\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + mf(x_{n-1}) \\ &\leqslant \Sigma_2(T) \leqslant M\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + Mf(x_{n-1}) = Mf(a). \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Из (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.7) следует, что $\exists \lim_{l(T)\to 0} \Sigma_1(T) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ и, кроме того,

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mf(a). \tag{2.5.8}$$

Step 4. Если $f(a) = 0$, то в силу (2.5.8) в качестве ξ можно взять любую точку отрезка $[a,b]$. Если $f(a) \neq 0$, то в силу теоремы о промежуточном значении, примененной к непрерывной функции G, из (2.5.8) выводим, что найдется точка $\xi \in [a,b]$, для которой

$$G(\xi) = \frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2.5.9}$$

Теорема полностью доказана.

3 Сходимость ряда Фурье в точке.

Мы начнём с формулировки общего критерия сходимости, не требующего знания конкретных свойств регулярности функций. Поэтому мы называем его “абстрактным”. Он бесполезен с практической точки зрения, поскольку по сути является переформулировкой определения. С другой стороны, такая формулировка окажется полезной при доказательстве конкретных признаков сходимости рядов Фурье.

Абстрактный критерий сходимости.

Комбинируя (2.3.1), (2.3.2), и пользуясь четностью ядра Дирихле, при $f \in L_1([-\pi,\pi])$ получим

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin(\frac{(t-x)}{2})} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} f(x-u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} f(x+u)\,du. \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

Лемма 3.1. *При $n \in \mathbb{N}$ и $u \in (-\pi,\pi)$ справедливо равенство*

$$D_n(u) = \frac{\sin(nu)}{\pi u} + \frac{1}{2\pi}(\cos(nu) + g(u)\sin(nu)), \tag{3.0.2}$$

где функция $g : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ не зависит от n и ограничена на интервале $(-\pi,\pi)$.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы, получим

$$D_n(u) = \frac{\sin(nu)\cos(\frac{u}{2})}{2\pi\sin(\frac{u}{2})} + \frac{\cos(nu)}{2\pi} = \frac{\sin(nu)}{\pi u} + \frac{1}{2\pi}(\cos(nu) + g(u)\sin(nu)), \tag{3.0.3}$$

где мы положили $g(0) = 0$ и

$$g(u) := \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{u}{2})} - \frac{2}{u}, \quad u \in (-\pi,\pi) \setminus \{0\}.$$

Нетрудно видеть, что g – нечетная на $(-\pi,\pi)$ и монотонно убывает. Поэтому, $|g(u)| \leqslant 2/\pi$ при всех $u \in (-\pi,\pi)$.

Лемма доказана.

Теперь мы готовы сформулировать “абстрактный” критерий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 3.1. *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *является* 2π*-периодичной, и* $f \in L_1([-\pi,\pi])$. *Ряд Фурье* f *сходится в точке* $x \in \mathbb{R}$ *к числу* $S \in \mathbb{R}$ *в том и только том случае, если существует* $\delta \in (0,\pi]$ *такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\delta \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{u}\,du = 0. \tag{3.0.4}$$

Доказательство. Нам будет удобно сделать несколько шагов.

Шаг 1. В силу леммы 3.1 мы можем переписать (3.0.1) в виде

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} f(x+u)\,du + \varepsilon_n[f](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} f(x-u)\,du + \varepsilon_n[f](x) \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{f(x-u)+f(x+u)}{2}\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du + \varepsilon_n[f](x), \end{aligned} \tag{3.0.5}$$

где мы положили (равенство справедливо в силу четности косинуса и в силу четности произведения $g(u)\sin(nu)$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_n[f](x) &:= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)(\cos(nu) + g(u)\sin(nu))\,du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)(\cos(nu) + g(u)\sin(nu))\,du. \end{aligned} \tag{3.0.6}$$

По теореме Римана–Лебега 2.4.1 имеем $\varepsilon_n[f](x) \to 0$, $n \to \infty$.

Шаг 2. Используя рассуждения предыдущего шага для $f \equiv 1$, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du = 1 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{3.0.7}$$

Шаг 3. Комбинируя (3.0.4) и (3.0.7), имеем

$$|S - S_n[f](x)| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du + o(1), \quad n \to \infty. \tag{3.0.8}$$

Шаг 4. Функция $1/u$ ограничена на интервале (δ,π) (при любом фиксированном $\delta > 0$). Следовательно, по теореме Римана–Лебега получим

$$\int\limits_{\delta}^{\pi} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du = o(1), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, учитывая четность функции $\sin(nu)/u$, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du &= 2\int\limits_{0}^{\delta}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du\\ &+ 2\int\limits_{\delta}^{\pi}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du\\ &= 2\int\limits_{0}^{\delta}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du+o(1),\quad n\to\infty.\end{aligned}\tag{3.0.9}$$

Комбинируя (3.0.8) и (3.0.9), получим (3.0.4).

Теорема доказана.

Теперь установим признак Дирихле–Жордана.

Теорема 3.2. *Если функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-периодична, и $f\in BV((a,b))\cap L_1([-\pi,\pi])$ для некоторого интервала (a,b), то её ряд Фурье сходится в каждой точке $x\in(a,b)$, причем*

$$S_n[f](x)\to\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\quad n\to\infty.$$

Доказательство. В силу теоремы о представлении функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций, достаточно рассмотреть случай, когда f не убывает.

Шаг 1. Зафиксируем точку $x_0\in(a,b)$. В силу теоремы 3.1 достаточно доказать, что при некотором $\delta>0$

$$I_n:=\int\limits_0^{\delta}\frac{\sin(nu)}{u}[f(x_0+u)-f(x+0)]\,du\to 0,\quad n\to\infty.$$

Шаг 2. По признаку Дирихле несобственный интеграл (понимаемый в смысле Римана или в смысле Лебега)

$$J:=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

является сходящимся. Поэтому существует постоянная $C>0$ такая, что

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\sin(nu)}{u}\,du\Big|=\Big|\int\limits_{nt_1}^{nt_2}\frac{\sin(t)}{t}\,dt\Big|\leqslant C\quad\forall t_1<t_2.\tag{3.0.10}$$

Шаг 3. Фиксируем $\varepsilon>0$ и выберем $\delta(\varepsilon)>0$ столь малым, что $U_\delta(x_0)\subset(a,b)$ и при этом $|f(x_0+0)-f(x_0+u)|<\frac{\varepsilon}{2C}$ при всех $u\in(0,\delta(\varepsilon))$. В силу второй теоремы о среднем имеем

$$I_n^1:=\int\limits_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{\sin(nu)}{u}[f(x_0+u)-f(x+0)]\,du=[f(x_0+\xi)-f(x+0)]\int\limits_{\xi}^{\delta(\varepsilon)}\frac{\sin(nu)}{u}\,du.$$

Отсюда и из (3.0.10) имеем $|I_n^1|<\varepsilon/2$.

Шаг 4. В силу теоремы Римана–Лебега 2.4.1 имеем существование такого числа $N_\varepsilon:=N(\delta(\varepsilon))\in\mathbb{N}$, что при $n\geqslant N_\varepsilon$

$$|I_n^2|:=\Big|\int\limits_{\delta(\varepsilon)}^{\delta}\frac{\sin(nu)}{u}[f(x_0+u)-f(x+0)]\,du\Big|<\varepsilon/2.$$

Шаг 5. Собирая вышеприведенные оценки, получаем, что $|I_n|<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N_\varepsilon$.

Теорема полностью доказана.

3.1 Признаки поточечной сходимости рядов Фурье (продолжение).

Определение 3.1. Будем говорить, что точка x_0 функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является регулярной, если в ней $\exists f(x_0 \pm 0)$ и $\exists f'_{\pm}(x_0)$.

Следствие (Из признака Дини)**.** Пусть дана 2π-периодическая функция $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Тогда если x_0 — регулярная точка функции f, то ряд Фурье f сходится в ней к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Для доказательства в силу признака Дини достаточно проверить, что $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\int_0^\delta |f(x_0+u) - f(x_0+0) + f(x_0-u) - f(x_0-0)| \frac{du}{u} < +\infty.$$

Поскольку

$$\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u} \to f'_+(x_0), u \to +0 \quad \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{u} \to f'_-(x_0), u \to +0.$$

То есть существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}\right| \in \left[\frac{|f'_+(x_0)|}{2}, 2|f'_+(x_0)|\right] \quad \left|\frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{u}\right| \in \left[\frac{|f'_-(x_0)|}{2}, 2|f'_-(x_0)|\right] \forall u \in (0, \delta).$$

А значит выполнено условие Дини и ряд сходится к полусумме односторонних пределов. □

Пример (Шварц)**.** Существует непрерывная 2π-периодическая функция такая, что её ряд Фурье расходится в нуле.
Определим функцию f как

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sin n_k t & t \in [t_k, t_{k-1}], k = 2, \dots. \end{cases}$$

где $n_k = 2^{k!}$, $t_1 = \pi$ и $t_k = \frac{2\pi}{n_k}$, $k > 1$. Определим $J_n[f]$ как

$$J_n[f](0) = \int_0^\pi \frac{\sin nt}{t} f(t) dt.$$

Исследуем поведение $J_n[f]$ на гармониках n_k:

$$J_{n_k}[f](0) = \int_0^\pi \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt = \int_0^{t_k} \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt + \int_{t_k}^{t_{k-1}} \frac{\sin^2 n_k t}{t\sqrt{k}} dt + \int_{t_{k-1}}^\pi \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt = F_k + J_k + H_k.$$

Рассмотрим для начала поведение интеграла J_k:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \sin^2 \tau \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \frac{1 - \cos 2\tau}{2\tau} d\tau.$$

где $A_k = 2\pi \frac{n_k}{n_{k-1}}$. Заметим, что

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos 2\tau}{\tau} d\tau.$$

сходится по признаку Дирихле, а значит

$$\exists C > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \int_{2\pi}^{A_k} \frac{\cos 2\tau}{2\tau} d\tau \right| < C.$$

С другой стороны,

$$\int_{2\pi}^{A_k} \frac{d\tau}{2\tau} = \ln \frac{A_k}{2\pi} = \frac{1}{2}(k! - (k-1)!) \ln 2 \geqslant \frac{k! \ln 2}{3}.$$

А значит

$$J_k \geqslant \frac{\ln 2}{3\sqrt{k}} k! + O(1).$$

Оценим H_k:

$$|H_k| \leqslant \int_{t_{k-1}}^{\pi} \ln \frac{\pi}{t_{k-1}} \ln \frac{n_{k-1}}{2} \leqslant (k-1)! \ln 2.$$

И последний интеграл:

$$|F_k| \leqslant \int_0^{t_k} \left| \frac{\sin n_k t}{t} f(t) \right| dt \leqslant \int_0^{t_k} \frac{|\sin n_k t|}{t} |f(t)| dt \leqslant \int_0^{t_k} |n_k f(t)| dt \leqslant \frac{n_k t_k}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \to 0, k \to +\infty.$$

Таким образом, получается:

$$J_{n_k}[f](0) \geqslant \frac{\ln 2}{3\sqrt{k}} k! + O(1) - (k-1)! \ln 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \geqslant (k-1)! \ln 2 (\frac{\sqrt{k}}{3} - 1) + O(1) \to +\infty, k \to +\infty.$$

А значит $S_{n_k}[f](0) \to +\infty, k \to +\infty$ и ряд Фурье функции f расходится в нуле.

3.2 Суммы Фейера.

Определение 3.2. Пусть дана 2π-периодическая $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Суммой Фейера для f будем называть

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_i[f].$$

Распишем подробнее сумму Фейера через выражение для ядер Дирихле:

$$\sigma_n[f](x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-u)}{\sin u/2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k + 1/2) u du.$$

В тоже время,

$$\frac{1}{\sin u/2} (\sin u/2 + \ldots + \sin(n - 1/2)u) \sin u/2 = \frac{1}{2 \sin u/2} (1 - \cos nu).$$

Определение 3.3. Ядром Фейера будем называть

$$\Phi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k = \frac{\sin^2 nu/2}{2\pi n \sin^2 u/2}.$$

Тогда сумма Фейера для f может быть записана как свёртка ядра Фейера и функции f:

$$\sigma_n[f](x) = \Phi_n * f = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-u) f(u) du.$$

Ядро Фейера можно также записать в виде

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(u) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|j|<k} e^{iku} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{iku}$$

Утверждение 3.1. *Нетрудно заметить некоторые свойства ядра Фейера:*

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \Phi_n \geqslant 0$.
- ▷ Φ_n *— 2π-периодичная функция.*
- ▷ *Поскольку* $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)du = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1.$$

- ▷ *Для ядра Фейера справедливо т.н. «фокусирующее свойство»: при всяком $\delta > 0$ и $\delta < |u| < \pi$ верно*

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nu/2}{\sin u/2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2\pi n \sin^2 \delta/2} \leqslant \frac{\pi}{2n\delta^2} \to 0, n \to +\infty.$$

Таким образом,

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \sup_{\delta<|u|<\pi} \Phi_n(u) \to 0, n \to +\infty.$$

Определение 3.4. Будем говорить, что для $\alpha \in (0,1)$ функция лежит в $H^\alpha(\mathbb{R})$ (т.е. удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α) если

$$\exists C > 0 \forall x', x'' \in \mathbb{R} \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''|^\alpha.$$

Теорема 3.3. *Пусть дана 2π-периодическая $f \in H^\alpha(\mathbb{R}), \alpha \in (0,1)$. Тогда ряд Фурье f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Более того,*

$$\Big|S_n[f](x) - f(x)\Big| \leqslant C \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для начала рассмотрим отклонения от суммы Фейера:

$$\sigma_n[f](x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\Phi_n(t)dt.$$

То есть

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\Phi_n(t)dt \leqslant \frac{C}{2\pi n}\int_0^\pi t^\alpha \cdot \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2 t/2}dt \leqslant (*)$$

Но, поскольку $\sin t/2 \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}$, то

$$(*) \leqslant \frac{C\pi}{2n}\int_0^\pi t^{\alpha-2}\sin^2(nt/2)dt = (*)$$

Теперь сделаем замену $nt/2 = u$ и получим

$$(*) = \frac{C\pi}{2n}\int_0^{\pi n/2}\left(\frac{2u}{n}\right)^{\alpha-2} \cdot \sin^2 u \cdot \frac{2u}{n}du \leqslant \frac{2^{\alpha-2}C\pi}{n^\alpha}\int_0^{\pi n/2}\frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}du.$$

Но $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}du$ сходится в несобственном смысле, а значит $\exists \widetilde{C} > 0$ такая, что

$$\left|\int_0^{\pi n/2}\frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}du\right| \leqslant \widetilde{C}.$$

И отклонение суммы Фейера от функции оценивается как

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| \leqslant \frac{M}{n^\alpha}.$$

Пусть $\varphi_n = f - \sigma_n[f]$. Тогда

$$\Big|S_n[f](x) - f(x)\Big| = \Big|S_n[\varphi_n](x) - \varphi_n(x)\Big|,$$

поскольку

$$S_n[\sigma_n[f]] = \sigma_n[f].$$

А это верно из того, что сумма Фейера – это тригонометрический полином n-ой степени. Тогда

$$\Big|S_n[f](x) - f(x)\Big| \leqslant |S_n[\varphi_n](x)| + |\varphi_n(x)| = (*)$$

Оценка для φ_n уже есть выше. Для оператора частичной суммы некоторой 2π-периодической функции g мы можем дать следующую оценку:

$$\begin{aligned} S_n[g](x) &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t)| \left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}\right| dt \leqslant \\ &\leqslant 2 \sup_{[-\pi,\pi]} |g| \cdot \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}\right| dt \leqslant \\ &\leqslant C_1 \sup |g| \int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{|\sin v|}{v} dv \leqslant \widetilde{C} \sup |g| \ln n. \end{aligned}$$

Таким образом

$$(*) \leqslant \widehat{C} \frac{M \ln n}{n^\alpha}.$$

Что доказывает равномерную сходимость и показывает требуемую оценку на отклонение частичной суммы. □

Замечание. Рассуждая аналогично, в случае $\alpha = 1$ можно получить более грубую оценку:

$$||S_n[f] - f||_{C([-\pi,\pi])} \leqslant \frac{C \ln^2 n}{n}.$$

Но на самом деле можно при условии $f \in LIP(\mathbb{R})$ справедлива более сильная оценка:

$$||S_n[f] - f||_C \leqslant \frac{C \ln n}{n}.$$

3.3 Теорема Фейера

Теорема 3.4. *Пусть* $f \in C([-\pi,\pi])$ *и* f – 2π - *периодична. Тогда* $\sigma_n[f] \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$.

Доказательство. В силу периодичности $\sigma_n[f]$ и f достаточно доказать, что $\sigma_n[f] \underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$. Поскольку $f \in C([-\pi,\pi]])$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна. Значит её модуль непрерывности стремится к нулю:

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x',x'' \in [-2\pi,2\pi] \\ |x'-x''|<\delta}} |f(x') - f(x'')| \to 0, \delta \to +0.$$

Формально, описанное выше выражение определено для $\delta \in (0, 4\pi)$. Запишем по определению сумму Фейера:

$$\sigma_n[f](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\Phi_n(x-t)dt \text{ , где } \Phi_n(t) \text{ — ядро Фейера.}$$

Тогда:

$$|\sigma_n[f](x)-f(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x)dt\right| \leqslant I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x-t)-f(t)|dt = I_1(\delta)+I_2(\delta).$$

$$I_1(\delta) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \leqslant \omega_\delta[f] \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \leqslant \omega_\delta[f].$$

В этой оценке мы ограничиваем сверху $|f(x-t)-f(t)|$ через модуль непрерывности, а $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \leqslant 1$.

$$I_2(\delta) = \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \Phi_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt.$$

Так как f — непрерывна на $[-2\pi, 2\pi]$, то $\exists\ M > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant M\ \forall x \in [-2\pi, 2\pi]$. Тогда можем оценить $|f(x-t)-f(x)| \leqslant |f(x)| + |f(x-t)| \leqslant 2M$.
Из вышеприведенного утверждения и того, что $\forall \delta > 0 \sup\limits_{\delta<|u|<\pi} \Phi_n(u) \to 0, n \to \infty$ и ограничения, описанного выше, получаем:

$$I_2(\delta) \leqslant 2M \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \Phi_n(t)dt \leqslant 2M \sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \Phi_n(t) \to 0, n \to \infty.$$

$\forall \varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что $I_1(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем, при фиксированном $\delta(\varepsilon)$ выберем $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таким, что $\forall n > N(\varepsilon)\ I_2(\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Итого, получается, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\delta(\varepsilon)) = \tilde{N}(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow I_n < \varepsilon$. □

Определение 3.5. Функция

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

называется тригонометрическим полиномом степени n, если $|a_n| + |b_n| \neq 0$.

Следствие (Первая теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $f \in C([-\pi, \pi]])$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ тригонометрический полином T_ε такой, что $||f - T_\varepsilon||_{C([-\pi,\pi])} \leqslant \varepsilon$.

Следствие (Теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $-\infty < a < b < \infty$ и $f \in C([a, b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ полином $P_\varepsilon[f]$ такой, что $||f - P_\varepsilon[f]||_{C([a,b])} < \varepsilon$.

Доказательство. Для удобства доказательства перенесем отрезок $[a, b]$ в отрезок $[0, \pi]$. Пусть $x \in [a, b]$, а $t \in [0, \pi]$. Обозначим $\varphi(x)$ — взаимно однозначная функция, преобразующая точку из первого отрезка в точку из второго отрезка. Тогда $x(t) = \varphi^{-1}(t) = a + \frac{b-a}{\pi}t$.
Заметим, что $f \circ \varphi \in C([0, \pi])$. Продолжим f чётным образом. Получим функцию $\tilde{f} \in C([-\pi, \pi])$

и $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$.
Применим теорему Фейера к функции $\tilde{f}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \sigma_n[\tilde{f}] \text{ такая, что } ||\tilde{f} - \sigma_n[\tilde{f}]||_{C([-\pi,\pi])} < \varepsilon.$$

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k[\tilde{f}] \text{ , где } S_k[\tilde{f}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j(\tilde{f})\cos(jx) + \sum_{j=1}^{k} b_j(\tilde{f})\sin(jx)$$

Вспомним, что $\cos(jx)$ и $\sin(jx)$ — аналитические $\forall j \in \mathbb{N}$. Следовательно, на любом отрезке $[-A, A] \subset \mathbb{R}$ к ним равномерно сходятся их ряды Тейлора. Тогда мы можем приблизить $\cos(jx)$ и $\sin(jx)$ полиномами Тейлора настолько, чтобы после сложения получилось что-то «небольшое». Обозначим $P_j(x)$ — полином Тейлора для $\sin(jx)$, а $Q_j(x)$ — полином Тейлора для $\cos(jx)$. Можно выбрать полиномы Тейлора так, чтобы существовали ε_j и $\tilde{\varepsilon_j}$ такие, что:

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |P_j(x) - \sin(jx)| < \varepsilon_j$$

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |Q_j(x) - \cos(jx)| < \tilde{\varepsilon_j}$$

И при этом выполнялось:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} |a_j|\varepsilon_j + |b_j|\tilde{\varepsilon_j}) < \varepsilon$$

Тогда, полагая

$$P_\varepsilon[\tilde{f}] := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j(\tilde{f})Q_j + b_j(\tilde{f})P_j)$$

$P_\varepsilon[f](t)$ «живет» на отрезке $[-\pi, \pi]$. Теперь мы хотим перенести его на $[0, 1]$.
Положим $t(x) = \frac{x-a}{b-a}\pi$. Тогда $P_\varepsilon[f] = P_\varepsilon[\tilde{f}](t(x))$ — искомый полином, так как $\tilde{f}(t(x)) = f(x)$. Тогда заметим, что $\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(t) - P_\varepsilon[\tilde{f}](t)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P_\varepsilon[f](x)| < \varepsilon$. □

3.4 Скорость убывания коэффициентов Фурье

Общая концепция: чем более гладкая функция, тем быстрее убывают коэффициенты Фурье.

Лемма 3.2 (Основная). *Пусть* $f \in \tilde{L_1}(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. *Тогда* $c_f(y) = f(x)e^{-ixy} = O(\frac{1}{n}), y \to \infty$.

Доказательство. Так как $f \in BV(\mathbb{R})$, то $f(x) = u(x) + v(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где $u(x)$ — нестрого возрастающая функция на $\mathbb{R}$, а $v(x)$ — нестрого убывающая функция на $\mathbb{R}$.
Тогда можно записать $\forall a, b : -\infty < a < b < \infty$:

$$c_{[a,b]}(y) = \int_a^b f(x)e^{-ixy}dx = \int_a^b u(x)e^{-ixy}dx + \int_a^b v(x)e^{-ixy}dx \Rightarrow$$

$$\exists\ \xi \in [a, b], \zeta \in [a, b] : c_{[a,b]}(y) = u(a + 0)\int_a^\xi e^{-ixy}dx + u(b - 0)\int_\xi^b e^{-ixy}dx+$$

$$+v(a + 0)\int_a^\zeta e^{-ixy}dx + v(b - 0)\int_\zeta^b e^{-ixy}dx.$$

Ключевое наблюдение: если $f \in BV(\mathbb{R})$ и интрегрируема, то $f(x) \to 0, x \to \infty$.
Пусть $f \nrightarrow 0$. Тогда $\exists C > 0$ такой, что $\forall \delta > 0\ \exists\ x : |f(x)| > C$. Но при этом, $f \in L_1(\mathbb{R})$, так как интегрируема. Тогда, $\exists\ \tilde{x} : |\tilde{x}| > \delta\ |f(\tilde{x})| < \frac{C}{2}$. Получаем противоречие, так как можно получить бесконечный набор точек $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$, которые мы набираем по описанному выше условию.
Ограничим:

$$\left|\int\limits_a^\xi e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|} \qquad \left|\int\limits_\xi^b e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|}$$

$$\left|\int\limits_a^\zeta e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|} \qquad \left|\int\limits_\zeta^b e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|}$$

$$u(a+0) \leqslant V_{\mathbb{R}}(f) \qquad u(b-0) \leqslant V_{\mathbb{R}}(f)$$

$$v(a+0) \leqslant V_{\mathbb{R}}(f) \qquad v(b-0) \leqslant V_{\mathbb{R}}(f)$$

Получаем: $|c_{[a,b]}(y)| \leqslant \frac{8V_{\mathbb{R}}(f)}{|y|}$ — оценка не зависит от выбора интервала $[a, b]$. Устремляя $a \to -\infty,\ b \to +\infty$, получаем требуемое. □

Теорема 3.5 (б/д)**.** *Пусть $F \in AC([a, b])$. Тогда F почти всюду имеет классическую производную и, более того, восстанавливается через свою производную по формуле Ньютона - Лейбница.*

Теорема 3.6 (Интегрирование по частям, б/д)**.** *Пусть $F \in AC([a, b]), g \in L_1([a, b])$. Тогда верна формула интегрирования по частям: $\int\limits_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b F'(x)G(x)dx$,*
где $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$

Следствие. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая, такая, что $f^{(k-1)} \in AC([-\pi, \pi])$. Пусть $f^{(k)}$ почти всюду существует и может быть изменена на множестве меры нуль таким образом, что $f^{(k)} \in BV([-\pi, \pi])$. Тогда $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{inx}dx = f(x)e^{-inx}\big|_{-\pi}^{\pi} + in\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Проделаем эту операцию k раз. Так как f — 2π-периодична и $f^{(k)} \in AC([-\pi, \pi])$ — тоже 2π-периодична:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}e^{-inx}dx = (in)^k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Но $f^{(k)}$ можно считать $BV([-\pi, \pi])$.
Рассмотрим функцию $F = \begin{cases} f^{(k)}(x), x \in [-\pi, \pi] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $F \in BV([-\pi, \pi])$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} F(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty$ в силу леммы. С учетом того, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{(in)^k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{inx}dx$ получаем требуемое.

□

4 Введение в теорию евклидовых пространств.

Определение 4.1. Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система из ненулевых векторов в нём. Тогда $\forall f \in E$ будем называть

$$\alpha_k(f) = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}, k \in \mathbb{N}.$$

коэффициентом Фурье элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Теорема 4.1 (минимальное свойство коэффициентов Фурье)**.** *Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Тогда $\forall f \in E \hookrightarrow$*

$$\inf_{\beta_1,\dots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\| = \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f) e_k \Big\|.$$

Доказательство. Пусть $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k(f) - \beta_k) e_k$, где β_i — произвольные вещественные коэффициенты. Под $S_n[f]$, как обычно, понимается n-ая сумма ряда Фурье, то есть $S_n[f] = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f) e_k$. Тогда

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|^2 = \Big\| f - S_n[f] + S_n[f] - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|^2 =$$
$$= \langle f - S_n + d_n, f - S_n + d_n\rangle = \langle f - S_n, f - S_n\rangle + 2\langle d_n, f - S_n\rangle + \langle d_n, d_n\rangle.$$

Заметим, что $\forall k \in \{1, \dots, n\} \hookrightarrow$

$$\langle e_k, f - S_n[f]\rangle = \langle e_k, f\rangle - \langle e_k, S_n[f]\rangle = \langle e_k, f\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle e_k, \alpha_j(f) e_j\rangle = \langle e_k, f\rangle - \langle e_k, \alpha_k(f) e_k\rangle = 0.$$

Значит, так как d_n — линейная комбинация e_k, то $2\langle d_n, f - S_n\rangle = 0$, и квадрат отклонения выражается как

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \|d_n\|^2, \qquad \|d_n\| \geqslant 0.$$

Значит $\forall \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R} \hookrightarrow$

$$\big\| f - S_n[f] \big\| \leqslant \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|.$$

Откуда

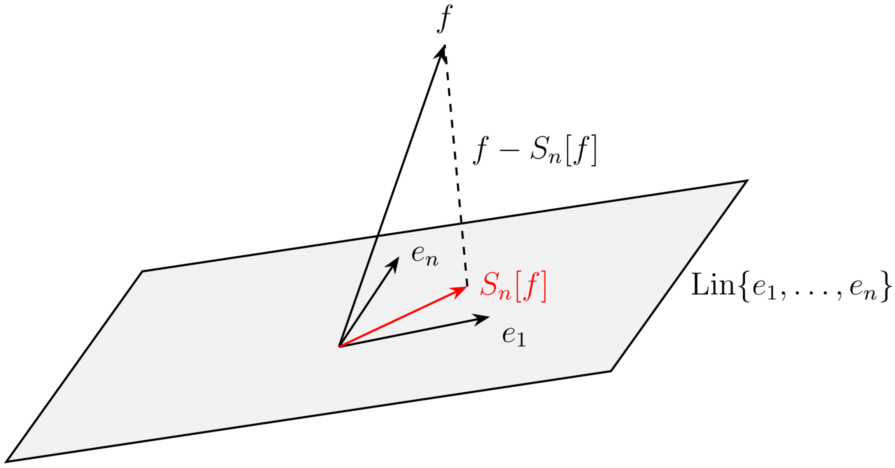
$$\big\| f - S_n[f] \big\| \leqslant \inf_{\beta_1,\dots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|.$$

А поскольку $S_n[f] = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f) e_k$, то

$$\big\| f - S_n[f] \big\| = \inf_{\beta_1,\dots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\| = \min_{\beta_1,\dots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|.$$

□

Примечание (Геометрическая интерпретация теоремы)**.** Рассмотрим линейную оболочку базисных векторов $\mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$. И тогда для произвольного вектора f среди всех возможных комбинаций наилучшее приближение дает именно сумма Фурье. То есть $S_n[f]$ — это просто ортогональная проекция f на линейную оболочку.
Это является ортогональной проекцией в силу того, что $\langle e_k, f - S_n[f]\rangle = 0 \; \forall k \in \{1, \ldots, n\}$.



Теорема 4.2 (О единственности)**.** *Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство и $f \in E$. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в E и $f = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$, где сходимость ряда понимается в смысле нормы. Тогда $\alpha_k = \alpha_k(f) \; \forall k \in \mathbb{N}$.*

Замечание. То есть никаких других, кроме коэффициентов Фурье, быть не может (это похоже на теорему о единственности для ряда Тейлора).

Доказательство. Пусть $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ (это пока не сумма Фурье, а просто «какая-то»).
Тогда по линейности и КБШ:

$$|\langle f, e_k\rangle - \langle S_n, e_k\rangle| = |\langle f - S_n, e_k\rangle| \leqslant \|f - S_n\|\|e_k\| \to 0, n \to +\infty.$$

А это значит $\forall k \in \mathbb{N} \; \exists \lim\limits_{n\to+\infty} \langle S_n, e_k\rangle = \langle f, e_k\rangle$. Но так как система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ортогональна, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \langle S_n, e_k\rangle = \alpha_k\langle e_k, e_k\rangle$. Откуда, приравнивая, получаем $\langle f, e_k\rangle = \alpha_k\langle e_k, e_k\rangle$.
В итоге:

$$\alpha_k = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} = \alpha_k(f).$$

□

Лемма 4.1. *Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Тогда $\forall f \in E \hookrightarrow$*

$$\|f\|^2 = \|f - S_n[f]\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2(f)\langle e_k, e_k\rangle,$$

где $S_n[f]$ — n-ая частичная сумма ряда Фурье по системе $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство минимальности, то есть рассмотрим

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \langle f - S_n[f] + S_n[f], f - S_n[f] + S_n[f]\rangle =$$
$$= \langle f - S_n[f], f - S_n[f]\rangle + 2\langle f - S_n[f], S_n[f]\rangle + \langle S_n[f], S_n[f]\rangle.$$

Отметим, что $2\langle f-S_n[f],S_n[f]\rangle=0$, так как $\langle e_k, f-S_n[f]\rangle=0\ \forall k$.
А в свою очередь

$$\langle S_n[f],S_n[f]\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(f)e_k,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(f)e_j\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k(f)\alpha_j(f)\langle e_k,e_j\rangle=\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k(f)\right)^2\langle e_k,e_k\rangle.$$

Итого получили, что хотели. □

Следствие (Неравенство Бесселя)**.** Пусть $E=(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Тогда $\forall f\in E\hookrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k(f)\right)^2\|e_k\|^2\leqslant\|f\|^2.$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы и неотрицательности нормы $\forall n\in\mathbb{N}\hookrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2(f)\|e_k\|^2\leqslant\|f\|^2.$$

Взятие супремума по $n\in\mathbb{N}$ завершает доказательство. □

Теорема 4.3 (Рисс, Фишер)**.** *Пусть $H=(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гильбертово пространство. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\alpha_k e_k$ сходится к некоторому элементу $f\in H$ в смысле евклидовой нормы.*
2. *Для некоторого $f\in H\hookrightarrow\alpha_k=\alpha_k(f)\ \forall k\in\mathbb{N}$.*
3. *Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|\alpha_k|^2\|e_k\|^2$ сходится.*

Доказательство. Будем идти по очереди:

- Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует в силу теоремы о единственности, то есть если $f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$, то $\alpha_k=\alpha_k(f)\ \forall k\in\mathbb{N}$ (этот некоторый элемент и будет разложенный f).
- Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) следует в силу неравенства Бесселя;
- Осталась импликация 3) $\Rightarrow$ 1). Именно тут и нужна будет Гильбертовость (то есть полнота). Пусть $m,n\in\mathbb{N}$ и $m>n$. Рассмотрим

$$\left\langle\sum_{k=n}^{m}\alpha_k e_k,\sum_{k=n}^{m}\alpha_k e_k\right\rangle=\left\|\sum_{k=n}^{m}\alpha_k e_k\right\|^2.$$

Раскроем скалярное произведение. В силу ортогональности системы и Критерия Коши сходимости числового ряда получаем:

$$\sum_{k=n}^{m}|\alpha_k|^2\cdot\|e_k\|^2\to 0,\quad n,m\to+\infty.$$

Тогда последовательность $\{S_n\}=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\}_{n=1}^{+\infty}$ — фундаментальна в H, а H полно $\Longrightarrow$ $\exists f\in H\colon f=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$, то есть ряд сходится к некоторому элементу.

□

Определение 4.2. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Система ненулевых векторов $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется полной в E, если $\forall f \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$: $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon$.

Замечание. Коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ идут после квантора всеобщности, то есть формально зависят и от f, и от ε.

Примечание. Всякий базис Шаудера является полной системой.
Обратное неверно: контрпримером является $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ в $C([-1, 1])$. Она полна по теореме Вейерштрасса, но не является базисом.
Предположим противное. Тогда для

$$f(x) = |x| \exists! \{c_k\}_{k=0}^{+\infty} : |x| = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k.$$

причём равенство понимается в равномерном смысле. Но тогда по теореме о дифференцируемости степенного ряда мы получаем дифференцируемость f в нуле – противоречие.

Определение 4.3. Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется замкнутой, если из ортогональности f каждому e_k следует то, что $f = 0$.

Теорема 4.4 («Основная» теорема.)**.** *Пусть $H = (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гильбертово пространство. Пусть $\{e_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — полна.*

2. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — базис.*

3. *$\forall f \in H$ ряд Фурье по системе $\{e_k\}$ сходится к f.*

4. *Справедливо равенство Парсеваля:*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2.$$

5. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — замкнута.*

Доказательство. Покажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).
Пусть $\Delta_n = \inf\limits_{\beta_1, \ldots, \beta_n} \left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|, n \in \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что $\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n \forall n \in \mathbb{N}$, поскольку занулением лишнего коэффициента сводится к предыдущей дельте. Тогда, из монотонности последовательности и неотрицательности каждого из её членов следует существование предела, равного инфинуму:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \Delta_n = \inf_n \Delta_n.$$

Поскольку по определению полноты $\forall f \in H \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$:

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\| < \varepsilon.$$

то $\inf\limits_n \Delta_n = 0$. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье $\Delta_n = \|f - S_n[f]\|$. А значит $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — базис (из существования предела Δ_n и теоремы о единственности).

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) верна по теореме о единственности – эти коэффициенты в единственном разложении по базису и будут коэффициентами ряда Фурье.
Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) следует из ранее доказанной леммы:

$$\|f\|^2 = \|f - S_n[f]\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(f)e_k| \langle e_k, e_k \rangle.$$

При устремлении n в бесконечность получаем равенство Парсеваля.
Заметим, что та же самая лемма даёт нам из выполнения равенства Парсеваля базисность системы, а значит 4) $\Rightarrow$ 2. Ранее было замечено, что из базисности системы векторов следует её полнота, то есть 2) $\Rightarrow$ 1). При этом, в вышеприведённых рассуждениях полнота нигде не использовалась, а значит $1), 2), 3), 4)$ эквивалентны и при условии отсутствия полноты.
Покажем 4) $\Rightarrow$ 5). Пусть существует $f \in H$ такой, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow f \perp e_k$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \alpha_k(f) = 0$ и $\|f\|^2 = 0$ по равенству Парсеваля. По определению нормы $f = 0$ и система замкнута.
Покажем 5) $\Rightarrow$ 1). Зафиксируем $f \in H$. Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k(f)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 < +\infty.$$

По теореме Рисса-Фишера ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f)e_k$ сходится к некоторому элементу $S \in H$. Заметим, что $\langle S, e_k \rangle = \alpha_k(f)\langle e_k, e_k \rangle$ — по теореме о единственности. Тогда $\langle S, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle \forall k \in \mathbb{N}$. Из замкнутости системы $\{e_k\}$ следует что $S - f = 0 \Rightarrow S = f$ и теорема доказана. □

Примечание. В неполных евклидовых пространствах система может быть замкнута, но не полна.
Введём обозначение $e_k = (0, \ldots, 1, 0, \ldots,)$ (где 1 стоит на k-ом месте).
И пусть $e = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$. Рассмотрим тогда подпространство l_2, которое обозначим за E и определим как

$$E = Lin(e, e_2, e_3, \ldots).$$

с индуцированным скалярным произведением. Очевидно, что E — неполно:

$$\| \left(e - \sum_{k=2}^{n} \frac{e_k}{k} \right) - e_1 \| \to 0, n \to +\infty.$$

но $e_1 \notin E$.
В E система $\{e_2, e_3, \ldots\}$ — замкнута (вектор $(c, 0, \ldots) \notin E$, а значит если вектор ортогонален всем e_k, то он равен 0), но не полна (e не выражается через e_k).

5 Аппроксимация функций

5.1 Аппроксимация в пространствах L_p

Для наших целей понадобится приближать наши функции другими, более понятными.

Определение 5.1. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если она является линейной комбинацией индикаторов ячеек.

Теперь докажем, что такое функции приближают по норме L_p.

Теорема 5.1. *Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо, $f \in L_p(E)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ ступенчатая функция } h_\varepsilon : ||f - h_\varepsilon||_{L_p(E)} < \varepsilon.$$

Идея доказательства: как обычно мы доказываем это сначала для простых функций, а позже для всех, сводя к уже доказанному с помощью приближений.

Доказательство. Разобьем доказательство на шаги:

1. Пусть $f = I_G$, где множество G имеет конечную меру. Тогда из определения верхней меры следует:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{P_k\}_{k=1}^{\infty} : \ \lambda^n(G) + \varepsilon \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k).$$
Теперь из сходимости ряда мер ячеек следует, что можно взять такой большой номер N :
$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^n(P_k) < \varepsilon.$$
По теореме о дизъюнктном представлении в полукольце существует набор непересекающихся $\{Q_l\}_{l=1}^{m} : \ P_1 \cup \ldots \cup P_N = \bigsqcup_{l=1}^{m} Q_l$. Обозначим за $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_k$, $B = P_1 \cup \ldots \cup P_N$. Тогда
$$I_B = \sum_{l=1}^{m} I_{Q_l}.$$
Возьмем в качестве приближающей ступенчатой функции I_B. Осталось доказать, что она приближает с точностью до ε по норме.
$$||f-h||_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_B(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_A(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_A(x) - I_B(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= (\lambda^n(A \setminus G))^{\frac{1}{p}} + (\lambda^n(A \setminus B))^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

2. Если f – простая, то есть линейная комбинация индикаторов множеств конечной меры, явно сводится к пункту 1 с помощью неравенства треугольника.

3. $f \in L_p(E)$ произвольная, тогда из определения интеграла Лебега можно ее приблизить простой с точностью до $\varepsilon/2$,а простые мы уже умеем приближать ступенчатыми с точностью до $\varepsilon/2$. Осталось применить неравенство треугольника и требуемое будет доказано.

□

Теперь мы можем показать непрерывность интеграла Лебега по сдвигу.

Теорема 5.2 (Непрерывность по сдвигу). *Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:*
$$||f(x) - f(x-h)||_{L_p} \to 0, h \to 0$$

Идея доказательства: Обозначим за $f_h(x) = (x - h)$, заметим, что в силу неравенства треугольника:
$$||f - f_h|| \leqslant ||f - g|| + ||g - g_h|| + ||f_h - g_h|| \ \forall g \in L_p(\mathbb{R}^n)$$
Ясно, что можно g можно подобрать, чтобы 1 и 3 слагаемые были маленькими, проблема лишь в том, чтобы уменьшить второе слагаемое.

Доказательство. Заметим, что для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$||f_h - g_h|| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - g(x-h)|dx = \{\text{выполним замену переменной } t = x - h\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)|dt = ||f - g||$$

Тогда в качестве g возьмем ступенчатую функцию, которая приближает f. Осталось теперь доказать, что g можно приблизить g_h. Из теоремы о дизъюнктном представлении следует, что g можно представить в виде:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{Q_k}(x),\ Q_k - \text{ячейка}$$

$$||g - g_h||_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot ||I_{Q_k} - I_{Q_k+h}||$$

Что стремится к нулю при $h \longrightarrow 0$. □

5.2 Свёртка функций

Лемма 5.1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ измеримая функция, тогда отображения*

$$(x, y) \mapsto f(x - y)$$

$$(x, y) \mapsto f(x + y)$$

измеримы как отображения $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Обозначим за $E_c = \{x|\ f(x) > c\}$, оно является измеримым из условия леммы. Теперь рассмотрим следующее линейное отображение:

$$T : (x, y) \longrightarrow (x - y, y).$$

Оно обратимо, так как определено обратное отображение $T^{-1}((x, y)) = (x + y, y)$. Осталось лишь заметить, что верно:

$$\{(x, y)|x - y \in E_c\} = T^{-1}(E_C \times \mathbb{R}^n) = \{(x, y)|\ f(x - y) > c\}.$$

Отсюда следует требуемое. □

Теперь мы готовы к определению свертки функций и к доказательству корректности этого определения.

Теорема 5.3. *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1. *Для $\lambda-$почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ корректно определена функция (будет называть ее сверткой) $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$.*

2. *$f * g$ измерима в широком смысле.*

3. *$f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$*

4. *$||f * g||_{L_1} \leqslant ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1}$*

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$H(x,y) = |f(x-y)| \cdot |g(y)|.$$

Ясно, что это неотрицательная, измеримая функция, тогда по теореме Тонелли:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} H(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx \right) dy.$$

Подробнее остановимся на втором интеграле, внутренний интеграл преобразуется так:

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx = |g(y)| \cdot ||f||_{L_1}$$

Тогда весь интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx \right) dy = ||f||_{L_1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)dy = ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1} < +\infty$$

Теперь применим теорему Фубини для $F(x,y) = f(x-y)g(y)$, так как выше мы показали, что $F(x,y) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда пункты $1, 2$ из нее сразу следуют. Покажем оставшиеся:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|dy \right) dx = ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1}$$

□

Сформулируем еще одну теорему

Теорема 5.4. *Пусть* $p \in [1, +\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, *где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Тогда:*

1. $f * g(x)$ *корректно определена для всех* $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $f * g(x)$ *равномерно непрерывна на* R^n.

Доказательство. Докажем последовательно

1. По неравенству Гельдера получаем:

$$|f * g(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|dy \leqslant ||f||_{L_p} \cdot ||g||_{L_{p'}} < +\infty$$

2. Обозначим за $(f * g)_h(x) = f * g(x-h), f_h(x) = f(x-h)$. Верно равенство:

$$(f * g)_h(x) - f * g(x) = \int_{R^n} f(x-y-h)g(y)dy - f * g(x) = f_h * g(x) - f * g(x)$$

Теперь оценим отклонение свертки при сдвиге:

$$|(f * g)_h(x) - f * g(x)| = |f_h * g(x) - f * g(x)| \leqslant ||f_h - f| * g(x)| \leqslant ||f - f_h||_{L_p} \cdot ||g||_{L_p'}$$

Теперь по уже доказанному утверждению, получаем, что правая часть стремится к 0 и при этом оценка не зависит от x. Таким образом, требуемое доказано.

3. Осталось рассмотреть случаи, когда одно из p, p' равно $+\infty$. А именно рассмотрим случай, когда $p = \infty, p' = 1$. Для этого случая достаточно лишь заметить, что совершенно аналогично доказывается неравенство:

$$|f * g(x)| \leqslant ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_\infty}$$

□

5.3 Аппроксимативная единица.

Определение 5.2. Семейство функций $\{w_t\}_{t\in(0,+\infty)}$ называется аппроксимативной единицей если

- $\forall t \in (0,+\infty) \hookrightarrow w_t \geqslant 0$.
- $\forall t \in (0,+\infty) \hookrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} w_t d\mathcal{L}^n = 1$
- Выполнено фокусирующее свойство:

$$\forall \delta > 0 \exists \lim_{t\to+0} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(0)} w_t d\mathcal{L}^n = 0.$$

Пример (Соболевская аппроксимативная единица)**.** Соболевской «шапкой» будем называть функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x^2\|}\right), & \|x\| < 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция $\psi \in C^{+\infty}$ и её носитель – замкнутый единичный шар.
Пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = c$.
Обозначим за $w = \psi/c$. Тогда w – неотрицательная, бесконечно гладкая функция с компактным носителем и единичным интегралом по всему пространству.
Положим по определению $w_\varepsilon(x) = w(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$. Семейство функций $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,+\infty)}$ является аппроксимативной единицей.

Следствие. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Усреднением f по Соболеву будем называть функцию $f_\varepsilon = f * w_\varepsilon$. По предыдущей теореме, f_ε – всюду корректно определённая равномерно непрерывная функция.

Примечание. Далее в курсе будет доказано, что $f_\varepsilon \in C^{+\infty}$.

Теорема 5.5. *Пусть $p \in [1,+\infty)$ и $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists h \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \|f-h\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу свойств интеграла Лебега

$$\exists R > 0 \hookrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)} |f|^p(x)dx\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Рассмотрим $g = \chi_{B_R(0)} f$. Тогда при достаточно малых δ верно, что

$$\|g * w_\delta - g\|_p < \varepsilon.$$

Поскольку $\operatorname{supp} w_\delta \subset \overline{B}_\delta(0)$ и $\operatorname{supp} g * w_\delta \subset \overline{B}_{R+\delta}(0)$.
И тогда, по замечанию, $g * w_\delta \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$.
Осталось показать что $\|g * w_\delta - g\|_p \to 0, \delta \to +0$. По определению свёртки:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g*w_\delta(x) - g(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)w_\delta(y)dy - 1\cdot g(x)\right|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)w_\delta(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)w_\delta(y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} (g(x-y)-g(y))w_\delta(y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)-g(x)| w_\delta^{1/p}(y) w_\delta^{1/p'}(y)dy\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)-g(x)|^p w_\delta(y)dy\right)dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} w_\delta^{p'/p'}(y)dy\right)^{p/p'} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)-g(x)|^p w_\delta(y)dy\right)dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} w_\delta(y) \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)-g(x)|^p dx dy\right)^{1/p}.$$

В силу непрерывности интеграла Лебега по сдвигу $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)-g(x)|^p dx \to 0. y \to 0$, а значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \|y\| < \delta(\varepsilon) \hookrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)-g(x)|^p dx < \varepsilon.$$

Из чего и следует требуемая оценка. □

6 Интегралы зависящие от параметра

Интегралы, зависящие от параметра, бывают собственные и несобственные. Для начала рассмотрим собственные и дадим некоторые неформальные комментарии.

6.1 Собственные интегралы зависящие от параметра

Определение 6.1. Пусть $X = (X, \mathfrak{M}, \mu)$ - пространство с мерой, Y - параметрическое множество, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ функция, такая что $\forall y \in Y$ она будет интегрируемой, то есть $f \in L_1(X)$, тогда введём функцию $J(y) := \int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ - собственный интеграл Лебега, зависящий от параметра.

Нас будут интересовать следующие вопросы:

- ▷ Когда можно интегрировать по параметру?
- ▷ Когда можно переходить к пределу по параметру?
- ▷ Когда можно дифференцировать по параметру?

Мы будем исследовать правила, при которых можно менять порядок интеграла и операции примененной к функции. Начнем с интегрирования.

6.1.1 Когда можно интегрировать по параметру?

Ответом на этот вопрос фактически является Теорема Фубини.

Теорема 6.1. *Пусть дополнительно известно, что $Y = (Y, \mathfrak{N}, \nu)$ - пространство с мерой, а также $f \in L_1[(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mu \otimes \nu)]$. Тогда J интегрируема на Y и справедлива формула:*

$$\int\limits_Y J(y) d\nu(y) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \iint\limits_{X \times Y} f(x,y) d\mu \otimes \nu(x,y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

6.1.2 Когда можно переходить к пределу по параметру?

Теорема 6.2. *Пусть дополнительно известно, что $Y = (Y, d)$ - метрическое пространство. y_0 - предельная точка в Y, а также пусть $\exists \widetilde{X} \subset X$, т.ч. $\mu(X \backslash \widetilde{X}) = 0$, а также:*

1. $\forall x \in \widetilde{X} \quad \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \overline{f}(x)$
2. $\exists g(x) \in L_1(X)$ *т.ч. при некотором* $\delta > 0 \quad |f(x,y)| \leqslant g(x) \quad \forall x \in \widetilde{X}$ *и* $\forall y \in \mathring{B}_\delta(y_0)$

Тогда $\overline{f} \in L_1(X)$ и можно переставлять местами предел и интеграл.

Доказательство. Т.к. определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны в метрических пространствах, нам достаточно показать, что $\forall\{y_n\} \subset Y \backslash y_0$, т.ч. $y \to y_0, \quad n \to \infty$ выполнено, что

$$(*) \qquad \exists \lim_{n\to\infty} J(y_n) = \int\limits_X \overline{f}(x)d\mu(x)$$

.

Т.к. $\{y_n\}$ сходится у y_0, то $\exists N \in \mathbb{N}$, т.ч. $y_n \in \mathring{B}_\delta(y_0) \quad \forall n \geqslant N$.

Тогда определим последовательность функций $g_k(x) := f(x, y_{k+N})$, тогда по условию 1 теоремы, почти всюду

$$\exists \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \overline{f}(x) \quad \forall x \in \widetilde{X}$$

и более того, в силу условия 2, верно

$$|g_k(x)| \leqslant g(x) \quad \forall x \in \widetilde{X}$$

Тогда по теореме Лебега получим формулу (*), но т.к. последовательность выбрана произвольно, значит доказано для любой. $\square$

6.1.3 Когда можно дифференцировать по параметру?

Теорема 6.3. *Пусть дополнительно известно, что $Y = \lceil c,\, d\rfloor$ - промежуток, точка $y_0 \in \lceil c,\, d\rfloor$, а также пусть $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ т.ч. $\exists \widetilde{X} \subset X : \mu(X \backslash \widetilde{X}) = 0$ и $\exists f'_y(x, y) \quad \forall x \in \widetilde{X} \quad \forall y \in Y$. Пусть f'_y удовлетворяет условию (L) в окрестности точки y_0. Тогда функция J дифференцируема в точке y_0 и справедлива формула:*

$$\frac{dJ}{dy}(y_0) = \frac{d}{dy}\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)\Bigg|_{y=y_0} = \int\limits_X f'_y(x, y_0)d\mu(x).$$

Доказательство. Фиксируем $h \in \mathbb{R}$ такой, что $y_0 + h \in \lceil c,\, d\rfloor$. Тогда распишем производную по определению

$$\frac{J(y_0+h) - J(y_0)}{h} = \int\limits_X \frac{f(x, y_0+h) - f(x,y_0)}{h} d\mu(x) := \int\limits_X F(x,h)d\mu(x)$$

Заметим, что $\exists \lim\limits_{h\to 0} F(x,h) \Leftrightarrow \exists f'_y(x, y_0)$. В свою очередь условие (L) для f'_y означает, что $\exists\delta > 0$ т.ч. $\forall y \in U_\delta(y_0) \cap \lceil c,\, d\rfloor$ выполняется $\left|f'_y\right| \leqslant g(x)$, где $g \in L_1(X)$. Теперь мы хотим свести нашу задачу к предыдущей теореме. Чтобы переставить предел и интеграл, нам надо проверить условие локальной интегрируемости функции $F(x,h)$ в окрестности нуля. Для этого нужно найти мажоранту. При каждом $x \in \widetilde{X}$ применим к функции $f(x,\cdot)$ теорему Лагранжа о среднем:

$$F(x,h) = f'_y(x, \xi(x,h)) \qquad \xi(x,h) \in (y_0,\, y_0+h)$$

Также верно, что $\xi(x,h) \in \mathring{U}_\delta(y_0) \cap \lceil c,\, d\rfloor$

Так как f'_y удовлетворяет условию (L), если $|h| < \delta$ и $y_0 + h \in \lceil c,\, d\rfloor$, то

$$|F(x,h)| = |f'_y(x,h)| \leqslant g(x)$$

Таким образом, получим, что условие (L) выполнено для функции F в нуле. Значит, применяя предыдущую теорему, получим

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{J(y_0+h) - J(y_0)}{h} = \int\limits_X \lim_{h\to 0} F(x,h)d\mu(x) = \int\limits_X f'_y(x,y)d\mu(x)$$

$\square$

6.2 Несобственные интегралы зависящие от параметра

Определение 6.2. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in L_1([a,\, b'])\quad \forall b' < b$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)dx \in \mathbb{R}$, то говорят, что несобственный интеграл Лебега от f на $[a,\, b)$ сходится и обозначают $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$

Замечание. Типичный пример несобственного интеграла Лебега

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Этот интеграл не будет сходится в смысле обычного лебеговского интеграла, но существует несобственный интеграл Лебега, и его значение совпадает с римановским.

Определение 6.3. Пусть Y - параметрическое множество, $f : [a,\, b) \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ функция, такая что $\forall y \in Y \quad \exists \int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt$, тогда отображение $J(y) = \int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt$ - несобственный интеграл Лебега , зависящий от параметра.

Нас, в целом, будут интересовать те же вопросы, но ситуация осложняется особенностью на конце.

6.2.1 Когда можно переходить к пределу по параметру?

Определение 6.4. Будем говорить, что $\int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt$ сходится равномерно по $y \in Y$, если $\forall y \in Y$ он сходится и при этом $\sup \left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(t,y)dt \right| \to 0,\ b' \to b - 0$

Теорема 6.4. *Пусть дополнительно известно, что Y - метрическое пространство, а $y_0 \in Y$ - предельная точка. Пусть $f : Y \times [a,\, b) \to \overline{\mathbb{R}}$, т.ч. почти всюду на $[a,\, b) \quad \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(t,y) =: \overline{f}(t)$. Пусть также выполнены следующие условия:*

1. *$\forall b' \in (a,\, b) \quad \overline{f} \in L_1([a,\, b'])$*
2. *$\forall b' \in (a,\, b) \quad \exists \lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^{b'} f(t,y)dt = \int\limits_a^{b'} \overline{f}(t)dt$*
3. *Пусть $\int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt$ сходится равномерно по параметру y.*

Тогда $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt = \int\limits_a^{\to b} \overline{f}(t)dt$ (*).

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, тогда из условия 2 $\Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0$ т.ч. $\forall y \in \mathring{B}_\delta(y_0)$ выполняется

$$(\vee) \qquad \left| \int\limits_a^{b'} f(t,y)dt - \int\limits_a^{b'} \overline{f}(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Заметим, что из условия 3 $\Rightarrow \forall \varepsilon \quad \exists b(\varepsilon) \in (a,\, b)$, т.ч. $\forall y \in Y$ выполнено

$$\left| \int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t,y)dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Покажем, что $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt$. Для этого проверим условие Коши: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, b(\varepsilon)) \Rightarrow \forall y', y'' \in \overset{\circ}{B}_\delta(y_0)$ выполнено

$$\left|\int\limits_a^{\to b} f(t,y')dt - \int\limits_a^{\to b} f(t,y'')dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t,y')dt\right| + \left|\int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t,y'')dt\right| + \left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t,y')dt - \int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t,y'')dt\right|$$

Учитывая результаты полученные выше

$$\left|\int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t,y')dt\right| + \left|\int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t,y'')dt\right| + \left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t,y')dt - \int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t,y'')dt\right| < \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

Условие Коши выполнено, значит предел существует.
Теперь покажем справедливость (*)
$(\vee) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ выполняется

$$\left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} \overline{f}(t)dt - \lim_{y\to y_0} J(y)\right| \leqslant \left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} \overline{f}(t)dt - \int\limits_a^{\to b} \overline{f}(t,y)dt\right| + \left|\int\limits_a^{\to b} \overline{f}(t,y)dt - \lim_{y\to y_0} J(y)\right| \qquad \forall y \in B_\delta(y_0)$$

Из показанного выше известна оценка $\left|\int\limits_a^{\to b} \overline{f}(t,y)dt - \lim\limits_{y\to y_0} J(y)\right| < \varepsilon$. Для первого слагаемого оценка получается следующим образом

$$\left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} \overline{f}(t)dt - \int\limits_a^{\to b} \overline{f}(t,y)dt\right| \leqslant \left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} \overline{f}(t,y)dt - \int\limits_a^{b(\varepsilon)} \overline{f}(t)dt\right| + \left|\int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t,y)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит в результате получим

$$\left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} \overline{f}(t)dt - \lim_{y\to y_0} J(y)\right| < 2\varepsilon$$

Что доказывает требуемое равенство. □

6.2.2 Интегрирование несобственного интеграла по параметру.

Теорема 6.5. *Пусть $Y = (Y, \mathfrak{N}, \nu)$ – пространство конечной меры и задана*

$$f : [a,b) \times Y \to \overline{\mathbb{R}}.$$

такая, что $\forall y \in Y$ интеграл $\int_a^{\to b} f(t,y)dt = J(y)$ – сходится, $\int_a^{\to b} f(t,y)dt$ сходится равномерно по параметру и $\forall b' \in (a,b) \hookrightarrow f \in L_1(\mathcal{L}^1 \otimes \nu)$. Тогда $J(y) \in L_1(Y)$ и верно следующее утверждение:

$$\int_Y J(y)d\nu = \int_a^{\to b} \int_Y f(t,y)d\nu(y)dt.$$

Доказательство. По определению

$$J(y) = \lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(t,y)dt = \lim_{b' \to b-0} F(b', y).$$

По теореме Фубини при фиксированном b' мы можем проинтегрировать $F(b', y)$, то есть $\exists \int_Y F(b', y)d\nu(y)$
С другой стороны, J – равномерный предел семейства функций $\{F(b', \cdot)\}_{b' \in (a,b)}$, а следовательно $\exists b^*$ такой, что

$$\forall b' \in (b^*, b) \hookrightarrow |J(y) - \int_a^{b'} f(t,y)dt| < 1.$$

Поскольку мера пространства конечна, то

$$\int_Y |J(y)|d\nu(y) \leqslant \int_Y \left| J(y) - \int_a^{b'} f(t,y)dt \right| d\nu(y) + \int_Y \left| \int_a^{b'} f(t,y)dt \right| d\nu(y) < +\infty.$$

А значит $J(y) \in L_1(Y)$.
Покажем теперь справедливость равенства. Введём обозначение $I(t) = \int_Y f(t,y)d\nu(y)$.
По теореме Фубини $\forall t \in (a,b) \hookrightarrow$

$$\int_a^t I(x)dx = \int_Y \int_a^t f(x,y)dxd\nu(y) = \int_Y \left(J(y) - \int_t^{\to b} f(x,y)dx \right) d\nu(y).$$

Но, тогда,

$$\left| \int_a^t I(x)dx - \int_Y J(y)d\nu(y) \right| \leqslant \left| \int_Y \int_t^{\to b} f(x,y)dxd\nu(y) \right| \to 0, t \to b-0.$$

(Последняя сходимость получается из равномерной сходимости интеграла, то есть $\sup\limits_{y \in Y} |\int_t^b f(x,y)dx| \to 0, t \to b-0$).
Что и показывает необходимое нам равенство. □

6.2.3 Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.

Теорема 6.6. *Пусть $f \in C([a,b) \times [c,d])$ и $\forall (x,y) \in [a,b) \times [c,d]$ существует $f'_y(x,y)$ и, более того, $f'_y \in C([a,b) \times [c,d])$. Пусть $\int_a^{\to b} f'_y(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, а $\int_a^{\to b} f(x,y)dx$ сходится всюду поточечно.*
Тогда $J(y) = \int_a^{\to b} f(x,y)dx$ – непрерывно дифференцируемая на $[c,d]$ и справедливо равенство

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^{\to b} f'_y(x,y)dx.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные точки $s, s_o \in [c,d]$ ($s > s_0$ – без ограничения общности).
Пусть $I(y) = \int_a^{\to b} f'_y(x,y)dx$. По теореме об интегрировании по параметру (мы можем её применять к I так как $[s_0, s]$ – пространство конечной меры, интеграл I сходится равномерно по условию и f'_y – непрерывна, а следовательно – интегрируема на любом подотрезке)

$$\int_{s_0}^s I(y)dy = \int_a^{\to b} \left(\int_{s_0}^s f'_y(x,y)dy \right) = \int_a^{\to b} f(x,s) - f(x,s_0)dx = J(s) - J(s_0).$$

Осталось только заметить, что I – непрерывная функция от y (вытекает из теоремы о предельном переходе по параметру в интеграле Лебега). Тогда

$$\frac{J(s) - J(s_0)}{s - s_0} = \fint_{s_0}^s I(y)dy.$$

И, поскольку для непрерывных функций на отрезках интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана, то

$$\exists \frac{dJ}{dy}(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{J(s) - J(s_0)}{s - s_0} = I(s_0).$$

То есть показана справедливость утверждения теоремы на $[c, d]$ (в силу произвольного выбора s_0). □

Напоминание. Тут должно быть напоминание про аппроксимативные единицы.

Следствие. Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и $\{w_t\}_{t \in (0, +\infty)}$ – аппроксимативная единица. Тогда $\forall t > 0 \hookrightarrow f * w_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t > 0$. Пусть $\operatorname{supp} w_t \subset B_r(0)$. (Здесь и далее в доказательстве индекс «t» у w_t будет опускаться – оно фиксировано). По определению

$$(f * w)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) w(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} w(x - y) f(y) dy.$$

Зафиксируем некоторое $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Верно, что $\forall x \in B_1(x_0) \hookrightarrow$

$$(f * w)(x) = \int_{B_{r+1}(x_0)} w(x - y) f(y) dy.$$

Покажем, что $\forall x \in B_1(x_0) \forall k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\exists \frac{\partial (f * w)}{\partial x_k}(x_0) = \int_{B_{r+1}(x_0)} \frac{\partial w}{\partial x_k}(x - y) f(y) dy.$$

Но по сути, это всё – собственные интегралы с параметром x. И для того, чтобы мы могли продифференцировать всё это, нам нужна локальная мажоранта:

$$\left| \frac{\partial w}{\partial x_k}(x - y) f(y) \right| \leqslant M_k |f(y)|.$$

Где $M_k = \max\limits_{t \in \mathbb{R}^n} \left| \dfrac{\partial w}{\partial x_k} \right|(t)$ и тогда выполнено условие (L) для дифференцирования собственного интеграла Лебега и приведённое выше равенство корректно. Также, нетрудно заметить, что так как $\dfrac{\partial w}{\partial x_k} \in C(\mathbb{R}^n)$, то используя теорему о пределе интеграла Лебега по параметру получим

$$\frac{\partial (w * f)}{\partial x_k} \in C(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку $w * f$ – остаётся L_1^{loc}-функцией, то дальнейшее рассуждение можно продолжить по индукции и получить существование частных производных всех порядков, поскольку мы показали

$$\frac{\partial (w * f)}{\partial x_k} = f * \frac{\partial w}{\partial x_k}.$$

(просто мы просто перекидываем производные к w, а она – $C_0^{+\infty}$). □

Следствие. $\forall p \in [1, +\infty] \hookrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_p(\mathbb{R}^n)$ по p-норме.

Примечание. Эти два следствия уже возникали ранее, второе – доказано в секции про аппроксимативные единицы.

6.2.4 Равномерная сходимость интегралов по параметру.

Теорема 6.7 (Признак Дирихле.). *Пускай есть некоторый $[a,b)$ (конечный или бесконечный) и параметрическое множество Y абстрактной природы. Пусть даны функции $g, f : [a,b) \to Y \to \mathbb{R}$ такие, что*

- ▷ $\forall y \in Y \hookrightarrow f(\cdot, y) \in C([a,b))$ *и* $g(\cdot, Y) \in C^1([a,b))$.
- ▷ $g(x,y) \underset{Y}{\rightrightarrows} 0, x \to b-0$.
- ▷ $\exists x_0 \in (a,b) : g'_x(x,y) \leqslant 0 \forall x > x_0$ *и* $\forall y \in Y$.
- ▷ *Равномерная ограниченность первообразной:* $M = \sup\limits_{y\in Y} \sup\limits_{b'\in(a,b)} \left| \int_a^{b'} f(x,y)dx \right| < +\infty$.

Тогда

$$\int_a^{\to b} f(x,y)g(x,y)dx.$$

равномерно сходится на множестве Y.

Доказательство. При каждом фиксированном $\underline{y} \in Y$

$$\int_a^{\to b} f(x,\underline{y})g(x,\underline{y})dx.$$

сходится по обычному признаку Дирихле (в данном случае несобственный интеграл Лебега и Римана совпадают). Поскольку $\forall b' \in (a,b) \forall y \in Y$ выполняется

$$\int_{b'}^{\to b} f(x,y)g(x.y)dx = F(x,y)g(x,y)\Big|_{b'}^{\to b} - \int_{b'}^{\to b} F(x,y)g'_x(x,y)dx = (*)$$

Поскольку первообразная $F(x,y)$ – равномерно ограничена, то

$$\forall y \in Y \hookrightarrow F(x,y)g(x,y) \to 0, x \to b-0.$$

И, продолжая равенство, получаем

$$(*) = -F(b',y)g(b',y) + \int_{b'}^{\to b} F(x,y)(-g'_x(x,y))dx.$$

Навесим модуль и получим:

$$\left| \int_{b'}^{\to b} f(x,y)g(x,y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |F(b',y)|g(b',y) + \int_{b'}^{\to b} |F(x,y)|(-g'_x(x,y))dx \leqslant M(g(b',y) + (-g(x,y))|_{b'}^{\to b}) =$$

$$= 2Mg(b',y) \underset{Y}{\rightrightarrows} 0, b' \to b-0.$$

Что и даёт нам равномерную сходимость интеграла. □

Теорема 6.8 (Признак Вейерштрасса). *Пусть задан полуинтервал $[a,b)$, абстрактное параметрическое множество Y и функция $f : [a,b) \times Y \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall y \in Y \forall b' \in (a,b) \hookrightarrow f \in L_1([a,b'])$. Пусть $\exists g \in L_1([a,b))$ такая, что $g \geqslant 0$ п.в. на $[a,b)$. Пусть $\forall y \in Y \hookrightarrow |f(x,y)| \leqslant g(x)$. Тогда $\int_a^{\to b} f(x,y)dx$ равномерно сходится по Y.*

Доказательство. Из условия существования мажоранты и абсолютной непрерывности интеграла Лебега:

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_{b'}^{\to b} f(x,y)dx\right| \leqslant \int_{b'}^{b} g(x)dx \to 0, b' \to b-0.$$

И таким образом мы и получаем равномерную сходимость интеграла. □

Теорема 6.9 (Критерий Коши)**.** *Пусть Y – параметрическое множество и $[a,b)$ – полуинтервал. Пусть $\forall y \in Y \forall b' \in (a,b) \hookrightarrow f(\cdot,y) \in L_1([a,b'])$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- ▷ $J(y) = \int_a^{\to b} f(x,y)dx$ *равномерно сходится на* Y
- ▷ $\forall \varepsilon > 0 \exists b(\varepsilon) \in (a,b) \forall b', b'' \forall y \in Y \in (b(\varepsilon), b) \hookrightarrow$

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть есть равномерная сходимость интеграла.
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists b(\varepsilon/2) \in (a,b)$:

$$\forall b' > b(\varepsilon) \forall y \in Y \hookrightarrow \left|\int_{b'}^{\to b} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А значит, по неравенству треугольника мы и получаем необходимое утверждение.
Докажем теперь в обратную сторону.
Тогда при каждом фиксированном y выполнено условие Коши сходимости несобственного интеграла Лебега. И, следовательно, $\forall y \in Y \exists \int_a^{\to b} f(x,y)dx \in \mathbb{R}$. При каждом фиксированном y перейдём к пределу в условии Коши и получим $\forall \varepsilon > 0 \exists b(\varepsilon) \in (a,b)$ такое, что $\forall b' > b(\varepsilon)$ и $\forall y \in Y \hookrightarrow$

$$\left|\int_{b'}^{\to b} f(x,y)dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Из чего и следует равномерная сходимость интеграла. □

6.3 Интеграл Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad \text{— интеграл Дирихле}$$

Примечание. Понимаем как несобственный интеграл Лебега

Теорема 6.10.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство.

Сделаем регуляризацию (добавим множитель, чтобы собственный интеграл существовал)
Рассмотрим функцию:

$$F(x,y) := \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy},$$

$x, y \in [0, +\inf)$

$$F(x,0) = \frac{\sin x}{x},$$

Доопределим в нуле:

$$F(0,0) = 1,$$

Тогда функция непрерывна на $[0,+\inf)^2$
Рассмотрим интеграл:

$$D := \int\limits_0^{+\infty} F(x,y)\,dx$$

Сначала действуем формально (продифферинцируем):

$$D'(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d}{dy}\left(e^{-xy}\right)\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\cdot\sin x\,dx$$

Из формулы Эйлера $e^{ix} = i\sin x + \cos x$:

$$D'(y) = -\mathrm{Im}\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\cdot e^{ix}\,dx = -\mathrm{Im}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x(i-y)}\,dx = -\mathrm{Im}\left(\frac{e^{-x(i-y)}}{i-y}\bigg|_0^{+\infty}\right) = -\mathrm{Im}\left(0-\frac{1}{i-y}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-y}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-i-y}{1+y^2}\right) = \frac{-1}{y^2+1}$$

Итого:

$$D'(y) = \frac{-1}{y^2+1}, y > 0$$

$$\forall\, y_1, y_2 > 0 \quad \text{при } y_2 > y_1 \quad D(y_2) - D(y_1) = \int\limits_{y_1}^{y_2} D'(y)\,dy = -\int\limits_{y_1}^{y_2}\frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y_1 - \arctan y_2$$

При $y_2 \to +\infty$:

$$D(y_2) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy_2}\,dx$$

Возьмем под модуль:

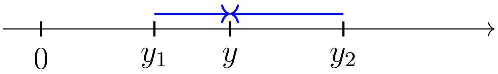
$$|D(y_2)| = \left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot e^{-xy_2}\,dx\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy_2}\,dx = \frac{1}{y_2} \longrightarrow +0, \quad y_2 \to +\infty$$

Перейдем к приделу, когда $y_2 \to +\infty, y_1 \to +0$:

$$-\lim_{y_1\to+0} D(y_1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{y_1\to+0} D(y_1) = \frac{\pi}{2}$$

Примечание. Если доказать, что $D(y)$ непрерывен в нуле справа, т.е. что $\lim_{y\to+0} D(y) = D(0)$, то получим искомое

Покажем, что $D(y)$ — непрерывна и существует $D'(y)$, $\forall y > 0$.
Зафиксируем произвольные y_1, y_2, такие что $0 < y_1 < y < y_2$



Примечание. Чтобы можно было дифференцировать по y, достаточно проверить, что интеграл $D(y)$ сходится $\forall y > 0$ и что $-\int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy}\,dx$ сходится равномероно по y.

Очевидно, что $\sin x \cdot e^{-xy}$ непрерывна на $[y_1, y_2] \times [0, +\infty)$.
$\frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}$, доопределенная в нуле тоже непрерывна на $[y_1, y_2] \times [0, +\infty)$.

$$\left|\frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}\right| \leqslant e^{-xy}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy} \in L_1([0, +\infty)) \quad (\text{принадлежит } L_1 \text{ как функция от } x) \ \ \forall y > 0$$

$$\Rightarrow D(x) \text{ сходится } \forall y > 0$$

Назовем $J(y) = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx$. (от 1 потому что так будет проще применить признак Дирихле)

Покажем, что $J(y)$ сходится равномерно по y на $[y_1, y_2]$
Воспользуемся признаком Дирихле:

1. $$\sup_{y>0} \sup_{A} \left|\int_1^A \sin x\,dx\right| \leqslant 2$$

2. $$\frac{e^{-x\cdot y}}{x} \downarrow 0, \quad x \to +\infty \quad \forall y > 0$$

3. $$0 \leqslant \frac{e^{-xy}}{x} \leqslant \frac{e^{-x\cdot y_1}}{x} \to 0, x \to +\infty \, \forall y \in [0, y_2], \forall x > 1 \Rightarrow$$

$$\sup_{y \in [0, y_2]} \ e^{-xy} \to 0, \ x \to +\infty.$$

$\Rightarrow$ В силу признака Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx$ сходится равномерно по y

В силу признака Вейерштрасса $\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-xy}\,dx \quad$ сходится равномерно по $y \in [y_1, y_2]$

$$|\sin x\, e^{-xy}| \leqslant e^{-x\cdot y_1}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x\cdot y_1}\,dx \quad - \text{сход.}$$

Это доказывает, что можно дифференцировать интеграл по параметру при любом $y > 0$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx$ сходится равномерно по y

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx \quad$ сходится равномерно по $y \in [0, y_2] \quad \forall y_2 > 0$.

Примечание. Мы доказали от 1 до $+\infty$. Но интеграл от 0 до $+\infty$ отличается минимально:

На $[0,1]\times[0,y_2]$ функция $F(x,y)=\dfrac{\sin x}{x}e^{-xy}$ непрерывна по совокупности переменных.

$\Rightarrow$ Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-xy}\,dx$ сходится равномерно по y на множестве $[0,y_2]$.
2. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-xy}\,dx$ сходится равномерно по y на множестве $[0,y_2]$.

1. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-xy}\,dx$ сход. равномерно по y на $[0,y_2]\forall y_2>0$
2. $\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to+0}e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$
3. В силу непрерывности F: $\frac{\sin x}{x}\underset{[0,t]}{\leftleftarrows}e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\forall t>0$

Из этого в совокупности следует:

$$\int\limits_0^t e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx\longrightarrow\int\limits_0^t\frac{\sin x}{x}\,dx\quad\forall\,t>0$$

Выполнены все условия теоремы о переходе к пределу по параметру в несобственном интеграле

$$\Rightarrow\exists\lim_{y\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-xy}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

А это и означает непрерывность функции D в нуле справа.

$\Rightarrow$ все переходы в настоящем доказательстве обоснованы $\Rightarrow$ интеграл Дирихле полностью посчитан

$\square$

7 Преобразование Фурье

Определение 7.1. Пусть $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Тогда $\mathcal{F}[f]_{(x)}:=\mathrm{V.\,P.}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-ixy}\,f(y)\,dy,\quad x\in\mathbb{R}$.

Примечание. V.P. (от фран. *Valeur Principale*) — интеграл в смысле главного значения.

$$\mathrm{V.\,P.}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-ixy}\,f(y)\,dy:=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}f(y)\,e^{-ixy}\,dy$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f\right](y) := \text{V.\,P.}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(y)\,dy$$

Примечание.

$$\text{Если } f \in L_1(\mathbb{R}), \text{ то } \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \text{V.\,P.}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

Ключевое отличие от несобственного интеграла Лебега: Пределы интегрирования берутся симметрично.

В обычном несобсвтенном интеграле имеем незавсимые друг от друга пределы A_1 и A_2:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\, f(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy}\,dy = \lim_{\substack{A_1\to+\infty\\ A_2\to-\infty}} \int\limits_{A_2}^{A_1} f(y)\, e^{-ixy}\,dy$$

Пример. Пусть g - произвольная нечетная функция на $\mathbb{R}$. $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$

$$\text{V.\,P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy = 0.$$

(а интеграл Лебега, и даже несобственный интеграл Лебега может не существовать)

Вопрос.

$$\textit{Когда } \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[f\right]\right] = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[f\right]\right] = f\,?$$

На первый взгляд кажется, что всегда. Однако не все так просто.

$$\text{Пусть } I_A[f](x) := \int\limits_{-A}^{A} \mathcal{F}[f](y)\, e^{ixy}\,dy, \quad \forall A > 0.$$

Лемма 7.1 (Ключевая)**.** *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall A > 0$ справедливо равенство:*

$$I_A\left[f\right](x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\frac{\sin(At)}{\pi t}\,dt.$$

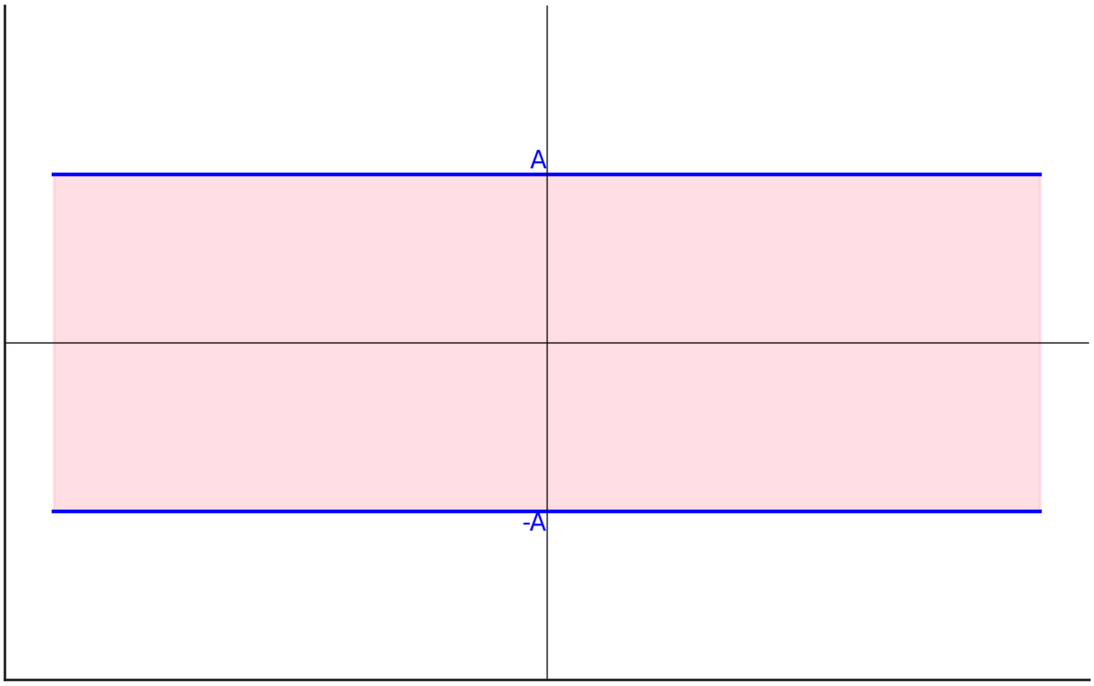
Доказательство. Заметим, что $F(y,u) = f(u)e^{i(x-u)y}$ интегрируема на множестве $(-A,A)\times\mathbb{R}$ при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$. По y значения меняются от $-A$ до A, а по u - по всей числовой прямой. $|F(y,u)| \leqslant |f(u)|$, а она интегрируема в полосе, потому что полоса — это конечный промежуток

$\Rightarrow$ по теореме Фубини:

$$I_A\big[f\big](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-A}^{A} f(u)\, e^{i\,(x-u)\,y}\,dy\right)du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(u)\left[\int_{-A}^{A}\cos(x-u)\,y\,dy\right]du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(u)\,\frac{2\sin A(x-u)}{x-u}\,du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\frac{\sin A(x-u)}{\pi\,(x-u)}\,du = \{x-u=t\} = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{\sin(At)}{\pi t}\,dt$$

$\square$



7.1 Интеграл Фурье

Определение 7.2. Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

$$\text{Если } \exists \lim_{A \to +\infty} I_A[f](x) \text{ при } x \in \mathbb{R}, \text{ то говорят, что } \exists \text{ интеграл Фурье функции } f$$

$$\text{По сути интеграл Фурье совпадает с } F^{-1}[F[f]].$$

Теорема 7.1. *Пусть $\tilde{f} \in L_1(-\pi, \pi)$ и 2π-периодична.*

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и совпадает с $\widetilde{f}$ в некоторой окрестности точки $\underline{x} \in \mathbb{R}$. Тогда интеграл Фурье в точке $\underline{x}$ сходится к $\widetilde{f}$ в этой точке. $\Leftrightarrow$ ряд Фурье функции $\widetilde{f}$ сходится в точке $\underline{x}$.

Более того, в случае сходимости справедливо равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\text{V. P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](y)\, e^{ix\,y}\, dy \;=\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n\big(\widetilde{f}\big)\, e^{inx}$$

Доказательство. Докажем, что

$$I_A\big[f\big](\underline{x}) - S_{[A]}\big[\widetilde{f}\big](\underline{x}) \longrightarrow 0, \quad A \to +\infty, \text{ где } [A] \text{ - целая часть числа } A$$

Из ключевой леммы (7.1) следует, что $I_A[f](\underline{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\underline{x} - t)\frac{\sin(At)}{\pi t}\, dt$

Предположим, что $f \equiv \widetilde{f}$ в $U_\delta(\underline{x})$

$$I_A\,[f]\,(\underline{x}) = \int\limits_{-S}^{0} f(\underline{x} - t) \cdot \frac{\sin(At)}{\pi t}\, dt + O(1), \quad A \to +\infty$$

Это следует из теоремы Риммана об осцилляции

С другой имеем формулу:

$$S_n\left[\widetilde{f}\right](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\underline{x} - t)\frac{\sin(nt)}{\pi t}\, dt + \varepsilon_n\left[\widetilde{f}\right](\underline{x})$$

По теореме Риммана об осцилляции:

$$S_n\left[\widetilde{f}\right](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\underline{x}-t)\frac{\sin(nt)}{\pi t}\,dt + \varepsilon_n\left[\widetilde{f}\right](\underline{x}) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \widetilde{f}(\underline{x}-t)\frac{\sin(nt)}{\pi t}\,dt + O(1), \quad n\to+\infty$$

Если $A = n$, то $I_A\big[f\big](\underline{x}) - S_{[A]}\big[\widetilde{f}\big](\underline{x}) \longrightarrow 0$ очевидно доказано

В общем случае, окгда A — нецелое, можем посмотреть на целую часть A (вспомним, что I_A — это интеграл от преобразования Фурье).

$$\left|I_A\left[f\right](\underline{x}) - I_{[A]}\left[f\right](\underline{x})\right| \leqslant \int\limits_{A-1}^{A} |\mathcal{F}[f](y)|\,dy + \int\limits_{A}^{A+1} |\mathcal{F}[f](y)|\,dy$$

$$\leqslant 2\sup_{|y|\geqslant A-1} |\mathcal{F}[f](y)| \longrightarrow 0, \quad A\to+\infty$$

Действительно, по теореме Риммана обосцилляции

$$\mathcal{F}\left[f\right](y) \longrightarrow 0, \quad y\to+\infty,$$

$$\mathcal{F}\left[f\right](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,e^{-ixy}\,dy \longrightarrow 0, y\longrightarrow\infty$$

Так как $f\in L_1(\mathbb{R})$ по усл, имеем право брать обычный Лебеговский интеграл

В итоге по неравенству треугольника:

$$\begin{aligned}\left|I_A[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})\right| \leqslant & \left|I_A[f](\underline{x}) - I_{[A]}[f](\underline{x})\right| \\ & + \left|I_{[A]}[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})\right|.\end{aligned}$$

Первое слогаемое $\left|I_A[f](\underline{x}) - I_{[A]}[f](\underline{x})\right| \to 0, A\to+\infty$ так как мы только что доказали следующее:

$$\leqslant 2\sup_{|y|\geqslant A-1} |\mathcal{F}[f](y)| \longrightarrow 0, \quad A\to+\infty$$

Второе слогаемое тоже $\left|I_{[A]}[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})\right| \to 0, A\to+\infty$, так как при целых A $I_A[f](\underline{x}) = S_n[\widetilde{f}(x)]$ с точностью до $o(1)$, потому что $f = \widetilde{f}$ в δ-окрестности $\underline{x}$

□

Следствие. Все признаки поточечной сходимости рядов Фурье переносятся и на интеграл Фурье (т е от функции требуются такие же условия локального поведения)

Пример. Если $f\in L_1(\mathbb{R})$ и $f\in BV(U_\delta(\underline{x}))$ при $\delta>0$. Тогда $F^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right](\underline{x}) = f(\underline{x})$.

Аналогично для условия Дини и условия Гёльдера.

Следствие. Все признаки которые были для рядов Фурье, для них есть аналоги:

1. Пусть $f\in\mathbb{L}_1^{loc}(\mathbb{R})$ в некоторой $U_\delta(\underline{x})$ и имее тограниченую вариацию, тогда:

$$f(\underline{x}) = F^{-1}[F[f]](\underline{x})$$

2. Пусть $f\in\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Гёльдера с степенью $\alpha\in(0;1]$ в некоторой $U_\delta(\underline{x})$. Тогда:

$$f(\underline{x}) = F^{-1}[F[f]](\underline{x})$$

3. (Условие Дини) Пусть $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ и $\exists \delta > 0$ и $\exists c > 0$ такие что:

$$\int_0^\delta |\frac{f(\underline{x}-u)+f(\underline{x}-u)}{2} - C|\frac{du}{u} < +\infty$$

Тогда $F^{-1}[F[f]](\underline{x}) = C$

7.2 Преобразование Фурье свертки

Напоминание. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Сверктой называют $f * g = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$. $f * g$ корректо определенная измеримая функция. Она является интегриуемой, если f и g интегрируемы. Свертка обладает свойствами:

- ▷ Коммутативность. $f * g = g * f$
- ▷ Ассациативность. $(f * g) * h = f(g * h)$

Теорема 7.2. *Пусть* $f,g \in L^1(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$F[f*g](x) \;=\; \sqrt{2\pi}\, F[f](x)\, F[g](x),$$

где

$$F[h](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} h(y)\, dy.$$

Доказательство. По определению

$$F[f*g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \big(f*g\big)(y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(y-t)\, g(t)\, dt\Big) dy.$$

Меняем порядок интегрирования и расписываем $e^{-ixy} = e^{-ix(y-t+t)} = e^{-ixt}e^{-ix(y-t)}$:

$$\begin{aligned} F[f*g](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} e^{-ix(y-t)} f(y-t)\, g(t)\, dy\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-ixt} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(y-t)} f(y-t)\, dy\Big) dt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл по y при замене переменной $u = y - t$ даёт

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(y-t)} f(y-t)\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} f(u)\, du = \sqrt{2\pi}\, F[f](x).$$

Следовательно

$$F[f*g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\sqrt{2\pi}\, F[f](x)\Big) \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-ixt}\, dt = \sqrt{2\pi}\, F[f](x)\, F[g](x).$$

□

Примечание. Интеграл двойного интегрирования можно менять местами по теореме Фубини (а для неотрицательных функций по теореме Тонелли), поскольку

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \big|f(y-t)\big|\, \big|g(t)\big|\, dy\, dt = \int_{\mathbb{R}} \big|g(t)\big| \Big(\int_{\mathbb{R}} \big|f(y-t)\big|\, dy\Big) dt = \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Таким образом все переходы с перестановкой интегралов обоснованы.

Теорема 7.3 (преобразование Фурье производной)**.** *Пусть*

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}), \quad f' \in L^1(\mathbb{R}),$$

и существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f'](y) = iy\,\mathcal{F}[f](y),$$

Доказательство. **Шаг 1.** Сначала докажем, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Так как $f' \in L^1(\mathbb{R})$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt =: A$$

существует. Предположим $A \neq 0$. Тогда найдётся X_A такое, что при $x > X_A$ есть

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2} \quad \Longrightarrow \quad \int_{X_A}^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty,$$

что противоречит условию $f \in L^1(\mathbb{R})$. Аналогичным рассуждением получаем и $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Шаг 2. Интегрируем преобразование Фурье f' по частям:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f'](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[f(x)e^{-ixy}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(-iy\big)e^{-ixy}\,dx \\
&= iy\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = iy\,\mathcal{F}[f](y).
\end{aligned}$$

Поскольку $f(x)e^{-ixy}\Big|_{x\to\pm\infty} = 0$, граничные слагаемые равны нулю. □

Следствие. Пусть $k \in \mathbb{N}$,

$$f,\, f',\, \ldots,\, f^{(k-1)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ и кусочно непрерывна на } \mathbb{R}.$$

Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\big[f^{(k)}\big](y) = (iy)^k\,\mathcal{F}[f](y),$$

и при $|y| \to \infty$ выполняется

$$\mathcal{F}[f](y) = o\big(|y|^{-k}\big).$$

Доказательство. Докажем по индукции по k.

База $(k = 1)$ — это теорема о преобразовании Фурье производной:

$$\mathcal{F}[f'](y) = iy\,\mathcal{F}[f](y).$$

Шаг индукции. Предположим, что для $k-1$ уже доказано

$$\mathcal{F}\big[f^{(k-1)}\big](y) = (iy)^{k-1}\,\mathcal{F}[f](y).$$

Поскольку $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(k-1)}(x) = 0$ (аналогично первому доказательству), применяем к $f^{(k-1)}$ тот же приём интегрирования по частям:

$$\mathcal{F}\big[f^{(k)}\big](y) = iy\,\mathcal{F}\big[f^{(k-1)}\big](y) = iy\,(iy)^{k-1}\,\mathcal{F}[f](y) = (iy)^k\,\mathcal{F}[f](y).$$

Асимптотика. Из формулы

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](y) = (iy)^k\,\mathcal{F}[f](y)$$

получаем

$$\mathcal{F}[f](y) = (iy)^{-k}\,\mathcal{F}[f^{(k)}](y).$$

Но $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, и по лемме Римана–Лебега $\mathcal{F}[f^{(k)}](y) \to 0$ при $|y| \to \infty$. Значит

$$\mathcal{F}[f](y) = o\big(|y|^{-k}\big), \quad |y| \to \infty.$$

□

Теорема 7.4 (Дифференцирование преобразования Фурье)**.** *Пусть*

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad x\,f(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Тогда функция

$$\mathcal{F}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,f(x)\,dx$$

непрерывна и имеет непрерывную первую производную по параметру y:

$$\frac{d}{dy}\,\mathcal{F}[f](y) = \mathcal{F}\big[-ix\,f(x)\big](y).$$

Доказательство. Зафиксируем конечный отрезок $[y_1,y_2] \subset \mathbb{R}$ и положим

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-ixy}\,f(x).$$

Тогда

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,dx.$$

Вычислим частную производную по y:

$$\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(-ix\big)e^{-ixy}\,f(x).$$

По условию $x\,f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, поэтому

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\right| = \frac{|x\,f(x)|}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{— интегрируемая функция (независимо от } y\text{).}$$

Следовательно, по теореме Лебега о дифференцировании параметрического интеграла под знаком интеграла можно переставить дифференцирование и интегрирование:

$$\frac{d}{dy}\,\mathcal{F}[f](y) = \frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\,dx = \mathcal{F}\big[-ix\,f(x)\big](y).$$

При этом та же теорема гарантирует непрерывность производной по y, а из непрерывности ядра $g(x,y)$ по y и теоремы Лебега об обмене предела и интеграла следует непрерывность $\mathcal{F}[f](y)$. □

8 Обобщенные функции

На самом деле «обобщённые функции» — не очень удачный перевод: правильнее было бы называть их *распределениями*. Рассмотрим неформальную идею. Существует базовая лемма Дю Буа–Реймона из вариационного исчисления, которая по сути говорит следующее: знать функцию «поточечно» — то же самое, что знать её действие на распределённые в пространстве объекты.

Почему термин «распределение»? Потому что мы обычно интегрируем f, рассматривая её как плотность какой-то физической величины (скажем, плотность заряда или массы), а φ моделирует измерительный прибор. И любой реальный прибор не умеет «снимать» значение в точке — он измеряет величину в некотором объёме: например, мы не определяем температуру в математической точке, а получаем среднее по окружающему пространству.

Таким образом, мы пытаемся описать физический процесс поточечно, но лемма Дю Буа–Реймона показывает: это вовсе не обязательно — можно «тестировать» функцию любыми приборами произвольного размера, т. е. рассматривать её действие на любые «распределённые» тест-функции.

Лемма 8.1 (Дю Буа—Реймона)**.** *Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и для любой $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ - те непрерывна и имеет компактный носитель*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Тогда $f = 0$ почти всюду.

Доказательство. **Шаг 1.** По теореме Лебега о дифференцировании интеграла почти всюду

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy \tag{$*$}$$

Пусть $E = \{x : f(x) \neq 0\}$ имеет положительную меру.

Шаг 2. Для $x \in E$ и $\varepsilon > 0$ по $(*)$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Big|\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy - f(x)\Big| < \varepsilon/2 \quad \forall\, 0 < r < \delta.$$

Возьмём тест-функцию

$$\psi_r(y) = \frac{1}{|B_r(x)|}\,\psi\Big(\frac{y-x}{r}\Big),$$

где $\psi \in C_0^\infty$, $\psi \geqslant 0$, $\int \psi = 1$, $\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)$. Тогда $\psi_r \in C_0^\infty$, $\int \psi_r = 1$, $\operatorname{supp}\psi_r \subset B_r(x)$, и

$$\Big|\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy - \int f(y)\,\psi_r(y)\,dy\Big| \leqslant \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)\setminus B_r(x)} |f(y)|\,dy < \varepsilon/2.$$

Шаг 3. По условию $\int f\,\psi_r = 0$, поэтому

$$|f(x)| \leqslant \Big|\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f - \int f\,\psi_r\Big| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольна, получаем $f(x) = 0$ для почти всех x. □

Определение 8.1 (Прстранство пробных функций)**.** Пусть

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

— пространство пробных функций. Последовательность $\{\varphi_m\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\varphi_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \varphi,$$

если выполняются одновременно два условия:

1) $\exists\, C > 0:\ \operatorname{supp}\varphi_m \subset B_C(0) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$.

2) $\forall\, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n: \quad D^\alpha \varphi_m \xrightarrow[m\to\infty]{} D^\alpha \varphi$ равномерно на $\mathbb{R}^n$.

Здесь

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Определение 8.2. Обозначим

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ = \ \big(C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\big)'$$

— пространство всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Функционал

$$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

удовлетворяет двум условиям:

1. (*Линейность*) $T\big(\alpha\,\varphi_1 + \beta\,\varphi_2\big) = \alpha\, T(\varphi_1) + \beta\, T(\varphi_2), \quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall\, \varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
2. (*Непрерывность*) $\varphi_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies T(\varphi_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} T(\varphi)$.

Определение 8.3. Пусть

$$\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Говорят, что φ является *регулярным* обобщённым функционалом (или регулярной обобщённой функцией), если

$$\exists\, f_\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{такое, что} \quad \langle \varphi,\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\varphi(x)\, \psi(x)\, dx, \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

В противном случае φ называют *сингулярным* распределением.

Замечание. Несмотря на то, что пространства $D(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\mathbb{R}^n)$ определялось для функций в $\mathbb{R}$, в дальнейшем будем считать что функции имеют областью значений $\mathbb{C}$, а в $D'(\mathbb{R}^n)$, соответственно, линейные функционалы в $\mathbb{C}$. И это – линейные пространства над полем $\mathbb{C}$.

Лемма 8.2. *Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда функционал λ_f, определяемый формулой*

$$\langle \lambda_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx.$$

Является элементом пространства $D'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Действие λ_f на φ имеет смысл в силу компактности носителя φ и локальной интегрируемости f (то есть она интегрируема на носителе φ).
В силу линейности интеграла Лебега функционал λ_f – линейный функционал.
Осталось проверить непрерывность λ_f относительно D-сходимости.
Пусть $\{\varphi_m\} \subset D(\mathbb{R}^n) : \varphi_m \xrightarrow{D} \varphi,\ m \to +\infty$.
Поскольку носители «не расползаются», существует $B_R(0)$: $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R(0), \forall m \in \mathbb{N} \operatorname{supp}\varphi_m \subset B_R(0)$. В частности, также, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_m(x) - \varphi(x)| \to 0, m \to +\infty$ (по определению сходимости в D).
Тогда

$$|\langle \lambda_f, \varphi_m - \varphi\rangle| = |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi_m(x) - \varphi(x))dx| \leqslant \int_{B_R(0)} |f(x)||\varphi_m(x) - \varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup|\varphi_m - \varphi| \int_{B_R(0)} |f(x)|dx \to 0, m \to +\infty.$$

А значит λ_f – действительно непрерывный линейный функционал $\Rightarrow \lambda_f \in D'(\mathbb{R}^n)$. □

Примечание. Эта лемма показывает, что мы можем воспринимать $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ как подпространство $D'(\mathbb{R}^n)$.
Вложение строгое, это будет продемонстрировано ниже.

Определение 8.4 (Сингулярный функционал)**.** Функционал, который нельзя реализовать по формуле, будем называть сингулярным.

Замечание. Иногда мы будем рассматривать функцию, необязательно принадлежащую $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, как функционал, определяемый формулой.

Пример (Сингулярный функционал)**.** Дельта-функция Дирака задаётся своим действием над любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0),$$

определяя тем самым сингулярный функционал, что мы сейчас и докажем.

Теорема 8.1. $\delta \in D'(\mathbb{R}^n) \setminus L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\delta \in D'(\mathbb{R}^n)$:

- ▷ линейность: $\forall$ функций $a, b\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\alpha a + \beta b)(0) = \alpha \cdot a(0) + \beta \cdot b(0)$
- ▷ непрерывность: из равномерной сходимости следует поточечная сходимость

Теперь покажем, что $\delta \notin L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что существует $f_\delta \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\varphi(0) = (f_\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x)\varphi(x)dx.$$

Вспомним о соболевской аппроксимативной единице:

$$w(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{1-|x|^2}),\ x \in \mathcal{B}_1(0); \\ 0,\ \text{иначе}, \end{cases}$$

и рассмотрим $w_\varepsilon = w(x/\varepsilon)$.
По предположению:

$$1 = w_\varepsilon(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x) w_\varepsilon(x) dx = \int_{B_\varepsilon(0)} f_\delta(x) w_\varepsilon(x) dx.$$

Так как $\forall x \hookrightarrow w(x) \leqslant 1$:

$$1 = |\int_{B_\varepsilon(0)} f_\delta(x) w_\varepsilon(x) dx| \leqslant \int_{B_\varepsilon(0)} |f_\delta(x)| dx \to 0, \varepsilon \to +0,$$

поскольку f_δ локально интегрируема и $\operatorname{mes}(\mathcal{B}_\varepsilon(0)) \to 0$ при $\varepsilon \to\ 0$.
В неравенстве противоречие, указывающее на, что $f_\delta \notin L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. □

Определение 8.5. Пусть есть $\{\lambda_m\} \subset D'(\mathbb{R}^n)$ и есть $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить что $\lambda_m \xrightarrow{D'} \lambda, m \to +\infty$, если

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \langle \lambda_m, \varphi \rangle \to \langle \lambda, \varphi \rangle, m \to +\infty.$$

Пример. Рассмотрим следующую последовательность функционалов:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) = \begin{cases} n, x \in (-1/2n, 1/2n) \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Тогда $f_n \xrightarrow{D'} \delta, n \to +\infty$. Покажем это.
Пусть $\varphi \in D(\mathbb{R})$. $f_n - \delta$ действует на φ следующим образом:

$$|\langle f_n - \delta, \varphi \rangle| = \left| \int_{-1/2n}^{1/2n} n\varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{-1/2n}^{1/2n} n\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)\, dx \right|. \tag{*}$$

По теореме Лагранжа:

$$\exists \varepsilon \in (0, x) : \varphi(x) - \varphi(0) = x \cdot \varphi'(\varepsilon) \leqslant x \cdot (\max_{-\frac{1}{2n} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{2n}} \varphi'(\varepsilon)) \leqslant x \cdot \max \varphi'(\varepsilon).$$

Тогда $(*)$ можно продолжить как:

$$|\langle f_n - \delta, \varphi \rangle| \leqslant \int_{-1/2n}^{1/2n} n|x \max \varphi'(\varepsilon) dx| = n|\max \varphi'(\varepsilon)| \frac{1}{2} \left(\left|\frac{1}{2n}\right|^2 - \left|\frac{-1}{2n}\right|^2 \right) = \frac{|\max \varphi'(\varepsilon)|}{4n} \to 0, n \to +\infty$$

Что нам и хотелось показать.

Примечание. Если λ – сингулярное распределение и $\exists \{f_m\} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) : f_m \xrightarrow[D'(\mathbb{R}^n)]{} \lambda$, $m \to +\infty$, то $\{f_m\}$ называется регуляризацией λ.

Теорема 8.2. *Пусть задана последовательность $\{f_m\} \subset L_1^{loc}(\mathbb{R})$ такая, что:*

1. $\forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow \int_{\mathbb{R}} f_m(x) dx = 1$ *(интеграл, вообще говоря, несобственный Лебеговский).*
2. $\exists C > 0 : |\int_a^b f_m(x) dx| \leqslant C \ \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \ \forall m \in \mathbb{N}$.
3. $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} |f_m(t)| dt \to 0, m \to +\infty$ *(от техающих: на лекции было без модуля, $(\star)$ содержит пояснение, почему без какого-либо изменения изначальное доказательство не работает).*

Примечание. Стоит заметить, что второе условие из первого не следует, в силу возможности «взаимного погашения» друг друга положительной и отрицательной частей при сколь угодно больших x.

Тогда она является регуляризацией δ ($f_m \xrightarrow[D'(\mathbb{R})]{} \delta$, $m \to +\infty$).

Доказательство. Рассмотрим следующий интеграл с переменным верхним пределом:

$$F_m(x) := \int_{-\infty}^{x} f_m(t) dt.$$

Из второго условия следует, что $\forall m$ F_m ограничено поточечно C.
Из первого условия:

$$F_m(x) \to 1, x \to +\infty, \quad F_m(x) \to 0, x \to -\infty.$$

$\forall x > 0 \hookrightarrow [x, +\infty) \subset (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty) = \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$. Следовательно,

$$|1 - F_m(x)| = |\int_x^{+\infty} f_m(t) dt| \leqslant \int_x^{+\infty} |f_m(t)| dt \leqslant \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} |f_m(x)| dx \to 0, m \to +\infty,$$

где последний предельный переход берётся из третьего условия. (($\star$): в исходном утверждении без модуля ничего не обеспечивает отсутствие ситуации, когда $\int_x^{+\infty} f_m(t)dt > \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} f_m(t)$: на $[\frac{x}{2}, x]$ и $[-x, -\frac{x}{2}]$ $f_m(x)$ будет нулём; на $[x, +\infty)$ будет затухать с положительным значением функции, а на $(-\infty, -x]$ будет затухать, но с отрицательным значением - это даст взаимную компенсацию для выполнения условия 3 и обеспечит условие 2; на $[-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}]$ будет колоколом, который даст 1 для условия 1).
Тогда $\forall x > 0$:

$$F_m(x) \to 1,\ m \to +\infty.$$

Аналогично $\forall x < 0 \hookrightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty) = \mathbb{R}\setminus(-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon = -\frac{x}{2}$. Следовательно,

$$|F_m(x)| = |\int_{-\infty}^{x} f_m(t)dt| \leqslant \int_{-\infty}^{x} |f_m(t)|dt \leqslant \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} |f_m(x)|dx \to 0, m \to +\infty.$$

Получается,

$$\forall x > 0 \hookrightarrow F_m(x) \to 1, m \to +\infty, \quad \forall x < 0 \hookrightarrow F_m(x) \to 0, m \to +\infty.$$

То есть $F_m \to \theta, m \to +\infty$ (поточечно), где θ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)\varphi(x)dx = F_m(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F_m(x)\varphi'(x)dx.$$

(интегрирование по частям здесь используется без доказательства.) Из компактности носителя φ и ограниченности F_m следует, что первое слагаемое зануляется.
Так как

- ▷ у φ компактный носитель,
- ▷ $F_m \to \theta, m \to +\infty$,
- ▷ $\sup |F_m| \leqslant C$, где sup берётся по $x \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$,

то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости верно следующее (в допущении, что f_m интегрируема всё же в обычном смысле; но на самом деле эта теорема справедлива и при интегрировании несобственном смысле при условии, что несобственный интеграл должен быть равен Лебеговскому, то есть интегрируемость должна быть абсолютной):

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} F_m(x)\varphi'(x)dx \to -\int_{\mathbb{R}} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^{+\infty} = \varphi(0),$$

что доказывает нашу теорему. □

Определение 8.6. Пусть $g \in C^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$. Определим произведение $g \cdot \lambda$ как функционал, действующий на $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$\langle g \cdot \lambda, \varphi \rangle = \langle \lambda, g \cdot \varphi \rangle \qquad (*)$$

Теорема 8.3. *Определение выше – корректно в том смысле, что $g\lambda$ действительно лежит в $D'(\mathbb{R}^n)$ и в случае регулярных распределений совпадает с обычным умножением.*

Доказательство. Функционал, определяемый $(*)$, является линейным и корректно определённым, поскольку

- ▷ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow g \cdot \varphi \in C^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$
- ▷ является непрерывным: $g \cdot \varphi_m \xrightarrow[D(\mathbb{R}^n)]{} g \cdot \varphi$, $m \to +\infty$, ибо
    1. $\varphi_m \xrightarrow[D(\mathbb{R}^n)]{} \varphi$,
    2. носитель не изменился,
    3. все носители содержатся в $\mathcal{B}_R(0)$ и в нём g ограничена, как и её производные, но необязательно одной и той же константой.

Пусть λ — регулярное распределение. Тогда $\exists f_\lambda \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \langle \lambda, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)\varphi(x)dx.$$

Тогда в силу $(*)$:

$$\langle g \cdot \lambda, \varphi \rangle = \langle \lambda, g \cdot \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)g(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f_\lambda(x)g(x))\varphi(x)dx.$$

Так как $f_\lambda \cdot g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, то $\langle g \cdot \lambda, \varphi \rangle = \langle f_\lambda \cdot g, \varphi \rangle$, что и даёт нам утверждение теоремы. □

Пример. Пусть $g \in C^{+\infty}(\mathbb{R})$, δ — дельта-функция Дирака. Тогда $g\delta = g(0)\delta$.

Доказательство.

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \langle g\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, g\varphi \rangle = g(0)\varphi(0) = g(0)\langle \delta, \varphi \rangle = \langle g(0)\delta, \varphi \rangle$$

□

Определение 8.7. δ_x – сдвинутую дельта-функцию Дирака определим как

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow (\delta_x, \varphi) = \varphi(x).$$

Замечание. Сергей Львович Соболев ввёл понятие обобщённой производной.

Примечание. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R})$.
Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx,$$

ибо носитель φ принадлежит $(-\infty, \infty)$. Этим результатом мотивируется следующее определение.

Определение 8.8. Пусть $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$. Определим $D^\alpha\lambda$ — такой функционал, который на любую пробную функцию φ ($\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$), действует по правилу:

$$\langle D^\alpha, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \lambda, D^\alpha\varphi \rangle,$$

где

$$D^\alpha\varphi := \frac{\partial^{|\alpha|\varphi(x)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Теорема 8.4. *Определение выше корректно и в случае регулярного распределения, порождённого непрерывно дифференцируемой функцией (столько раз, сколько нам надо) совпадает с классическим определением*

Доказательство. Нужно проверить, что $D^\alpha\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$.
Линейность по φ очевидна: оператор производной – линеен.
Проверим непрерывность. Пусть $\{\varphi_m\} \subset D(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\varphi_m \xrightarrow{D} \varphi, m \to +\infty$.

$$|(D^\alpha\lambda, \varphi_m) - (D^\alpha\lambda, \varphi)| = |(D^\alpha\lambda, \varphi_m - \varphi)| = |(\lambda, D^\alpha(\varphi_m - \varphi))|.$$

В силу определения сходимости в D, очевидно, что $D^\alpha\varphi_m \xrightarrow{D} D^\alpha\varphi, m \to +\infty$. Тогда, поскольку $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$, то и $(\lambda, D^\alpha(\varphi_m - \varphi)) \to 0, m \to +\infty$.
Пусть λ – регулярный функционал, который порождён C^1-гладкой f_λ. Покажем, что обобщенная производная совпадает с классической. То есть обобщенной производной будет соответствовать регулярный функционал, который поточечно почти всюду совпадает с классической частной производной. Пусть D_j – частная производная по j-й координате в обобщённом смысле. Тогда

$$(D_j\lambda, \varphi) = -(\lambda, D_j\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx = (*)$$

Далее будем работать с сечениями и, воспользовавшись теоремой Фубини, так как f_λ - C^1-гладка, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ - бесконечно дифференцируема и финитна, получим

$$(*) = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\hat{x}_j \int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x_1, \ldots, x_j, \ldots x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx_j.$$

Где $\hat{x}_j$ - та у которой пропущена j-ая координата. При каждом фиксированном $\hat{x}_j$ проинтегрируем по частям по j-ой координате:

$$\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x_1, \ldots)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx_j = f_\lambda(\ldots)\varphi(\ldots)|_{x_j=-c}^{x_j=c} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}\varphi(x_1, \ldots)dx_j.$$

При каждой $\hat{x}_j$: $f_\lambda(\ldots)\varphi(\ldots)|_{x_j=-c}^{x_j=c} = 0$. То есть

$$(*) = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_\lambda(\ldots)\varphi(\ldots)|_{x_j=-c}^{x_j=c})d\hat{x}_j + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\hat{x}_j \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}\varphi(x_1, \ldots)dx_j.$$

А это, с учётом внешнего интеграла и повторного применения теоремы Фубини, в точности равно $(\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}, \varphi)$ – что и требовалось показать.
Аналогично по индукции мы можем показать для производной произвольного порядка. □

Примечание. Всяких $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$ можно дифференцировать сколько угодно раз (в обобщённом смысле).

Лемма 8.3. *Если* $\lambda_m \xrightarrow{D'} \lambda, m \to +\infty$, *то* $\forall\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ *выполняется*

$$D^\alpha\lambda_m \xrightarrow{D'} D^\alpha\lambda, m \to +\infty.`$$

Доказательство. По определению:

$$(D^\alpha\lambda_m, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\lambda_m, D^\alpha\varphi) \to (-1)^{|\alpha|}(\lambda, D^\alpha\varphi) = (D^\alpha\lambda, \varphi).$$

□

Теорема 8.5 (Правило Лейбница)**.** *Пусть* $\lambda \in D'(\mathbb{R})$*, а* $g \in C^\infty(\mathbb{R})$*. Тогда*

$$(g\lambda)' = g'\lambda + g\lambda',$$

где равенства и производные понимаются в смысле $D'(\mathbb{R})$*.*

Доказательство. По определению и ранее доказанным свойствам $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$((g\lambda)', \varphi) = -(g\lambda, \varphi') = -(\lambda, g\varphi') = -(\lambda, (g\varphi)' - g'\varphi) = \\ = -(\lambda, (g\varphi)') + (\lambda, g'\varphi) = (\lambda', g\varphi) + (g'\lambda, \varphi) = (g\lambda' + g'\lambda, \varphi).$$

В силу произвольности φ мы и получаем утверждение теоремы. □

8.1 Пространства S и S'.

Определение 8.9. Определим пространство $S(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, то есть:

$$\forall l \in \mathbb{N}_0 : \|\varphi\|_l \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ((1 + |x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha \varphi|) < +\infty.$$

Вместе со следующей сходимостью: $\varphi_l \xrightarrow{S} \varphi, l \to +\infty$. если $\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \|\varphi - \varphi_m\|_l \to 0, m \to +\infty$.

Примечание. $\forall l \in \mathbb{N}_0$ верно, что $\|\cdot\|_l$ – действительно норма.

Примечание (Примечание техающего)**.** Было в качестве упражнения, попробовал доказать сам.

Доказательство. Проверим три аксиомы нормы.

1. Неотрицательность и однозначность нуля. По определению, $\|\varphi\|_l$ — супремум неотрицательной функции

$$x \ \mapsto \ (1 + |x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} \bigl|D^\alpha \varphi(x)\bigr| \geqslant 0,$$

поэтому $\|\varphi\|_l \geqslant 0$. Если $\|\varphi\|_l = 0$, то

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha\varphi(x)| = 0 \implies \forall x, \ \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha\varphi(x)| = 0,$$

т. е. $D^\alpha\varphi(x) \equiv 0$ для всех $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$. При $\alpha = 0$ это даёт $\varphi \equiv 0$.

2. Однородность. Для любого $a \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|a\varphi\|_l = \sup_x (1 + |x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} \bigl|D^\alpha(a\varphi)(x)\bigr| = \sup_x (1 + |x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} \bigl|a\, D^\alpha\varphi(x)\bigr| = |a|\, \|\varphi\|_l.$$

3. Неравенство треугольника. Пусть $\varphi,\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда для каждого x и каждого $|\alpha| \leqslant l$

$$|D^\alpha(\varphi + \psi)(x)| \leqslant |D^\alpha\varphi(x)| + |D^\alpha\psi(x)| \leqslant \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha\varphi(x)| + \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha\psi(x)|.$$

Умножая на $(1 + |x|)^l$ и беря супремум по x, получаем

$$\|\varphi + \psi\|_l \leqslant \|\varphi\|_l + \|\psi\|_l.$$

Таким образом, $\|\cdot\|_l$ удовлетворяет всем трём аксиомам нормы, что и требовалось. □

Примечание. Таким образом $S(\mathbb{R}^n)$ – счётнонормированное пространство.

Теорема 8.6. $S(\mathbb{R}^n)$ – *метризуемое пространство, то есть существует метрика d такая, что*

$$d(\varphi_m, \varphi) \to 0 \iff \varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, m \to +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Возьмём метрику

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{l=0}^{+\infty} 2^{-l} \frac{\|\varphi - \psi\|_l}{1 + \|\varphi - \psi\|_l}.$$

Пусть $\varphi_m \xrightarrow{d} \varphi, m \to +\infty$. Но, тогда, в силу неотрицательности слагаемых:

$$\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \frac{\|\varphi_m - \varphi\|_l}{1 + \|\varphi_m - \varphi\|_l} \to 0, m \to +\infty.$$

Рассмотрим $t \to \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ – возрастающая и непрерывная в нуле (и у неё есть обратная функция), тогда $\|\varphi_m - \varphi\|_l \to 0, m \to +\infty$.
Покажем теперь в обратную сторону. Пусть $\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \|\varphi - \varphi_m\|_l \to 0, m \to +\infty$ и надо показать сходимость в метрике. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём $l(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{l(\varepsilon)}^{+\infty} 2^{-l} \frac{\|\varphi_m - \varphi\|_l}{1 + \|\varphi_m - \varphi_m\|} < \varepsilon/2.$$

Оно существует, поскольку каждое из слагаемых не больше 1. А теперь выберем $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таким большим, чтобы

$$\max_{1 \leqslant l \leqslant l(\varepsilon)} \|\varphi - \varphi_m\|_l < \varepsilon/2 \forall m > M(\varepsilon).$$

Но, тогда, разобьём метрику на две части:

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \ldots = \sum_{1}^{l(\varepsilon)} \ldots + \sum_{l(\varepsilon)+1}^{+\infty} \ldots \leqslant \varepsilon/2 \cdot \sum_{l=1}^{l(\varepsilon)} 2^{-l} + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Что и требовалось показать. □

Примечание. Надо проверить, что d – действительно метрика.

Примечание (Примечание техающего)**.** Было в качестве упражнения, попробовал доказать сам.

Доказательство. Проверим три аксиомы метрики.

1. Неотрицательность и невырожденность. Каждое слагаемое

$$2^{-l} \frac{\|\varphi - \psi\|_l}{1 + \|\varphi - \psi\|_l}$$

неотрицательно, следовательно $d(\varphi,\psi) \geqslant 0$. Более того,

$$d(\varphi,\psi) = 0 \implies \forall l, \frac{\|\varphi - \psi\|_l}{1 + \|\varphi - \psi\|_l} = 0 \implies \forall l, \|\varphi - \psi\|_l = 0 \implies \varphi = \psi.$$

2. Симметричность. Поскольку $\|\varphi - \psi\|_l = \|\psi - \varphi\|_l$, очевидно

$$d(\varphi,\psi) = d(\psi,\varphi).$$

3. Неравенство треугольника. Обозначим для краткости

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Функция f возрастает и удовлетворяет неравенству

$$f(a+b) \ \leqslant\ f(a) + f(b), \quad a,b \geqslant 0.$$

Действительно, используя $\| \varphi - \psi\|_l \leqslant \|\varphi - \chi\|_l + \|\chi - \psi\|_l$ и возрастание f, получаем

$$f\big(\|\varphi - \psi\|_l\big) \ \leqslant\ f\big(\|\varphi - \chi\|_l + \|\chi - \psi\|_l\big) \ \leqslant\ f\big(\|\varphi - \chi\|_l\big) + f\big(\|\chi - \psi\|_l\big).$$

Домножая на 2^{-l} и суммируя по $l \geqslant 0$, заключаем

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} f\big(\|\varphi - \psi\|_l\big) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l}\Big[f\big(\|\varphi - \chi\|_l\big) + f\big(\|\chi - \psi\|_l\big)\Big] = d(\varphi,\chi) + d(\chi,\psi).$$

Таким образом, d удовлетворяет всем аксиомам метрики. □

Теорема 8.7. *Преобразование Фурье осуществляет линейный изоморфизм $S(\mathbb{R})$ на $S(\mathbb{R})$. Более того, $\forall m,n \in \mathbb{N}_0$, справедливы следующие равенства:*

$$F\left[\frac{d^m\varphi}{dx^m}\right](y) = (iy)^m F[\varphi](y), \quad \frac{d^nF[\varphi]}{dy^n}(y) = F[(-ix)^n\varphi](y).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R})$, то, по определению:

$$\sup((1+|x|)^l \max_{0\leqslant k\leqslant l} |\varphi^{(k)}(x)|) = \|\varphi\|_l < +\infty \forall l \in \mathbb{N}_0.$$

В частности $\forall k \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x|^k|\varphi(x)| < +\infty$. Так как

$$|x|^k|\varphi(x)| \leqslant \frac{(1+|x|)^2}{(1+|x|)^2}|x|^k|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{1+|x|^2}\|\varphi\|_{k+2}.$$

То и $|x|^k\varphi \in L_1(\mathbb{R})\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0$, а значит $F[\varphi]$ – бесконечно-дифференцируемая функция и справедлива вторая формула в утверждении теоремы.
Так как $\forall m \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \varphi^{(m)} \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F\left[\frac{d^m\varphi}{dx^m}\right] \to 0, x \to \infty.$$

И тогда $\forall m \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow F[\varphi](y) = o\left(\frac{1}{|y|^m}\right), y \to +\infty$.
А значит

$$(iy)^m\frac{d^nF[\varphi]}{dy^n} = (iy)^m F[(-ix)^n\varphi] = F\left[\frac{d^m}{dx^m}((-ix)^n\varphi)\right].$$

Теперь осталось показать только

$$(*) = \frac{d^m}{dx^m}\left((-ix)^n\varphi\right) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Но это действительно правда, поскольку φ – быстро убывающая функция на бесконечности. По правилу Лейбница раскроем производную:

$$\left|\frac{d^m}{dx^m}((-ix)^n\varphi)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}((-ix)^n)^{(k)}\varphi^{(m-k)}\right| \leqslant C(1+|x|)^{\max(n,m)} \max_{0\leqslant s\leqslant \max(n,m)} |\varphi^{(s)}| = C\|\varphi\|_{\max(n,m)}.$$

А $C\|\varphi\|_{\max(n,m)}$ - конечна. Теперь домножим и разделим на $(1+|x|)^2$

$$(*) = \frac{(1+|x|)^2}{(1+|x|)^2}\left|\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}((-ix)^n)^{(k)}\varphi^{(m-k)}\right| \leqslant \frac{(1+|x|)^2}{(1+|x|)^2}\left(C(1+|x|)^{\max(n,m)}\max_{0\leqslant s\leqslant\max(n,m)}|\varphi^{(s)}|\right) \leqslant .$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|)^2}C\|\varphi\|_{\max(n,m)+2}.$$

Получили, что m-ая производная мажорируется $\frac{C}{(1+|x|)^2}$, тк $\varphi \in S$.

Значит $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \dfrac{d^m((-ix)^n\varphi)}{dx^m} \in L_1(\mathbb{R})$ и

$$(iy)^m\frac{d^nF[\varphi](y)}{dy^n} \to 0, y \to \infty.$$

И тогда $F[\varphi] \in S(\mathbb{R})$, а значит $F[\cdot]$ – действительно преобразование $S(\mathbb{R})$.
Покажем, что это изоморфизм. Поскольку φ – бесконечно-дифференцируема и интегрирума, то справедлива формула обращения:

$$F^{-1}\left[F[\varphi](x)\right] = F[F^{-1}[\varphi]](x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

А значит, если $F[\varphi] = 0$, то $\varphi \equiv 0$ и F – инъективное линейное отображение из $S(\mathbb{R})$ в $S(\mathbb{R})$.
Вышеприведённые рассуждание верны и для обратного преобразования Фурье, а значит обратное преобразование тоже инъективное линейное отображение, а следовательно F – изоморфизм. □

Примечание. Эту теоремку бы тоже слегка дописать. Или даже не слегка...

Теорема 8.8. *Преобразование Фурье сохраняет сходимость в $S(\mathbb{R})$, то есть если*

$$\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, m \to +\infty.$$

То и

$$F[\varphi_m] \xrightarrow{S} F[\varphi], m \to +\infty.$$

Доказательство. Зафиксируем $l \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим l-ую норму $F[\varphi_m - \varphi]$:

$$\|F[\varphi_m]-F[\varphi]\|_l = \|F[\varphi_m-\varphi]\|_l = \sup_x(1+|x|)^l\max_{0\leqslant k\leqslant l}\frac{d^k}{dy^k}(F[\varphi_m-\varphi]) = \sup((1+|x|)^l\max_{0\leqslant k\leqslant l}F[(-ix)^k(\varphi_m-\varphi)]).$$

□

Примечание. Доказательство на 14-й лекции будет.

Определение 8.10. Определеним $S'(\mathbb{R})$ как пространство всех непрерывных (по отношению к сходимости в S) линейных функционалов.

Примечание. Под непрерывностью λ имеется в виду

$$\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, \;\; m \to \infty \quad => \quad (\lambda, \varphi_m) \to (\lambda, \varphi), \;\; m \to \infty$$

Примечание. Заметим, что $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ и $S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$.

Определение 8.11. Пусть $\lambda \in S'(\mathbb{R})$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall \varphi \in S$ определим $(\lambda^k, \varphi) = (-1)^k(\lambda, \varphi^{(k)})$. Доказательство корректности аналогично доказательству для D.

Примечание. Возникает вопрос, а что здесь считать регулярным распределением? Оказывается, не любую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как регулярное распределение в S'. Здесь проблема в том, что нельзя сильно расти на бесконечности.

Пример. Рассмотрим следующую $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$: $f = e^{2x^2}$. Тогда, для $\varphi(x) = e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$ выполняется $\int_{\mathbb{R}} f\varphi dx = +\infty$. А значит не любую локально-интегрируемую функцию можно считать элементом $S'(\mathbb{R})$.

Лемма 8.4. *Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\exists C > 0$ и $\exists l \in \mathbb{N}_0$ такие, что*

$$|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^l.$$

Тогда обобщённая функция λ_f, порождённая f следующим образом:

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n): \ (\lambda_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx.$$

является элементом $S'(\mathbb{R}^n)$.

Следствие. Всякий полином можно считать элементом $S'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Заметим, что $\forall \varphi \in S \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)||\varphi(x)| \leqslant \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}}(1+|x|)^l|\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|)^{n+1}}\|\varphi\|_{l+n+1}.$$

А поскольку $\varphi \in S$, $\|\varphi\|_{l+n+1}$ - конечна. А значит $f \cdot \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и интеграл имеет смысл.
Линейность порождённого функционала очевидным образом следует из линейности интеграла.
Проверим непрерывность. Пусть $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, m \to +\infty$. Тогда

$$|(\lambda_f, \varphi_m - \varphi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f||\varphi_m - \varphi|dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^{n+1})}\|\varphi - \varphi_m\|_{n+l+1} \to 0, m \to +\infty.(*)$$

Что и завершает доказательство непрерывности. ∎

8.2 Умножение элементов из $S'(\mathbb{R})$ на гладкие функции

Лемма 8.5. *Пусть $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \ \exists m_n \in \mathbb{N}_0$ такая, что*

$$C_n(g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g^{(n)}(x)|}{(1+|x|)^{m_n}} < +\infty \quad (*).$$

Тогда $\forall \lambda \in S'(\mathbb{R})$ формула $(g\lambda, \varphi) = (\lambda, g\varphi)$ корретно определяет элемент $S'(\mathbb{R})$, обозначаемый $g\lambda$.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant n \leqslant l$.
Ключевое наблюдение: Если $\varphi \in S(\mathbb{R})$ и g удовлетворяет $(*)$, то $g\varphi \in S(\mathbb{R})$, потому что:

$$|((1+|x|)^l(g\varphi)^{(n)})| \leqslant \sum_{s=0}^{n}(1+|x|)^l|g^{(s)}(x)||\varphi^{(n-s)}(x)|\binom{n}{s} \leqslant (**)$$

Поскольку $\forall s \in \{0, \dots, n\}$:

$$|g^{(s)}| \leqslant C_s(g)(1+|x|)^{m_s},$$

То после подстановки:

$$(1+|x|)^l|g^{(s)}||\varphi^{(n-s)}| \leqslant C_s(g)(1+|x|)^{l+m_s}|\varphi^{(n-s)}|.$$

А значит после взятия супремума:

$$\sup_x(1+|x|)^l|g^{(s)}||\varphi^{(n-s)}| \leqslant C_s(g)\sup_x(1+|x|)^{l+m_s}|\varphi^{(n-s)}| \leqslant C_s(g)\|\varphi\|_{l+m_1+\ldots+m_l}.$$

И это верно для всех $x \in \mathbb{R}$. После подстановки в $(**)$:

$$(**) \leqslant \|\varphi\|_{l+m_1+\ldots+m_l} C.$$

Поскольку рассуждения работают для любого n, то можно взять супремум

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \max_{0\leqslant n\leqslant l} (1+|x|)^l |(g\varphi)^{(n)}(x)| < +\infty.$$

А значит, в силу выполнения этого для любого $l \in \mathbb{N}$, мы получаем, что $g\varphi \in S(\mathbb{R})$ и $(\lambda, g\varphi)$ – корректен.
Линейность функционала $g\lambda$ по φ очевидна из линейности интеграла.
Покажем непрерывность. Если $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi,\ m \to +\infty$, то аналогичные рассуждения нам покажут $|g\varphi_m - g\varphi| \xrightarrow{S} 0,\ m \to +\infty$:

$$\|g\varphi_m - g\varphi\|_l \leqslant C(g)\|\varphi_m - \varphi\|_{l+m_1+\ldots+m_l} \to 0, m \to +\infty.$$

Используем непрерывность λ на S и получаем

$$(g\lambda, \varphi_m) = (\lambda, g\varphi_m) \to (\lambda, g\varphi) = (g\lambda, \varphi).$$

□

Примечание. Следующие условия для последовательности $\{\varphi_m\} \subset S(\mathbb{R})$ эквивалентны:

1. $\varphi_m \xrightarrow{S} 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ и $\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow C_{l,n}(\varphi_m) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} x^l \varphi_m^{(n)}(x) \to 0,\ m \to \infty$.

Доказательство. Покажем это. Пусть $\varphi_m \xrightarrow{S} 0, m \to \infty$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^l \varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^l |\varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant \|\varphi_m\|_{n+l} \to 0,\ m \to \infty.$$

И в эту сторону доказано.
Теперь докажем в обратную сторону. Рассмотрим следующее выражение, зафиксировав $0 \leqslant n \leqslant l$:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^l |\varphi_m^{(n)}(x)| &\leqslant \sup_{x\in[-1,1]} (1+|x|)^l |\varphi_m^{(n)}(x)| + \sup_{|x|>1} (1+|x|)^l |\varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant \\ &\leqslant 2^l \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_m^{(n)}(x)| + \sup_{x\ in\mathbb{R}} |2^l x^l \varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant 2^l C_{0,n}(\varphi_m) + 2^l C_{l,m}(\varphi_m) \to 0, m \to +\infty.\end{aligned}$$

А значит $\|\varphi_m\|_l \to 0,\ m \to \infty\quad \forall l \in \mathbb{N}_0$. Следовательно $\varphi_m \xrightarrow{S} 0,\ m \to \infty$. Что и завершает доказательство. □

Напоминание. Теперь докажем недоказанную теорему с прошлой лекции

Теорема 8.9 (Теорема X)**.** *Пусть $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi,\ m \to \infty$. Тогда $F[\varphi_m] \xrightarrow{S} F[\varphi],\ m \to \infty$.*

Доказательство. Нам достаточно проверить, в силу только сделанного замечания, следующее выражение $\forall l \in \mathbb{N}_0$ и $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |(iy)^l \frac{d^n F[\varphi_m - \varphi]}{dy^n}(y)| \to 0,\ m \to \infty.$$

Ранее было показано, что

$$(iy)^l \frac{d^n}{dy^n}(F[\varphi_m - \varphi]) = (iy)^l F[(-ix)^n(\varphi_m - \varphi)] = F\left[\frac{d^l}{dx^l}((-ix)^n(\varphi_m - \varphi))(x)\right](y).$$

Заметим, что

$$\sup_{\mathbb{R}}\left[\frac{d^l}{dx^l}((-ix)^n(\varphi_m - \varphi))(x)\right] \to 0,\ m \to \infty.$$

Для этого надо рассмотреть

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^2\frac{d^l}{dx^l}((-ix)^n(\varphi_m - \varphi)(x)) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\psi_{l,n,m}(x) \to 0,\ m \to \infty.$$

Тогда

$$|\sup_{y\in\mathbb{R}} F[\ldots](y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ixy}}{(1+|x|^2)}\psi_{l,m,n}(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi_{l,m,n}(x)|\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|x|)^2}dx \to 0,\ m \to +\infty.$$

Что завершает доказательство. □

Определение 8.12. Пусть $\lambda \in S'(\mathbb{R})$. Определим преобразование Фурье как

$$(F[\lambda], \varphi) = (\lambda, F[\varphi]).$$

И обратное произведение Фурье:

$$(F^{-1}[\lambda], \varphi) = (\lambda, F^{-1}[\varphi]).$$

На всякой пробной функции.

Теорема 8.10. *Определение преобразования Фурье в S' – корректно, то есть $\forall\lambda \in S'(\mathbb{R})$ функционалы $F[\lambda]$ и $F^{-1}[\lambda]$ являются корректно определёнными линейными непрерывными функционалами в S'. Более того, если $\lambda \in S'(\mathbb{R})$ порождён $f \in L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье в обобщённом смысле совпадает с преобразованием Фурье в классическом смысле.*

Примечание. Когда мы сделаем преобразование Фурье в обобщенном смысле, мы получим какой-то функционал на S. Ему будет соответствовать некоторое регулярное распределение, которое и является классическим преобразованием Фурье f.

Доказательство. Линейность немедленно следует из линейности интеграла и преобразования Фурьеа на S.
Корректность следует из того, что $F[\cdot]$ – изоморфизм пространства Шварца на себя.
Непрерывность функционалов $F[\lambda]$ и $F^{-1}[\lambda]$ следует из теоремы X.
Пусть теперь $\lambda \in S'(\mathbb{R})$ порождена $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Для всякой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$(F[\lambda], \varphi) = (\lambda, F[\varphi]) = \int_{\mathbb{R}} f_\lambda(y)F[\varphi](y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(y)\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-ixy}dx\right)dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(x)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}f_\lambda(y)dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}} F[f]\varphi dx = (F[f_\lambda], \varphi).$$

(Замена пределов интегрирования делается по теореме Фубини, которую мы можем применять вследствие теоремы Тонелли). Что и завершает доказательство. То есть действие на пробные функции обобщенного преобразования Фурье и классического совпадают.
Для обратного преобразования Фурье действуем полностью аналогично. □

8.3 Преобразование Фурье в L_2.

Примечание. Как определить преобразование Фурье на L_2?

Лемма 8.6 (Лемма Планшереля.)**.** $\forall f, g \in S(\mathbb{R}) \hookrightarrow (f, g)_{L_2} = (F[f], F[g])_{L_2}$.

Примечание. $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{L_2}$ - скалярное произведение в L_2, $\hat{f}$ - прямое преобразование Фурье.

Доказательство.

$$(\hat{f}, \hat{g})_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\overline{\hat{g}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \left(\overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(x)dx}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f} e^{ixy} dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(x) f(x) dx = (f, g)_{L_2}.$$

Предпоследний переход сделан в силу теоремы Фубини (её применимость обосновывается теоремой Тонелли), а последний – поскольку преобразование Фурье действует как автоморфизм на $S(\mathbb{R})$. □

Следствие. Если рассматривать $S(\mathbb{R})$ как подпространство $L_2(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье является эрмитовым автоморфизмом на $S(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. В частности он сохраняет L_2-норму (является изометрическим изоморфизмом).

Лемма 8.7. *$S(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$ по L_2-норме.*

Доказательство. Ранее было показано, что $C_0^{+\infty}(\mathbb{R})$ плотно в $L_p(\mathbb{R})$. Применение этой теоремы при $p = 2$ завершает доказательство, поскольку $C_0^{+\infty}(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$. □

Определение 8.13. Зафиксируем $f \in L_2(\mathbb{R})$. Пусть $\{\varphi_n\} \subset S(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|\varphi_n - f\|_{L_2} \to 0, n \to +\infty.$$

А значит $\{\varphi_n\}$ – фундаментальна по L_2-норме. Тогда и $\{F[\varphi_n]\}$ – фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$. В силу полноты L_2 мы определим

$$F[f] - = \lim_{n \to +\infty} F[\varphi_n].$$

ВЫЧИТАН БАЗОВЫЙ ТЕХ ДО СЮДА

Теорема 8.11. *Определение преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ корректно.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}$ и φ_n' последовательности в $L_2(\mathbb{R}) \cap S(\mathbb{R})$, сходящиеся к φ в $L_2(\mathbb{R})$. Определим ψ_k следующим образом:

$$\psi_k = \begin{cases} \varphi_n, k = 2n \\ \varphi_n', k = 2n + 1. \end{cases}$$

Поскольку $F[\psi_k]$ имеет предел в L_2, то в силу того, что все частичные пределы равны пределу мы получаем искомую корректность. □

Теорема 8.12 (Теорема Планшереля.)**.** *Преобразование Фурье осуществляет изометрический изоморфизм $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})$.*
Кроме того, справедливы следующие свойства:

1. $\forall f, g \in L_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow (f, g) = (F[f], F[g])$.

2. *Если $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\{f_n\} \subset L_2(\mathbb{R})$, такая, что $\|f_n - f\|_{L_2} \to 0, n \to \infty$, то $\|F[f_n] - F[f]\|_{L_2} \to 0, n \to \infty$.*

3. $F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f$.

Доказательство. Докажем первый пункт.

Пусть $\{\psi_n\} \subset S(\mathbb{R})$ и $\{\varphi_n\} \subset S(\mathbb{R})$ такие, что $\varphi_n \xrightarrow{L_2} f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\psi_n \xrightarrow{L_2} g \in L_2$. Рассмотрим скалярные произведения. По лемме Планшереля скалярные произведения функций из S и их Фурье-образов равны:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_n \overline{\hat{\psi}_n} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \overline{\psi_n} dx.$$

Рассмотрим правую часть. Так как

... Тут я немного пропустил.

Докажем второй пункт.

Поскольку из первого пункта следует $\|\hat{f}\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$, то F – инъективно и изометрично. Тогда

$$\|f - f_n\|_{L_2} = \|F[f_n - f]\|_{L_2}.$$

Из чего немедленно следует второй пункт.

Докажем последний пункт. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Пусть $\hat{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n$, где $\{\varphi_n\} \subset S(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Тогда, так как $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$, то $\tilde{\hat{f}}$ – предел в L_2 произвольной последовательности $\psi_n \xrightarrow{L_2} \hat{f}, n \to +\infty$. Возьмём $\psi_n = \hat{\varphi}_n$ и, тогда, в силу доказанной теоремы для пространства Шварца, мы получаем утверждение теоремы. ☐

9 Анекдоты

1. Но для счастья этого мало, понимаете? В среднеквадратичном смысле это конечно хорошо, но это как средняя зарплата, у кого-то много, у кого-то мало, а в среднем ничего