

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики



Лектор: Александр Иванович Тюленев

Для вас техали: Потапов Станислав,  
Сысоева Александра,  
Цеденов Артем,  
Бадоля Петр,  
Баронов Михаил,  
Шуминов Эзра  
Петракова Анастасия

## Содержание

<b>1 Абстрактная теория меры</b>	<b>3</b>
1.1 Системы множеств . . . . .	3
1.2 Свойства полуколец . . . . .	9
1.3 Меры на полукольцах . . . . .	10
1.4 Внешняя мера . . . . .	12
1.5 Продолжение меры с полукольца на $\sigma$ -алгебру . . . . .	16
<b>2 Мера Лебега в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>21</b>
2.1 Конструкция меры Лебега . . . . .	21
2.2 Неизмеримые по Лебегу множества . . . . .	22
2.3 Регулярность меры Лебега. . . . .	23
2.4 Элементы геометрической теории меры. . . . .	26
2.5 Точки плотности . . . . .	29
<b>3 Измеримые функции</b>	<b>31</b>
3.1 Измеримые и борелевские функции . . . . .	31
3.2 Предельный переход для измеримых функций . . . . .	33
3.3 Простые функции . . . . .	35
<b>4 Различные виды сходимости</b>	<b>36</b>
4.1 Сходимость по мере и почти всюду . . . . .	36
4.2 Почти равномерная сходимость . . . . .	38
4.3 Теоремы Рисса и Егорова . . . . .	39
4.4 Теорема Лузина. Аппроксимация измеримых функций непрерывными . . . . .	40
<b>5 Интеграл Лебега</b>	<b>42</b>
5.1 Определение интеграла Лебега и его корректность . . . . .	42
5.2 Неравенства Гёльдера, Минковского и Чебышёва. Пространства $L_p$ . . . . .	43
5.3 Свойства интеграла Лебега для неотрицательных функций . . . . .	45
5.4 Свойства интеграла Лебега от произвольных измеримых функций . . . . .	49
5.5 Интеграл Лебега как функция множества . . . . .	52
5.6 Сравнение интегралов Лебега и Римана . . . . .	55
5.7 Точки Лебега локально интегрируемых функций . . . . .	57
<b>6 Произведение мер и кратные интегралы</b>	<b>60</b>
6.1 Теорема о монотонном классе . . . . .	60
6.2 Произведение мер и принцип Кавельери . . . . .	62
6.3 Перемена порядка интегрирования. Сведение кратных интегралов к повторным (Теоремы Тонелли и Фубини) . . . . .	65
6.4 Мера Лебега как произведение мер . . . . .	68
<b>7 Замена переменной в интеграле Лебега</b>	<b>69</b>
7.1 Изменение меры Лебега при отображениях . . . . .	69
7.2 Трансляционная инвариантность меры Лебега . . . . .	70
7.3 Изменение меры Лебега при линейных отображениях . . . . .	71
7.4 Абстрактная замена в интеграле Лебега . . . . .	72
7.5 Конкретная замена переменной в интеграле Лебега . . . . .	74

<b>8 Криволинейные интегралы</b>	<b>76</b>
8.1 Интегралы I рода . . . . .	76
8.2 Интегралы II рода . . . . .	77
8.3 Формула Грина . . . . .	78
<b>9 Поверхностные интегралы</b>	<b>83</b>
9.1 Поверхности . . . . .	83
9.2 Поверхностные интегралы I рода . . . . .	87
9.3 Поверхностный интеграл II рода . . . . .	88
9.4 Формула Остроградского-Гаусса . . . . .	89
9.5 Формула Кельвина-Стокса . . . . .	92
<b>10 Элементы теории поля</b>	<b>94</b>
10.1 Геометрическое определение ротации . . . . .	94
10.2 Потенциальные поля . . . . .	94
10.3 Геометрический смысл дивергенции . . . . .	96
<b>11 Анекдоты</b>	<b>98</b>

# 1 Абстрактная теория меры

## 1.1 Системы множеств

**Определение 1.1.** Пусть  $I$  — индексное множество,  $A_\alpha$  — абстрактное множество  $\forall \alpha \in I$ . Тогда *системой множеств* назовём совокупность всех  $A_\alpha$  и будем обозначать  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .

**Лемма 1.1.** Пусть  $X$  — абстрактное множество и  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — система подмножеств  $X$ , то есть  $A_\alpha \subset X \forall \alpha \in I$ . Тогда

$$1. X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

$$2. X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

$$3. A \cap \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A \cap A_\alpha$$

*Доказательство.* Доказательство состоит в проговаривании смысла равенств.

Лежит в объединении  $\Leftrightarrow$  Лежит хотя бы в одном.

Лежит в пересечении  $\Leftrightarrow$  Лежит в каждом.

□

**Определение 1.2.** Пусть  $A$  и  $B$  — абстрактные множества. Назовём их *симметрической разностью* множество, определяемое равенством  $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

**Определение 1.3.** Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность множеств. Её *нижним* пределом  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  назовём все  $x$  такие, что каждый из них принадлежит всем  $A_n$ , начиная с некоторого номера  $N(x)$ , то есть

$$\forall x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \exists N(x) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(x) \hookrightarrow x \in A_n$$

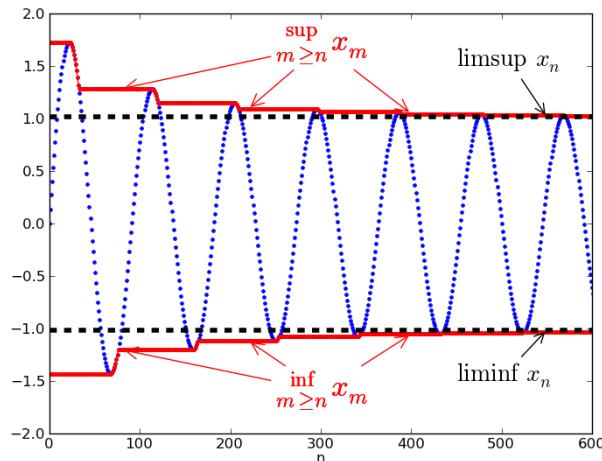
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$$

**Определение 1.4.** Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность множеств. Её *верхним* пределом  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  назовём все  $x$  такие, что каждый из них принадлежит бесконечному набору множеств из  $\{A_n\}$ , то есть

$$\forall x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \forall N \in \mathbb{N} : \exists n(x, N) \geq N \hookrightarrow x \in A_n$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$$

**Утверждение 1.1.**  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$



Прим редактора: геометрическая интуиция про эти пределы. Иллюстрация верхнего предела и нижнего предела. Последовательность  $\{x_n\}$  показана синим цветом. Две красные кривые приближаются к верхнему пределу и нижнему пределу  $\{x_n\}$ , показаны пунктирумыми черными линиями. Идея перехода от последовательностей к множествам принадлежит Михаилу Баронову. Представьте теперь что эти числа это размеры шаров(очевидно неотрицательные) с центром в нуле

**Определение 1.5.** Систему множеств  $\mathcal{R}$  назовём *кольцом*, если  $\forall A, B \in \mathcal{R}$  выполнено:

1.  $A \cup B \in \mathcal{R}$ ;
2.  $A \cap B \in \mathcal{R}$ ;
3.  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ .

**Определение 1.6.** Будем говорить, что в кольце есть «единица», если  $\exists X \in \mathcal{R} : A \subset X \forall A \in \mathcal{R}$

**Определение 1.7.** Кольцо с единицей назовём *алгеброй*.

**Определение 1.8.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра с единицей  $X$  и  $A \in \mathcal{A}$ , тогда дополнением  $A$  назовём множество  $A^c := X \setminus A$ .

**Замечание.** Нетрудно заметить, что для любого кольца  $\mathcal{R}$  и любой алгебры  $\mathcal{A}$  выполняется:

1.  $\emptyset \in \mathcal{R}$ ;
2.  $A^c \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A}$ ;
3.  $\forall A, B \in \mathcal{R} \hookrightarrow A \Delta B \in \mathcal{R}$ .

На самом деле, для определения кольца достаточно было использовать только пересечение и симметрическую разность, потому что объединение и вычитание выражаются через них:

- $A \setminus B = A \cap B^c$ ;
- $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ .

**Определение 1.9.** Алгебра  $\mathcal{A}$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если  $\forall$  последовательности  $\{A_n\} \subset \mathcal{A} \hookrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

**Замечание.** Для  $\sigma$ -алгебры также верно, что любое счётное пересечение в ней лежит (это верно в силу закона двойственности).

**Пример.** Тривиальные  $\sigma$ -алгебры:  $\{\emptyset, X\}$ ,  $2^X$ .

**Лемма 1.2.** Пусть  $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — семейство алгебр, с «единицей»  $X$ . Тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}$  — алгебра с единицей  $X$ .

*Доказательство.*  $X$  — «единица», для всех алгебр из семейства  $\Rightarrow X \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ .

Покажем, что  $\forall A, B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \hookrightarrow A \setminus B, A \cap B, A \cup B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$

$A, B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in I \hookrightarrow A, B \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow A \setminus B, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \Rightarrow A \setminus B, A \cap B, A \cup B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$

□

**Замечание.** Аналогично доказывается то же утверждение, но для семейства  $\sigma$ -алгебр, с общей «единицей»  $X$ .

**Теорема 1.1.**  $\forall$  системы  $\mathcal{E}$  подмножеств множества  $X$  существует и единственна наименьшая по включению  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{E}$ . То есть,  $\sigma$ -алгебра, порождённая  $\mathcal{E}$ , и обозначается  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ .

*Доказательство.* Разобьём доказательство на шаги.

▷ **Существование.**

Рассмотрим семейство всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{E}$ , обозначим его  $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Это семейство не пусто, потому что в нём есть хотя бы [один тривиальный пример](#).

Положим  $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$ . Оно является  $\sigma$ -алгеброй по [лемме](#). Также оно содержит  $\mathcal{E}$ , поскольку  $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_\alpha \forall \alpha \in I$ .

▷ **Минимальность.**

Пусть есть  $\mathcal{M}'$  —  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{E}$ . Но так как она содержит  $\mathcal{E}$ , то  $\exists \alpha' \in I: \mathcal{M}' = \mathcal{M}_{\alpha'}$ . Но  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}_{\alpha'}$ . Значит она минимальна.

▷ **Единственность.**

Если бы их было две, то первая должна содержать вторую и вторая первую, значит они равны.

□

**Примечание.** Данная процедура пополнения неконструктивная для бесконечных множеств. Мы не предъявили алгоритм построения, а лишь доказали существование.

**Пример.** Рассмотрим абстрактное множество  $X$ . Пусть  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, n \in \mathbb{N}$  — набор подмножеств  $X$ , где  $A_0 := X$ . Рассмотрим всевозможные наборы  $\varepsilon = (0, 1, 1, 0, \dots, 0)$  из 0 и 1.  $A_\varepsilon = \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}$ . Теперь составим нашу систему  $\mathcal{M}$  из  $A_\varepsilon$  и их всевозможных объединений. Это и будет  $\sigma$ -алгеброй. В ней  $\leqslant 2^n$  элементов.

**Определение 1.10.** Если  $(X, \rho)$  — метрическое пространство, то  $\mathcal{B}(X)$  — *борелевская  $\sigma$ -алгебра*, то есть наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества в  $X$ .

**Замечание.** Сам по себе набор открытых множеств не образует алгебру. Если мы возьмём в качестве метрического пространства  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$  и рассмотрим интервал  $A = (0, 1)$ , то  $A^c = \mathbb{R} \setminus A$  — не открыто.

**Замечание.** Борелевские подмножества — это не все подмножества. Мощность борелевской системы в  $\mathbb{R}^n$  континуальна, а множество всех подмножеств гиперконтинуально

**Замечание.** Непрерывное отображение борелевского не всегда борелевское. Но это за пределами программы. Кому интересно см. Суслинские множества

**Примеры.** Пусть  $X$  — абстрактное множество.

1.  $\{\emptyset, X\}$  -  $\sigma$ -алгебра;
2.  $2^X$  - семейство подмножеств  $X$  является  $\sigma$ -алгеброй;
3.  $\mathcal{M}$  - все такие подмножества числовой прямой, что-либо оно счётно, либо его дополнение не более чем счётно. Это также является  $\sigma$ -алгеброй;
4.  $\mathcal{M}$  - все такие подмножества числовой прямой, что-либо оно, либо его дополнение не более чем конечно. Это является алгеброй, но не  $\sigma$ -алгеброй.

**Определение 1.11.** Система множеств  $\mathcal{P}$  называется *полукольцом*, если:

1.  $\emptyset \in \mathcal{P}$ ;
2.  $\forall A, B \in \mathcal{P} \hookrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$ ;
3.  $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \setminus B = \bigsqcup_{n=1}^N A_n$ , где  $A_n \in \mathcal{P}$ .

**Замечание.** В определении полукольца мы не требуем что работаем с подмножествами какого-то большого множества, это просто система множеств

**Пример.** Приведём пример полукольца (даже с единицей), но не кольца:

$$X = [a, b], \quad \mathcal{P} = \{[\alpha, \beta] : a \leq \alpha \leq \beta \leq b\}.$$

(Доказательство оставлено читателю в качестве упражнения)

**Лемма 1.3.** Если  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  — произвольная последовательность множеств, тогда их обединение можно представить в виде дизъюнктного, то есть  $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigsqcup_{n=1}^\infty C_n$ , где  $C_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ ,  $C_1 = A_1$

*Доказательство.* Покажем включение в обе стороны:

- ▷  $\bigsqcup_{n=1}^\infty C_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ , поскольку  $\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n \subset A_n$
- ▷  $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset \bigsqcup_{n=1}^\infty C_n$   
 $\forall x \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad m_x := \min\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}, m_0 := \emptyset$

Из определения  $m_x$ , следует:  $x \notin A_m \quad \forall m < m_x \Rightarrow x \in A_{m_x} \setminus \bigcup_{k=1}^{m_x-1} A_k \Rightarrow x \in C_{m_x} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset \bigsqcup_{n=1}^\infty C_n$

□

**Теорема 1.2.** (Теорема о дизъюнктном разбиении) Пусть  $\mathcal{P}$  - полукольцо, а  $P, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}$ . Тогда

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \exists$  конечное семейство попарно непересекающихся множеств  $Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{P}$ , т.ч.  
 $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{i=1}^m Q_i$

2.  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \exists R_k \in \mathcal{P}$  ( $k = 1, \dots, N$ ), т.ч.  $\bigcup_{i=1}^n P_i = \bigsqcup_{k=1}^N R_k$ . При этом  $\forall k \in \{1, \dots, N\}$  и  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , либо  $R_k \subset P_i$ , либо  $R_k \cap P_i = \emptyset$  (\*)

**Замечание.** Первый пункт теоремы нетривиален, как могло показаться, ведь по определению то выполнено, для  $n = 1$ , но вот  $\bigcup_{k=1}^n P_k$  не обязательно лежит в полукольце. Тем не менее мы можем дополнить элементами полукольца

*Доказательство.* Рассмотрим доказательство каждого пункта по отдельности

1. Докажем по индукции.

▷ **База:** Для  $n = 1$  утверждение следует из определения полукольца.

▷ **Предположение:** Пусть утверждение доказано при  $n = l$ .

▷ **Шаг:** Докажем для  $n = l + 1$ .

$$P \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_l) = \bigsqcup_{i=1}^m Q_i, \text{ где } Q_i \in \mathcal{P}$$

В силу закона двойственности:

$$P \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_l \cup P_{l+1}) = (P \setminus P_{l+1}) \cap (P \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_l))$$

$$P \setminus P_{l+1} = \bigsqcup_{j=1}^k S_j, \text{ где } S_j \in \mathcal{P}$$

Рассмотрим, всевозможные пересечения  $Q_i \cap S_j$ .

$$\text{Тогда } (P \setminus P_{l+1}) \cap (P \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_l)) = (\bigsqcup_{j=1}^k S_j) \cap (\bigsqcup_{i=1}^m Q_i) = \bigsqcup_{j=1}^k \bigsqcup_{i=1}^m S_j \cap Q_i$$

Так как  $S_j, Q_i \in \mathcal{P} \Rightarrow S_j \cap Q_i \in \mathcal{P}$ . Следовательно, сделав шаг индукции, мы получили конечное дизъюнктное разбиение для  $n = l + 1$ . Значит доказательство по индукции выполнено.

2. Докажем по индукции.

▷ **База:** Для  $n = 2$ :  $P_1 \cup P_2 = (P_1 \setminus P_2) \sqcup (P_1 \cap P_2) \sqcup (P_2 \setminus P_1) = \bigsqcup_{i=1}^2 Q_i \sqcup (P_1 \cap P_2) \sqcup \bigsqcup_{j=1}^l S_j$

▷ **Предположение:** Пусть доказали при  $n \leq n'$ .

▷ **Шаг:** Докажем для  $n' + 1$ . Очевидно, что  $\bigcup_{i=1}^{n'+1} P_i = P_{n'+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n'} P_i$

Рассмотрим множества  $I_1 = P_{n'+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n'} P_i$ ,  $I_2 = P_{n'+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n'} P_i$ ,  $I_3 = \bigcup_{i=1}^{n'} P_i \setminus P_{n'+1}$ . Тогда

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = P_{n'+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n'} P_i$$

Из первого пункта теоремы следует, что  $I_1 = \bigsqcup_{j=1}^l S_j$ , где  $S_j \in \mathcal{P}$  при каждом  $j$ .

По предположению индукции:  $I_2 = P_{n'+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n'} P_i = P_{n'+1} \cap \bigsqcup_{k=1}^N R_k = \bigsqcup_{k=1}^N (R_k \cap P_{n'+1})$ , из определения полукольца  $R_k \cap P_{n'+1} \in \mathcal{P}$ .

По предположению индукции:  $I_3 = \bigcup_{i=1}^{n'} P_i \setminus P_{n'+1} = \bigsqcup_{k=1}^N R_k \setminus P_{n'+1} = \bigsqcup_{k=1}^N (R_k \setminus P_{n'+1})$ , из определения полукольца  $R_k \setminus P_{n'+1} = \bigsqcup_{t=1}^m M_t \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$ , где  $M_t \in \mathcal{P}$ .

Заметим, что  $I_1 \cap I_2 = I_2 \cap I_3 = I_3 \cap I_1 = \emptyset$ . Таким образом мы разложили три не пересекающихся множества в дизъюнктные объединения, значит мы всё это собираем вместе, нумеруем единым индексом и получаем то, что хотели.

Свойство (\*) видно из построения. Очевидно, что  $R_k \setminus P_{n'+1} \not\subseteq P_{n'+1}$ ,  $R_k \setminus P_{n'+1} \subset R_k \Rightarrow R_k \setminus P_{n'+1} \subset P_q$ , для какого-то  $q < n$ . А для  $n$  уже доказано (предположение индукции).

□

**Определение 1.12.** Пусть  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  - полукольца. Определим их *тензорное произведение*  $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}_1, Q \in \mathcal{P}_2\}$ . Произведение пустых по определению положим пустым.

**Теорема 1.3.** Пусть  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  - полукольца, тогда  $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$  - тоже полукольцо.

*Доказательство.* Докажем все свойства из определения полукольца по порядку.

1. *Свойство 1.*  $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$

2. *Свойство 2.* Теперь докажем, что пересечение тоже лежит в произведении  
 $(C_1 \times D_1) \cap (C_2 \times D_2) = (C_1 \cap C_2) \times (D_1 \cap D_2)$ .

3. *Свойство 3.*

Рассмотрим  $A \in \mathcal{P}_1$  и  $B \in \mathcal{P}_2$  и  $E \subset A \times B$  при  $E \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ .

Т.к.  $E \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ , то  $\exists C \in \mathcal{P}_1$  и  $\exists D \in \mathcal{P}_2$ , т.ч.  $C \times D = E$ .

Из определения полукольца следует, что  $A \setminus C = \bigsqcup_{i=1}^N A_i, \quad A_i \in \mathcal{P}_1$ .

Также, из определения полукольца следует, что  $B \setminus D = \bigsqcup_{j=1}^L B_j, \quad B_j \in \mathcal{P}_2$ .

Дополнительно определим  $A_0 := C$  и  $B_0 := D$

Определим  $F_{ij} := A_i \times B_j$ . Из определения тензорного произведения  $F_{ij} \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$

Заметим, что  $F_{ij} \cap F_{i^*j^*} = \emptyset$ , при  $(i, j) \neq (i^*, j^*)$

Значит  $A \times B = \bigsqcup_{i,j=0}^{N,L} F_{ij} \Rightarrow (A \times B) \setminus (C \times D) = \bigsqcup_{i,j=0, (i,j) \neq (0,0)}^{N,L} F_{ij}$

□

**Следствие.** Эта конструкция будет часто использоваться. Пусть

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{и } [a, b] := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \quad b_i \geq a_i \quad \forall i$$

Тогда система всех  $[\alpha, \beta]$  содержащихся в  $[a, b]$  (где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , и  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$   $\beta_i \geq \alpha_i \quad \forall i$ ) образует полукольцо с единицей  $[a, b]$

**Утверждение 1.2.** Любое открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  можно представить, как не более чем счётное объединение полуоткрытых параллелепипедов с рациональными вершинами.

*Доказательство.* Оставляется в качестве упражнения читателю (есть в Макарове-Подкорытове)

□

## 1.2 Свойства полуколец

**Определение 1.13.** Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо. Тогда отображение  $\mu: \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$  называется конечно-аддитивной мерой, если:

1.  $\mu(\emptyset) := 0$ ;
2. Если  $C \in \mathcal{P}$  и  $C = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$ ,  $Q_k \in \mathcal{P}$ , тогда  $\mu(C) = \sum_{k=1}^n \mu(Q_k)$ .

**Лемма 1.4.** Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо,  $\mu$  — мера на  $\mathcal{P}$ , тогда верны следующие свойства:

1. *Монотонность:*  $\forall A, B \in \mathcal{P}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
2. *Продвинутая монотонность:* Если  $A \in \mathcal{P}$  и  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$  — попарно не пересекаются и  $A_i \subset A \forall i$ , то  $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(A)$ ;
3. *Полуаддитивность:* Если  $B \in \mathcal{P}, B \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$  и  $A_i \in \mathcal{P}$  при всех  $i \in \{1, \dots, n\}$ , то  $\mu(B) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ .

*Доказательство.* Докажем пункты по порядку.

1. Следует из 2).
2. Из теоремы о дизъюнктом разбиении  $A \setminus \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{k=1}^N Q_k \Rightarrow A = (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) \sqcup (\bigsqcup_{k=1}^N Q_k)$ . Значит, из свойств меры получим  $\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{k=1}^N \mu(Q_k)$ , но так как  $\mu(Q_k) \geq 0$ , то  $\sum_{k=1}^N \mu(Q_k) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(A)$
3. Заметим, что  $B \cap A_i \in \mathcal{P}$ , и при этом, так как  $\mathcal{P}$  — полукольцо,  $B \setminus A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m_i} Q_{i,j}$ , где  $Q_{i,j} \in \mathcal{P} \forall i, j$ . Тогда по определению меры  $\mu(A_i) = \mu(B \cap A_i) + \sum_{j=1}^{m_i} \mu(Q_{i,j}) \forall i$

□

**Теорема 1.4.** Пусть  $\mathcal{P}^1$  и  $\mathcal{P}^2$  — полукольца, а  $\mu$  и  $\nu$  — конечно-аддитивные меры на  $\mathcal{P}^1$  и  $\mathcal{P}^2$  соответственно. Тогда  $\forall P \in \mathcal{P}^1, Q \in \mathcal{P}^2$  определим  $(\mu \otimes \nu)(P \times Q) = \mu(P) \cdot \nu(Q)$  (причём считаем, что  $+\infty \cdot +\infty = +\infty$ ). Докажем, что  $\mu \otimes \nu$  — конечно-аддитивная мера на  $\mathcal{P}^1 \otimes \mathcal{P}^2$ .

*Доказательство.* Для начала рассмотрим случай так называемого сеточного разбиения, то есть:

$$P \times Q = \bigsqcup_{i=1, j=1}^{n, m} P_i \times Q_j, \quad \text{где } P_i \in \mathcal{P}^1, Q_j \in \mathcal{P}^2$$

Тогда по определению  $(\mu \otimes \nu)$  мы получаем следующее:

$$(\mu \otimes \nu)(P \times Q) = \mu(P) \nu(Q) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i) \cdot \sum_{j=1}^m \nu(Q_j) = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} \mu(P_i) \cdot \nu(Q_j) = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} (\mu \otimes \nu)(P_i \times Q_j)$$

Что показывает корректность теоремы при таком сеточном разбиении.

Пусть у нас есть произвольное разбиение:

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^l P_k \times Q_k$$

Тогда по [теореме о дизъюнктном разбиении](#) у нас справедливы следующие равенства:

$$P_1 \cup \dots \cup P_l = \bigsqcup_{i=1}^N P'_i, \text{ причём } \forall i \ \forall k \ (P'_i \subset P_k \vee P'_i \cap P_k = \emptyset);$$

$$Q_1 \cup \dots \cup Q_l = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j, \text{ причём } \forall j \ \forall k \ (Q'_j \subset Q_k \vee Q'_j \cap Q_k = \emptyset).$$

Теперь мы можем свести задачу к сеточному разбиению. Заметим, что  $\{P'_i \times Q'_j\}_{i,j=1,1}^{N,M}$  даёт сеточное разбиение  $P \times Q$ . Причём поскольку

$$\bigsqcup_{\{i|P'_i \subset P_k\}} P'_i = P_k \text{ и } \bigsqcup_{\{j|Q'_j \subset Q_k\}} Q'_j = Q_k$$

образуют сеточное разбиение для  $P_k \times Q_k$ . Следовательно, справедливо равенство:

$$(\mu \otimes \nu)(P \times Q) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\mu \otimes \nu)(P'_i \times Q'_j) = \sum_{k=1}^l \left( \sum_{\{(i,j)|P'_i \subset P_k \wedge Q'_j \subset Q_k\}} (\mu \otimes \nu)(P'_i \times Q'_j) \right) = \sum_{k=1}^l (\mu \otimes \nu)(P_k \times Q_k)$$

что и требовалось показать.  $\square$

### 1.3 Меры на полукольцах

**Определение 1.14.** Если  $\mathcal{P}$  — полукольцо множеств, то будем говорить, что конечно-аддитивная мера  $\mu$  на  $\mathcal{P}$  является счтно-аддитивной, если:

$$\forall A \in \mathcal{P} : A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup \dots$$

где  $\{A_i\} \subset \mathcal{P}$  выполняется

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

**Определение 1.15.** Назовём одномерной ячейкой множество  $[a, b], -\infty < a \leq b < +\infty$ . Эту конструкцию можно обобщить на  $\mathbb{R}^n$ , и  $n$ -мерной ячейкой  $[a, b]$ , где  $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$  назвать множество  $[a, b] = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

**Упражнение.** Семейство всех ячеек в  $\mathbb{R}^n$  образует полукольцо множеств  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

1. Замкнутость относительно пересечения

Пусть  $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], B = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$ . Тогда их пересечение:

$$A \cap B = \prod_{i=1}^n ([a_i, b_i] \cap [c_i, d_i]).$$

Поскольку пересечение двух полуинтервалов  $[a_i, b_i] \cap [c_i, d_i]$  также является полуинтервалом (возможно, пустым), результатом пересечения  $A \cap B$  будет ячейка из  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

## 2. Замкнутость относительно разности

Для разности  $A \setminus B$  можно рассмотреть случаи, когда каждое измерение  $i$  пересекается частично или полностью. Разность можно разложить на конечное число ячеек следующим образом:

Разделим  $A$  на подмножества, исключая пересечения с  $B$ . Каждое измерение порождает максимум два новых отрезка (до и после пересечения). Таким образом, разность  $A \setminus B$  представляется в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся ячеек.

**Определение 1.16.** Введём одномерную меру Лебега на полукольце ячеек равенством  $\lambda_1([a, b]) = |b - a|$ . Тогда  $n$ -мерную Лебега на полукольце ячеек получим равенством  $\lambda_n([a, b]) = \prod_{i=1}^n \lambda_1([a_i, b_i])$ , т.е. как тензорное произведение мер на тензорном произведении  $n$  одномерных полуколец.

**Определение 1.17.** Будем говорить, что мера на полукольце является счётно-полуаддитивной, если  $\forall A \in \mathcal{P}$  и  $\forall \{A_i\} \subset \mathcal{P}$  такой что  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  выполняется  $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ .

**Теорема 1.5.** Для меры  $\mu$  на полукольце множеств  $\mathcal{P}$  условия счётной аддитивности и счётной полуаддитивности равносильны.

*Доказательство.* Пусть  $\mu$  — счётно-полуаддитивна. Пусть  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{P}$ . Тогда из полуаддитивности следует

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

С другой стороны, из монотонности меры следует  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(A)$$

Возьмём supremum по  $n$ :

$$\mu(A) \geq \sup_n \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

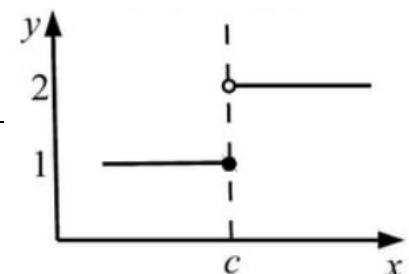
Таким образом мы получаем счётную аддитивность меры  $\mu$ .

Пусть  $\mu$  — счётно-аддитивна. Пусть  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Пусть  $A'_i = A \cap A_i$ . Определим  $\{P_{n,i}\}$  как

$$A'_1 = P_{1,1}$$

$$A'_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A'_i = \bigsqcup_{j=1}^{N_k} P_{k,j}$$

Тогда  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{N_n} P_{n,i}$ , следовательно, в силу монотонности,  $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \mu(P_{n,i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ . □



**Напоминание.** Функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называют непрерывной слева, если  $\forall c \in [a, b] \leftarrow \lim_{x \rightarrow c^-} = f(c)$

**Теорема 1.6.** Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо одномерных ячеек и дана строго возрастающая функция  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная слева. Определим  $\nu_g([a, b]) = |g(b) - g(a)|$ . Тогда  $\nu_g$  — счётно-аддитивная мера на полукольце ячеек.

**Доказательство.** Пусть  $[a, b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i)$ . В силу непрерывности слева мы можем выбрать  $t \in (a, b)$  такой, что  $|\nu_g([a, t)) - \nu_g([a, b))| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\forall i \in \mathbb{N}$  выберем  $\delta_i : [a_i - \delta_i, b_i) \supset [a_i, b_i)$  так, чтобы  $|\nu_g([a_i - \delta_i, b_i)) - \nu_g([a_i, b_i))| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ . Тогда  $[a, b) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i - \delta_i, b_i)$ ;  $[a, t] \subset [a, b)$ . По лемме Гейне-Бореля, есть некоторое конечное подпокрытие мощности  $N$ :  $[a, t] \subset [a, t] \subset \bigcup_{i=1}^N (a_i - \delta_i, b_i) \subset \bigcup_{i=1}^N [a_i - \delta_i, b_i)$ . Заметим, что конечная аддитивность, и, как следствие, конечная полуаддитивность очевидны для  $\nu_g$ . Значит,

$$\nu_g([a, t)) \leq \sum_{i=1}^N \nu_g([a_i - \delta_i, b_i]) \leq \sum_{i=1}^N \nu_g([a_i, b_i)) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu_g([a_i, b_i)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Но по выбору  $t$ :

$$\nu_g([a, b)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu_g([a_i, b_i)) + \varepsilon$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  было выбрано произвольно, то мы получили счётно-полуаддитивную меру на полукольце, что по ранее доказанной теореме равносильно счётно-аддитивности меры  $\nu_g$ .  $\square$

**Пример.** Приведём пример конечно-, но не счётно-аддитивной меры. Пусть  $\mathcal{P} = 2^{\mathbb{R}^n}$ . Примем  $\mu(A) = 0$ , если  $A$  — ограничено, и  $+\infty$  иначе. Её конечная аддитивность очевидна: сумма конечного числа нулей равна 0, а если там появляется хотя бы одно неограниченное множество, то их объединение становится неограниченным. Но эта мера не является счётно-аддитивной, поскольку мы можем взять просто  $\mathbb{Q}^n$ : с одной стороны, его мера  $+\infty$ , поскольку оно неограниченно, а с другой стороны оно получается как счётное объединение по всем рациональным точкам. Сумма счётного числа нулей равна нулю, а следовательно его мера должна быть равна 0. Получено противоречие. Значит, мера не счётно-аддитивна.

## 1.4 Внешняя мера

**Определение 1.18.** Пусть  $X$  — абстрактное множество, а  $2^X$  — система всех его подмножеств. Функцию  $\tau : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  будем называть внешней мерой (по Каратеодори), если выполнены следующие условия:

1.  $\tau(\emptyset) = 0$ ;
2. Если  $A \subset \bigcup_i A_i$ , то  $\tau(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$ .

**Определение 1.19.** Множество  $A \subset X$  называется  $\tau$ -измеримым, если

$$\forall E \subset X \text{ верно, что } \tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A)$$

Далее будем обозначать это условие как (\*). Прим. ред именно для любого множества  $E$ , мы как будто выбираем "пробное" множество, которое множество  $A$  аддитивно разбивает

**Примечание.** Заметим, что для проверки условия (\*) достаточно проверить, что

$$\tau(E) \geq \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A)$$

для любого  $E \subset X$ . Обратное неравенство очевидно из 2) пункта определения внешней меры

**Определение 1.20.** Обозначим  $\mathfrak{M}_\tau$  семейство всех  $\tau$ -измеримых подмножеств множества  $X$ . Очевидно, что  $\emptyset, X \in \mathfrak{M}_\tau$ .

**Теорема 1.7.** Система  $\mathfrak{M}_\tau$  —  $\sigma$ -алгебра, при этом сужение  $\tau$  на  $\mathfrak{M}_\tau$ , обозначается  $\tau|_{\mathfrak{M}_\tau}$ , и является счётно-аддитивной мерой на ней.

*Доказательство.* Для начала заметим, что эквивалентной записью условия измеримости является

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^c)$$

Значит,  $\mathfrak{M}_\tau$  замкнута относительно операции дополнения.

Покажем, что система замкнута относительно объединений. Пусть  $A, B \in \mathfrak{M}_\tau$ . Пусть  $E \subset X$ . Тогда из измеримости  $A$ :

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A)$$

А из измеримости  $B$  мы получаем следующее:

$$\tau(E \setminus A) = \tau((E \setminus A) \cap B) + \tau((E \setminus A) \setminus B)$$

Таким образом,

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B) + \tau(E \setminus (A \cup B))$$

В тоже время, поскольку  $(E \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap B) \supset E \cap (A \cup B)$ , то

$$\tau(E) \geq \tau(E \cap (A \cup B)) + \tau(E \setminus (A \cup B))$$

Таким образом, мы показали, что  $\mathfrak{M}_\tau$  — алгебра с единицей  $X$ .

Покажем, что  $\tau$  является конечно-аддитивной мерой на этой алгебре. Зафиксируем  $A, B \in \mathfrak{M}_\tau$  такие, что  $A \cap B = \emptyset$ . Тогда из измеримости  $A$  следует, что при  $E = A \sqcup B$  выполняется следующее

$$\tau(A \sqcup B) = \tau((A \sqcup B) \cap A) + \tau((A \sqcup B) \setminus A) = \tau(A) + \tau(B)$$

Что нам и требовалось показать. Теперь по индукции это продолжается для произвольного числа дизъюнктных множеств алгебры.

Докажем даже более сильную версию конечной аддитивности. Заметим, что

$$(E \cap (A \sqcup B)) \cap A = E \cap A$$

$$(E \cap (A \sqcup B)) \setminus A = E \cap B$$

А значит, поскольку  $A \sqcup B \in \mathfrak{M}_\tau$ , то

$$\tau(E \cap (A \sqcup B)) = \tau((E \cap (A \sqcup B)) \cap A) + \tau((E \cap (A \sqcup B)) \setminus A) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap B)$$

Поэтому верно следующее утверждение. Для  $\forall E \subset X$  и для  $\forall$  дизъюнктной системы  $\{A_i\}_{i=1}^N$  справедливо такое равенство:

$$\tau(E \cap (\bigsqcup_{i=1}^N A_i)) = \sum_{i=1}^N \tau(E \cap A_i)$$

С другой стороны, поскольку любая алгебра является полукольцом, и  $\tau$  — счётно-полуаддитивная мера на  $\mathfrak{M}_\tau$ , то мы получаем что  $\tau$  — счётно-аддитивная мера на  $\mathfrak{M}_\tau$ .

Теперь покажем, что  $\mathfrak{M}_\tau$  —  $\sigma$ -алгебра.

Пусть  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_\tau$  и  $A_i \cap A_j = \emptyset$  если  $i \neq j$ . Пусть  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Заметим, что из того, что наша система множеств является алгеброй, следует для  $\forall E \subset X$

$$\begin{aligned}\tau(E) &= \tau(E \cap (\bigsqcup_{i=1}^n A_i)) + \tau(E \setminus (\bigsqcup_{i=1}^n A_i)) = \sum_{i=1}^n \tau(E \cap A_i) + \tau(E \setminus \bigsqcup_{i=1}^n A_i) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{i=1}^n \tau(E \cap A_i) + \tau(E \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i)\end{aligned}$$

Поскольку это верно для произвольного  $n \in \mathbb{N}$ , то, взяв sup по  $n \in \mathbb{N}$ , мы получаем

$$\tau(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tau(E \cap A_i) + \tau(E \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geqslant \tau(E \cap \bigsqcup A_i) + \tau(E \setminus \bigsqcup A_i)$$

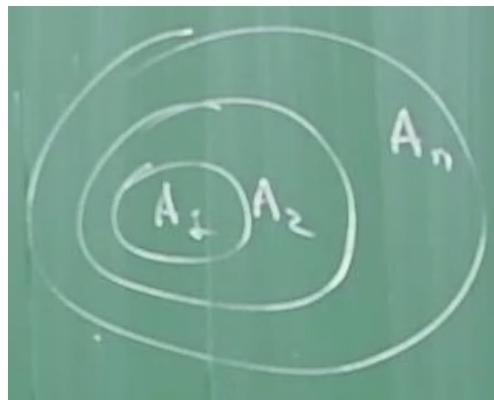
Значит,  $A$  — измеримое.

Пусть теперь  $A_i$  не обязательно дизъюнктные. Тогда определив  $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ , мы получим последовательность дизъюнктных  $\{A'_i\}$  с тем же объединением. Поскольку это объединение лежит в алгебре, то мы получаем, что  $\mathfrak{M}_\tau$  —  $\sigma$ -алгебра.  $\square$

**Теорема 1.8.** *Конечно-аддитивная мера  $\mu$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$  является счётно-аддитивной  $\iff \mu$  непрерывна снизу, то есть для последовательности  $\{A_i\} \subset \mathfrak{M}$ :  $A_i \subset A_{i+1}$  и  $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \hookrightarrow \mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$ .*

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\mu$  — счётно-аддитивна. Тогда поскольку  $\mathfrak{M}$  —  $\sigma$ -алгебра, то определив  $A'_1 := A_1, A'_n := A_n \setminus A_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$  мы получим дизъюнктную последовательность множеств с тем же объединением. Тогда

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(A'_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N)$$



*Схематическое описание множеств, непрерывных снизу, где кольца между  $A_k$  и  $A_{k+1}$  это  $A'_{k+1}$*   
( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\mu$  — непрерывна снизу. Хотим получить счетную аддитивность. Тогда если мы возьмём произвольную последовательность дизъюнктных множеств  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  и определим  $F_k = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$  для каждого  $k \in \mathbb{N}$ , то мы получим искомую монотонную последовательность множеств

$F_k \subset F_{k+1}$ . Из конечной аддитивности меры  $\mu(F_k) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$ . Отсюда и из непрерывности меры следует, что  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) = \mu(A)$   $\square$

**Определение 1.21.** Конечно-аддитивной мера  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P}$  подмножеств множества  $X$  называется  $\sigma$ -конечной, если

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \in \mathcal{P} \quad \forall \text{ и } \mu(P_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если же  $\mu(X) < +\infty$ , то мера называется конечной.

**Определение 1.22.** Тройка  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  называется измеримым пространством, если:

- ▷  $X$  — абстрактное множество.
- ▷  $\mathfrak{M}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств множества  $X$ .
- ▷  $\mu$  — счетно-аддитивная неотрицательная функция на этой  $\sigma$ -алгебре, то есть  $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ .

Функция  $\mu$  называется мерой на этой  $\sigma$ -алгебре, а сама  $\mathfrak{M}$  называется  $\sigma$ -алгеброй измеримых подмножеств.

**Определение 1.23.** Пусть  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  — измеримое пространство. Мера  $\mu$  называется полной, если

$$\forall E \in \mathfrak{M} \text{ из того, что } \mu(E) = 0 \implies E' \in \mathfrak{M} \quad \forall E' \subset E.$$

**Пример.** Неполная мера.

Возьмем  $X = \mathbb{R}^n$ , в качестве  $\mathfrak{M}$  возьмем борелевскую  $\sigma$ -алгебру, а в качестве  $\mu$  же — [мера Лебега](#). Тогда это неполная мера, так как бывают неборелевские множества.

**Теорема 1.9.** Пусть  $\mu$  — конечная конечно-аддитивная мера на некоторой  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$ . Следующие условия эквивалентны:

1. Мера  $\mu$  счетно-аддитивна на  $\mathfrak{M}$ .

2. Мера  $\mu$  непрерывна сверху, то есть если  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$  ( $A_{n+1} \subset A_n \forall n \in \mathbb{N}$ ) и  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , то  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

3. Мера  $\mu$  непрерывна сверху в нуле, то есть если  $\{A_n\} \subset \mathfrak{M}$  ( $A_{n+1} \subset A_n \forall n \in \mathbb{N}$ ) и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ .

*Доказательство.*

▷ 1)  $\implies$  2)

Рассмотрим множество  $B = A_1 \setminus A$ . Аналогично получим множества  $B_k = A_1 \setminus A_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $B_{k+1} \supset B_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$  и  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ .

В силу доказанной непрерывности снизу

$$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k)$$

Но, используя конечность меры, получим, что  $\mu(B_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k) \implies$

$$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) \implies$$

$$\implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A_1) - \mu(B) = \mu(A_1 \setminus B) = \mu(A)$$

Получили искомое.

▷ 2)  $\Rightarrow$  3)

Очевидно, так как третье утверждение — частный случай второго.

▷ 3)  $\Rightarrow$  1)

Пусть  $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ . Возьмем  $C^n = \bigcup_{k=1}^n C_k$ ,  $\widetilde{C}^n = C \setminus C^n$ . Тогда  $\widetilde{C}^{n+1} \subset \widetilde{C}^n$ . Из наших определений  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{C}^n = \emptyset$ .

Тогда в силу пункта 3,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\widetilde{C}^n) = 0$ , значит, в силу конечной аддитивности меры

$$\mu(C) = \mu(C^n) + \mu(\widetilde{C}^n) = \sum_{k=1}^n \mu(C_k) + \mu(\widetilde{C}^n)$$

Но мы получили, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\widetilde{C}^n) = 0$ , значит,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(C_k) = \mu(C)$ , а это и есть счетная аддитивность.

□

## 1.5 Продолжение меры с полукольца на $\sigma$ -алгебру

**Определение 1.24.** Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо подмножеств множества  $X$ . Пусть  $\mu$  — счетно-аддитивная мера на  $\mathcal{P}$ . Для всякого множества  $E \subset X$  определим его *верхнюю меру* по Каратеодори равенством:

$$\mu^*(E) := \inf_{E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j), \quad \{P_j\} \subset \mathcal{P} \right\}.$$

**Замечание.** Если ни одного такого покрытия  $E$  не существует, то формально считаем  $\mu^*(E) = +\infty$ .

**Теорема 1.10.** Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо подмножеств множества  $X$ . Пусть  $\mu$  — счетно-аддитивная мера на  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu^*$  является *внешней мерой* и  $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$ .

*Доказательство.* **Шаг 1.** Докажем справедливость равенства  $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$ .

Фиксируем  $P \in \mathcal{P}$ . Тогда заметим, что его можно покрыть самим собой и пустыми множествами, то есть

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, \text{ где } P_i = \emptyset, i > 1, P_1 = P$$

При таком выборе покрытия  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i) = \mu(P)$ . Но мы берем инфимум по всем покрытиям, а он не может быть больше, чем конкретное покрытие  $\Rightarrow \mu^*(P) \leq \mu(P)$ .

Докажем обратное неравенство. Пусть теперь  $\{P_j\} \subset \mathcal{P}$  — произвольное покрытие  $P$ . Тогда так как счетно-аддитивная мера на полукольце счетно-полуаддитивна,  $\mu(P) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j)$ . Взяв инфимум от обеих частей по всем возможным покрытиям, получим  $\mu(P) \leq \mu^*(P)$ .

Получили 2 противоположных неравенства  $\Rightarrow \mu^*(P) = \mu(P)$ . А так как множество  $P$  было выбрано произвольно, это верно  $\forall P \in \mathcal{P}$ .

**Шаг 2.** Покажем теперь, что  $\mu^*$  — внешняя мера. Из доказанного выше следует, что  $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ . Осталось проверить счетную полуаддитивность  $\mu^*$ .

Прим. ред. мы доказываем второе свойство внешней меры (счетная полуаддитивность), а значит мы хотим доказать неравенство полуаддитивности для произвольного покрытия  $\{E_n\}$  нашего множества  $E$  (поэтому мы не могли например сразу покрывать элементами полукольца).

Возьмем произвольное множество  $E \subset X$ , произвольную последовательность множество  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ , так, что  $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . По определению инфимума  $\forall n \in \mathbb{N}$  и  $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \{P_{n,j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P} \text{ т.ч. } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{n,j}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Тогда  $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j} \Rightarrow$  по определению:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  можно выбрать произвольно, получаем, что  $\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$  — счетная полуаддитивность доказана.  $\square$

**Теорема 1.11.** Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо подмножеств множества  $X$ . Пусть  $\mu$  — счетно-аддитивная мера на  $\mathcal{P}$ . Пусть  $\mu^*$  — внешняя мера, построенная по [формуле](#). Тогда любое множество из  $\mathcal{P}$  измеримо по Каратеодори, то есть  $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}_{\mu^*}$ .

*Доказательство.* Требуется доказать, что  $\forall E \subset X$  и для любого фиксированного  $P \in \mathcal{P}$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \iff \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P)$$

Прим. ред. смысл трюка в том, что, пока мы на полукольце у нас продолженная мера совпадает с нашей мерой. А у самой меры мы требовали  $\sigma$ -аддитивность, а продолженная мера только  $\sigma$ -полуаддитивна. В итоге мы переходим к обычной мере, разбиваем пробное множество, а дальше получаем нужное неравенство возвращаясь к продолженной мере и пользуясь полуаддитивностью.

Начнем с простого случая: будем брать не любое  $E$ , а только из полукольца. По определению полукольца  $E \setminus P = \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$ . В силу [только что доказанного](#)

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu(E) = \mu \left( (E \cap P) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^N Q_j \right) \right) = (\text{в силу конечной аддитивности } \mu) = \\ &= \mu(E \cap P) + \sum_{j=1}^N \mu(Q_j) = \mu^*(E \cap P) + \sum_{j=1}^N \mu^*(Q_j) \geq \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P), \end{aligned}$$

так как  $\sum_{j=1}^N \mu^*(Q_j) \geq \mu^*(\bigsqcup_{j=1}^N Q_j)$ . Получили искомое.

Теперь рассмотрим общий случай. Без ограничения общности считаем, что  $\mu^*(E) < +\infty$ .

Возьмем покрытие  $E$  элементами из полукольца:  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ . Тогда из случая выше знаем, что  $P_j$  измеримы:  $\forall j \in \mathbb{N}: \mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \setminus P) \leq \mu^*(P_j)$ .

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} (P_j \cap P) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j) \cap P$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} (P_j \setminus P) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j) \setminus P$$

Воспринимая левые части равенств, как покрытия правых, и пользуясь счетной полуаддитивностью  $\mu^*$ , получим:

$$\mu^* \left( \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \right) \cap P \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \cap P) \text{ и } \mu^* \left( \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \right) \setminus P \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \setminus P).$$

Суммируем эти 2 неравенства.

$$\mu^* \left( \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \right) \cap P \right) + \mu^* \left( \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \right) \setminus P \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left( \mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \setminus P) \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j)$$

$$\begin{aligned} & \text{Воспользуемся монотонностью } \mu^*: \mu^*(E \cap P) \leq \mu^* \left( \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \right) \cap P \right) \text{ и } \mu^*(E \setminus P) \leq \mu^* \left( \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \right) \setminus P \right) \\ \implies & \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \longrightarrow \mu^*(E) \end{aligned}$$

Взяв инфимум по всем покрытиям  $E$  последовательностями  $\{P_j\}$ , получим искомое.  $\square$

**Теорема 1.12.** (*Единственность продолжения*) Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо подмножеств множества  $X$ . Пусть  $\mu$  — счетно-аддитивная мера на  $\mathcal{P}$ . Пусть  $\mu^*$  — продолжение  $\mu$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ ,  $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}_{\mu^*}$ , а  $\nu$  — продолжение  $\mu$  на какую-то другую  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{M}_\nu$ ,  $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}_\nu$ . Тогда верно следующее:

1.  $\nu(A) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_\nu$ . Если  $\mu^*(A) < +\infty$ , то  $\mu^*(A) = \nu(A)$ .
2. Если  $\mu$  —  $\sigma$ -конечна, то  $\mu^*(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_\nu$ .

*Доказательство.* **Шаг 1** Пусть  $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$  — произвольное покрытие. В силу счетной полуаддитивности  $\nu$ , а также так как  $\nu$  — это продолжение, а на  $\mathcal{P}$  оно совпадает:

$$\nu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \quad (*)$$

Возьмем инфимум в  $(*)$  по всем возможным покрытиям  $A$  последовательностями  $\{P_j\}$ . Получим

$$\nu(A) \leq \inf_{A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \right\} = \mu^*(A)$$

Таким образом, доказали неравенство в пункте 1.

**Шаг 2** Покажем, что  $\forall P \in \mathcal{P} \mu(P) < +\infty$  и  $\forall A \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_\nu$  справедливо равенство:

$$\nu(P \cap A) = \mu^*(P \cap A)$$

Предположим противное (мы уже доказали в 1 шаге " $\leq$ "):

$$\nu(P \cap A) < \mu^*(P \cap A)$$

$P \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \implies$  измерим по Каратеодори  $\implies$

$$\mu(P) = \mu^*(P) = \mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \setminus A) > \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) = \nu(P) = \mu(P)$$

Но так как  $\mu(P) < +\infty$ , это невозможно  $\implies$  равенство выше верно.

Если  $\mu$  —  $\sigma$ -конечна, либо если  $\mu^*(A) < +\infty$ , то можно покрыть  $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$  т.ч.

$$\mu(P_j) < +\infty \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ и } \{P_j\} \in \mathcal{P}$$

Но верно, что  $\mu^*(A \cap P_j) = \nu(A \cap P_j) \implies$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap P_j)$$

По теореме о дизъюнктном разбиении  $P_j$  можно считать попарно непересекающимися (несложно реализовать ее и для счетных объединений). Тогда  $\sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap P_j) = \nu(A)$ , а в силу счетной полуаддитивности  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap P_j) \geq \mu^*(A) \implies \mu^*(A) \leq \nu(A)$ . Уже есть противоположное неравенство  $\implies$  получили искомое.  $\square$

**Напоминание.** Если  $\mathcal{E}$  — система множеств.  $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$  — минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{E}$ .

**Следствие.** Если  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная счетно-аддитивная мера на полукольце  $\mathcal{P}$ , то продолжение на  $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$  единственно, то есть на пересечении сигма алгебр они совпадают.

**Замечание.**  $(X, \mathfrak{M}_{\mu^*}, \mu^*)$  — измеримое пространство, причем  $\mu^*$  — полная мера.

**Лемма 1.5.** Пусть  $\mu^*$  — внешняя мера, построенная по счетно-аддитивной мере  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P}$ . Пусть  $E \subset X$ :  $\mu^*(E) < +\infty$ . Тогда  $\exists$  множество

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j}, \text{ где } P_{n,j} \in \mathcal{P} \text{ такое что } \mu^*(C) = \mu^*(E)$$

Причем  $C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ . То есть если множество имеет конечную меру, то оно не обязательно измеримо, но вот у него есть измеримый envelope(покрытие) той же самой меры

**Доказательство.** Так как  $\mu^*(E) < +\infty$ , то  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \{P_{n,j}\} \in \mathcal{P}$ :  $\frac{1}{2^n} + \mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{n,j})$  (по определению инфимума). Тогда

$$C^N = \bigcap_{n=1}^N \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j} \supset E \quad \forall N \in \mathbb{N} \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j} \supset E, C \in \mathfrak{M}_{\mu^*}.$$

В силу монотонности и счетной полуаддитивности::

$$\mu^*(C) \leq \mu^*(C^N) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{N,j}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_{N,j}) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{2^N}.$$

Так как  $N$  — произвольно,  $\mu^*(C) \leq \mu^*(E)$ , но с другой стороны  $C \supset E \implies$  в силу монотонности  $\mu^*(C) \geq \mu^*(E) \implies \mu^*(C) = \mu^*(E)$ .  $\square$

**Теорема 1.13.** Пусть  $E \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$  и  $\mu^*(E) < +\infty$ . Тогда  $\exists B, C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$  т.ч.  $B \subset E \subset C$  и  $\mu^*(C \setminus B) = 0$ .

*Доказательство.* Множество  $\supset E$  со свойством  $\mu^*(C) = \mu^*(E)$  построили в [предыдущей лемме](#). Построим  $B$ .

Определим множество  $e := C \setminus E$  — измеримо. Применим к  $e$  предыдущую [лемму](#) и получим  $\tilde{e} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ , при этом  $\mu^*(\tilde{e}) = 0$ . Тогда

$$B = C \setminus \tilde{e}$$

□

**Теорема 1.14.** Пусть  $\mu$  — счетно-аддитивная  $\sigma$ -конечная мера на полуокольце  $\mathcal{P}$  подмножество множества  $X$ . Пусть  $\nu$  — полная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}_\nu$ , являющаяся продолжением  $\mu$ . Тогда  $\mathfrak{M}_{\mu^*} \subset \mathfrak{M}_\nu$ .

*Доказательство.* По предыдущей теореме  $\nu|_{\mathfrak{M}(\mathcal{P})} = \mu^*|_{\mathfrak{M}(\mathcal{P})}$ . Зафиксируем произвольное множество  $e$ :  $\mu^*(e) = 0$ . Покажем, что  $e \in \mathfrak{M}_\nu$  и  $\nu(e) = 0$ .

Так как  $\mu^*$  полна  $e \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \implies \exists \tilde{e} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$  и  $e \subset \tilde{e}$ . Это слежует из предыдущей теоремы  $\mu^*(\tilde{e}) = 0 \implies$  т.к.  $\nu|_{\mathfrak{M}(\mathcal{P})} = \mu^*|_{\mathfrak{M}(\mathcal{P})}$

$$\tilde{e} \in \mathfrak{M}_\nu \text{ и } \nu(\tilde{e}) = 0$$

Но  $\nu$  полна  $\implies e \in \mathfrak{M}_\nu$ .

Теперь фиксируем произвольное  $A \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$ , такое что  $\mu^*(A) < +\infty$ . Покажем, что  $A \in \mathfrak{M}_\nu$ .  
По [лемме](#)  $\exists C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$  т.ч.  $\mu^*(C) = \mu^*(A)$ , а т.к.  $A$  — измеримо,  $e = C \setminus A \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$  и  $\mu^*(C \setminus A) = \mu^*(C) - \mu^*(A) = 0$ . Значит  $A = C \setminus e \implies A \in \mathfrak{M}_\nu$ .

В общем случае, если  $A$  только лишь измеримо, но необязательно имеет конечную меру, то согласно  $\sigma$ -конечночи  $\mu$ , пространство  $X$  можно представить в виде  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ , где  $X_n \in \mathcal{P}$  и  $\mu(X_n) < +\infty$ . Тогда  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap X_n \implies \mu^*(A \cap X_n) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$ , а для этого применим прошлый случай. Тогда  $A \cap X_n \in \mathfrak{M}_\nu \forall n \in \mathbb{N} \implies$  по определению  $\sigma$ -алгебры  $A \in \mathfrak{M}_\nu$ . □

## 2 Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Конструкция меры Лебега

**Напоминание.** Рассмотрим систему множеств:

$$\mathcal{P}_n := \{[a, b] | a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n), a_i \leq b_i, i \in 1, \dots, n\}$$

Система  $\mathcal{P}_n$  является полукольцом. Определим меру на  $\mathcal{P}_n$  равенством:

$$\mu([a, b]) := \prod_{i=1}^n \mu([a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

**Замечание.** Используя рассуждения, [аналогичные одномерным](#), доказывается, что  $\mu$  — счетно-аддитивная мера на полукольце  $\mathcal{P}_n$ . Кроме того  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на  $\mathcal{P}_n$ , т.к.  $\mathbb{R}^n$  представимо в виде  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{d=1}^{\infty} [-d, d]$ , где  $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ .

**Определение 2.1.** Применим к  $\mathcal{P}_n$  конструкцию продолжения по Каратеодори и получим верхнюю меру:

$$\mu_n^*(E) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) : \{P_j\} \subset \mathcal{P}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \right\} — \text{верхняя мера Лебега в } \mathbb{R}^n.$$

**Определение 2.2.** Минимальная  $\sigma$ -алгебра, порожденная полукольцом ячеек  $\mathcal{P}_n$ , называется борелевской сигмой алгеброй  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  в  $\mathbb{R}^n$

**Определение 2.3.** Применим рассуждения предыдущего параграфа к мере  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P}_n$  ячеек. Мы получим верхнюю меру  $\mu^*$ , которая породит  $\mathfrak{M}_n$  — класс всех измеримых множеств в  $\mathbb{R}^n$ . Мы доказывали, что продолжение по Каратеодори на борелевской сигме алгебре единственно. Минимальная сигма алгебра содержиться в сигме алгебре измеримых  $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$

**Определение 2.4.** Сужение  $\mu^*$  на  $\mathfrak{M}_n$  мы будем обозначать  $\mathcal{L}^n$

**Замечание.** Базовые свойства  $\mathcal{L}^n$  и  $\mathfrak{M}_n$ :

1.  $\forall$  открытые множества в  $\mathbb{R}^n$  измерим, т.е. содержатся в  $\mathfrak{M}_n$
2.  $\forall$  замкнутые множества в  $\mathbb{R}^n$  измерим, т.е. содержатся в  $\mathfrak{M}_n$
3.  $\forall A \in \mathfrak{M}_n \quad \mathcal{L}^n(A) < +\infty$ . Из теоремы про envelope  $\Rightarrow \exists B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  т.ч.  $B \subset A \subset C$  и  $\mathcal{L}^n(C \setminus B) = 0$ . Следовательно, любое измеримое есть борелевское с точностью до множества меры 0.
4. Счетное объединение измеримых по Лебегу множеств меры 0 является множеством меры 0, в частности, любое не более, чем счетное подмножество в  $\mathbb{R}^n$  имеет меру 0. Это следует из счетной полуаддитивности.
5.  $\mathcal{L}^n$  — полная мера.

## 2.2 Неизмеримые по Лебегу множества

В прошлый раз была введена мера Лебега, которая определена на  $\sigma$ -алгебре измеримых подмножеств  $\mathbb{R}^n$ . Но возникает естественный вопрос: «Все ли подмножества в  $\mathbb{R}^n$  являются измеримыми?»

Для построения примера не измеримого по Лебегу множества нам понадобится аксиома выбора.

**Утверждение 2.1.** (Аксиома выбора) Пусть задано произвольное семейство абстрактных множеств  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Тогда существует отображение  $F : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ , такое что:

$$\forall \alpha \in I \quad F(\alpha) \in E_\alpha$$

Кроме того, корректно определено множество  $E = \{F(\alpha) \mid \alpha \in I\}$ .

То есть утверждается, что из любого семейства (не обязательно счетного) множеств можно выбрать по элементу.

**Факт.** Применяя аксиому выбора, мы получаем парадокс Банаха-Тарского: Шар можно разбить на куски, которые можно сложить в два ровно таких же шара. (См Википедию)

**Теорема 2.1.** Для любого измеримого по Лебегу множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  положительной меры существует его неизмеримое подмножество  $E$ .

*Доказательство.* Введем в множестве  $A$  отношение  $\sim$ :

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$$

Ясно, что это отношение эквивалентности (оно рефлексивно, транзитивно, симметрично). Тогда рассмотрим семейство классов эквивалентности  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Пользуясь аксиомой выбора, построим множество  $E \subset A$ .  $E$  определяется тем, что:

$$\forall \alpha \in I \quad E \cap E_\alpha = \{x_\alpha\}.$$

Тогда множество  $E$  искомое. Покажем это.

Без ограничения общности считаем, что  $A$  — ограничено, то  $\exists R > 0 : \|x - y\| \leq R \forall x, y \in A$ . Рассмотрим всевозможные рациональные сдвиги множества  $E$ , модуль сдвига которых не превосходит  $R$ . По построению:

$$(E + r) \cap (E + r') = \emptyset, \quad r \neq r'$$

Иначе бы получилось так, что есть в  $E$  два элемента, которые лежат в одном классе эквивалентности. С другой стороны:

$$A \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^n, \|r\| \leq R} (E + r)$$

Предположим, что  $E$  измеримо, тогда возможны случаи.

1.  $\mathcal{L}^n(E) = 0$ . Но это невозможно, так как  $\mathcal{L}^n(A) > 0$ .
2.  $\mathcal{L}^n(E) > 0$ . Тогда получается, что:

$$\mathcal{L}^n \left( \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^n, \|r\| \leq R} (E + r) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^n(E + r_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^n(E) = +\infty$$

Это не возможно, так как  $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}^n, \|r\| \leq R} (E + r) \in B_{2R}(x) \forall x \in E \implies \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^n, \|r\| \leq R} (E + r) \right) < +\infty \quad \square$

## 2.3 Регулярность меры Лебега.

*Регулярность по сути означает то, что мы можем «сложные» множества приблизить более «простыми». Для начала сформулируем следующую теорему:*

**Теорема 2.2.** (*Верхняя регулярность меры Лебега*) Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$  измеримо по Лебегу. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ открытое множество } G_\varepsilon \text{ такое что } E \subset G_\varepsilon : \mathcal{L}^n(G_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$$

*Доказательство.* **Шаг 1.** Рассмотрим случай, когда мера  $E$  конечна. Тогда по определению верхней меры для любого  $\varepsilon > 0$  существует последовательность ячеек  $\{P_k\} \subset \mathcal{P}_n$  такая что:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(P_k) < \mathcal{L}^n(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь воспользуемся непрерывность меры слева ( $a'_k < a$ ):

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \ \forall P_k = [a_k, b_k] \ \exists P'_k = [a'_k, b_k] : \mathcal{L}^n(P'_k) &< \mathcal{L}^n(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ \forall k \in \mathbb{N} : P_k \subset (a'_k, b_k) \subset [a'_k, b_k] &= P'_k \end{aligned}$$

Тогда определим искомое множество равенством:

$$G_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a'_k, b_k)$$

Докажем, что оно подходит, используя счетную полуаддитивность:

$$\mathcal{L}^n(G_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n((a'_k, b_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(P'_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \mathcal{L}^n(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) \leq \mathcal{L}^n(E) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a'_k, b_k) &\subseteq G_\varepsilon \\ \mathcal{L}^n(G_\varepsilon \setminus E) &= \mathcal{L}^n(G_\varepsilon) - \mathcal{L}^n(E) < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Шаг 2.** Поскольку  $\mathcal{L}^n$   $\sigma$ -конечная мера на  $\mathbb{R}^n$ , тогда мы можем доказать утверждение для множеств бесконечной меры, «развалив» на множества конечной меры. То есть, можно представить множество  $E$  в виде дизъюнктного объединения множеств  $E_n$  конечной меры. Например, пересекая с кубами с ребром  $a$ . Понятно что их бесконечное объединение даст искомое множество. Получается:

Если  $\mathcal{L}^n(E) = +\infty$ , то:  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ , т.ч  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \mathcal{L}^n(E_k) < +\infty$ .

Пользуясь уже доказанным, получим:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \text{ открытое множество } G_\varepsilon(k) : E_k \subset G_\varepsilon(k) \text{ и } \mathcal{L}^n(G_\varepsilon(k) \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Тогда положим  $G_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_\varepsilon(k)$ . Ясно, что  $E \subseteq G_\varepsilon$  и  $G_\varepsilon$  открытое. Осталось проверить, что мера их разности меньше  $\varepsilon$ . Имеем:

$$G_\varepsilon \setminus E = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} G_\varepsilon(k) \right) \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_\varepsilon(k) \setminus E) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_\varepsilon(k) \setminus E_k)$$

Теперь осталось воспользоваться счетной полуаддитивностью меры Лебега:

$$\mathcal{L}^n(G_\varepsilon \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n\left(G_\varepsilon(k) \setminus E_k\right) < \varepsilon$$

□

**Следствие.** (регулярность меры Лебега). Пусть  $E$  измеримо по Лебегу. Тогда:

1.  $\mathcal{L}^n(E) = \inf\{\mathcal{L}^n(G) : G - \text{открытое } E \subseteq G\}$
2.  $\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(F) : F - \text{замкнутое } F \subseteq E\}$
3.  $\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K - \text{компакт } K \subseteq E\}$

*Доказательство.* **Пункт 1.** Мгновенно следует из предыдущей теоремы.

**Пункт 2.** Применим предыдущую теорему для  $\mathbb{R}^n \setminus E$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon : \mathbb{R}^n \setminus E \subset G_\varepsilon, \mathcal{L}^n(G_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$$

Но тогда рассмотрим множество  $F_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus G_\varepsilon$ . Поскольку  $E \setminus (F_\varepsilon) = G_\varepsilon \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)$ . Имеем:

$$\mathcal{L}^n(E \setminus (F_\varepsilon)) < \varepsilon$$

Откуда и вытекает требуемое.

**Пункт 3.** Для начала поймем, как же нам получить компакт из произвольного замкнутого множества  $F$ . Заметим, что:

$$\forall j \in \mathbb{N} : K_j(F) = F \cap [-j, j]^n - \text{компакт}$$

Таким образом, мы построили возрастающую последовательность компактов, поскольку мера Лебега непрерывна снизу, имеем:

$$\exists \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(K_j(F)) = \mathcal{L}^n(F)$$

Согласно предыдущему пункту:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E) &= \sup \left\{ \mathcal{L}^n(F) : F - \text{замкнутое } F \subseteq E \right\} = \\ &= \sup_{F \subseteq E} \sup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(K_j(F)) = \sup \left\{ \mathcal{L}^n(K) : K - \text{компакт } K \subseteq E \right\} \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Для любого измеримого  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ :

1. Существует возрастающая последовательность компактов  $\{K_j\}$ ,  $K_j \subseteq E \forall j \in \mathbb{N}$ :

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e, \mathcal{L}^n(e) = 0$$

2. Существует убывающая последовательность открытых множеств  $\{G_j\}$ ,  $E \subseteq G_j$  таких, что  $\forall j \in \mathbb{N}$ , кроме того:

$$e \cup E = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j, \mathcal{L}^n(e) = 0$$

*Доказательство.* Докажем первое, а второе доказывается аналогично. Рассмотрим для начала случай, когда  $E$  имеет конечную меру. По доказанному:

$$\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K - \text{компакт } K \subseteq E\}$$

Тогда существует последовательность компактов  $K'_1, K'_2, \dots, K'_j$ :

$$\mathcal{L}^n(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(K'_j)$$

По этой последовательности построим возрастающую последовательность компактов:

$$K_j = \bigcup_{k=1}^j K'_k, \quad j \in \mathbb{N}.$$

И при этом:

$$\mathcal{L}^n(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(K_j).$$

Значит:

$$\mathcal{L}^n(E \setminus K_j) = \mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(K_j) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Теперь осталось показать, что  $e := \bigcup_{j=1}^{\infty} (E \setminus K_j)$  имеет меру нуль. В силу монотонности меры Лебега:

$$0 \leq \mathcal{L}^n(e) \leq \mathcal{L}^n(E \setminus K_j) = \mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(K_j) \rightarrow 0.$$

Откуда получаем требуемое.

Если же  $E$  имеет бесконечную меру, то существует: последовательность попарно непересекающихся множеств  $E_j$  таких что:  $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j = E$  и  $\mathcal{L}^n(E_j) < +\infty, \forall j \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $\forall j \in \mathbb{N}$ , применив только что доказанное, получим:

$$E_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{ij} \cup e_j.$$

Следовательно:

$$E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{ij} \cup e_j \right).$$

Если мы перенумеруем соответствующие множества одним индексом, то можем получить:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{K}_j \cup e$$

Таким образом, требуемое доказано. □

**Замечание.** Множества, которые можно представить в виде счетного объединения компактов, называются сигма компактными, получается любое измеримое это сигма компактное, с точностью до множества меры ноль.

## 2.4 Элементы геометрической теории меры.

Для начала сформулируем 5B-covering lemma.

**Лемма 2.1.** (Витали) Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$  произвольное ограниченное множество (не обязательно измеримое),  $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$  покрытие  $E$  шарами. При этом  $\sup\{r(B_\alpha) | \alpha \in I\} < +\infty$ . Тогда существует такое, не более чем счетное дизъюнктное подсемейство  $\{B_n\}$ , где  $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , что:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^N 5B_n$$

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что из ограниченности множества  $E$  и ограниченности радиусов следует, что  $\exists R > 0$  такое что:

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset B_R(0)$$

План доказательства: берем какой-то шар достаточно большого радиуса (не меньше чем половина размера самого большого шара  $R_k$ ), далее убираем из семейства все шары которые пересекаются с выбранным нами шаром и получаем новое семейство поменьше  $\mathcal{B}_{k+1}$ , так берем шары пока можем взять. Опишем этот процесс формально, выберем шары раздувые в 5 раз и покажем, они действительно покрывают  $E$ :

**База индукции:** Изначальное семейство совпадает со всем множеством шаров  $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}$ .

Положим:

$$R_1 = \sup \{r(B) | B \in \mathcal{B}_1\} < +\infty$$

Пусть:

$$B_1 - \text{произвольный шар из } \mathcal{B}_1, \text{ для которого } r(B_1) > \frac{R_1}{2}$$

Пусть:  $\mathcal{B}_2 = \{B | B \cap B_1 = \emptyset\}$  - те шары которые не пересекаются с выбранным шаром

**Переход:** предположим, что мы построили семейства  $\mathcal{B}_i$  и шары  $B_i$  при  $i = 1, \dots, j$ . Положим:

$$\mathcal{B}_{j+1} = \{B \in \mathcal{B} | B \text{ не пересекает } \bigcup_{i=1}^j B_i\}$$

Если же  $\mathcal{B}_{j+1}$  оказалось пустым, то заканчиваем построение. В противном случае, продолжаем.

Положим:

$$R_{j+1} = \sup \{r(B) | B \in \mathcal{B}_{j+1}\}$$

Пусть

$$B_{j+1} - \text{произвольный шар из } \mathcal{B}_{j+1}, \text{ для которого } r(B_{j+1}) > \frac{R_{j+1}}{2}$$

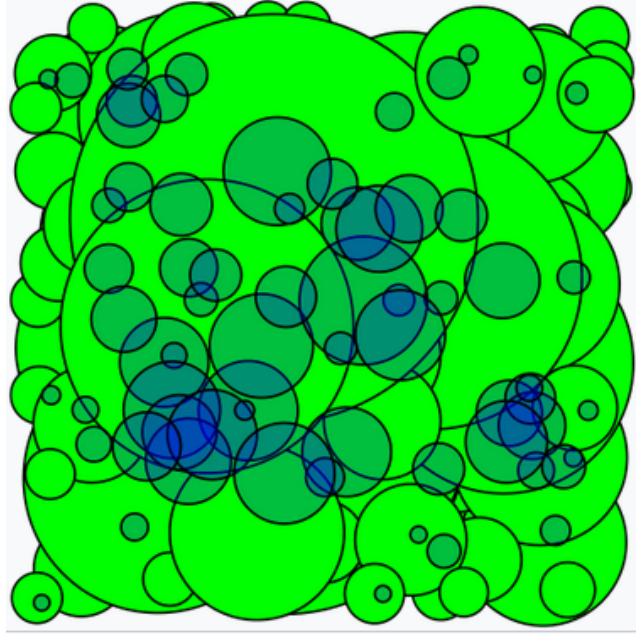
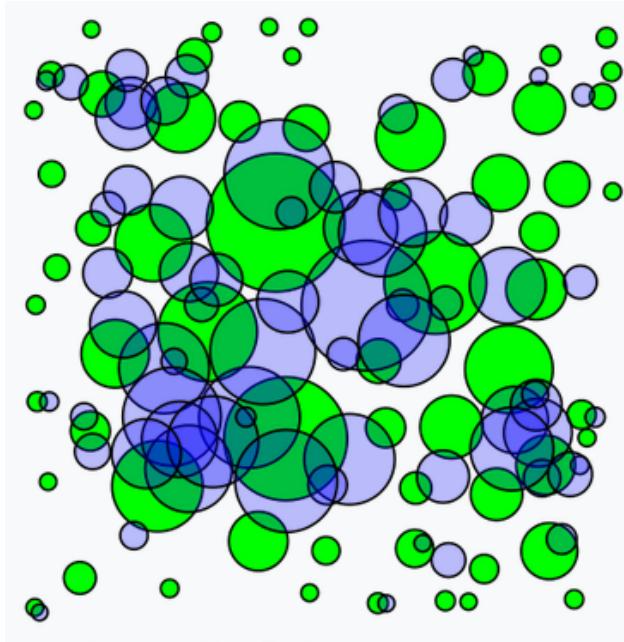
Заметим, что семейства включены друг в друга:  $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \dots \supset \mathcal{B}_j$ . По построению радиусы не возрастают:  $R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_j$ . А выбранные шары  $\{B_i\}_{i=1}^j$  - дизъюнкты. Построение закончено, докажем, что оно искомое.

Рассмотрим случай, когда построение закончится на  $j+1$  шаге, то есть  $\mathcal{B}_{j+1} = \emptyset$ . В таком случае:

$$\forall B \in \mathcal{B} \text{ пересекает } \bigcup_{i=1}^j B_i$$

Выберем  $i \in \{1, \dots, j+1\}$  минимально возможным, что  $B$  пересекает  $B_i$ . Докажем, что  $r(B) \leq R_i$ . Действительно, при  $i = 1$  это очевидно, ведь  $R_1$  это супремум радиусов всех шаров и никакой элемент не больше. А если  $i > 1$ , то получается, что  $B \in \mathcal{B}_i$ , так как  $i$  был выбран минимально

возможным, то так как мы еще не выкинули  $B$  из семейства, то радиус шара не больше чем супремум по всем радиусам в семействе, тогда получается  $r(B) \leq R_i$ .



*Пояснение к картинке.* Мы выбрали зеленые шары. Все остальные синие цепляются как ожерелье за зеленые шары. Мы надуваем зеленые шары в 5 раз и они покрывают все синие шары, а значит и все множество  $E$

Теперь зафиксируем точку  $x \in E$ , так как множество покрыто шарами, то  $\exists B : x \in B$  пусть центр шара  $B_i$  это  $x_i$ , а также выберем произвольную точку  $y \in B \cap B_i$ . По неравенству треугольника:

$$\|x - x_i\| \leq \|x_i - y\| + \|y - x\| \leq r(B_i) + \text{diam}(B) \leq r(B_i) + 2R_i < r(B_i) + 4r(B_i) = 5r(B_i)$$

Получили, что:

$$B \subset 5B_i$$

А отсюда следует требуемое. Ведь  $E \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigsqcup_{i=1}^j B_i$

Теперь же рассмотрим случай, когда построение происходит бесконечно. Получается последовательность попарно непересекающихся шаров  $\{B_i\}$ . В силу замечания  $\{B_i\} \subset B_R(0)$ . Поэтому в силу дизъюнктности семейства  $\{\mathcal{B}_i\}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) \leq \mathcal{L}^n(B_R(0)) < +\infty$$

Мы мажорировали ряд конечным числом, а значит он сходится, но тогда понято что радиусы шаров стремятся к нулю:

$$\mathcal{L}^n(B_i) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$$

Следовательно  $R_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$ .

Выберем произвольный шар  $B \in \mathcal{B}$ ,  $r(B) > 0$ . В силу уже доказанного следует, что  $\exists i \in \mathbb{N} : B_i \cap B \neq \emptyset$ . Иначе бы  $B$  лежал во всех семействах  $\mathcal{B}_i$ , но радиус  $r(B)$  фиксирован, а радиусы семейств стремятся к 0. Используя рассуждения аналогичные оценке на радиус шаров в конечном случае, получаем требуемое и в этом случае.  $\square$

**Определение 2.5.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$  произвольное множество (даже неизмеримое). Будем говорить, что семейство непустых открытых шаров  $\mathcal{B}$  образуют покрытие Витали (fine covering) множества  $E$ , если

$$\forall x \in E \ \forall r > 0 \ \exists B \in \mathcal{B} \text{ с центром в } x, \text{ таких, что } r(B) < r.$$

То есть это покрытие множества шарами сколь угодно малого радиуса в каждой точке множества.

**Теорема 2.3.** (*Витали о тонком покрытии*) Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$  произвольное ограниченное множество. Пусть  $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$  его покрытие Витали. Тогда существует не более чем счетное дизъюнктное подсемейство  $\{B_n\}_{n=1}^N$ , где  $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , для которого верно равенство:

$$\mathcal{L}^n \left( E \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n \right) = 0.$$

**Замечание.** Предыдущая лемма была грубая в том, что, чтобы покрыть множество нужно было шары раздувать шары в 5 раз. А это покрытие называется тонким, так как оно покроет множество, но с точностью до меры ноль. Крутость теоремы в том, что из какого-то несчетного набора шаров с какими-то радиусами, из которого можно выделить семейство непересекающихся, таких, что они покроют наше множество с точностью до меры ноль

**Доказательство.** Выкинем большие шары:

$$\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B} \mid r(B) \leq 1\}.$$

Ясно, что семейство образует покрытие Витали множества  $E$ . Ведь для каждой точки все также есть достаточно малый шар ее покрывающий. Множество  $E$  ограничено, радиусы шаров ограничены. Значит к этому семейству  $\mathcal{B}_1$  применима лемма Витали. Тогда возможны два случая:

**Случай 1.** Количество шаров, построенных в лемме Витали конечно. Хотим доказать, что набор который получился  $\{B_k\}_{k=1}^N$ , можно не упирать, он и так покрывает с точностью до множества меры ноль.

Действительно  $\mathcal{B}_{N+1} = \emptyset$  для некоторого натурального  $N$ . Любой шар из  $\mathcal{B}_1$  пересекает какой-то  $B_j$ .

Ключевой момент(мы хотим это доказать) заключается в том что:

$$\forall x \in E \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N B_j \right) \iff x \in \partial B_j$$

Действительно, из того что  $\mathcal{B}_1$  это покрытие Витали следует, что  $\exists \{r_l\}_{l=1}^\infty$ , стремящаяся к нулю монотонно убывая  $\{B_{r_l}(x)\} \subset \mathcal{B}_1$ . Значит для некоторого  $j \in \mathbb{N}$ , а такой  $j$  всегда существует, так как шаров конечное число:

$$\forall l \in \mathbb{N} : B_{r_l}(x) \cap B_j \neq \emptyset.$$

Тогда  $x$  - это предельная точка по определению. Тогда мы имеем требуемое. А значит:

$$E \subset \bigcup_{j=1}^N B_j \cup \bigcup_{j=1}^N \partial B_j$$

Факт. Границы шаров имеют меру нуль. Так как их конечное количество, то требуемое верно.

**Случай 2.** Количество шаров бесконечно. То есть  $N = +\infty$ .

План доказательства и ключевое наблюдение:  $\mathcal{B}_{N+1}$  является покрытием Витали для множества  $E_N = E \setminus \left( \bigcup_{i=1}^N \overline{B_i} \right)$ . Здесь тонкий момент. Мы покрывали  $E$  по построению леммы Витали  $N$

шарами. Не покрыли. Значит если точка не попала ни в шар, ни на его границу. То она на положительном расстоянии от этого шара. Тк у нас было fine covering. То существует достаточно малый шар для этой точки, которая никуда не попала. Этот шар лежит в  $\mathcal{B}_{N+1}$ . Ведь  $\mathcal{B}_{N+1}$  не пустое и это по построению семейство шаров, которые ни с кем не пересеклись из выбранных шаров.

Второй еще более тонкий момент. Что происходит дальше. Мы берем этот конечный набор из  $N$  шаров. Вычитаем из множества эти шары. Далее у нас остался какой-то обрезанный кусок

множества. Для него мы еще раз применяем лемму Витали ( $C$  это дизъюнктные шары, которые получаются из леммы) Получаем набор шаров  $\{C\}$ . этот оставшийся кусок множества покрывается  $5C$ . То есть мы представляем наше множество  $E$  как объединение шаров  $B$  и Шаров  $5C$ . А далее мы доказываем, что увеличивая количество  $N$  изначально выбранных шаров  $B$ , то мера  $5C$  стремится к нулю. Докажем это формально:

Применим лемму Витали для  $E_N, \mathcal{B}_{N+1}$ :

$$E_N \subset \bigcup_{j=N+1}^{\infty} 5B_j$$

Но шары не пересекаются, значит действуя по аналогии с предыдущей леммой:

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \mathcal{L}^n(5B_j) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

Тогда:

$$\mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_j}\right) \leq \mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{B_j}\right) \leq 5^n \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathcal{L}^n(5B_j)$$

Отсюда предельным переходом в неравенстве:

$$\mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_j}\right) = 0.$$

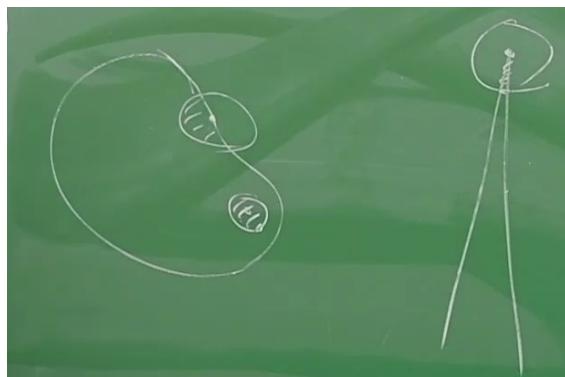
Но используя определение границы:

$$\mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq \mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_j}\right) + \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \partial B_j\right).$$

Следовательно, так как мера границ шаров равна нулю, их счетное объединение тоже имеет меру ноль, то мы доказали что, хотели  $\square$

**Примечание.** Лемма Витали, и теорема Витали останутся в силе, если требование открытых шаров заменить требованием замкнутых шаров с положительными радиусами (если радиус равен нулю, очевидно нельзя покрыть отрезок такими шарами).

## 2.5 Точки плотности



Геометрическая интуиция про точки плотности примерно следующая: берем точку, а в ней шары все меньшего радиуса, и смотрим какая доля шара пересекается с множеством. Верхние примеры, когда шар только частично пересекает множество, а нижний шар полностью лежит в множестве. Так вот теорема о точках плотности как раз про то, что несущественно пересекающих точек «мало» (их мера ноль).

**Определение 2.6.** Для точки  $x \in E$  определим нижнюю плотность равенством

$$\underline{D}_E(x) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\mu^*(E \cap B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))},$$

Кроме того определим верхнюю плотность равенством:

$$\overline{D}_E(x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{\mu^*(E \cap B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))}$$

**Определение 2.7.** Если  $\underline{D}_E(x) = \overline{D}_E(x) = D_E(x)$ , то это число называется плотностью точки  $x$  относительно множества  $E$

**Определение 2.8.** Если  $D_E(x) = 1$ , то  $x$  называется точкой плотности множества  $E$ , то есть:

$$\exists \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\mu^*(E \cap B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 1.$$

**Теорема 2.4.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$  — измеримое по Лебегу множество. Тогда  $\mathcal{L}^n$  — почти всякая точка  $x \in E$  является точкой его плотности, то есть:

$$\forall \mathcal{L}^n \text{ — почти любая } x \in E \hookrightarrow \exists \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 1.$$

**Замечание.** В определении плотности в числителе  $\mu^*$ , так как само множество  $E$  не обязательно измеримо, а вот в теореме мы требуем измеримость, поэтому там стоит  $\mathcal{L}^n$ .

*Доказательство.* Зафиксируем  $q \in (0, 1)$  и определим множество  $E(q)$  равенством:

$$E(q) = \{x \in E : \underline{D}_E(x) \leq q\}$$

Значит:

$\forall x \in E(q) \exists \{r_j(x)\}$  последовательность монотонно убывающая к нулю, причем

$$\exists \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_{r_j}(x))}{\mathcal{L}^n(B_{r_j}(x))} \leq q.$$

Заметим, что

$\bigcup_{x \in E_q} \{B_{r_j}(x)\}_{j=0}^{+\infty}$  образует покрытие Витали  $E(q)$

Зафиксируем теперь  $\varepsilon \in (0, 1 - q)$ , далее будем предполагать, что (иначе можно такие шары «выкинуть», сохранив покрытие Витали):

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_{r_j}(x))}{\mathcal{L}^n(B_{r_j}(x))} \leq q + \varepsilon, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

В силу теоремы Витали, существует дизъюнктный набор шаров  $\{B_j(q)\}_{j=1}^{\infty}$ , покрывающий  $E(q)$  с точностью до меры 0, то есть:

$$E(q) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j(q) \cup e(q), \quad \text{где } \mathcal{L}^n(e(q)) = 0$$

Тогда в силу счетной полуаддитивности меры Лебега:

$$\mathcal{L}^n(E(q)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E(q) \cap B_j(q)) + \mathcal{L}^n(e(q)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (q + \varepsilon) \mathcal{L}^n(B_j(q)) = (q + \varepsilon) \mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j(q)) \leq (*)$$

Пусть  $G$  открытое множество, содержащее  $E(q)$ , и такое что,  $\mathcal{L}^n(G(q) \setminus E(q)) < \varepsilon \cdot \mathcal{L}^n(E(q))$ . И далее можем считать, что шары содержатся в этом множестве, теперь продолжим оценку:

$$(*) \leq (q + \varepsilon)\mathcal{L}^n(G(q)) \leq (q + \varepsilon)(1 + \varepsilon)\mathcal{L}^n(E(q))$$

Так как  $\varepsilon > 0$  был выбран произвольно, то  $\mathcal{L}^n(E(q)) = 0$ . Тогда  $\underline{E} = \{x \in E : \underline{D}_E(x) < 1\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E(1 - \frac{1}{2^j})$  имеет меру нуль, значит почти все точки  $E$  являются точками плотности  $\square$

## 3 Измеримые функции

### 3.1 Измеримые и борелевские функции

**Определение 3.1.** Пару  $(X, \mathfrak{M})$  из абстрактного множества  $X$  и  $\sigma$ -алгебры его подмножеств  $\mathfrak{M}$  будем называть измеримым пространством.

**Определение 3.2.** Пусть  $(X, \mathfrak{M})$  — измеримое пространство и задана функция  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Её будем называть  $\mathfrak{M}$ -измеримой, если

$$\forall c \in \mathbb{R} \hookrightarrow f^{-1}((c, +\infty]) \in \mathfrak{M}$$

**Определение 3.3.** Будем называть  $\mathfrak{M}$ -измеримую функцию борелевской, если  $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Примечание.** Распишем некоторые полезные факты из теории множеств. Пусть задано отображение  $f : X \rightarrow Y$ . Тогда  $\forall A, B \subset Y$ :

- ▷  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$
- ▷  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$
- ▷  $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B);$

Для объединения и пересечения прообразов справедливы более сильные утверждения.

$\forall \{E_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset 2^Y$ :

- ▷  $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(E_\alpha);$
- ▷  $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(E_\alpha);$

**Замечание.** Введём следующее обозначение:  $E(f < a) = \{x \in E \mid f(x) < a\}$ . Аналогичные обозначения введём для  $\leq, >, \geq$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $E \subset X, E \in \mathfrak{M}$ , где  $(X, \mathfrak{M})$  — измеримое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\forall a \in \mathbb{R} E(f < a) \in \mathfrak{M};$
2.  $\forall a \in \mathbb{R} E(f \leq a) \in \mathfrak{M};$
3.  $\forall a \in \mathbb{R} E(f > a) \in \mathfrak{M};$
4.  $\forall a \in \mathbb{R} E(f \geq a) \in \mathfrak{M};$

**Доказательство.** Докажем лемму по схеме  $3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$ :

3)  $\Rightarrow$  4) Заметим, что  $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > a - 1/n)$ . Из замкнутости  $\mathfrak{M}$  относительно счётных пересечений следует необходимое.

4)  $\Rightarrow$  1) Заметим, что  $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(f < a) = E \setminus E(f \geq a)$ , из чего очевидно следует необходимое.

1)  $\Rightarrow$  2) Заметим, что  $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(f \leq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < a + 1/n)$ .

2)  $\Rightarrow$  3) Заметим, что  $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(f > a) = E \setminus E(f \leq a)$ .

□

**Следствие.** Пусть дано измеримое пространство  $(X, \mathfrak{M})$  и на нём задана  $\mathfrak{M}$ -измеримая функция  $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , где  $E \subset X, E \in \mathfrak{M}$ . Тогда выполнено следующее:

1.  $\forall c \in \overline{\mathbb{R}} \hookrightarrow f^{-1}(\{c\}) \in \mathfrak{M}$ ;
2.  $f^{-1}([a, b]) \in \mathfrak{M}$ , где  $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ ;
3.  $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ ;

*Доказательство.* Для начала докажем первую часть утверждения.

Зафиксируем  $c \in \mathbb{R}$ . Тогда прообраз точки представим в следующем виде:

$$f^{-1}(\{c\}) = f^{-1}([-\infty, c]) \cap f^{-1}([c, +\infty])$$

Поэтому  $f^{-1}(\{c\}) \in \mathfrak{M}$ .

Если же  $c = +\infty$ , то

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([n, +\infty])$$

Значит прообраз  $+\infty$  также измерим.

Для  $c = -\infty$  аналогично:

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, -n]) \Rightarrow f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{M}$$

Докажем вторую часть утверждения.

Рассмотрим случай полуинтервала:

$$f^{-1}((a, b]) = f^{-1}([-\infty, b]) \setminus f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathfrak{M}.$$

Для доказательства того, что отрезок/интервал лежат в  $\mathfrak{M}$  необходимо просто добавить/вычесть точку к полуинтервалу. В предельных случаях:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{R}) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([-n, n]) \in \mathfrak{M}; \\ f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) &= f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Докажем третью часть утверждения.

Рассмотрим все такие  $B \subset \mathbb{R}$ , что  $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ . Заметим, что система таких множеств

$$\mathcal{R} = \{B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}\}$$

является  $\sigma$ -алгеброй. По только что доказанному,  $\mathcal{R}$  содержит все промежутки. Но, борелевская  $\sigma$ -алгебра – минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все промежутки. Значит,  $R \supset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  □

**Примечание.** До этого было введено понятие измеримости на всем пространстве, а теперь введем понятие измеримости на множестве. Пусть  $(X, \mathfrak{M})$  — измеримое пространство,  $E \subset X, E \in \mathfrak{M}$  и функция  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда если  $\forall c \in \mathbb{R} E(f > c) \in \mathfrak{M}$ , то будем называть  $f$  измеримой на  $E$ . Если  $E = X$ , то  $f$  —  $\mathfrak{M}$ -измерима на всем пространстве.

**Замечание.** Если  $E \in \mathfrak{M}$ , то любую функцию, измеримую на  $E$  можно продолжить 0 на дополнении к  $E$  и получить функцию, измеримую на всём пространстве.

Верно и обратное: если  $f$  —  $\mathfrak{M}$ -измеримая на  $X$ , то  $f|_E$  —  $\mathfrak{M}$ -измерима на  $E$ .

**Лемма 3.2.** *Пусть дана  $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$ . Тогда если  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измеримо на  $E_n$  для любого  $n$ , то  $f$  — измеримо и на объединении.*

*Доказательство.* Очевидно:

$$f|_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}^{-1}((c, +\infty]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f|_{E_n}^{-1}((c, +\infty])$$

и прообраз измерим как счётное объединение измеримых. □

### 3.2 Предельный переход для измеримых функций

**Теорема 3.1.** *Пусть дано измеримое пространство  $(X, \mathfrak{M})$  и последовательность измеримых на нём функций  $\{f_n\}$ . Тогда верно следующее:*

1.  $\bar{f} = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  и  $\underline{f} = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$  — измеримы на  $X$ ;
2.  $\bar{F} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n$  и  $\underline{F} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$  — измеримы на  $X$ .

*Доказательство.* Заметим, что

$$X(\underline{f} < a) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X(f_n < a)$$

Из этого следует, что  $\forall a \in \mathbb{R} X(\underline{f} < a) \in \mathfrak{M}$  и, следовательно, функция  $\underline{f}$  — измерима. Аналогичное рассуждение (только с  $X(\bar{f} > a)$ ) верно для супремума. Теперь, для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k$$

По первой части утверждения каждый из инфинумов является измеримой функцией, а следовательно супремум по ним тоже измерим, что и требовалось доказать. Для верхнего предела доказательство аналогично. □

**Следствие.** Пусть  $E = \{x \in X \mid \underline{F}(x) = \bar{F}(x)\}$ . Это множество — измеримо, и, более того, функция  $F = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  — измерима на  $E$ .

**Теорема 3.2.** *Пусть дано непустое множество  $G \subset \mathbb{R}^n$ , функция  $\varphi \in C(G)$ . Пусть  $f_1, \dots, f_n$  — измеримые функции, такие, что  $f = (f_1, \dots, f_n) \in G \quad \forall x \in X$  (стандартно,  $(X, \mathfrak{M})$  — измеримое пространство, каждая из функций задана на нём). Тогда  $\varphi \circ f$  — измерима на  $X$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $\varphi$  — непрерывно, то  $\varphi^{-1}((c, +\infty]) = \varphi^{-1}((c, +\infty))$ . По критерию непрерывности прообраз открытого  $(c, +\infty)$  относительно открыт, то есть  $\varphi^{-1}((c, +\infty)) = G \cap \Omega_c$ . В тоже время  $f^{-1}(G \cap \Omega_c) = f^{-1}(\Omega_c)$ , так как  $f$  отображает  $X$  в подмножество  $G$ .

Поскольку  $\Omega_c$  — открытое, оно представимо в виде

$$\Omega_c = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [a^m, b^m)$$

Значит прообраз  $\Omega_c$  представляется в виде

$$f^{-1}(\Omega_c) = f^{-1}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} [a^m, b^m)\right) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{-1}([a^m, b^m)) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}([a_k^m, b_k^m))$$

Поскольку каждая из  $f_k$  — измерима, то прообраз всякой ячейки измерим. Тогда пересечение измеримых — измеримо, и счётное объединение тоже измеримо, а следовательно  $\varphi \circ f$  — измеримая функция.  $\square$

**Замечание.** Договоримся о следующем распространении арифметических операций на  $\pm\infty$ :

1.  $0 \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot 0 = 0$ ;
2.  $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$ ;
3.  $\forall c \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} : c \cdot \pm\infty = \pm\infty, c > 0 \wedge c \cdot \pm\infty = \mp\infty, c < 0$ ;
4.  $\forall c \in \mathbb{R} : c + (+\infty) = +\infty$ ;
5.  $\forall c \in \mathbb{R} : c - (+\infty) = c + (-\infty) = -\infty$ ;
6.  $(+\infty) - (+\infty) = 0$  и аналогичные;
7.  $\forall c \in \overline{\mathbb{R}} : \frac{c}{\pm\infty} = 0$ .

**Теорема 3.3.** Пусть  $f$  и  $g$  — измеримые функции. Тогда верны следующие утверждения:

1.  $f \cdot g$  — измеримая;
2.  $f + g$  — измеримая;
3.  $\alpha f$  — измеримая,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
4.  $f^p$  — измеримая, если  $p > 0$  и  $f \geq 0$ ;
5.  $\frac{1}{f}$  — измеримая на множестве, на котором  $f \neq 0$ .

*Доказательство.* 1. Рассмотрим такие точки, в которых  $f$  и  $g$  конечны одновременно. Это множество  $E = \{x \mid f(x) \in \mathbb{R}, g(x) \in \mathbb{R}\}$  измеримо. Пусть  $\varphi(x, y) = xy, \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Определим  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  как  $\tilde{f}|_E = f, \tilde{f}|_{E^c} = 0; \tilde{g} — аналогично. Тогда  $\tilde{f} \cdot \tilde{g} = \varphi(f, g)$  и является измеримой функцией по предыдущей теореме. Значит  $fg$  — измерима на  $E$ , поскольку является сужением измеримой на измеримое. Если же одно из значений является  $\pm\infty$ , то эти случаи рассматриваются достаточно очевидно: прообразы  $\pm\infty$  и  $0$  получаются как пересечения/объединения измеримых множеств, поэтому функция  $fg$  будет измерима всюду.$

2., 3. Аналогично 1) пункту.

4. Если функция конечна, то  $\varphi(x) = x^p$  — непрерывна и по предыдущей теореме функция измерима на подмножестве, где функция конечна. А если  $f$  принимает бесконечные значения, то считая  $(+\infty)^p = +\infty$  мы получаем постоянство на  $f^{-1}(\{+\infty\})$ . Тогда функция будет измерима на объединении, т.е. всюду.
5. На множестве  $X(f \neq 0)$  мы можем рассмотреть её композицию с  $\varphi(x) = 1/x$  — непрерывной на множестве  $\mathbb{R} \setminus 0$ . Тогда в точках, где  $f$  — конечна мы получаем измеримость композиции, а в точках бесконечности мы получаем измеримость как объединение измеримых.

□

### 3.3 Простые функции

**Определение 3.4.** Пусть дано измеримое пространство  $(X, \mathfrak{M})$ . Пусть дана функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда, если существуют  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$  и дизъюнктные множества  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{M}$  такие, что

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$$

то функция  $f$  называется простой. То есть простая функция — такая у которой множество значений конечно.

**Пример.** Функция Дирихле — простая.

**Определение 3.5.** Для простой функции  $f$  существует состоящее из измеримых множеств конечное разбиение множества  $X$  (мы будем называть его допустимым для  $f$ ), на элементах которого  $f$  постоянна. Такое разбиение можно получить, например, следующим образом. Пусть  $a_1, \dots, a_N$  — всевозможные попарно различные значения  $f$ . Положим  $E_k = f^{-1}(\{a_k\})$ . Очевидно, что эти множества измеримы и образуют разбиение множества  $X$ , которое допустимо для  $f$ .

**Примечание.** Допустимое разбиение, вообще говоря, не единственное: разбив любое из образующих его множеств на измеримые части, мы получим "более мелкое" допустимое разбиение. Таким образом, функция  $f$  может принимать и одинаковые значения на разных элементах своего допустимого разбиения. Кроме того, мы не исключаем случая, когда некоторые его элементы пусты.

**Примечание.** Определение простой функции корректно, поскольку если есть два допустимых набора множеств то их всякие попарные пересечения тоже образуют допустимый набор множеств.

**Лемма 3.3.** Сумма, разность и произведение простых функций тоже является простой функцией.

*Доказательство.* Пусть  $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$  и  $g = \sum_{j=1}^m a'_j \chi_{E'_j}$ . Тогда

$$f + g = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} (a_i + a'_j) \chi_{E_i \cap E'_j}$$

Аналогичные рассуждения проводятся для разности и произведения простых функций. □

**Теорема 3.4.** Пусть дано измеримое пространство  $(X, \mathfrak{M})$ , и на нём задана измеримая функция  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда  $\exists \{f_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность простых функций:  $f_n \xrightarrow{X} f, n \rightarrow +\infty$ .

*Доказательство.* **Шаг 1.** Рассмотрим сначала  $f \geq 0$ .

Зафиксируем некоторое  $n \in \mathbb{N}$ . Определим  $\Delta_{k,n} = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ . Тогда  $[0, n) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2-1} \Delta_{k,n}$ .

Пусть  $E_{k,n} = f^{-1}(\Delta_{k,n})$ . Теперь определим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{n}, & x \in E_{k,n} \\ n, & x \in f^{-1}([n, +\infty]) \end{cases}, \text{ — она, очевидно, простая}$$

Пусть  $f(x) < +\infty$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq 1/n$  (оцениваем как бы «колебанием»). А так как  $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \hookrightarrow f(x) \in [0, n)$ , то  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \forall n \geq N \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$ . Если же рассмотреть

$$E^\infty = f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([n, +\infty]),$$

то  $f_n|_{E^\infty} = n$ , а следовательно если  $f(x) = +\infty$ , то  $f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow +\infty$ .

**Шаг 2.** Пусть теперь функция  $f$  — произвольная. Тогда определим  $f_+ = \max\{f, 0\}$  и  $f_- = \max\{-f, 0\}$ . В таком случае  $f = f_+ - f_-$ . Повторяя рассуждения предыдущего пункта мы аппроксимируем  $f_+$  и  $f_-$ , а после из того, что разность простых — простая мы получаем необходимую последовательность функций для  $f$ .  $\square$

## 4 Различные виды сходимости

### 4.1 Сходимость по мере и почти всюду

Зафиксируем пространство с полной мерой  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ .  $X$  — абстрактное множество,  $\mathfrak{M}$  —  $\sigma$ -алгебра на нём,  $\mu$  — счётно-аддитивная полная мера на  $\mathfrak{M}$ .

**Определение 4.1.**  $\mathcal{L}_0(X, \mu)$  — линейное пространство измеримых почти всюду конечных функций над  $X$ .

**Напоминание.** (Из 2 семестра) Будем говорить, что последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  поточечно сходится к функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , если

$$\forall x \in X \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

При этом записывают это так:

$$f_n \xrightarrow[X]{} f, n \rightarrow \infty.$$

**Определение 4.2.** (Сходимость почти всюду) Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность измеримых на  $E$  функций, где  $E \in \mathfrak{M}$ . Будем говорить что  $f_n$  сходится почти всюду (далее — п.в.) к измеримой функции  $f$ , если

$$\mu\left(\{x \in E \mid f_n(x) \not\rightarrow f(x), n \rightarrow +\infty\}\right) = 0.$$

Будем обозначать как  $f_n \xrightarrow[E]{\text{п.в.}} f, n \rightarrow +\infty$ .

**Определение 4.3.** (Сходимость по мере) Пусть есть последовательность функций  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}_0(E, \mu)$ , где  $E \in \mathfrak{M}$ . Будем говорить, что  $f_n$  сходится по мере к  $f \in \mathcal{L}_0(E, \mu)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \mu\left(\{x \in E \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Данная сходимость обозначается как  $f_n \xrightarrow[E]{\mu} f, n \rightarrow +\infty$ .

Таким образом,  $f_n \xrightarrow[E]{\mu} f, n \rightarrow +\infty$ , если для достаточно больших  $n$  каждая из функций равномерно

близка к  $f$  на множестве, получаемым удалением из  $E$  множества сколь угодно малой меры. Стоит заметить, что поскольку для каждой из функций это удаляемое множество своё, и в общем случае нельзя удалить одно множество, вне которого все функции  $f_n$  с достаточно большими номерами были бы равномерно близки к предельной.

**Утверждение 4.1.** *Из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду.*

*Доказательство.* Определим  $\forall n \in \mathbb{N}$  следующий набор множеств:

$$\Delta_{k,n} = \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right), k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}.$$

Можно заметить, что  $\forall m \in \mathbb{N} m = 2^n + k, k \in \overline{0, \dots, 2^n - 1}$ , причём  $n, k$  определяются единственным образом. Зададим последовательность функций  $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$  следующим образом:  $h_m = \chi_{\Delta_{k,n}(m)}$ . Заметим, что при  $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  тоже. Тогда верно следующее:  $\mathcal{L}^1(\Delta_{k,m}) = 2^{-n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , где  $\mathcal{L}^1$  — одномерная мера Лебега. Значит

$$\mathcal{L}^1(\{x \in [0, 1] \mid h_m(x) > 0\}) \leq 2^{-n} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow h_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^1} 0$ . В то же время  $h_m \not\xrightarrow[\text{п.в.}]{[0,1]} 0$ , поскольку ни в какой точке  $h_m(x)$  не имеет предела.  $\square$

**Утверждение 4.2.** *Из сходимости п.в. не следует сходимость по мере.*

*Доказательство.* Возьмём  $f_n = \chi_{[n, +\infty)}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\text{п.в.}} 0, n \rightarrow +\infty$ , но так как мера точек, больших  $1/2$  всегда бесконечна, то сходимость по мере отсутствует.  $\square$

**Теорема 4.1** (Лебега). *Пусть мера пространства конечна ( $\mu(X) < +\infty$ ). Тогда из сходимости почти всюду следует сходимость по мере.*

*Доказательство.* **Шаг 1.** Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  — это монотонная последовательность неотрицательных измеримых убывающих функций, сходящаяся к  $f \equiv 0$  п.в. функций, то есть  $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$ :  $f_n \geq 0$  и  $f_n \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} 0, n \rightarrow \infty$ . Определим

$$\forall \varepsilon > 0 E_n(\varepsilon) = \{x \in X \mid f_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Заметим, что  $E_{n+1}(\varepsilon) \subset E_n(\varepsilon) \forall n \in \mathbb{N}$ . В то же время так как есть сходимость почти всюду, то с какого-то номера мы «упадем» меньше  $\varepsilon$ , а значит  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(\varepsilon)\right) = 0$ .

Теперь в силу непрерывности меры сверху (именно здесь применяется конечность меры  $X$ ) получаем, что  $\mu(E_n(\varepsilon)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , следовательно  $f_n \xrightarrow[X]{\mu} 0, n \rightarrow \infty$ .

**Шаг 2.** Теперь рассмотрим общий случай. Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность измеримых функций, п.в. сходящаяся к  $f$ .

Определим  $h_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k - f|$ . Она измерима, так как супремум измеримых измерим. Супремум конечен почти всюду, ведь почти всюду  $f_k$  сходится к  $f$ , а  $f$  почти всюду конечна.  $\forall n \in \mathbb{N}$  и для п.в.  $x \in X$   $h_n(x) < +\infty$ . Тогда ясно, что  $h_n$  удовлетворяет частному случаю, и по доказанному  $h_n \xrightarrow[X]{\mu} 0, n \rightarrow \infty$ . Но тогда, применяя предыдущий шаг, мы получаем  $|f_n - f| \leq h_n$ , то  $E(|f_n - f| > \varepsilon) \subset E(h_n > \varepsilon)$ , а значит  $\mu(E(|f_n - f| > \varepsilon)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , то есть  $f_k \xrightarrow[X]{\mu} f, k \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Замечание.** Почему нужна конечность меры  $X$ : если мы возьмем  $\chi_{[n, +\infty)}$ , то их пересечение пусто, но мера каждого луча  $+\infty$  и тогда последний переход шага 1 не работает.

## 4.2 Почти равномерная сходимость

**Примечание.** Зафиксируем некоторое пространство с полной мерой, т.е. тройку  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  такую, что  $X$  — абстрактное множество,  $\mathfrak{M}$  — сигма-алгебра его подмножеств, а  $\mu$  — полная счётно-аддитивная мера на  $\mathfrak{M}$ .

**Напоминание.** (Из 2 семестра) Будем говорить, что последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится к  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Определение 4.4.** (Почти равномерная сходимость) Будем говорить что последовательность  $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mathfrak{M})$  сходится почти равномерно к  $f \in \mathcal{L}_0(X, \mathfrak{M})$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists E_{\varepsilon} \in \mathfrak{M}$  такое, что  $\mu(E_{\varepsilon}) < \varepsilon$  и  $f_n \xrightarrow[X \setminus E_{\varepsilon}]{} f$  и обозначать это как  $f_n \xrightarrow[X]{} f, n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 4.1** (Бореля-Кантелли). Пусть  $\{E_n\} \subset \mathfrak{M}$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$ . Тогда

$$\mu\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

*Доказательство.* Идея в том, что если ряд сошелся, то «размеры» множеств стремятся к нулю. Распишем это формально: Если  $\sum_{n=N}^{\infty} \mu(E_n) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ , то:

$$0 \leq \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq i}^{\infty} E_k\right) \leq \mu\left(\bigcap_{i=1}^N \bigcup_{k \geq i}^{\infty} E_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \mu(E_k) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

Первое неравенство верно, так как мера не отрицательна.

Второе — так как «если из пересечения что-то выкинуть не станет больше».

Третье получается, если взять  $i = n$  и  $i = n + 1$ , легко заметить, что их пересечение равносильно тому, чтобы выкинуть  $E_n$ .

Четвертое — в силу счетной полуаддитивности.

Далее из теоремы о двух милиционерах получаем искомое. Значит  $\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$ .  $\square$

**Следствие** (Признак сходимости почти всюду и почти равномерно). Пусть  $\{g_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$  такая, что  $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow g_n \geq 0$ . И дана бесконечно малая положительная числовая последовательность  $\{\varepsilon_n\}$ . Определим  $X_n = X(g_n > \varepsilon_n)$ .

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) < +\infty$ , то выполнено:

1.  $g_n \xrightarrow[X]{} 0, n \rightarrow +\infty$ ;
2. Более того,  $g_n \xrightarrow[X]{} 0, n \rightarrow +\infty$ .

**Примечание.** Идея в том, что если положительная числовая последовательность  $\{\varepsilon_n\}$  бесконечно мала, то, чтобы ряд из множеств, где значения  $g_n(x) > \varepsilon_n$ , стремился к нулю, нужно, чтобы  $n$ -ый остаток ряда стремился к нулю.

*Доказательство.* Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $E_n(\varepsilon) = X(g_n > \varepsilon)$ . Так как  $\{\varepsilon_n\}$  — стремится к нулю, то  $\exists N_0: \varepsilon_{N_0} < \varepsilon$ , и тогда начиная с него  $E_n(\varepsilon) \subset X_n$ . Тогда первые  $N_0$  не влияют на сходимость. А

из сходимости ряда  $\sum_{n=N_0}^{\infty} \mu(X_n) < +\infty$  и из монотонности меры следует  $\sum_{n=N_0}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$ .

Пусть  $x \notin \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n$ . Тогда  $\exists N \in \mathbb{N}: x \notin E_n \forall n \geq N$ . Но это значит, что  $0 \leq g_n(x) \leq \varepsilon \forall n \geq N$ . Тогда, если мы возьмём  $\varepsilon_k = 1/k$ , то так как в силу леммы Бореля-Кантелли  $\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n(\varepsilon_k)) = 0$ , то для  $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n(\varepsilon_k)$  верно следующее:  $x \notin F \Rightarrow g_n(x) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ . Значит, поскольку  $F$  — множество меры нуль, то  $g_n \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} 0, n \rightarrow +\infty$ .

Теперь покажем п.р. сходимость  $\{g_n\}$ . Если мы зафиксируем  $\varepsilon > 0$ , то  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} \mu(X_n) < \varepsilon$ .

Тогда возьмём в качестве  $E_\varepsilon = \bigcup_{k=N(\varepsilon)}^{\infty} X_k$ . Если  $x \notin E_\varepsilon$ , то  $\forall n \geq N \forall x \in X \rightarrow g_n(x) < \varepsilon_n$ . Тогда поскольку  $\varepsilon_n$  — бесконечно малая, то  $\sup_X g_n(x) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ , а значит  $g_n$  равномерно сходится на  $X \setminus E_\varepsilon$ . Значит есть п.р. сходимость на  $X$ .  $\square$

### 4.3 Теоремы Рисса и Егорова

**Теорема 4.2** (Рисс). *Пусть дана последовательность  $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$ , сходящаяся по мере к некоторой  $f \in \mathcal{L}_0(X, \mu)$ . Тогда у неё существует подпоследовательность  $f_{n_k} \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} f, k \rightarrow +\infty$*

*Доказательство.* Так как  $f_n$  сходится к  $f$  по мере, то  $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ . Тогда  $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k$ :

$$\mu \left( \{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\} \right) \leq \frac{1}{2^k}$$

Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{x \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}) < +\infty$ , а значит применяя следствие из леммы Бореля-Кантелли, мы получаем, что  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  п.в. сходится к  $f$ ; более того,  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  п.р. сходится к  $f$ .  $\square$

**Теорема 4.3** (Егоров). *Пусть даны  $E \in \mathfrak{M}: \mu(E) < +\infty$  и последовательность  $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_0(E, \mu)$ . Тогда если последовательность сходится п.в. к  $f \in \mathcal{L}_0(E, \mu)$ , то она сходится п.р.*

*Доказательство.* Пусть  $g_n = \sup_{k \geq n} |f_k - f|$ . По условию,  $g_n \xrightarrow[E]{\text{п.в.}} 0, n \rightarrow +\infty$ . Поскольку мера пространства конечна, то из сходимости п.в. следует сходимость по мере (согласно теореме Лебега). Тогда по теореме Рисса существует подпоследовательность  $g_{n_k}$ , сходящаяся п.р. к 0,  $k \rightarrow +\infty$ . Покажем, что из этого следует, что вся  $g_n$  сходится п.р.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon : \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon \rightarrow g_{n_k} \underset{E \setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} 0$$

Что означает сходимость равномерно на  $E_\varepsilon$ ? То, что  $\sup_{x \in E \setminus E_\varepsilon} |g_{n_k}(x)| \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$ . Но последовательность  $g_n$  — монотонна. А значит  $\sup_{x \in E \setminus E_\varepsilon} |g_{n_k}(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ , то есть  $g_n \underset{E \setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} 0$ . Но тогда поскольку  $|f_n - f| \leq g_n$ , то  $f_n \underset{E \setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} f, n \rightarrow +\infty$ , то есть мы получаем п.р. сходимость к  $f$ .  $\square$

**Лемма 4.2.** *Пусть  $X$  — пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $\mu$ . Тогда существует конечная мера  $\nu$ , уважающая множества меры нуль, т.е.  $\mu(E) = 0 \iff \nu(E) = 0$*

*Доказательство.* Поскольку  $X$  — пространство с  $\sigma$ -конечной мерой, то  $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ , где мера каждого из  $X_k$  — конечна. Тогда определим  $\nu$  как

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\mu(E \cap X_k)}{\mu(X_k)}$$

Очевидно, что  $\nu$  удовлетворяет требованиям.  $\square$

**Теорема 4.4** (о диагональной последовательности). *Пусть  $X$  — пространство с  $\sigma$ -конечной мерой. Тогда если есть  $\{g_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$ , сходящаяся п.в. к  $h \in \mathcal{L}_0(X, \mu)$  и  $\forall n \in \mathbb{N}$  есть  $\{f_{n,k}\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$  сходящаяся п.в. к  $g_n$ , то  $\forall n \in \mathbb{N} \exists k(n) \in \mathbb{N}$  такая, что  $f_{n,k(n)} \xrightarrow[X]{n.e.} h, n \rightarrow +\infty$ .*

*Доказательство.* Предположим, что  $\mu(X) < +\infty$ . Тогда по теореме Лебега из сходимости п.в. следует сходимость по мере, то есть  $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow f_{n,k} \xrightarrow[\mu]{} g_n, k \rightarrow +\infty$ . То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists E_n = \left\{ x \mid |f_{n,k(n)} - g_n| > \frac{1}{n} \right\} : \mu(E_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Тогда заметим, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$ , а значит, применяя следствие из леммы Бореля-Кантелли, мы получаем, что  $\psi_n = f_{n,k(n)} - g_n$  сходится к нулю п.в. Тогда  $h - f_{n,k(n)} = h - g_n - \psi_n$ . Поскольку  $h - g_n$  п.в. сходится к нулю, и  $\psi_n$  п.в. сходится к нулю, то и  $h - f_{n,k(n)}$  п.в. сходится к нулю, то есть  $f_{n,k(n)} \xrightarrow[\text{п.в.}]{\mu} h, n \rightarrow +\infty$ . Пусть теперь  $X$  — пространство с  $\sigma$ -конечной мерой. Тогда мы применяем ранее доказанное к  $(X, \mathfrak{M}, \nu)$ , где  $\nu$  из леммы 4.2, и получаем требуемое; а поскольку  $\nu$  уважает множества меры нуль, то множество точек отсутствия сходимости сохранит меру нуль.  $\square$

#### 4.4 Теорема Лузина. Аппроксимация измеримых функций непрерывными

**Примечание.** Далее работаем в  $\mathbb{R}^n$  со стандартной мерой Лебега.

**Напоминание.** Расстоянием от точки до множества будем называть число  $\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \|x - y\|$ .

**Лемма 4.3.** *Функция расстояния от точки до множества является 1-липшицевой.*

*Доказательство.* Пусть  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ . Тогда согласно неравенству треугольника,  $\|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$ . Возьмём инфимум по всем  $y \in E$ :

$$\rho(x, E) \leq \|x - x'\| + \rho(x', E).$$

Поскольку это верно для произвольных  $x, x'$ , то справедливо следующее:

$$|\rho(x, E) - \rho(x', E)| \leq \|x - x'\|.$$

То есть  $\rho$  — 1-липшицева.  $\square$

**Лемма 4.4.** *Пусть  $K_0, K_1$  — непересекающиеся компакты в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда существует непрерывная функция  $h_{K_0, K_1}$ , разделяющая  $K_0$  и  $K_1$ , то есть  $\forall x \in K_0 \rightarrow h(x) = 0, \forall x \in K_1 \rightarrow h(x) = 1$ .*

*Доказательство.* Положим

$$h_{K_0, K_1}(x) = \frac{\rho(x, K_0)}{\rho(x, K_0) + \rho(x, K_1)} > 0.$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет всем условиям леммы.  $\square$

**Теорема 4.5.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компакт. Тогда существует  $\{f_n\}$  — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к  $\chi_K$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $G = \mathbb{R}^n \setminus K$  — открытое, а значит измеримое. Тогда из регулярности меры Лебега следует возможность исчерпать  $G$  компактами:  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ , причём

$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow K_n \subset K_{n+1}$ . Таким образом, взяв  $f_n = h_{K_n, K}$  мы получаем искомую последовательность непрерывных функций: очевидно, что любая точка вне  $K$  начиная с некоторого  $N$  окажется в  $K_N$  и после этого  $f_n(x)$  будет равен 0; для любой точки компакта значение функции всегда равно 1.  $\square$

**Теорема 4.6** (Теорема Фреше/2 теорема Рисса). Пусть  $h$  — произвольная измеримая функция на  $X$ . Тогда существует последовательность  $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R}^n)$ :  $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{n \rightarrow +\infty} h, n \rightarrow +\infty$

*Доказательство.* Докажем теорему в несколько шагов.

Пусть  $\varphi$  — харфункция некоторого измеримого множества  $E$ . Согласно внутренней регулярности меры Лебега, его можно исчерпать компактами с точностью до меры нуль:  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \cup e$ ,

т.ч.  $K_n \subset K_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{L}^n(e) = 0$ . Тогда поскольку мы можем аппроксимировать харфункцию компакта непрерывными, и харфункции компактов почти всюду на  $\mathbb{R}^n$  сходятся к харфункции  $E$ , то в силу  $\sigma$ -конечности  $\mathcal{L}^n$  по теореме о диагональной последовательности  $\exists \{g_{n,k(n)}\}_{n=1}^\infty$ :  $g_{n,k(n)} \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{n \rightarrow +\infty} \chi_E, n \rightarrow +\infty$ , и все  $g_{n,k(n)}$  — непрерывные на  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть теперь  $\psi$  — некоторая простая функция; Очевидно, что она также аппроксимируется непрерывными функциями, поскольку является линейной комбинацией харфункций некоторых дизъюнктных измеримых множеств.

Пусть теперь  $h$  — произвольная измеримая функция. Тогда существует последовательность простых функций  $\{g_n\}$  т.ч.  $g_n \rightarrow h, n \rightarrow +\infty$ . В тоже время,  $\forall n \in \mathbb{N}$  существует  $f_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g_n, k \rightarrow +\infty$  — последовательность непрерывных функций. В силу сигма-конечности  $\mathcal{L}^n$  мы можем применить теорему о диагональной последовательности и получить  $f_{n,k(n)} \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{n \rightarrow +\infty} h, n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Определение 4.5.**  $C$ -свойством Лузина будем называть следующее условие на функцию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon : \mathcal{L}^n(E_\varepsilon) < \varepsilon \wedge \exists f_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon \hookrightarrow f(x) = f_\varepsilon(x).$$

**Теорема 4.7** (Лузина). Произвольная измеримая п.в. конечная функция  $f$  в  $\mathbb{R}^n$  удовлетворяет  $C$ -свойству Лузина.

*Доказательство.* Заметим, что

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m(0) \setminus \overline{B_{m-1}(0)} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(0) \cup \{0\}.$$

По теореме Фреше существует последовательность  $\{f_l\} \subset C(\mathbb{R}^n)$ :  $f_l \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{l \rightarrow +\infty} f, l \rightarrow +\infty$ . В тоже время, поскольку мера каждого шарового слоя — конечна, то мы можем применить теорему Егорова на каждом из них, и получить п.р. сходимость на каждом из них, то есть

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists e_m \subset E_m \hookrightarrow f_l \underset{E_m \setminus e_m}{\rightrightarrows} f, l \rightarrow +\infty,$$

причём  $\mu(e_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}$ . Но тогда  $\mathcal{L}^n(\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i) \leq \varepsilon$ . Тогда мы можем взять  $E_\varepsilon = \bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ . Очевидно, что на всём остальном пространстве  $f_l$  сходится к  $f$  равномерно, а следовательно  $f$  непрерывно на нём, таким образом мы получаем утверждение задачи.  $\square$

## 5 Интеграл Лебега

### 5.1 Определение интеграла Лебега и его корректность

**Напоминание.** Простая функция — функция с конечным числом значений.

**Определение 5.1** (Интеграл Лебега Toy version 1). Пусть  $f$  — простая неотрицательная функция. Тогда интегралом Лебега на множестве  $E$  от неё будем называть

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^N a_k \mu(E_k \cap E) \in [0, +\infty]$$

**Определение 5.2.** Простую неотрицательную функцию  $f$  будем называть *интегрируемой по Лебегу*, если интеграл от неё конечен.

**Лемма 5.1.** *Определение интеграла Лебега для простой функции корректно, то есть интеграл Лебега не зависит от разбиения.*

*Доказательство.* Пусть  $X = \bigsqcup_{i=1}^N E_i = \bigsqcup_{j=1}^M F_j$  и простая неотрицательная функция  $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^M b_j \chi_{F_j}$ . Заметим, что  $\{E_i \cap F_j\}_{i,j}$  — допустимое разбиение для  $f$ ,  $E_i \cap E = \bigsqcup_{j=1}^M E_i \cap F_j \cap E$ . Тогда

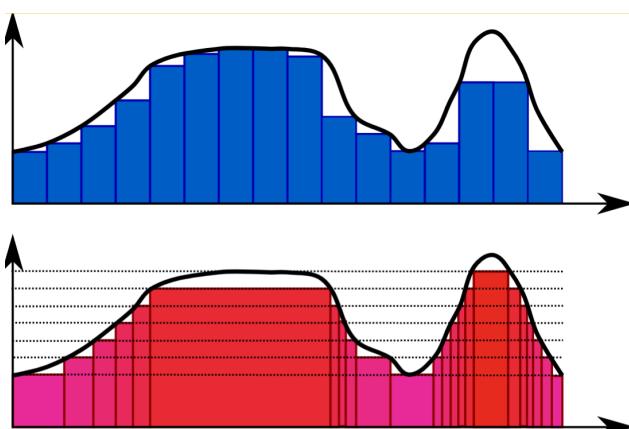
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N a_i \mu(E \cap E_i) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_i \mu(E \cap E_i \cap F_j) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M b_j \mu(E \cap E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N b_j \mu(E \cap E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^M b_j \mu(E \cap F_j) \end{aligned}$$

□

**Определение 5.3** (Интеграл Лебега Toy version 2). Пусть  $f$  — неотрицательная измеримая функция. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq \psi \leq f} \int_E \psi d\mu,$$

где супремум берётся по всем таким простым функциям  $\psi$ .



Пояснение к картинке. Синий цвет — это сумма Дарбу, разбиение по области определения. А красный — это сумма Лебега. Мы приближаем нашу функцию простыми, разбиение по оси значений функции.

**Определение 5.4** (Интеграл Лебега). Пусть  $f$  — произвольная измеримая на  $E$  функция. Тогда  $f = f_+ - f_-$ , где  $f_+ = \max(f, 0)$ ,  $f_- = \max(-f, 0)$ . Определим *интеграл Лебега* от неё как

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu,$$

в случае конечности интегралов от неотрицательных частей. Иначе будем говорить что функция  $f$  не интегрируема по Лебегу.

**Определение 5.5.** Произвольную измеримую функцию  $f$  будем называть *интегрируемой по Лебегу*, если  $\int_E f_+ d\mu < +\infty$  и  $\int_E f_- d\mu < +\infty$ .

## 5.2 Неравенства Гёльдера, Минковского и Чебышёва. Пространства $L_p$

Пусть  $X = (X, \mathfrak{M}, \mu)$  — пространство с мерой.

**Определение 5.6.** Пусть  $p \in [1, +\infty)$ ,  $E \in \mathfrak{M}$ . Тогда положим:

$$\widetilde{L}_p(E, \mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(E, \mu) \mid \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$$

**Лемма 5.2** (Неравенство Юнга).  $\forall a, b \geq 0 \hookrightarrow$

$$ab \leq a^p/p + b^{p'}/p', \text{ где } 1/p + 1/p' = 1.$$

*Доказательство.* Из выпуклости логарифма вверх мы можем оценить

$$\ln(a^p/p + b^{p'}/p') \geq \ln(a^p/p) + \ln(b^{p'}/p') = \ln a + \ln b = \ln ab$$

Потенцируем и получим исходное неравенство:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

□

**Теорема 5.1** (Неравенство Гёльдера). Пусть  $f \in \widetilde{L}_p(E, \mu)$ ,  $g \in \widetilde{L}_{p'}(E, \mu)$ , где  $p, p' \in (1, +\infty)$ :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Тогда  $(f \cdot g) \in \widetilde{L}_1$  и

$$\int_E |fg| d\mu \leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_E |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'}$$

*Доказательство.* Пусть  $A = (\int_E |f|^p d\mu)^{1/p}$ ,  $B = (\int_E |g|^{p'} d\mu)^{1/p'}$ . Предположим, что  $A > 0$  и  $B > 0$  (случаи, когда  $A = 0$  или  $B = 0$  тривиальны). Нормируем  $\tilde{f} = f/A$ ,  $\tilde{g} = g/B$ . Тогда

$$\left( \int_E |\tilde{f}|^p d\mu \right)^{1/p} = \left( \int_E |\tilde{g}|^{p'} d\mu \right)^{1/p'} = 1$$

Используя неравенство Юнга

$$\int_E |\tilde{f}\tilde{g}| d\mu \leq \int_E \left( \frac{|\tilde{f}|^p}{p} + \frac{|\tilde{g}|^{p'}}{p'} \right) d\mu = \frac{1}{p} \int_E |\tilde{f}|^p d\mu + \frac{1}{p'} \int_E |\tilde{g}|^{p'} d\mu = 1.$$

Теперь, умножив на  $A$  и  $B$ , мы получаем искомое.

□

**Примечание.** В доказательстве неравенства Гёльдера используются свойства интеграла Лебега, показанные далее в п. 5.3.

**Напоминание.** Если  $p \in [1, +\infty)$ , то обозначим

$$\widetilde{L}_p(E, \mu) = \{f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ — измерима в широком смысле на } E, \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$$

**Примечание.** Обозначим за  $\mathcal{N}(E)$  — линейное пространство всех измеримых в широком смысле функций на  $E$ , т.ч. они равны 0 п.в. и «выкинем» их. Это сделано, чтобы у нас не страдала аксиома нормы связанныя с нулем(Мы поменяли функцию на множестве меры нуль, и получили нулевой интеграл) Тогда:

$$L_p(E, \mu) = \widetilde{L}_p(E, \mu) / \mathcal{N}(E)$$

Является ЛНП с нормой

$$\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

**Примечание.**  $L_p$  - это фактор пространство, те его элемент то класс эквивалентности  $[f] = f + \mathcal{N}(E)$

Проверим выполнение аксиом нормы:

- ▷ Неотрицательность очевидна.
- ▷  $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$  — в силу факторизации и ранее доказанных свойств.
- ▷ Неравенством треугольника является неравенство Минковского.

**Лемма 5.3** (Неравенство Минковского). Пусть  $f, g \in \widetilde{L}_p(E)$ . Тогда  $f + g \in \widetilde{L}_p(E)$  и  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

*Доказательство.* Так как  $|f + g|^p \leq (2 \max(|f|, |g|))^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$ , то и  $\int_E |f + g|^p d\mu < +\infty$ , а значит  $f + g \in \widetilde{L}_p(E)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_E |f + g|^p d\mu &= \int_E |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \\ &\leq \int_E (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu = \int_E |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_E |g| |f + g|^{p-1} d\mu = \int_E |f| |f + g|^{p/p'} d\mu + \int_E |g| |f + g|^{p/p'} d\mu \leq \end{aligned}$$

По неравенству Гёльдера с показателем  $p, p'$ :

$$\leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_E |f + g|^p d\mu \right)^{1/p'} + \left( \int_E |g|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_E |f + g|^p d\mu \right)^{1/p'}.$$

Теперь, поскольку  $1/p + 1/p' = 1$ , то если мы поделим на  $(\int_E |f + g|^p)^{1/p'} < +\infty$  обе части, то мы получим необходимое неравенство.  $\square$

**Определение 5.7.** Будем называть существенным супремумом для измеримой функции  $f$  на пространстве с мерой  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  следующее:

$$\text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{L > 0 \mid \mu(|f| > L) = 0\}$$

**Определение 5.8.** Пусть  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  — пространство с мерой. Будем говорить что  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — существенно ограничена, если  $\text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| < +\infty$ .

**Определение 5.9.** Определим  $L_\infty$  как ЛНП классов эквивалентности существенно ограниченных на  $X$  функций с нормой  $\text{ess sup}$ , то есть  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_X |f|$ .

**Примечание.** Неравенства Гёльдера и Минковского работают и в этом случае, то есть при  $p = 1/p = +\infty$ .

**Теорема 5.2** (Неравенство Чебышева). *Пусть даны положительные  $p$  и  $t$  и интегрируемая по Лебегу на  $X$  функция  $f$ . Тогда если  $E_t = \{x \in X \mid |f| \geq t\}$ , то*

$$\mu(E_t) \leq \frac{1}{t^p} \int_X |f|^p d\mu.$$

*Доказательство.*

$$t^p \mu(E_t) = \int_{E_t} t^p d\mu \leq \int_{E_t} |f|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu.$$

□

### 5.3 Свойства интеграла Лебега для неотрицательных функций

**Напоминание.** Пусть сейчас и далее фиксировано некоторое пространство с мерой  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ .

**Напоминание.** Если  $g$  — неотрицательная измеримая функция на  $E \in \mathfrak{M}$ , то  $\int g d\mu = \sup_E \int \varphi d\mu$ , где супремум берётся по простым функциям  $\varphi$ , таким что  $0 \leq \varphi \leq g$  на  $E$ .

**Утверждение 5.1** (Монотонность по функциям). *Пусть  $E \in \mathfrak{M}$ ,  $f, g$  — неотрицательные измеримые функции. Тогда, если  $f \leq g$  на  $E$ , то  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\psi, h$  — две простые функции:  $\psi \leq h$  на  $E$ . У них есть допустимые разбиения  $X$ . Заметим, что если мы попарно пересечём множества разбиения для  $\psi$  с множествами разбиения для  $h$ , то мы получим общее допустимое разбиение  $\{A_i\}_{i=1}^N$  для этих функций:  $\psi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$ , аналогично  $h = \sum_{i=1}^N b_i \chi_{A_i}$ . Тогда, зная, что  $\forall k \in \{1, \dots, N\} \hookrightarrow a_k \leq b_k$ , получаем:

$$\int_E \psi d\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(E \cap A_i) \leq \sum_{i=1}^N b_i \mu(E \cap A_i) = \int_E h d\mu.$$

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть у нас  $\psi$  — произвольная неотрицательная простая функция такая, что  $\psi \leq f$  на  $E$ . В тоже время,  $f \leq g$  по условию. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq \psi \leq f} \int_E \psi d\mu \leq \sup_{0 \leq h \leq g} \int_E h d\mu = \int_E g d\mu,$$

где супремум берётся по всем функциям  $\varphi$  и  $h$ .

□

**Утверждение 5.2.** Пусть множество  $E: \mu(E) = 0$ . Тогда  $\int_E f d\mu = 0$ .

*Доказательство.* Для простой функции это очевидно по определению интеграла. В общем случае для неотрицательной функции  $g$ :

$$\int_E g d\mu = \sup_{0 \leq \varphi \leq g} \int_E \varphi d\mu = 0.$$

В общем случае  $g = g_+ - g_-$ . □

**Утверждение 5.3.** Пусть  $E \in \mathfrak{M}$ . Тогда  $\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E d\mu$ .

*Доказательство.* Покажем, что для простых функций это так. Пусть  $\psi$  — простая, а  $\{A_i\}_{i=1}^N$  — допустимое разбиение для  $\psi$ . Тогда

$$\chi_E \psi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i \cap E} + 0 \cdot \chi_{X \setminus E}.$$

Значит,

$$\int_X \chi_E \psi d\mu = \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k \cap E) + 0 \mu(X \setminus E) = \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k \cap E) = \int_E \psi d\mu.$$

Пусть  $\psi$  — простая:  $0 \leq \psi \leq f$  на  $E$ . Обозначим это условие (\*). Пусть  $h$  — простая, и  $0 \leq h \leq \chi_E f$  на  $X$ . Заметим, что  $h = \chi_E h$ . Значит, в силу монотонности интеграла, верно следующее:

$$\int_X h d\mu = \int_X \chi_E h d\mu = \int_E h d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

Теперь если мы возьмём  $\sup$  по всем таким  $h$ , то получим:

$$\int_X \chi_E f d\mu = \sup_{0 \leq h \leq \chi_E f} \int_X h d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

Рассмотрим произвольную  $\psi$ , удовлетворяющую условию (\*):

$$\int_E \psi d\mu = \int_X \chi_E \psi d\mu \leq \int_X \chi_E f d\mu.$$

Возьмём супремум по всем таким функциям таким  $\psi$ :

$$\int_E f d\mu = \sup_{\psi} \int_E \psi d\mu \leq \int_X \chi_E f d\mu.$$

Значит, имеем равенство:

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu.$$

□

**Следствие** (Монотонность по множеству). Пусть  $A, B \in \mathfrak{M}, A \subset B, f : X \rightarrow [0, +\infty]$  — измеримая. Тогда

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu \leq \int_X f \chi_B d\mu = \int_B f d\mu.$$

**Теорема 5.3** (Беппо Леви). Пусть дана последовательность  $\{f_n\}$  неотрицательных измеримых на  $X$  функций:  $f_n \leq f_{n+1}$  на  $X$ , сходящаяся  $\mu$ -п.в. на  $X$  к функции  $f$ . Тогда верно следующее:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

*Доказательство.* Пусть  $L_n = \int_X f_n d\mu$ . Заметим, что  $\{L_n\}$  — монотонно не убывает в  $[0, +\infty]$ . Значит,  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \sup_n L_n = L$ . Поскольку  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f \geq f_n$ , значит:

$$\int_X f d\mu \geq \int_X f_n d\mu.$$

Следовательно,

$$\int_X f d\mu \geq L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Теперь необходимо показать обратное неравенство. Зафиксируем  $\theta \in (0, 1)$ . Пусть  $g$  — произвольная неотрицательная простая функция, т.ч.  $0 \leq g \leq f$  на  $X$ .

Рассмотрим  $X_n = X(f_n \geq \theta g)$ . Заметим, что  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots$  В тоже время,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ . Действительно, множество, где  $g = 0$  заведомо исчерпывается. Если  $g(x) > 0$ , то так как  $g \leq f \Rightarrow \theta g < f$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ , значит с некоторого  $N \hookrightarrow f_N(x) > \theta g(x) \Rightarrow x \in X_N$ , поэтому  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ .

Тогда  $\forall A \in \mathfrak{M} \hookrightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap X_n$ . В силу непрерывности меры снизу мы получаем, что  $\forall A \in \mathfrak{M}$

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A \cap X_n) \quad (*)$$

Т.е.

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{X_n} f_n d\mu \geq \int_{X_n} \theta g d\mu = \theta \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k \cap X_n).$$

Устремим  $n$  в бесконечность и воспользуемся (\*):

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \theta \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k \cap X) = \theta \int_X g d\mu.$$

В силу произвольного выбора  $\theta$ , при взятии супремума по  $\theta$ , мы получим следующее неравенство:

$$L \geq \int_X g d\mu.$$

Теперь взяв супремум по всем таким  $g$  мы получим искомое включение:

$$L \geq \sup_g \int_X g d\mu = \int_X f d\mu.$$

□

**Теорема 5.4** (Фату). Пусть  $\{f_n\}$  — последовательность неотрицательных измеримых функций. Тогда верно следующее:

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Доказательство.* Вспомним,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k(x)$ . Обозначим за  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ . Заметим, что последовательность  $\{g_n\}$  — монотонна. Тогда  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$ . Применив теорему Леви к  $\{g_n\}$ , получим:

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

□

**Утверждение 5.4** (Аддитивность по функциям). Пусть  $f, g$  неотрицательные измеримые функции. Тогда верно следующее:

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

*Доказательство.* Сначала докажем это для простых функций  $\psi : 0 \leq \psi \leq f, h : 0 \leq h \leq g$ . Возьмём общее для них разбиение. Тогда имеем равенства

$$\psi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{C_k}, \quad h = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{C_k}.$$

По определению интеграла для простых функций:

$$\int_X (\psi + h) d\mu = \sum_{k=1}^N (a_k + b_k) \mu(C_k) = \sum_{k=1}^N a_k \mu(C_k) + \sum_{k=1}^N b_k \mu(C_k) = \int_X \psi d\mu + \int_X h d\mu.$$

Теперь покажем справедливость утверждения для произвольных измеримых функций. Поскольку любая измеримая является пределом последовательности простых (без ограничения общности последовательность можно взять возрастающей; если же она не возрастающая, то просто берём  $t_k = \max_{i=1}^k f_i$ ), то  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ ,  $g = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$ . Тогда используя теорему Леви мы получаем следующее:

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (f_n + g_n) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu + \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu + \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

□

**Утверждение 5.5** (Положительная однородность). Пусть  $f$  — неотрицательная измеримая функция. Тогда  $\forall \alpha \geq 0 \rightarrow \int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$ .

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству аддитивности по функциям. □

**Утверждение 5.6.** Пусть  $E \in \mathfrak{M}$ ,  $\{E_n\}_{k=1}^N \subset \mathfrak{M}$  и  $E = \bigcup_{n=1}^N E_n$ . Тогда для произвольной измеримой неотрицательной функции  $f$  верно следующее:

$$\int_E f d\mu < +\infty \iff \forall k \int_{E_k} f d\mu < +\infty.$$

Более того, если  $E = \bigcup_{k=1}^N E_k$ , то

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} f d\mu.$$

**Доказательство.** ( $\implies$ ) Заметим, что  $\int_{E_k} f d\mu \leq \int_E f d\mu$ , а значит, если  $\int_E f d\mu < +\infty$ , то и  $\forall k \int_{E_k} f d\mu < +\infty$ .

( $\impliedby$ ) Пусть теперь  $\forall k \int_{E_k} f d\mu < +\infty$ . Но тогда  $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu \leq \int_X f \sum_{k=1}^N \chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} f d\mu < +\infty$ .

Если же набор множеств  $E_k$  разбивает  $E$ , тогда  $\chi_E = \sum_{k=1}^N \chi_{E_k}$ , поэтому очевидно выполнение равенства.  $\square$

**Утверждение 5.7.** Пусть  $E \in \mathfrak{M}$ :  $\mu(E) > 0$  и дана измеримая  $f > 0$  на  $E$ . Тогда  $\int_E f d\mu > 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $E_n = E(f > 1/n)$ . Тогда  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Следовательно,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ :  $\mu(E_{n_0}) > 0$ . Значит,

$$\int_E f d\mu \geq \int_{E_{n_0}} f d\mu \geq \int_{E_{n_0}} \frac{1}{n_0} d\mu = \frac{1}{n_0} \mu(E_{n_0}) > 0.$$

$\square$

## 5.4 Свойства интеграла Лебега от произвольных измеримых функций

**Утверждение 5.8.**  $f$  — интегрируема по Лебегу  $\iff |f|$  — интегрируема по Лебегу.

**Доказательство.** Пусть  $f_+ = \max(f, 0)$  и  $f_- = \max(-f, 0)$ . Тогда

Если  $f$  — интегрируема по Лебегу, то согласно определению  $\int f_+ d\mu < +\infty$  и  $\int f_- d\mu < +\infty$ . Поскольку  $|f| = f_+ + f_-$ , то  $\int |f| d\mu < +\infty$ .

Если  $|f|$  — интегрируема по Лебегу, то  $\int |f| d\mu < +\infty$ , а поскольку  $f_+ \leq f$  и  $f_- \leq f$ , то  $\int f_+ d\mu < +\infty$  и  $\int f_- d\mu < +\infty$ , а значит  $f$  — интегрируема по Лебегу.  $\square$

**Примечание.** Для интеграла по Риману, утверждение выше неверно.

**Утверждение 5.9.** Пусть  $f$  — интегрируемая по Лебегу функция на  $E$ . Тогда

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

**Доказательство.** Используя неравенство треугольника для определения интеграла от модуля функции

$$\left| \int_E f d\mu \right| = \left| \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \right| \leq \left| \int_E f_+ d\mu \right| + \left| \int_E f_- d\mu \right| = \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu = \int_E |f| d\mu.$$

$\square$

**Утверждение 5.10.** Пусть  $f$  интегрируема по Лебегу на  $E$ . Тогда она п.в. конечна на  $E$ .

*Доказательство.* Поскольку интегрируемость  $f$  равносильно интегрируемости  $|f|$ , то  $\int_E |f|d\mu < +\infty$ . Пусть  $E_0 = \{x \mid f(x) = \pm\infty\} \subset E$ . Тогда

$$+\infty > \int_E |f|d\mu \geq \int_{E_0} |f|d\mu \geq \int_{E_0} nd\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Но  $\int_{E_0} nd\mu = n\mu(E_0)$ ,

$$\mu(E_0) \leq \frac{1}{n} \int_E |f|d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

А значит  $E_0$  — множество меры нуль. □

**Утверждение 5.11.** Пусть  $E$  — произвольное множество и  $\int_E |f|d\mu = 0$ . Тогда  $f$  п.в. равна 0.

*Доказательство.* Пусть это не так. Тогда существует множество положительной меры  $e \subset E$ :  $|f| > 0$  на  $e$ . Но, по свойству интеграла Лебега для неотрицательных функций  $\int_e |f|d\mu > 0$ , чего не может быть в силу  $0 = \int_E |f|d\mu \geq \int_e |f|d\mu$ . Значит функция п.в. равна 0. □

**Утверждение 5.12.** Пусть  $f$  — ограниченная измеримая функция. Тогда она интегрируема по Лебегу на множестве конечной меры.

*Доказательство.* Пусть  $E$  — множество конечной меры. Тогда  $|f| < C$  на этом множестве. Значит,  $\int_E |f|d\mu \leq \int_E Cd\mu < +\infty$ , что равносильно интегрируемости  $f$ . □

**Утверждение 5.13.** Пусть  $f = g$  п.в. на множестве  $E$ . Тогда верно следующее:

- ▷  $f$  — интегрируема по Лебегу  $\iff g$  — интегрируема по Лебегу;
- ▷ Если  $f$  интегрируема по Лебегу, то  $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ .

*Доказательство.* Интегрируемость  $f$  равносильна интегрируемости  $|f|$ , а интегрируемость  $g$  равносильна интегрируемости  $|g|$ . Тогда пусть  $e = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ . Так как  $\mu(e) = 0$ , то  $\int_e |f|d\mu = \int_e |g|d\mu = 0$ . Значит  $\int_E |f|d\mu = \int_{E \setminus e} |f|d\mu = \int_{E \setminus e} |g|d\mu$ , и, в силу аддитивности интеграла по множеству, мы получаем утверждение. □

**Утверждение 5.14.** Пусть множества  $E, E'$ :  $\mu(E \Delta E') = 0$ . Тогда для всякой измеримой  $f$  верно следующее:

- ▷  $f$  — интегрируема по Лебегу на  $E \iff f$  — интегрируема по Лебегу на  $E'$ ;
- ▷ Если  $f$  — интегрируема на  $E$ , то  $\int_E f d\mu = \int_{E'} f d\mu$ .

*Доказательство.* Доказательство аналогично. □

**Определение 5.10.** Будем называть функцию  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримой в широком смысле на  $E \in \mathfrak{M}$ , если  $\exists E' : E' \subset E$ :  $f$  — измерима на  $E'$ , и  $\mu(E \setminus E') = 0$ .

**Замечание.** То есть если функция не определена на множестве меры ноль, мы «не чувствуем» это.

**Примечание.** В силу только что доказанных свойств интеграла Лебега, при работе с ним можно использовать функции, измеримые в широком смысле.

**Утверждение 5.15.** Пусть  $f, g \in \widetilde{L}_1$ . Тогда если  $f \leq g$  н.в., то

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

*Доказательство.* Пусть  $f = f_+ - f_-, g = g_+ - g_-$ . Тогда

$$f_+ + g_- \leq f_- + g_+$$

почти всюду. Значит, в силу монотонности,

$$\int_E (f_+ + g_-) d\mu \leq \int_E (g_+ + f_-) d\mu.$$

Так как  $f, g$  — интегрируемы по Лебегу, то

$$\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \leq \int_E g_+ d\mu - \int_E g_- d\mu.$$

Что нам и требовалось получить.  $\square$

**Утверждение 5.16** (Аддитивность по функциям). Пусть  $f, g \in \widetilde{L}_1$ . Тогда

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

*Доказательство.* Пусть  $f = f_+ - f_-, g = g_+ - g_-$ . Пусть  $h = f + g$ . Тогда  $h = f + g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$ . С другой стороны,  $h = h_+ - h_-$ . Т.е.

$$h_+ - h_- = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

Значит,

$$h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_-.$$

Но тогда

$$\int_E (h_+ + f_- + g_-) d\mu = \int_E (h_- + f_+ + g_+) d\mu.$$

А значит

$$\int_E h_+ d\mu + \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu = \int_E h_- d\mu + \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu.$$

В силу конечности всех этих интегралов мы и получаем искомое утверждение.  $\square$

**Утверждение 5.17** (Однородность интеграла Лебега). Пусть  $f \in \widetilde{L}_1(E, \mu)$ . Тогда  $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow$

$$\int_E a f d\mu = a \int_E f d\mu.$$

*Доказательство.* Пусть  $a \geq 0$ . Тогда  $f = f_+ - f_-$ , и  $af = af_+ - af_-$ . Тогда из положительной однородности интеграла Лебега для неотрицательных функций следует

$$a \int_E f_+ d\mu = \int_E af_+ d\mu;$$

$$a \int_E f_- d\mu = \int_E af_- d\mu.$$

Поэтому

$$\int_E af d\mu = a \int_E f_+ d\mu - a \int_E f_- d\mu = a \int_E f d\mu.$$

Если же  $a < 0$ , то в силу уже доказанной положительной однородности нам достаточно рассмотреть случай  $a = -1$ . Тогда  $(-f)_+ = f_-$ ,  $(-f)_- = f_+$ . Значит,

$$\int_E (-f) d\mu = \int_E (-f)_+ d\mu - \int_E (-f)_- d\mu = -(\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu) = - \int_E f d\mu.$$

Утверждение доказано. □

**Следствие.** Очевидно, что, если  $f_1, \dots, f_N \in \widetilde{L}_1(E, \mu)$  и даны  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ , то

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i \in \widetilde{L}_1(E, \mu).$$

Более того,

$$\int_E \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i d\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_E f_i d\mu.$$

## 5.5 Интеграл Лебега как функция множества

В этом параграфе фиксировано пространство с полной  $\sigma$ -конечной мерой  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ .

**Утверждение 5.18** (Аддитивность интеграла Лебега по множеству). *Пусть  $E = \bigcup_{i=1}^N E_i$ , где  $\{E_i\}_{i=1}^N \subset \mathfrak{M}$ . Тогда для произвольной измеримой функции верно следующее:*

$$f \in \widetilde{L}_1(E, \mu) \iff \forall i \in \overline{1, N} \hookrightarrow f \in \widetilde{L}_1(E_i, \mu).$$

Более того, если  $E = \bigsqcup_{i=1}^N E_i$ , то

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^N \int_{E_i} f d\mu.$$

*Доказательство.* В силу равносильности интегрируемости функции интегрируемости модуля функции, следующее неравенство нам даёт первое утверждение:

$$|f| \chi_E \leq |f| \chi_E \leq |f| \sum_{i=1}^N \chi_{E_i}.$$

Если же  $E = \bigsqcup_{i=1}^N E_i$ , то  $f \chi_E = f \sum_{i=1}^N \chi_{E_i}$ . Интегрирование этого равенства с учётом уже доказанной линейности по функциям даёт нам утверждение задачи. □

**Теорема 5.5** (Счётная аддитивность интеграла Лебега). *Пусть  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$  и  $E_i \cap E_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Тогда для любой неотрицательной функции  $f$ , измеримой на  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  верно следующее равенство:*

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu.$$

*Доказательство.* Без ограничения общности мы можем продолжить  $f$  на  $X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  нулем. Введём функцию «срезки» первых  $N$  элементов:

$$f^N(x) = \sum_{i=1}^N \chi_{E_i} f(x).$$

В силу конечной аддитивности по множеству

$$\int_E f^N d\mu = \sum_{i=1}^N \int_{E_i} f d\mu.$$

Заметим, что  $f^N \leq f^{N+1} \forall N \in \mathbb{N}$ , а значит допустимо применение теоремы Леви:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f^n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Следовательно

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu.$$

Что и требовалось доказать. □

**Следствие.** Принимая во внимание предыдущие свойства интеграла Лебега, мы можем сказать что интеграл Лебега от неотрицательной функции (как функция множества) является счёто-аддитивной мерой на  $X$ .

**Следствие.** Если  $f \in \widetilde{L}_1(X, \mu)$ , то интеграл Лебега непрерывен сверху и снизу, как функция множества, т.е. если

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \{A_i\} \subset \mathfrak{M}, \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \dots \quad \text{то} \quad \int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

И, если

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \{B_i\} \subset \mathfrak{M}, \dots \supset B_i \supset B_{i+1} \supset \dots \quad \text{то} \quad \int_B f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} f d\mu.$$

*Доказательство.* Утверждение очевидно из определения интеграла Лебега и непрерывности сверху и снизу конечных мер, порождаемых  $f_+$  и  $f_-$ . □

**Теорема 5.6** (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть  $f \in \widetilde{L}_1(X, \mu)$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$  т.ч.  $\forall E \in \mathfrak{M} : \mu(E) < \delta \hookrightarrow \int_E |f| d\mu < \varepsilon$ .*

$$\int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Шаг 1. Заметим, что утверждение задачи для  $f = \chi_E$  очевидно: мы можем просто взять  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ . Случай простой функции сводится к случаю характеристики.

Шаг 2. Пусть теперь  $f$  — неотрицательная измеримая функция, интегрируемая по Лебегу. По определению,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \psi$  — простая, т.ч.  $\int_X |f - \psi| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ . С другой стороны,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\frac{\varepsilon}{2}) \forall E \in \mathfrak{M} : \mu(E) < \delta(\frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow \int_E \psi d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ , а значит

$$\int_E f d\mu = \int_E |f - \psi| d\mu + \int_E \psi d\mu < \varepsilon,$$

поскольку  $0 \leq \int_E (f - \psi) d\mu \leq \int_X (f - \psi) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ . □

**Утверждение 5.19.** Пусть  $f \in \widetilde{L}_1(X, \mu)$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{M}$  конечной меры:

$$\int_{X \setminus A} |f| d\mu < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Известно, что  $f \in \widetilde{L}_1(X, \mu) \iff |f| \in \widetilde{L}_1(X, \mu) \iff \int_X |f| d\mu < \infty$ . Обозначим

$$X_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}, A_n = X \setminus X_n. \text{ — точки где } |f(x)| < \frac{1}{n}.$$

Очевидно, что  $\dots \subset A_{n+1} \subset A_n \subset \dots$ . Множество  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  является множеством нулей  $|f|$ . В силу непрерывности меры сверху:

$$0 = \int_A |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X \setminus X_n} |f| d\mu.$$

Полученное равенство, по сути и доказывает утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N \rightarrow \int_{X \setminus X_n} |f| d\mu < \varepsilon.$$

То есть  $\forall \varepsilon > 0 A_\varepsilon = X_{N(\varepsilon)}$  — подходит. Осталось показать, что  $\mu(X_n) < +\infty$ . Действительно,

$$\frac{\mu(X_n)}{n} = \int_{X_n} \frac{1}{n} d\mu \leq \int_{X_n} |f| d\mu \leq \int_X |f| d\mu < +\infty.$$

Из чего следует требуемое. □

**Теорема 5.7** (Теорема Лебега (о мажорируемой сходимости)). Пусть дана  $\{f_n\}$  — последовательность измеримых на  $X$  функций, п.в. сходящаяся к  $f$ . Пусть  $\exists g$  — неотрицательная измеримая функция т.ч.

▷  $g \in \widetilde{L}_1(X, \mu)$

▷  $g$  — мажоранта последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ , т.е.  $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |f_n| \leq g$  почти всюду на  $X$ .

Тогда

▷  $f \in \widetilde{L}_1(X, \mu)$

▷

$$\int_X f d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

*Доказательство.* Положим  $f(x) = 0$  в точках, где не существует  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ . Тогда мы получаем измеримость  $f$  в обычном смысле (строго говоря, до этого она была измеримой лишь в широком смысле). Поскольку  $|f_n| \leq g$  почти всюду, то  $f_n$  — интегрируема по Лебегу, поскольку  $\int_X |f_n| d\mu \leq \int_X g d\mu < +\infty$ . Используя лемму Фату, получим интегрируемость  $f$ .

Пусть теперь  $h_n = \sup_{k \geq n} |f - f_k|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $h_n$  — неотрицательная измеримая на  $X$  функция, при этом п-ть  $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$  монотонно сходится к 0 п.в. Тогда  $g_n = 2g - h_n$  — неубывающая (в силу невозрастания  $h_n$ ) последовательность неотрицательных функций, поскольку  $2g - |f - f_k| \geq 2g - |f| - |f_k| \geq 0$ . Тогда применяя теорему Леви мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n d\mu = \int_X 2g d\mu.$$

Отсюда заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \sup_{k \geq n} |f - f_k| d\mu = 0.$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (f - f_n) d\mu = 0 \Rightarrow \int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$ , что и требовалось доказать. □

**Примечание.** Условие мажорируемости нельзя отбросить: пусть  $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$  всюду, кроме 0, и интеграл от 0 равен 0. Но  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mathcal{L}^1 = 1, 1 \neq 0$ .

## 5.6 Сравнение интегралов Лебега и Римана

**Теорема 5.8.** Пусть  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тогда  $f \in \tilde{L}_1([a, b])$ . Более того, верно следующее:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) d\mathcal{L}^1(x).$$

*Доказательство.* Пусть фиксировано некоторое натуральное  $n$ . Разобьём  $[a, b]$  на  $2^n$  равных частей. Тогда обозначим за  $x_k$  и  $\Delta_k$ :

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b - a), k = \overline{0, 2^n}; \quad \Delta_k = [x_k, x_{k+1}], k = \overline{0, 2^n - 2}, \Delta_{2^n - 1} = [x_{2^n - 1}, x_{2^n}].$$

Теперь рассмотрим следующие последовательности функций:

$$\underline{f}_n = \sum_{k=0}^{2^n} \inf_{x \in \Delta_k} f \cdot \chi_{\Delta_k} \quad \bar{f}_n = \sum_{k=0}^{2^n} \sup_{x \in \Delta_k} f \cdot \chi_{\Delta_k}.$$

Монотонность этих последовательностей  $-\bar{f}_{n+1} \leq \bar{f}_n$  и  $\underline{f}_{n+1} \geq \underline{f}_n$  очевидна. Также введём для  $\underline{f}_n$  и  $\bar{f}_n$  обозначения:

$$m_{k,n} = \inf_{\Delta_k} f \quad M_{k,n} = \sup_{\Delta_k} f.$$

Применим теорему Леви (поскольку  $\bar{f}_n$  и  $\underline{f}_n$  — измеримые) к  $g_n = \bar{f}_n - \bar{f}_1$ :

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} g^n d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} g d\mathcal{L}^1.$$

Тогда, поскольку  $g_n = \bar{f}_n - \bar{f}_1$ , то  $g = \bar{f} - \bar{f}_1$  и в силу линейности мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} \bar{f}_n d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} \bar{f} d\mathcal{L}^1.$$

Аналогичными рассуждениями можно получить для  $\underline{f} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{f}_n$  следующее:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} \underline{f}_n d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} \underline{f} d\mathcal{L}^1.$$

Обозначим  $S_{T_n}$  и  $s_{T_n}$  верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для разбиения отрезка  $[a, b]$  на  $2^n$  равных частей. Очевидно, что выполняются следующие неравенства:

$$s_{T_n} \leq \int_{[a,b]} \bar{f}_n d\mathcal{L}^1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} M_{k,n} \frac{1}{2^n} \leq S_{T_n}; \quad S_{T_n} \geq \int_{[a,b]} \underline{f}_n d\mathcal{L}^1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_{k,n} \frac{1}{2^n} \geq s_{T_n}.$$

Из интегрируемости по Риману следует существование предела сумм Дарбу, равного интегралу Римана  $\int_a^b f(x) dx$ . Значит

$$\int_{[a,b]} \bar{f} d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} \underline{f} d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) dx.$$

Но, в тоже время,  $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$ . Значит  $\int_{[a,b]} (\bar{f} - f) d\mathcal{L}^1 = 0$ . Из неотрицательности  $\bar{f} - f$  следует, что  $\bar{f} = f$  п.в. Тогда

$$\int_{[a,b]} f d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} \bar{f} d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) dx.$$

□

**Пример.**  $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$  не интегрируема по Риману, но интегрируема по Лебегу.

**Пример (?).** Пусть  $r_k$  — нумерация рациональных чисел на  $[0, 1]$ . Пусть выбрано некоторое  $\delta \in (0, 1)$ . Определим функцию  $f$  равенством

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{(r_k - \frac{\delta}{2^k}, r_k + \frac{\delta}{2^k})}.$$

Функция  $f \notin \mathcal{R}([-1, 2])$ , но  $f \in \tilde{L}_1([-1, 2])$ . Пусть

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \frac{\delta}{2^k}, r_k + \frac{\delta}{2^k}).$$

Множество  $F = [0, 1] \setminus G$  — множество положительной меры, и множество точек разрыва всегда его содержит, а значит функция  $f$  неинтегрируема по Риману в силу критерия Лебега. При этом, в отличии от функции Дирихле,  $f$  нельзя поправить на множество нулевой меры так, чтобы она стала интегрируемой по Риману.

**Пример.** Пусть  $f$  задана как

$$f = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x \notin (0, 1] \end{cases}$$

Она интегрируема в несобственном смысле по Риману на  $(0, 1]$  и интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$ . Определим последовательность функций  $f_n$  как

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in [\frac{1}{n}, 1]; \\ 0, & x \notin [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Поскольку  $f_n \in \mathcal{R}([0, 1])$ , то  $f_n \in \mathcal{L}_1([0, 1])$  и интегралы Римана и Лебега совпадают. Но т.к.  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  и последовательность  $\{f_n\}$  монотонна, то применяя теорему Леви мы получаем

$$\int_{[0,1]} f d\mathcal{L}^1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n d\mathcal{L}^1 = \int_0^1 f(x) dx.$$

## 5.7 Точки Лебега локально интегрируемых функций

**Определение 5.11.** Будем говорить что  $f \in \tilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$  и называть её локально интегрируемой по Лебегу, если  $\forall R > 0 \ f \in \tilde{L}_1(B_R(0), \mathcal{L}^n)$ .

**Определение 5.12.** Пусть  $f \in \tilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда будем называть  $x^* \in \mathbb{R}^n$  точкой Лебега функции  $f$ , если

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x^*))} \int_{B_r(x^*)} |f(y) - f(x^*)| dy = 0.$$

**Примечание.** В каждой точке Лебега

$$f(x^*) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x^*))} \int_{B_r(x^*)} f(y) dy$$

Однако обратное неверно, см. Дьяченко Ульянов "Действительный анализ в задачах"

**Примечание.** Введём следующее обозначение:

$$\int_{B_r(x^*)} \dots = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x^*))} \int_{B_r(x^*)} \dots$$

**Лемма 5.4.** Пусть  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  — пространство с мерой. Тогда, если  $f \in \tilde{L}_1(X)$ , то существует простая  $f_\varepsilon$ , что

$$\int_X |f - f_\varepsilon| d\mu \leq \varepsilon.$$

**Доказательство.** Если  $f \geq 0$ , то это очевидное следствие из определений интеграла и супремума. Если же она знакопеременна, то мы разбиваем её на две части —  $f_+$  и  $f_-$ , и для каждой из них аппроксимируем. То есть, по определению интеграла неотрицательной функции и супремума:

$$\forall \varepsilon \exists \text{ простая } f_{+\varepsilon} : \int_X |f_+ - f_{+\varepsilon}| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\forall \varepsilon \exists \text{ простая } f_{-\varepsilon} : \int_X |f_- - f_{-\varepsilon}| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f_{+\varepsilon}(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f_{-\varepsilon}(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\int_X |f - f_\varepsilon| d\mu = \int_{X(f \geq 0)} |f_+ - f_{+\varepsilon}| d\mu + \int_{X(f < 0)} |-f_- + f_{-\varepsilon}| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Определение 5.13** (Максимальная функция Харди-Литтлвуда). Пусть  $f \in \tilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Определим  $M[f](x)$  как

$$M[f](x) := \sup_{r>0} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

**Примечание.** Заметим измеримость максимальной функции на  $\mathbb{R}^n$ . При фиксированном  $r > 0$  функция

$$x \mapsto \int_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

непрерывна, а при фиксированном  $x$  функция

$$r \mapsto \int_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

непрерывна как функция  $r$ . Поэтому  $M[f]$  можно вычислять, беря супремум лишь в рациональных точках.

**Примечание.** Заметим, что если  $J = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx > 0$ , то  $M[f] \notin \tilde{L}_1(\mathbb{R}^n)$ . При достаточно большой  $\|x\|$  верно следующее:

$$M[f](x) \geq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2\|x\|(x)})} \int_{B_{2\|x\|(x)}} |f(y)| dy \geq \frac{C}{\|x\|^n} J.$$

Якобиан замены в  $n$ -мерных полярных координатах содержит  $\|x\|^{n-1}$  в качестве радиальной части, поэтому интеграл от  $\frac{CJ}{\|x\|^n}$  по  $\mathbb{R}^n$  равен  $+\infty$ .

**Лемма 5.5.** Пусть  $f \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^n)$ . Тогда

$$\forall t > 0 \hookrightarrow \mathcal{L}^n(E_t) \leq \frac{5^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{L}^n.$$

Где  $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M[f](x) > t\}$ .

*Доказательство.* По определению  $E_t$  для каждой точки  $x \in E_t$  существует шар  $B_r(x)$  т.ч.

$$\int_{B_r(x)} |f(y)| dy \geq t.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}^n(B_r(x)) \leq \frac{1}{t} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

Тогда радиусы всех таких шаров, покрывающих точки  $E_t$ , равномерно ограничены. Пусть теперь  $R > 0$  — произвольное действительное число. Положим

$$E_t^R = E_t \cap B_R(0).$$

Полученное таким образом множество  $E_t^R$  — ограничено. В силу  $5B$ -леммы Витали существует не более чем счётный набор дизъюнктивных шаров  $\{B_k\}$  такой, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} 5B_k \supset E_t^R.$$

Тогда

$$\mathcal{L}^n(E_t^R) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(5B_k) \leq \frac{5^n}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} |f(y)| dy \leq \frac{5^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

(Последний переход получен из дизъюнктивности набора шаров  $\{B_k\}$  и монотонности интеграла). Теперь, в силу того, что оценка не зависит от  $R$  мы возьмём супремум по  $R$  и получим требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 5.9.** Пусть  $f \in \tilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда п.в.  $x \in \mathbb{R}^n$  является точкой Лебега функции  $f$ .

*Доказательство.* Шаг 1. Пусть  $f = \chi_E$ ,  $E \in \mathfrak{M}^n$ . Тогда,

$$|f(y) - f(x)| = |\chi_E(y) - \chi_E(x)| = \begin{cases} \chi_E(y), & x \notin E \\ 1 - \chi_E(y), & x \in E \end{cases}$$

Но, тогда,

$$\int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = \begin{cases} 1 - \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} & x \in E; \\ \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))}, & x \notin E. \end{cases}$$

Правая часть п.в. стремится к 0 при  $r \rightarrow +0$ , поскольку п.в. точки — точки плотности (для  $E$  или для дополнения  $E$  соответственно). Таким образом для характеристических функций утверждение доказано.

Шаг 2. Очевидно, что утверждение остаётся справедливым и для простых функций.

Шаг 3. Пусть теперь  $f \in \tilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Достаточно доказать, что  $\forall R > 0$  утверждение выполняется для  $\chi_{B_R(0)} f$ . Поэтому без ограничения общности мы можем считать  $f \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^n)$ . Зафиксируем  $t > 0$ . Покажем что  $\mathcal{L}^n(E_t(f)) = 0$ , где

$$E_t(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{r \rightarrow +0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy > t\}.$$

Заметим, что

$$\limsup_{r \rightarrow +0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy \leq |f(x)| + \limsup_{r \rightarrow +0} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy \leq |f(x)| + M[f](x)$$

Очевидно, что  $E_t(f) \subset E_t^1(f) \cup E_t^2(f)$ , где

$$E_t^1(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > t/2\}, E_t^2(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid M[f](x) > t/2\}.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$\mathcal{L}^n(E_t^1(f)) \leq \frac{2}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

С другой стороны, в силу леммы 5.5

$$\mathcal{L}^n(E_t^2(f)) \leq 2 \cdot \frac{5^b}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

Из полуаддитивности внешней меры следует

$$\lambda^*(E_t(f)) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

Шаг 4. Пусть  $h$  — произвольная простая функция, аппроксимирующая  $f$  с точностью до  $\varepsilon$ . Тогда

$$F_{f,h}(y) := |f(y) - f(x)| - |h(y) - h(x)| \leq R_{f,h}(y) := |f(y) - f(x) - (h(y) - h(x))| \leq |f(y) - f(x)| + |h(y) - h(x)| =:$$

Усреднив неравенство:

$$\text{f}_{B_r(x)} F_{f,h}(y) dy \leq \text{f}_{B_r(x)} R_{f,h}(y) dy \leq \text{f}_{B_r(x)} G_{f,h}(y) dy.$$

Перейдём к верхнему пределу при  $r \rightarrow +0$  и получим, что в силу шага 3

$$\limsup_{r \rightarrow +0} \text{f}_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = \limsup_{r \rightarrow +0} \text{f}_{B_r(x)} |f(y) - h(y) - (f(x) - h(x))| dy.$$

для всякой простой  $h$ . То есть

$$\lambda^*(E_t(f - h)) = \lambda^*(E_t(f)) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - h(y)| dy.$$

Поскольку правая часть может быть сколь угодно малой, то  $\lambda^*(E_t(f)) = 0$ , что и завершает доказательство.  $\square$

## 6 Произведение мер и кратные интегралы

### 6.1 Теорема о монотонном классе

**Определение 6.1.** Систему подмножеств  $\mathcal{M}$  множества  $X$  называют *монотонным классом*, если:

- ▷  $\forall \{A_i\} \subset \mathcal{M}: A_1 \subset \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \dots \hookrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$  (Расширяющаяся последовательность);
- ▷  $\forall \{B_j\} \subset \mathcal{M}: B_1 \subset \dots \supset B_j \supset B_{j+1} \supset \dots \hookleftarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{M}$  (Сужающаяся последовательность).

**Напоминание.** Если  $\mathcal{A}$  — алгебра подмножеств  $X$ , то  $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$  — минимальная  $\sigma$ -алгебра, порожденная этой алгеброй.

**Теорема 6.1** (О монотонном классе). *Пусть есть  $\mathcal{A}$  — алгебра подмножеств  $X$ , вложенная в некоторый монотонный класс  $\mathcal{M}$ . Тогда  $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  — минимальный монотонный класс, содержащий  $\mathcal{A}$ , т.е. пересечение всех монотонных классов, содержащих алгебру  $\mathcal{A}$ . Класс  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  существует, так как как минимум  $2^X$  это монотонный класс. Покажем, что  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ .

( $\subset$ ) Заметим, что  $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$  является монотонным классом, ведь она замкнута относительно счетных пересечений и объединений, а следовательно  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ .

( $\supset$ ) Зафиксируем некоторое  $A \in \mathcal{A}$ . Рассмотрим систему подмножеств

$$\mathcal{M}_A = \left\{ B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid (B \cap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})) \wedge (B^c \cap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})) \right\}.$$

Очевидна симметричность  $\mathcal{M}_A : B \in \mathcal{M}_A \iff B^c \in \mathcal{M}_A$ .

Из замкнутости алгебры  $\mathcal{A}$  очевидно, что  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$ , ведь по определению алгебры пересечение любых двух множеств лежит в алгебре, это верно и для пересечения с дополнением.

Очевидна и монотонность  $\mathcal{M}_A$ . Возьмем расширяющуюся последовательность  $B_1 \subset B_2 \subset \dots B_n \subset \dots \{B_n\} \subset \mathcal{M}_A$ . Тогда если  $B_i$  это расширяющаяся последовательность и  $\{B_i\} \subset \mathcal{M}_A$ , то очевидно и  $\{B_i \cap A\}$  расширяющаяся последовательность но по определению монотонного класса их объединение лежит в  $\mathcal{M}_A$ . Если взять дополнения  $B_i^c$  то докажем для сужающейся последовательности. По построению  $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Но он и сам является монотонным классом. А следовательно, из минимальности  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  и это верно  $\forall A \in \mathcal{A}$ .

Пусть  $A = X$ . Тогда  $\forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow B^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ , т.е. минимальный монотонный класс симметричен.

Пусть  $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Рассмотрим систему множеств

$$\mathcal{N}_E = \{C \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid C \cap E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

Заметим, что  $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}_E$ , по аналогичным соображениям  $\mathcal{N}_E$  — монотонный класс и  $\mathcal{N}_E$  — симметричная система подмножеств  $X$ .

Тогда  $\mathcal{N}_E = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  и это верно  $\forall E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ , а значит  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  замкнуто относительно пересечения. Тогда  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  замкнуто и относительно объединения, а значит  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  — алгебра. Но, тогда, поскольку любое объединение в алгебре реализуется как объединение возрастающей (а пересечение — как пересечение убывающей) последовательности множеств, то  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  —  $\sigma$ -алгебра. Но минимальная точно лежит в нем  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ , и искомое утверждение получено. В условии теоремы был дан произвольный монотонный класс. Не обязательно минимальный. Поэтому включение  $\supset$  доказано.  $\square$

**Напоминание.** Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо подмножеств множества  $X$ ,  $\mu$  — мера на  $\mathcal{P}$ . Тогда верхней мерой называем

$$\mu^* = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \mid E \subset \bigcup_j P_j, \{P_j\} \subset \mathcal{P} \right\}$$

Далее вводится измеримость по Каратеодори:  $A$  — измеримо, если

$$\forall E \subset X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Измеримые множества образуют  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{M}_\mu$ , на которой  $\mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}$  — счетно-аддитивная мера, причём  $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$ , причём продолжение единственно на  $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$ . Важно что  $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$  не то же самое что  $\mathfrak{M}_\mu$ . В  $\mathbb{R}^n$  есть неборелевские измеримые по Лебегу. И, вообще говоря,  $\mathfrak{M}_\mu$  шире, к примеру в  $\mathbb{R}^n$  есть неборелевские множества, измеримые по Лебегу.

**Лемма 6.1.** Пусть  $E \in \mathfrak{M}_\mu$ :  $\mu(E) < +\infty$ . Тогда  $\exists C, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ :

$$B \subset E \subset C \text{ и } \mu(B) = \mu(E) = \mu(C).$$

*Доказательство.*  $E$  — измеримое, то есть  $\mu^*(E) = \mu(E)$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \{P_{n,j}\}: \mu^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{n,j}) + 1/n$ . Определим тогда  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j}$ . В силу монотонности и непрерывности меры сверху  $C$  — искомое. Заметим, что  $C \setminus E = e \in \mathfrak{M}_\mu$  и  $\mu(e) = 0$ . Тогда есть  $\tilde{B} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P}): \tilde{B} = \bigcap_n \bigcup_j Q_{n,j}, \{Q_{n,j}\} \subset \mathcal{P}$  и  $\mu(\tilde{B}) = 0$ . Тогда  $B = C \setminus \tilde{B}$  — искомое.  $\square$

## 6.2 Произведение мер и принцип Кавельери

Мы уже познакомились с произведением мер на полукольцах. Но теперь мы хотим более общую конструкцию: произведение мер на измеримых пространствах. Пусть далее зафиксированы два пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  и  $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ . Мы хотим построить  $\mu \otimes \nu$  на  $X \times Y$ .

**Факт.** Справедливы следующие теоретико-множественные утверждения.

Пусть  $A, A' \subset X$  и  $B, B' \subset Y$ . Тогда:

- ▷  $A' \times B' \subset A \times B \iff (A' \subset A) \wedge (B' \subset B)$ ;
- ▷  $(A \setminus A') \times B = (A \times B) \setminus (A' \times B)$ ;
- ▷  $A \times (B \setminus B') = (A \times B) \setminus (A \times B')$ .

Пусть  $A_1, \dots, A_n \subset X$  и  $B_1, \dots, B_n \subset Y$ . Тогда

- ▷  $\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B)$ ;
- ▷  $A \times \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \times B_n)$ ;
- ▷  $\left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \times B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \times B)$ ;
- ▷  $A \times \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \times B_n)$ .

**Лемма 6.2.** Пусть  $\mathcal{P} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}, \mu(A) < +\infty, \nu(B) < \infty\}$ . Тогда  $\mathcal{P}$  — полукольцо,  $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$  — счётно-аддитивная мера на  $\mathcal{P}$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\mathcal{P}^1 = \{A \mid A \in \mathfrak{M}, \mu(A) < +\infty\}$  и  $\mathcal{P}^2 = \{B \mid B \in \mathfrak{N}, \nu(B) < +\infty\}$  — полукольца, а  $\mu$  и  $\nu$  — конечно-аддитивные меры на них соответственно. По теореме о тензорном произведении полукольцо  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 \otimes \mathcal{P}^2$  — тоже полукольцо, а  $\mu \otimes \nu$  — конечно-аддитивная мера на нём. Покажем теперь счётную аддитивность  $\mu \otimes \nu$ . Пусть

$$P = A \times B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n.$$

Заметим, что

$$\chi_P(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{P_n}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y) \text{ при } (x, y) \in X \times Y.$$

Зафиксируем  $x \in X$ , определим

$$f_n(x, y) := \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y), y \in Y.$$

Заметим, что последовательность  $\{f_n(x, \cdot)\}$  состоит из неотрицательных функций. Кроме того, эта последовательность монотонна, то есть  $f_{n+1}(x, y) \geq f_n(x, y) \forall y \in Y$ . Следовательно, по [теореме Леви](#):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y) d\nu(y) = \int_Y \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y) d\nu(y) = \chi_A(x) \int_Y \chi_B(y) d\nu(y) = \chi_A(x) \nu(B).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) \chi_{A_k}(x) = \chi_A(x) \nu(B), \forall x \in X.$$

Теперь интегрирование по  $x$  вместе с применением [теоремы Леви](#) даёт счётную аддитивность:

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu(A \times B) &= \mu(A) \nu(B) = \int_X \chi_A(x) \nu(B) d\mu(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \nu(B_k) \chi_{A_k}(x) d\mu(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) \int_X \chi_{A_k}(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu \otimes \nu(A_k \times B_k). \end{aligned}$$

□

**Определение 6.2.** Мера, полученная стандартным продолжением  $\mu \otimes \nu$  с  $\mathcal{P}$  на  $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ , называется *произведением мер*  $\mu$  и  $\nu$ , а полученное пространство  $(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mu \otimes \nu)$  — *произведением пространств с мерой*.

**Примечание.** Мера  $\mu \otimes \nu$  на  $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$  является  $\sigma$ -конечной мерой, если  $\mu$  и  $\nu$  —  $\sigma$ -конечны, и полна, поскольку получена при помощи стандартного продолжения.

**Определение 6.3.** Пусть  $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ . Тогда

- ▷  $C_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$  — сечение первого рода;
- ▷  $C^y = \{x \in X \mid (x, y) \in C\}$  — сечение второго рода.

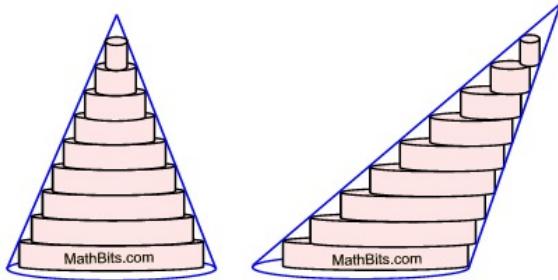
**Лемма 6.3.** Пусть  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — семейство подмножеств  $X \times Y$ . Тогда:

- ▷  $\left( \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \right)_x = \bigcup_{\alpha \in I} (C_\alpha)_x$ ;
- ▷  $\left( \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \right)_x = \bigcap_{\alpha \in I} (C_\alpha)_x$ ;
- ▷  $(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$ ;
- ▷  $C \cap C' = \emptyset \Rightarrow C_x \cap C'_x = \emptyset$ .

Аналогичные утверждения справедливы и для сечений второго рода.

**Теорема 6.2** (Принцип Кавальери). Пусть  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  и  $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$  — пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами, а  $(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mu \otimes \nu)$  — их тензорное произведение. Тогда  $\forall C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \hookrightarrow$

1.  $C_x \in \mathfrak{N}$  для  $\mu$ -почти всех  $x \in X$ ;
2.  $x \mapsto \nu(C_x)$  измерима в широком смысле (на множестве 0 меры м.б. не определена);
3.  $\mu \otimes \nu(C) = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$ .



*Геометрическая идея: если взять две фигуры и на каждом сечении их площади совпадают, то совпадают и объемы.*

*Например из любого «косого» треугольника можно сделать прямоугольный треугольник и получить  $S = \frac{1}{2}ah$ , поэтому у пирамид и конусов формула объема  $V = \frac{1}{3}Sh$ .*

*Доказательство.* План доказательства: на 1 шаге докажем утверждение теоремы для множеств из  $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$ . На 2 шаге докажем для множеств меры 0. На 3 шаге представим произвольное измеримое множество через множество меры нуль и множество из  $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$ . На 4 шаге докажем теорему для пространств  $\sigma$ -конечной меры.

Шаг 1. Определим  $\mathcal{P} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}\}$ . Предположим, что  $\mu(X) < +\infty$  и  $\nu(Y) < +\infty$ , а  $C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$  и пока что докажем теорему для такого  $C$ .

Пусть  $\mathcal{M}$  — такая система подмножеств  $X \times Y$ , что

- ▷  $\forall E \in \mathcal{M} \forall x \in X \hookrightarrow E_x \in \mathfrak{N}$ ;
- ▷  $x \mapsto \nu(E_x)$  — измеримая функция.

Заметим следующие факты про  $\mathfrak{M}$ :

1)  $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$  ведь в полукольце измеримые множества, тогда сечение просто постоянная а значит измеримая функция.

2) В тоже время, очевидно, что  $\mathcal{M}$  — симметрично, и всякое множество входит в систему со своим дополнением (в силу конечности меры  $\nu(E_x^c) = \nu(Y) - \nu(E_x)$ ).

3) Кроме того, если  $C_1, C_2 \in \mathcal{M}$  и  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ , то  $(C_1)_x \cap (C_2)_x = \emptyset$ , а значит  $\nu((C_1 \cup C_2)_x) = \nu((C_1 \sqcup C_2)_x) = \nu((C_1)_x) + \nu((C_2)_x)$ , а следовательно  $C_1 \sqcup C_2 \in \mathcal{M}$ .

Поскольку  $\mathcal{M} \supset \mathcal{P}$ , и замкнуто относительно дополнения и дизъюнктного объединения, то оно содержит произвольные конечные объединения элементов полукольца (которые реализуются как дизъюнктные по соответствующей теореме). В тоже время,  $X \times Y \in \mathcal{P}$ , а значит  $\mathcal{M}$  содержит минимальную алгебру, порожденную этим полукольцом  $\mathcal{A}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{M}$ .

4)  $\mathcal{M}$  — это монотонный класс. Пусть  $\{C_i\}$  — возрастающая последовательность множеств в  $\mathcal{M}$ .

Поскольку  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n)_x = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)_x \in \mathfrak{N}$  и по непрерывности меры снизу

$$x \mapsto \nu \left( \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)_x \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu((C_n)_x).$$

А значит  $f : x \mapsto \nu(C_x)$  — измерима как поточечный предел последовательности измеримых, следовательно  $C \in \mathcal{M}$ , т.е.  $\mathcal{M}$  — монотонный класс. Тогда по теореме о монотонном классе  $\mathcal{M} \supset \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ , и условия 1) и 2) теоремы выполнены для всех  $C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ .

Теперь проверим выполнение условия 3):

Пусть  $C \in \mathcal{P}$ . Тогда 3) — верно. Если рассматривать  $\Phi : C \mapsto \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$  как функцию множества, то она является счтно-аддитивной мерой (интеграл неотрицательной измеримой функции — счетно-аддитивная функция множества). Но тогда, поскольку эта функция на  $\mathcal{P}$  совпадает

с  $\mu \otimes \nu$ , то в силу единственности продолжения меры на минимальную  $\sigma$ -алгебру,  $\Phi \equiv \mu \otimes \nu$  на  $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$ . На данном этапе принцип Кавальieri доказан для  $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$

Шаг 2. Пусть теперь  $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$  является измеримым множеством меры нуль. Тогда пользуясь леммой существует его «более хороший» envelope:  $\exists \tilde{C} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$  т.ч.  $C \subset \tilde{C}$  и  $\mu \otimes \nu(\tilde{C}) = 0$ . Поскольку для  $\tilde{C}$  утверждения теоремы доказаны на 1 шаге, то  $\forall x \in X \hookrightarrow (\tilde{C})_x \in \mathfrak{N}$  и

$$0 = \mu \otimes \nu(\tilde{C}) = \int_X \nu((\tilde{C})_x) d\mu(x) \Rightarrow \nu((\tilde{C})_x) = 0 \text{ } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

В силу включения  $C_x \subset (\tilde{C})_x$  и полноты меры  $\nu$ , там где мы получаем  $\nu((\tilde{C})_x) = 0$  там и  $\nu(C_x) = 0$ . Тогда  $C_x \in \mathfrak{N}$ ,  $\mu\text{-п.в. } x \in X$ . Утверждения 2) и 3) очевидны (функция, п.в. равная нулю, очевидно, измерима в широком смысле, а ноль действительно равен интегралу от равной п.в. нулю функции).

Шаг 3. Если теперь произвольное множество  $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ , то  $C = \tilde{C} \setminus e$ , где  $\mu \otimes \nu(e) = 0$ , а  $\tilde{C} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ .

Используем предыдущий шаг и получаем  $\mathfrak{N} \ni C_x = (\tilde{C})_x \setminus e_x$  — при  $\mu\text{-п.в. } x \in X$ . А функция  $x \mapsto \nu(C_x) = \nu((\tilde{C})_x) - \nu(e_x)$ , определённая почти везде, совпадает со значениями  $\nu((\tilde{C})_x)$  при  $\mu\text{-п.в. } x \in X$ , что влечёт её измеримость в широком смысле и равенство 3).

Шаг 4. Теперь перейдём к  $\sigma$ -конечным пространствам  $X$  и  $Y$ :  $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} X_i$  и  $Y = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Y_j$ .

Пусть  $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ . Оно разбивается на  $C_{n,k} = C \cap (X_n \times Y_k)$ . Для каждого из множеств  $C_{n,k}$  теорема верна. Тогда очевидна справедливость (1) на всём пространстве. Но, тогда

$$\mu \otimes \nu(C_{n,k}) = \int_{X_k} \nu(Y_n \cap C) d\mu(x).$$

Т.к.  $C_x = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (Y_k \cap C_x)$ , то  $\nu(C_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(Y_k \cap C_x)$  — измеримая в широком смысле функция. И, наконец, используя теорему Леви, получим

$$\int_X \nu(C_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} \nu(C_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_n} \nu(Y_k \cap C_x) d\mu(x) = \sum_{n,k} \mu \otimes \nu(C_{n,k}) = \mu \otimes \nu(C).$$

□

**Примечание.** Аналогичные рассуждения верны и для сечений второго рода.

### 6.3 Перемена порядка интегрирования. Сведение кратных интегралов к повторным (Теоремы Тонелли и Фубини)

Далее мы считаем, что зафиксированы два пространства с  $\sigma$ -конечными полными мерами  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  и  $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$  и их тензорное произведение  $(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mu \otimes \nu)$ .

**Следствие** (Геометрический смысл интеграла Лебега б/д). Пусть  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  — измеримая функция. Тогда определим  $\Gamma_f = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid t = f(x)\}$  и для неотрицательных  $f$  определим подграфик:

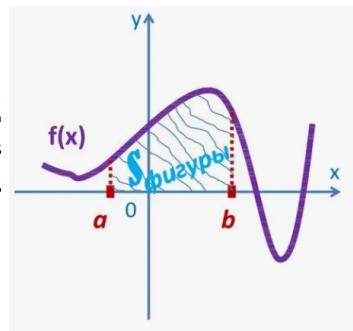
$$\Pi_f = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Из принципа Кавальieri следует следующее:

$$\triangleright \mu \otimes \mathcal{L}^1(\Gamma_f) = 0.$$

$$\triangleright \text{Для неотрицательной функции измеримость в широком смысле эквивалентна измеримости её подграфика. Более того, } \mu \otimes \mathcal{L}^1(\Pi_f) = \int_X f d\mu.$$

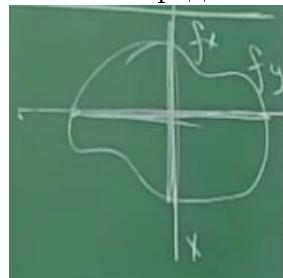
Интеграл Лебега это буквально площадь под графиком неотрицательной измеримой в широком смысле функции(те где-то может быть неопределенна)



**Определение 6.4.** Пусть  $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Зафиксируем одну из переменных и оставим вторую переменную. Это буквально значение функции на сечении. Определим следующие функции:

$$\forall x \in X : f_x(\cdot) : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \mapsto f(x, y);$$

$$\forall y \in Y : f^y(\cdot) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto f(x, y).$$



**Теорема 6.3** (Тонелли). Пусть  $f$  — неотрицательная  $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ -измеримая функция на  $X \times Y$ . Тогда верны следующие утверждения:

(!) Важно, что функция неотрицательная.

- 1a) Для  $\mu$ -п.в.  $x \in X \hookrightarrow f_x$  — измерима на  $Y$ ;
- 1б) Для  $\nu$ -п.в.  $y \in Y \hookrightarrow f^y$  — измерима на  $X$ .
- 2a)  $\varphi : x \mapsto \int_Y f_x d\nu$  — измеримая в широком смысле функция на  $X$ ;
- 2б)  $\psi : y \mapsto \int_X f^y d\mu$  — измеримая в широком смысле функция на  $Y$ .

3) Справедливо равенство:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left( \int_Y f_x(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f^y(x) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

*Доказательство.* Идея доказательства. Любая измеримая функция является пределом простых. Докажем для характеристической функции измеримого множества с использованием принципа Кавальieri. Произвольная простая функция является линейной комбинацией характеристических функций. Далее с помощью теоремы Леви перейдем к пределу.

Шаг 1. Пусть  $f = \chi_C$ , где  $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ . Значит, фиксируя  $\forall x \in X$ , получим  $f_x = \chi_{C_x}$ , поскольку

$$f_x(y) = f(x, y) = \chi_C(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in C \\ 0, & (x, y) \notin C \end{cases} = \begin{cases} 1, & y \in C_x \\ 0, & y \notin C_x \end{cases} = \chi_{C_x}(y).$$

Но  $x$  выбран произвольно, тогда из п.1 принципа Кавальieri следует что при  $\mu$ -п.в.  $x \in X \hookrightarrow f_x$  — измерима. Так как наша функция это характеристическая функция множества, то её интеграл — мера множества. Тогда из п.2 принципа Кавальieri следует измеримость в широком смысле функции  $\varphi$ , а из п.3

$$\mu \otimes \nu(C) = \int_{X \times Y} X_C(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \nu(C_x) d\mu(x) = \int_X \left( \int_Y f_x d\nu \right) d\mu.$$

что и требовалось доказать.

Шаг 2. Если  $f$  — произвольная простая неотрицательная функция, то по определению  $\exists \{a_1, \dots, a_n\} \subset [0, +\infty)$  и  $E_1, \dots, E_n \subset X$ . ( $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$ ) такие, что  $f = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$  выполнение всех пунктов теоремы следует из предыдущего шага и линейности интеграла Лебега для неотрицательных функций.

Шаг 3. В общем случае, для неотрицательной измеримой функции  $f$  существует неубывающая последовательность простых функций  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ , т.ч.  $f_n \rightarrow f, n \rightarrow +\infty$ .

Для любого  $n \in \mathbb{N}$ , для  $\mu$ -п.в.  $x \in X$  функция  $(f_n)_x = X \times Y$ -измерима. Для каждого  $n$  множество где,  $(f_n)_x$  не определено свое, но их счётное объединение является множеством нулевой меры. Тогда и  $\mu$ -п.в.  $x \in X \forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow (f_n)_x$  — измерима. Тогда  $(f)_x$  измерима как поточечный предел измеримых и монотонно растущих. Тогда по теореме Леви мы получаем:

$$\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y (f_n)_x(y) d\nu(y).$$

Тогда, поскольку  $\forall n \in \mathbb{N} \varphi_n : x \mapsto \int_Y (f_n)_x d\nu$  измерима в широком смысле, то и её предел  $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$  тоже измерим в широком смысле как предел при  $\mu$ -п. в.  $\in X$ . Из монотонности  $\{f_n\}$  и монотонности интеграла по функциям мы получаем монотонность последовательности  $\{\varphi_n\}$ . Таким образом, можно ещё раз воспользоваться теоремой Леви и получить следующее:

$$\int_X \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \left( \int_Y (f_n)_x d\nu \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X \times Y} f_n d\mu \otimes \nu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu).$$

Что и требовалось доказать. Для  $f^y$  доказательство аналогично. □

**Примечание.** Как следует рассматривать теорему Тонелли? Часто довольно сложно посчитать двойной интеграл. Мы переставили пределы как нам нужно, получили конечное. Тогда теорема Тонелли говорит что и при других перестановках будет конечное значение и это все будет равно интегралу. Т.е. обе части либо меньше бесконечности, либо равны бесконечности одновременно

**Теорема 6.4 (Фубини).** Пусть  $f$  — интегрируемая на  $X \times Y$  по  $\mu \otimes \nu$  функция  $f \in \widetilde{L}_1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ . То есть  $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) < +\infty$ . Тогда справедливо следующее:

1a) Для  $\mu$ -п.в.  $x \in X \leftrightarrow f_x$  — интегрируема на  $Y$ ;

1б) Для  $\nu$ -п.в.  $y \in Y \leftrightarrow f^y$  — интегрируема на  $X$ .

2a)  $\varphi : x \mapsto \int_Y f_x d\nu$  — интегрируема по  $\mu$ ;

2б)  $\psi : y \mapsto \int_X f^y d\mu$  — интегрируема по  $\nu$ .

3) Верно следующее равенство:

$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu.$$

*Доказательство.* Пусть  $f = f_+ - f_-$ . Воспользуемся теоремой Тонелли для  $f_+$  и  $f_-$ :

$$\int_{X \times Y} f_\pm d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y (f_\pm)_x d\nu \right) d\mu < +\infty.$$

По ней же  $(f_\pm)_x$  — измеримы, а  $(\varphi_\pm)_x$  — измеримы в широком смысле, где  $\varphi_\pm = \int_Y f_\pm(x, y) d\nu(y)$ .

Т.к.  $\int_X \varphi_\pm d\mu < +\infty$ , то  $\varphi_\pm$  — интегрируемы, а значит п.в. конечны, а значит  $(f_\pm)_x$  — интегрируемы при п.в.  $x \in X$ . Третий пункт теоремы следует из линейности интеграла Лебега.  $\square$

**Примечание.** Разница между теоремами:

- ▷ Теорема Тонелли утверждает, что для неотрицательных функций можно менять порядок интегрирования и гарантирует равенство интегралов. Вне зависимости от конечности интеграла
- ▷ Теорема Фубини расширяет это утверждение на случай функций, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, при условии конечности интеграла.

**Примечание.** Может быть так, что существуют повторные интегралы (более того — они могут быть равны), но при этом  $f$  — не интегрируема по  $\mu \otimes \nu$ .

**Пример.** Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$f$  не интегрируема на  $[-1, 1]^2$  по  $\mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^1$ , но существуют повторные интегралы.

**Пример.** Пусть

$$f = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Эта функция не интегрируема по  $\mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^1$ , но, при этом, существуют повторные интегралы, равные 0.

## 6.4 Мера Лебега как произведение мер

**Теорема 6.5.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m = \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{m+n}$  и  $\mathfrak{M}^n \otimes \mathfrak{M}^m = \mathfrak{M}^m \otimes \mathfrak{M}^n = \mathfrak{M}^{m+n}$ .

*Доказательство.* По определению,  $\mathcal{L}^{m+n}$  — стандартное продолжение по Каратеодори меры  $\lambda_{m+n}$ , определённой на  $\mathcal{P}^{m+n}$  — полукольце стандартных ячеек в  $\mathbb{R}^{m+n}$ .

По определению произведения мер,  $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m$  — стандартное продолжение меры

$$m(E \times G) = \mathcal{L}^n(E) \cdot \mathcal{L}^m(G)$$

на полукольце  $\mathcal{P}$  множеств вида  $E \times G, E \in \mathfrak{M}^n, G \in \mathfrak{M}^m$ , где  $\mathcal{L}^n(E) < +\infty, \mathcal{L}^m(G) < +\infty$ . Тут нужно почувствовать разницу, ведь в первом случае берутся  $n+m$  мерные ячейки, а во втором различные декартовы произведения конечных множеств конечной меры, которые тоже образуют полукольцо. Понятно что это разные полукольца, но не сильно :)

Пусть  $m^*$  — внешняя мера, порождённая  $m$ ,  $\lambda_{m+n}^*$  — внешняя мера, порождённая  $\lambda_{m+n}$ .

По ранее доказанной теореме,  $m^* \leq \lambda_{m+n}^*$  (т.к.  $\mathcal{P}^{m+n} \subset \mathcal{P}$ ).

Пусть  $E$  — множество конечной меры  $m^*$ . Тогда существует  $\{P_j\} \subset \mathcal{P}$  т.ч.

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) \leq m^*(E) + \varepsilon$$

Тогда  $\forall P_j = E_j \times G_j$  каждый из них измерим в своей сигма алгебре:

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E_j) \mathcal{L}^m(G_j).$$

В силу регулярности меры Лебега  $\mathcal{L}^n$  и  $\mathcal{L}^m$ ,  $\exists U_i, W_i$  — открытое :  $U_i \supset E_i$  и  $W_i \supset G_i$  т.ч.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(U_i) \mathcal{L}^m(W_i) < m^*(E) + \varepsilon.$$

**Факт.** Любое открытое в  $\mathbb{R}^n$  реализуется в виде не более чем счетного дизъюнктивного обединения ячеек с рациональными центрами и ребрами.

Пусть  $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$  — ячейки в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$  — ячейки в  $\mathbb{R}^m$ . По определению меры ячейки  $\mathcal{L}^n(P_i) \mathcal{L}^m(Q_i) = \mathcal{L}^{n+m}(P_i \times Q_i)$ . Тогда  $\mathcal{L}^{n+m}(U_i \times W_i) = \mathcal{L}^n(U_i) \mathcal{L}^m(W_i)$ , т.к.  $U_j \times W_j$  — открытое множество.  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_i \times Q_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \times W_j$   
Таким образом мы получаем

$$\lambda_{n+m}^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n+m}^*(U_j \times W_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n+m}(U_j \times W_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(U_j) \mathcal{L}^m(W_j) < m^*(E) + \varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем необходимое неравенство для произвольного множества конечной внешней меры:

$$\lambda^*(E) < m^*(E)$$

Тогда  $\lambda^* = m^*$  и теорема доказана. □

## 7 Замена переменной в интеграле Лебега

### 7.1 Изменение меры Лебега при отображениях

**Напоминание.** Отображение  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где  $E \subset \mathbb{R}^n$  называется липшицевым, если  $\exists L > 0$ , т.ч.  $\forall x, y \hookrightarrow \|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|$ . Пишем, что  $F \in \mathcal{LIP}(E, \mathbb{R}^m)$ . Наименьшая такая  $L$  называется константой Липшица и обозначается как  $L_F$ .

**Факт.** Пусть  $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ ,  $\mathcal{O}$  — открытое в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $F$  локально липшицево, т.е. для любого выпуклого компакта  $K$  в  $\mathcal{O}$   $\exists L(K) > 0$  т.ч.  $F \in \mathcal{LIP}(K, \mathbb{R}^m)$ ,  $L_F = L(K)$ .

**Теорема 7.1.** Пусть  $\mathcal{O}$  это открытое в  $\mathbb{R}^n$  множество. Пусть  $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$ . Пусть  $E \subset \mathcal{O}$  —  $\mathcal{L}^n$ -измеримо. Тогда  $F(E)$  — измеримо по Лебегу.

*Доказательство.* В силу регулярности меры Лебега

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_n \cup e,$$

где  $K_n$  — возрастающая последовательность компактов, а  $e$  — множество меры нуль. Из непрерывности  $F$  следует, что  $F(K_n)$  — компакт. Тогда

$$F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_n \cup e\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(K_n) \cup F(e).$$

Поскольку счётное объединение компактов — борелевское множество, для измеримости образа достаточно показать, что  $F(e)$  — измеримо. Покажем, что  $\mathcal{L}^n(F(e)) = 0$ . Предположим, что существует ячейка  $P \in \mathcal{P}^n: e \subset \overline{P} \subset \mathcal{O}$ . Тогда из липшицкости  $F$  на  $\overline{P}$  существует константа Липшица  $L$ . В то же время, поскольку  $\mathcal{L}^n(e) = 0$ , то  $\forall \varepsilon > 0$  существует последовательность ячеек  $\{Q_j\}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_j) < \varepsilon.$$

**Факт.** Любая ячейка представляется в виде дизъюнктного объединения кубических ячеек с рациональными ребрами и рациональным центром.

Тогда  $\exists \{\Pi_l\}$  т.ч.

$$e \subset \bigsqcup_{l=1}^{\infty} \Pi_l, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Pi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} (h_l)^n < \varepsilon.$$

Т.к.  $diam(F(\Pi_l)) \leq Ldiam(\Pi_l) \leq Lh_l\sqrt{n}$ , то  $F(\Pi_l) \subset B_{Lh_l\sqrt{n}} \subset \Pi_{2Lh_l\sqrt{n}} = T_l$ . Тогда

$$\lambda^*(F(e)) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(T_l) \leq \sum_{l=1}^{\infty} (2Lh_l\sqrt{n})^n \leq C \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Pi_l) \leq C\varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  мы получаем, что  $\lambda^*(F(e)) = 0$ , тк мера Лебега полна, то  $F(e)$  измеримо т.e  $\mathcal{L}^n(F(e)) = 0$ . Если же  $e$  не содержитя внутри одной ячейки, то мы можем разбить  $\mathcal{O}$  на счётное объединение ячеек, и повторить данное рассуждение для пересечения  $e$  с каждой из ячеек. Поскольку счётное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, мы получаем необходимое.  $\square$

## 7.2 Трансляционная инвариантность меры Лебега

**Теорема 7.2.** Пусть  $E$  — измеримое по Лебегу в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  верно следующее:  $v + E$  — измеримо и  $\mathcal{L}^n(v + E) = \mathcal{L}^n(E)$ .

*Доказательство.* Пусть  $v \in \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим отображение  $F: x \mapsto x + v$ . Так как оно гладко, то  $v + E = F(E)$  — измеримо. Для доказательства неизменности меры рассмотрим новую меру  $\mu(E) = \mathcal{L}^n(E + v)$ .  $\forall E \in \mathfrak{M}_n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$$\mu(E) = \mathcal{L}^n(v + \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(v + E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Эти меры очевидно совпадают на полукольце ячеек. А значит меры это продолжение, по единственности продолжения совпадают на пересечении  $\sigma$ -алгебр, то есть просто совпадают.  $\square$

**Теорема 7.3.** Любая трансляционно инвариантная мера в  $\mathbb{R}^n$  совпадает с мерой Лебега с точностью до константы. Пусть  $\mu$  — трансляционно инвариантная мера, определённая на  $\mathfrak{M}^n$  и конечная на компактах. Тогда

$$\forall E \in \mathfrak{M}^n \rightarrow \mu(E) = \mu([0, 1]^n) \cdot \mathcal{L}^n(E) = k \cdot \mathcal{L}^n(E)$$

*Доказательство.* Если мера  $\mu([0, 1]^n) = 0$ , то в силу трансляционной инвариантности мы получаем, что  $\mu \equiv 0$ .

Если мера  $\mu([0, 1]^n) = 1$ , то для того, чтобы доказать  $\mu \equiv \mathcal{L}^n$  на  $\mathfrak{M}^n$  достаточно это проверить на кубических ячейках рационального радиуса. Любую кубическую ячейку можно получить как сдвиги и в силу трансляционной инвариантности достаточно доказать

$$\mu([0, 1/k]^n) = 1/k^n \mu([0, 1]^n) = 1/k^n$$

что в точности совпадает с мерой кубической ячейки.

Если мера  $\mu([0, 1]^n) = k \neq 1$ , то пусть  $\nu = \mu/k$ . Тогда  $\nu([0, 1]^n) = 1$ , а значит  $\nu \equiv \mathcal{L}^n$  и  $\mu = k\mathcal{L}^n$ .  $\square$

### 7.3 Изменение меры Лебега при линейных отображениях

**Факт** (Из линала, б/д). *Пусть дано обратимое л.о.  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Тогда существуют ОНБ  $\{g_j\}$  и  $\{h_j\}$  и набор положительных чисел  $\{c_j\}$  т.ч.*

$$V(x) = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, g_j \rangle h_j$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $V^*$  — сопряжённое к  $V$  преобразование и  $W = V^*V$  — с/с преобразование. Для  $W$  существует ОНБ из с.в.  $\{g_j\}$ , соответствующих собственным числам  $\{s_j\}$ . каждое такое число положительно, поскольку  $\langle Wx, x \rangle = \|V(x)\|^2$  положительно определена. Пусть тогда  $c_j = \sqrt{s_j}$ . Тогда

$$x = \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i$$

А значит

$$V(x) = \sum_{j=1}^m \langle x, g_j \rangle Vg_j = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, g_j \rangle h_j, h_j = \frac{1}{c_j} Vg_j$$

Очевидно, что  $\{h_j\}$  — ОНБ.

**Примечание.** При этом, заметим, что  $|\det V| = \prod_{j=1}^m c_j$ , т.к.  $(\det V)^2 = \det W = \prod_{j=1}^m s_j$ .  $\square$

**Теорема 7.4.** *Пусть дано обратимое л.о.  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  и измеримое  $E$ . Тогда  $V(E) \in \mathfrak{M}^m$  и*

$$\mathcal{L}^m(V(E)) = |\det V| \mathcal{L}^m(E)$$

*Доказательство.* В силу гладкости л.о.  $\mathcal{L}^m(V(E))$  — измеримо. Введём меру  $\mu(E) = \mathcal{L}^m(V(E))$  для каждого измеримого по Лебегу. Поскольку  $V$  — обратимо, то оно биективно, а следовательно  $E_i \cap E_j = \emptyset \Rightarrow V(E_i) \cap V(E_j) = \emptyset$ . Из этого следует что  $\mu$  действительно мера на  $\mathfrak{M}^m$ . Заметим трансляционную инвариантность  $\mu$ :

$$\mu(c + E) = \mathcal{L}^m(V(c + E)) = \mathcal{L}^m(V(c) + V(E)) = \mathcal{L}^m(V(E)) = \mu(E)$$

Это означает совпадение  $\mu$  с мерой Лебега с точностью до постоянного множителя  $k : \mu = k\mathcal{L}^m$ . Пусть  $E = [0, 1]^m$  — единичный куб в базисе  $\{g_j\}$  для отображения  $V$ . Тогда с одной стороны,  $\mu([0, 1]^m) = k\mathcal{L}^m([0, 1]^m) = k$ , а с другой стороны отображение  $V$  переводит куб в прямоугольный параллелепипед со сторонами  $c_j$ ; тогда мы получаем, что  $k = \prod_{j=1}^m c_j = |\det V|$ .  $\square$

## 7.4 Абстрактная замена в интеграле Лебега

**Определение 7.1.** Пусть есть пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  и измеримое пространство  $(Y, \mathfrak{N})$ . Будем называть отображение  $\Phi : X \rightarrow Y$  измеримым, если прообраз всякого измеримого в  $Y$  множества измерим в  $X$ , т.е.  $\forall C \in \mathfrak{N} \hookrightarrow \Phi^{-1}(C) \in \mathfrak{M}$ .

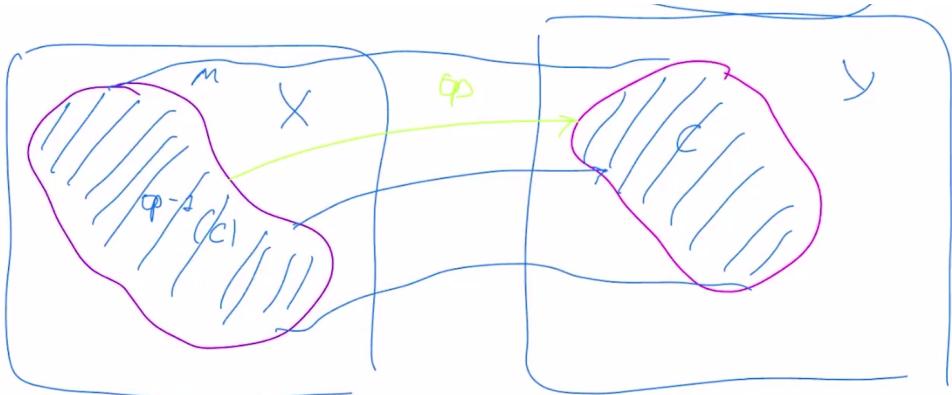
Далее считаем зафиксированными некоторое пространство с мерой  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ , некоторое измеримое  $(Y, \mathfrak{N})$  и измеримое отображение  $\Phi : X \rightarrow Y$ .

**Определение 7.2.** Определим push-forward меры  $\mu$ :

$$\forall C \in \mathfrak{N} : \Phi_{\#}\mu(C) = \mu(\Phi^{-1}(C))$$

Идея довольно геометрична.

Мы берем множество из образа и смотрим сколько "Массы" в него перетекло из прообраза



push-forward меры действительно является мерой:

$$\Phi_{\#}\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Phi^{-1}(C_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Phi^{-1}(C_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{\#}\mu(C_i)$$

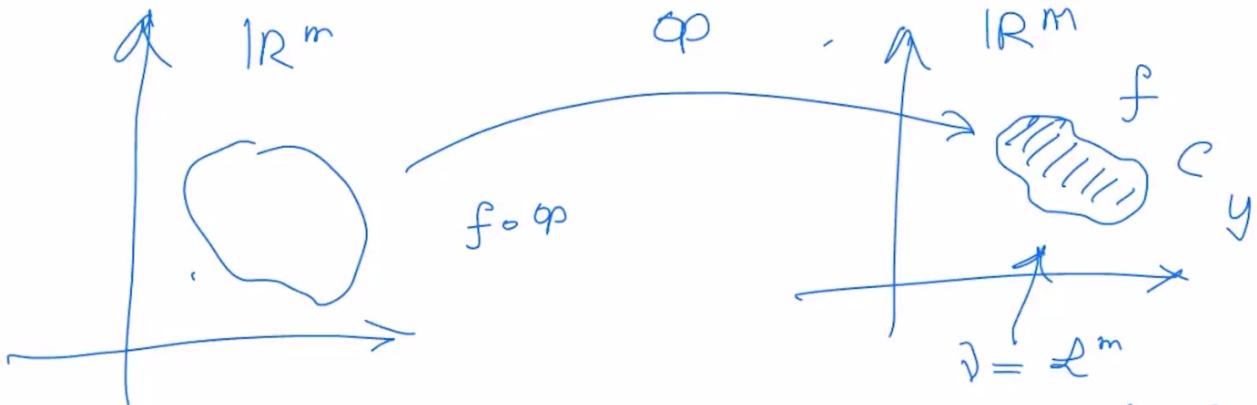
**Определение 7.3.** Пусть есть  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  и дано измеримое  $\omega : X \rightarrow [0, +\infty]$ . Тогда мерой  $\mu$  с весом  $\omega$  (взвешенной мерой  $\mu$ ) будем называть меру  $\omega\mu$  т.ч.

$$\omega\mu(E) = \int_E \omega(x)d\mu(x)$$

Взвешенную меру можно аналогичным способом толкнуть на  $Y$ :

$$\Phi_{\omega\mu}(C) = \omega\mu(\Phi^{-1}(C))$$

**Геометрическая интерпретация.** Следующая теорема довольно абстрактна. Рассмотрим ее геометрический смысл в  $\mathbb{R}^m$ :



Мы хотим проинтегрировать множество  $C \in Y$  по нашей классической мере в  $\mathcal{L}^m$  (Важно

что мы сейчас в образе). Пускай мы сделали какую-то замену координат. Наше множество теперь слева. Очевидно оно как-то поменялось (например на картинке стало больше). Тогда теперь чтобы интегралы совпали нам нужно чтобы его как-то толкнуть отображением  $\Phi$ , но уже с весом во сколько раз изменилось множество. Этот вес равен якобиану отображения (Если отображение линейно, то доказано сверху). В общем случае идея веса в том, что локально функция представима как линейная, и поэтому вес это функция точки.

**Теорема 7.5** (Абстрактная замена переменной в интеграле Лебега). *Пусть  $\nu := \Phi_{\#}(\omega\mu)$ , т.e  $\nu$  – push-forward  $\omega$ -взвешенной меры  $\mu$  на  $(Y, \mathfrak{M})$ . Тогда для всякой неотрицательной измеримой на  $Y$  функции  $f$  (или произвольной интегрируемой на  $Y$ ) верно следующее:*

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f \circ \Phi(x) \cdot \omega(x) d\mu(x)$$

*Доказательство.* Идея простая. Докажем для простых, а дальше используем теорему Леви.

Шаг 1. Пусть  $f = \chi_C, C \in \mathfrak{M}$ . Тогда можно заметить, что  $f \circ \Phi = \chi_{C \circ \Phi} = \chi_{\Phi^{-1}(C)}$ . И действительно:

$$f \circ \Phi(x) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in C \\ 0, & \Phi(x) \notin C \end{cases} \implies f \circ \Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Phi^{-1}(C) \\ 0, & x \notin \Phi^{-1}(C) \end{cases} \implies f \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(C)}$$

Тогда равенство принимает вид:

$$\int_Y \chi_C(y) d\nu(y) = \nu(C) = \Phi_{\#}\omega\mu(C) = \omega\mu(\Phi^{-1}(C)) = \int_{\Phi^{-1}(C)} \omega(x) d\mu = \int_X \chi_{\Phi^{-1}(C)}(x) \cdot \omega(x) d\mu$$

Шаг 2. В силу линейности интеграла и аддитивности меры данное утверждение очевидным образом продолжается на произвольные неотрицательные простые функции.

Шаг 3. В общем случае, для произвольной неотрицательной измеримой  $f$  мы можем рассмотреть неубывающую последовательность неотрицательных простых  $f_n \rightarrow f, n \rightarrow +\infty$ . Ввиду справедливости

$$\int_Y f_n d\nu = \int_X f_n \circ \Phi \cdot \omega d\mu$$

для всякого  $n$  то переходя к пределу и используя теорему Леви мы получаем

$$\int_Y f d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y f_n d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \circ \Phi \cdot \omega d\mu = \int_X f \circ \Phi \cdot \omega d\mu$$

Для случая интегрируемой функции  $f$  мы можем заметить, что  $f \circ \Phi \cdot \omega$  тоже интегрируема, и, далее пишем равенства для  $f_+$  и  $f_-$ , вычитаем, и получаем требуемое.  $\square$

**Определение 7.4.** Пусть  $(X, \mathfrak{M})$  – измеримое пространство и  $\mu, \nu$  – 2 меры на  $\mathfrak{M}$ . Будем говорить, что  $\nu$  имеет плотность  $\omega$  относительно  $\mu$ , если есть неотрицательная измеримая  $\omega : X \rightarrow [0, +\infty]$  т.ч.  $\nu = \omega\mu$ . Иногда обозначается  $\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \omega(x)$

**Теорема 7.6** (Критерий плотности, б/д). *Пусть  $\mu, \nu$  – 2 меры на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$  измеримого пространства  $(X, \mathfrak{M})$ , а  $\mu$  – измеримая неотрицательная функция на  $X$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- ▷  $\nu$  имеет плотность  $\omega$  относительно  $\mu$
- ▷  $\forall A \in \mathfrak{M} \rightarrow \mu(A) \inf_{x \in A} \omega \leqslant \nu(A) \leqslant \mu(A) \sup_{x \in A} \omega$

*Доказательство.* (Из Макарова-Подкорытова) Необходимость очевидна. Покажем достаточность. Очевидно, что мы можем считать, что  $\omega > 0$  на рассматриваемом множестве  $B$ , поскольку

$$\nu(B(\omega = 0)) = \int_{B(\omega=0)} \omega d\mu$$

Пусть есть некоторое  $q \in (0, 1)$ . Рассмотрим

$$B_j = \{x \in B \mid q^j \leq \omega(x) < q^{j-1}\}, j \in \mathbb{Z}$$

Такие множества образуют разбиение множества  $B$ , и

$$\mu(B_j)q^j \leq \nu(B_j) \leq \mu(B_j)q^{j-1}$$

Из монотонности интеграла следует справедливость подобной оценки для  $\omega$ :

$$\mu(B_j)q^j \leq \int_{B_j} \omega d\mu \leq \mu(B_j)q^{j-1}$$

Суммируя по  $\mathbb{Z}$  мы получаем следующее:

$$q \int_B \omega d\mu \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \mu(B_j) \leq \nu(B) \leq \frac{1}{q} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \mu(B_j) \leq \frac{1}{q} \int_B \omega d\mu$$

Теперь, переходя к пределу при  $q \rightarrow 1$  получаем равенство. □

## 7.5 Конкретная замена переменной в интеграле Лебега

**Напоминание.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$  — открытые множества. Будем говорить, что  $U$  и  $V$  диффеоморфны, если существует диффеоморфизм  $F: U \mapsto V$ , то есть  $F$  — взаимооднозначное отображение  $U$  на  $V$ , такое что  $F \in C^1(U, V)$  и  $F^{-1} \in C^1(V, U)$ . Если требовать именно непрерывную дифференцируемость, то такой диффеоморфизм называется гладким

Будем считать фиксированными открытые множества  $G, G' \subset \mathbb{R}^m$  и некоторое отображение  $\Phi \in C^1(G, G')$ , являющееся диффеоморфизмом  $G$  на  $G'$ .

**Теорема 7.7.** Для всякого измеримого  $E \subset G$  справедливо следующее равенство:

$$\Phi_\# \mathcal{L}^m(E) = \mathcal{L}^m(\Phi(E)) = \int_E |\det \mathcal{D}\Phi(x)| dx$$

*Доказательство.* Напомним, что  $J_\Phi = \det \mathcal{D}\Phi$  — якобиан отображения  $\Phi$ . С учётом критерия достаточно доказать, что для всякого измеримого  $A$  выполнено следующее неравенство:

$$\mathcal{L}^m(A) \inf_A |J_\Phi| \leq \Phi_\# \mathcal{L}^m(A) \leq \mathcal{L}^m(A) \sup_A |J_\Phi|$$

Заметим, что достаточно доказать только правую часть неравенства, поскольку  $\Phi$  — диффеоморфизм, а значит, применяя полученное неравенство к отображению  $\Phi^{-1}$  и множеству  $\Phi(A)$  мы получим левую часть неравенства.  $J_\Phi(x) \cdot J_{\Phi^{-1}}(\Phi(x)) = 1$

Докажем неравенство для кубической ячейки  $Q$  т.ч.  $\overline{Q} \subset G$ :

$$\Phi_\# \mathcal{L}^m(Q) \leq \sup_{x \in Q} |J_\Phi| \cdot \mathcal{L}^m(Q)$$

Предположим, что существует такой куб, для которого неравенство неверно и

$$\sup_{x \in Q} |J_\Phi| \cdot \mathcal{L}^m(Q) < \Phi_\# \mathcal{L}^m(Q)$$

В силу строгости неравенства мы можем чуть-чуть увеличить левую часть: т.ч.

$$\exists C \text{ такой что } C > \sup_{x \in Q} |J_\Phi| \text{ и } C \mathcal{L}^m(Q) < \Phi_\# \mathcal{L}^m(Q)$$

Разобьём каждую сторону  $Q$  пополам. Т.e на  $2^m$  равных кубических частей. По принципу Дирихле хотя бы для одной части  $Q_1$  из них подобное неравенство тоже должно выполняться:

$$C \mathcal{L}^m(Q_1) < \Phi_\# \mathcal{L}^m(Q_1)$$

Повторяя это построение для  $Q_1$ , построим такую последовательность вложенных кубических ячеек

$$G \supset \overline{Q} \supset \overline{Q_1} \supset \dots \supset \overline{Q_n} \supset \dots$$

что

$$C \mathcal{L}^m(Q_n) < \Phi_\# \mathcal{L}^m(Q_n)$$

По теореме Кантора  $\exists a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{Q_n}$ . Пусть  $L = D_a \Phi$  — линейное и обратимое отображение. Поскольку по условию  $\Phi$  — диффеоморфизм,  $L$  — обратимо, и так как  $a \in \overline{Q}$ , то  $|\det L| = |J_\Phi(a)| < C$ . Рассмотрим вспомогательное отображение которое линейно приближает окрестность точки  $a$ :

$$\Psi(x) = a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$$

Около точки  $a$  отображение стремится к тождественному:

$$\Psi(x) = x + o(x - a), x \rightarrow a$$

Поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  такой малый шар  $B_{\delta(\varepsilon)}(a)$ , центрированный в  $a$ , что

$$\forall x \in B \hookrightarrow \|\Psi(x) - x\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \|x - a\|$$

По построению  $a \in \overline{Q_n}$  для всякого  $n$  и  $\overline{Q_n} \subset B$  для достаточно больших  $n$ . Тогда поскольку  $\|x - a\| \leq \sqrt{m}h$  (где  $h$  — длина ребра куба  $Q_n, x \in Q_n$ ), то  $\|\Psi(x) - x\| \leq \varepsilon h$  и аналогично верно для всех координат разности  $\Psi(x) - x$  а значит  $\Psi(x)$  принадлежит кубу с длиной ребра  $\leq (1+2\varepsilon)h$ . Тогда:

$$\mathcal{L}^m(\Psi(Q_n)) \leq \mathcal{L}^m((1+2\varepsilon)Q_n) \leq (1+2\varepsilon)^m h^m = (1+2\varepsilon)^m \mathcal{L}^m(Q_n)$$

С другой стороны,

$$\mathcal{L}^m(\Psi(Q_n)) = \mathcal{L}^m(a + L^{-1}(\Phi(Q_n) - \Phi(a))) = \mathcal{L}^m(L^{-1} \circ \Phi(Q_n)) = |\det L^{-1}| \mathcal{L}^m(\Phi(Q_n))$$

Тогда собирая все полученные неравенства, мы получаем:

$$|\det L^{-1}| \mathcal{L}^m(\Phi(Q_n)) \leq (1+2\varepsilon)^m \mathcal{L}^m(Q_n)$$

Т.е.

$$\Phi_\# \mathcal{L}^m(Q_n) \leq (1+2\varepsilon)^m |J_\Phi(a)| \mathcal{L}^m(Q_n)$$

Но  $C \mathcal{L}^m(Q_n) < \Phi_\# \mathcal{L}^m(Q_n)$ , а значит

$$C \leq (1+2\varepsilon)^m |J_\Phi(a)|$$

Тогда возьмём  $\inf$  по всем  $\varepsilon$ , и получим  $C \leq |J_\Phi(a)|$ . Но  $C > \sup_{x \in Q} |J_\Phi|$ , а поскольку  $a \in Q$  то мы получаем противоречие, и неравенство  $\Phi_\# \mathcal{L}^m(Q) \leq \mathcal{L}(Q) \sup_{x \in Q} |J_\Phi|$  выполняется для всех кубических ячеек  $Q$ : их замыкание лежит в  $G$ . Но любое открытое множество представляется как дизъюнктивное объединение счётного числа кубических ячеек, а значит неравенство верно и для них. Теперь, используя регулярность меры Лебега, мы можем обобщить результат на произвольное измеримое множество  $A$ :

$$\Phi_\# \mathcal{L}^m(A) \leq \inf_{A \subset \Omega \subset G} \Phi_\# \mathcal{L}^m(\Omega) \leq \inf_{A \subset \Omega \subset G} \mathcal{L}^m(\Omega) \sup_{\Omega} |J_\Phi| \leq \mathcal{L}^m(A) \cdot \sup_A |J_\Phi|$$

□

**Следствие.** Из непрерывности  $|J_\Phi|$  и предыдущей теоремы следует, что

$$|J_\Phi(a)| = \lim_{A \rightarrow a} \frac{\mathcal{L}^m(\Phi(A))}{\mathcal{L}^m(A)}$$

Где под пределом мы понимаем  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathfrak{M}^m \wedge A \subset B_\delta(a) \wedge \mathcal{L}^m(A) > 0 \hookrightarrow |\frac{\mathcal{L}^m(\Phi(A))}{\mathcal{L}^m(A)} - |J_\Phi(a)|| < \varepsilon$ .

**Теорема 7.8.** Пусть  $\Phi$  — диффеоморфизм  $G$  на  $G'$ . Тогда для любой измеримой неотрицательной функции  $f$  на  $G'$  верно следующее:

$$\int_{G'} f dy = \int_G f \circ \Phi \cdot |J_\Phi| dx$$

*Доказательство.* Результат очевиден в силу предыдущей теоремы и теоремы об абстрактной замене переменных в интеграле Лебега при подстановке

$$\mu = \mathcal{L}^m, \nu = \mathcal{L}^m, \omega = |J_\Phi|, X = G, Y = G'$$

□

## 8 Криволинейные интегралы

### 8.1 Интегралы I рода

Физический смысл — это масса кривой с заданной плотностью.

**Определение 8.1.** Будем говорить, что  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  кусочно непрерывно-дифференцируема (кусочно 1-гладкая), если  $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$  и существует некоторое конечное разбиение

$$T = \{t_i\}_{i=0}^N, a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

для которого верно следующее:

$$\forall i \in \overline{0, N-1} \hookrightarrow f|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^1([t_i, t_{i+1}], \mathbb{R}^n)$$

А в самих точках существуют односторонние производные.

**Определение 8.2.** Пусть  $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$  — кривая в  $\mathbb{R}^n$ , параметризованная кусочно 1-гладкой функцией  $r$ . Пусть  $f \in C(\Gamma, \mathbb{R})$ . Тогда будем называть *криволинейным интегралом I-го рода*  $f$  по  $\Gamma$ :

$$\int_{\Gamma} f(r) ds := \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt$$

**Примечание.** То что стоит слева это обозначение, а то что справа это расшифровка

**Лемма 8.1.** *Криволинейный интеграл I рода не зависит от выбора допустимой параметризации (сохраняющей ориентацию).*

*Доказательство.* Пусть  $r(t) = \rho(\tau(t))$  — кусочно гладкая и  $\Gamma = \{\rho(\tau) \mid \tau \in [\alpha, \beta]\}$ , а  $\tau(t)$  — строго возрастающая гладкая функция, переводящая  $[a, b]$  в  $[\alpha, \beta]$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\tau)) \|\rho'(\tau)\| d\tau = \int_a^b f(\rho(\tau(t))) \|\rho'(\tau(t))\| \tau'(t) dt = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt$$

(Это просто замена переменной в Риммановском интеграле. Поскольку  $\tau(t)$  — возрастающая, то  $\tau' > 0$ , и мы можем занести её под норму)  $\square$

**Лемма 8.2.** *Криволинейный интеграл I рода не изменяется при изменении ориентации.*

*Доказательство.* Пусть  $r(t)$  — допустимая параметризация кривой  $\Gamma, t \in [a, b]$ . Зададим  $\rho(t) = r(-t), t \in [-b, -a]$ . Тогда

$$\int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt = - \int_{-a}^{-b} f(r(-t)) \|r'(-t)\| d(-t) = \int_{-b}^{-a} f(\rho(t)) \|\rho'(t)\| dt$$

$\square$

## 8.2 Интегралы II рода

Физический смысл — это работа силы вдоль траектории.

**Определение 8.3.** Пусть  $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$  — ориентированная кривая, параметризованная кусочно-гладкой  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\bar{F} \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ . Тогда *криволинейным интегралом II-го рода* будем называть

$$\int_{\Gamma} (\bar{F}, \bar{dr}) = \int_a^b \langle \bar{F}(r(t)), \bar{r}'(t) \rangle dt$$

**Лемма 8.3.** *Криволинейный интеграл II не зависит от выбора допустимой параметризации (сохраняющей ориентацию).*

*Доказательство.* Пусть  $\rho(\tau(t)) = r(t)$  — репараметризация  $\Gamma, \tau : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  — гладкая строго возрастающая функция. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} \langle F(\rho(\tau)), \rho'(\tau) \rangle d\tau = \int_a^b \langle F(\rho(\tau(t))), \rho'(\tau(t)) \rangle \tau'(t) dt = \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt$$

$\square$

**Лемма 8.4.** *Криволинейный интеграл II рода изменяет знак на противоположный при изменении ориентации.*

*Доказательство.* Пусть  $\tau : t \mapsto -t$  и  $\rho(\tau(t)) = r(t)$ . Тогда

$$\int_{-b}^{-a} \langle F(\rho(\tau)), \rho'(\tau) \rangle d\tau = \int_a^b \langle F(\rho(\tau(t))), \rho'(\tau(t)) \rangle \tau'(t) dt = - \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt$$

$\square$

**Лемма 8.5** (Приближение кривой ломаными). Пусть  $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$  с гладкой параметризацией  $r$ , не имеющей особых точек (то есть  $r \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  и  $r'(t) \neq 0$  на  $[a, b]$ ). Пусть компакт  $K \subset \mathbb{R}^n$  и  $h_0 > 0$ :  $K \supset \Gamma$  и  $K \supset \Gamma_T$ , где  $\Gamma_T$  — для всякой ломаной, порождённой конечным разбиением  $T$  кривой  $\Gamma$  с мелкостью  $l(T) < h_0$ . Пусть на  $K$  задано непрерывное поле  $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\exists \lim_{l(T) \rightarrow 0} \int_{\Gamma_T} (F, dr) = \int_{\Gamma} (F, dr)$$

*Доказательство.* Поскольку  $r$  — гладкая, то  $\Gamma$  — спрямляема. В тоже время,  $r$  — равномерно непрерывна (как непрерывная на компакте по теореме Кантора). То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t_1, t_2 \in [a, b] : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |r(t_1) - r(t_2)| < \varepsilon$$

Аналогично, из непрерывности  $F$  на компакте следует её равномерная непрерывность, и

$$\forall \eta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall r_1, r_2 \in K : |r_1 - r_2| < \varepsilon \Rightarrow |F(r_1) - F(r_2)| < \eta$$

Фиксируя  $\eta > 0$  выберем  $\varepsilon(\eta)$  и  $\delta(\varepsilon)$ . Тогда для произвольного разбиения  $T$  мелкости  $l(T) < \delta$  мы получаем:

$$\left| \int_{\Gamma} (F, dr) - \int_{\Gamma_T} (F, dr) \right| \leq \sum_{i=0}^{N_T-1} \left| \int_{\Gamma(i)} (F, dr) - \int_{\Gamma_{T_i}} (F, dr) \right| \leq (*)$$

(Здесь  $\Gamma_i$  — часть кривой  $\Gamma$  между  $t_i$  и  $t_{i+1}$ , а  $\Gamma_{T_i}$  — отрезок ломаной между этими же точками. А далее мы прибавили и вычли постоянное значение поля в точке  $\bar{F}(r(t_i))$ )

$$(*) \leq \sum_{i=0}^{N_T-1} \left| \int_{\Delta(i)} \langle F(r(t_i), dr) \rangle \right| + \left| \int_{\Delta(i)} \langle F(r) - F(r(t_i)), dr \rangle \right| = \sum_{i=0}^{N_T-1} \left| \int_{\Delta(i)} \langle F(r) - F(r(t_i)), dr \rangle \right| \leq (*)$$

(Здесь  $\Delta(i)$  — замкнутая кривая, состоящая из  $\Gamma_i$  и развернутой  $\Gamma_{T_i}$ . Левый интеграл от константы по замкнутой петле равен нулю)

$$(*) \leq \sum_{i=0}^{N_T-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |F(r(t)) - F(r(t_i))| \|r'(t)\| dt + \sum_{i=0}^{N_T-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |F(\xi(t)) - F(\xi(t_i))| \|\xi'(t)\| dt \leq (*)$$

(Здесь  $\xi(t)$  — параметризация ломаной. Здесь же использовано условие  $r'(t) \neq 0$ .)

$$(*) \leq \sum_{i=0}^{N_T-1} \eta (L(\Gamma_i) + L(\Gamma_{T_i})) \leq 2\eta L(\Gamma)$$

Поскольку  $\eta$  выбрана произвольно, то лемма доказана.  $\square$

### 8.3 Формула Грина

**Определение 8.4.** Будем говорить, что  $\Gamma$  — простой кусочно-гладкий контур, если  $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$ :

1.  $r(a) = r(b)$ ;
2.  $r((a, b))$  — инъекция;
3.  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ , где  $\Gamma_i \cap \Gamma_j$  только, быть может, в концах, и  $\forall i \in \overline{1, \dots, N} \hookrightarrow \Gamma_i$  — гладкая кривая.

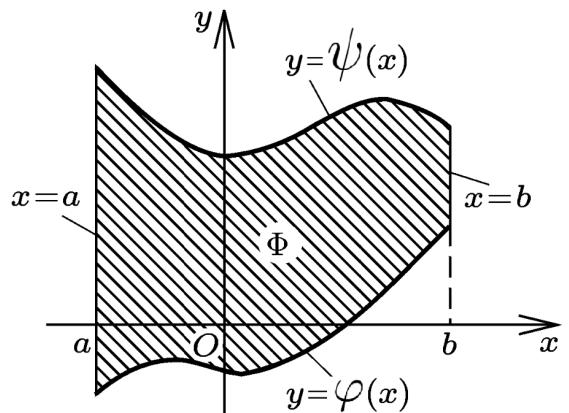
**Факт (б/д).** Пусть  $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$  — гладкая кривая на границе области  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Тогда  $\forall t \in (a, b) \exists n(t)$  ( $\|n\| = 1$ ):  $n(t) \perp r'(t)$  и  $\exists \delta(t) > 0$  т.ч.  $r(t) + n(t) \cdot \tau \in G, \tau \in (0, \delta(t))$ .

**Доказательство.** Очевидно следует из гладкости границы и того, что  $G$  — открыто.  $\square$

**Определение 8.5.** Пусть  $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$  — гладкая кривая:  $\Gamma = \partial G$ , где  $G$  — некоторая область в  $\mathbb{R}^2$ . Будем говорить, что  $\Gamma$  ориентирована положительно относительно  $G$ , если  $\forall t \in [a, b]$  векторы  $r'(t)$  и  $n(t)$  — правая двойка векторов. Неформально: при обходе границы, наша область должна оставаться слева.

**Определение 8.6.** Область  $G \subset \mathbb{R}^2$  называется элементарной относительно  $Oy$ , если  $\exists$  кусочно непрерывно-дифференцируемые  $\varphi$  и  $\psi$  на  $[a, b]$ :  $\varphi \leq \psi$  и  $G = \{(x, y) \mid x \in (a, b), y \in (\varphi(x), \psi(x))\}$ . Аналогично определяется элементарность относительно  $Ox$ .

**Примечание.** Круг не является элементарной областью ни по одной из осей. Тк в концах бесконечная производная. Но его можно разбить элементарные области



Область элементарная отн. Оу

**Определение 8.7.** Область в  $\mathbb{R}^2$  называется элементарной, если она элементарна относительно одной из осей.

**Лемма 8.6** (о разбиении б/д). Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  — область, граница которой состоит из конечного числа дизъюнктивных простых кусочно-гладких контуров  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$ . Тогда она может быть «правильно» разбита на конечное число элементарных областей, т.е.  $\exists \{G_j\}_1^M$ :

1.  $G_i \cap G_j = \emptyset$
2.  $G_i \subset G$
3.  $\bigcup \overline{G_i} = \overline{G}$
4.  $\partial G_i \cap \partial G_j \cap G$  либо пусто, либо состоит из одной точки, либо является промежутком.

**Примечание.** Нижеприведённый текст не является официальным доказательством, сформулирован достаточно неформально и по сути своей является лишь идеей доказательства (быть может не полностью корректной).

**Доказательство.** Заметим, что нам достаточно покрыть границу  $G$  конечным числом прямоугольников (стороны которых параллельны координатным осям) так, что пересечение внутренности каждого из них с  $G$  было элементарным, поскольку после вычитания из  $G$  всех таких прямоугольников у нас останется область, границы которой параллельны координатным осям — такую область можно без каких-либо проблем разбить на объединение прямоугольников требуемым образом.

Ввиду открытости области мы можем выбирать настолько малые прямоугольники, чтобы в принципе не обращать внимание на другие простые кусочно-гладкие контуры при организации разбиения  $\Gamma_i$ .

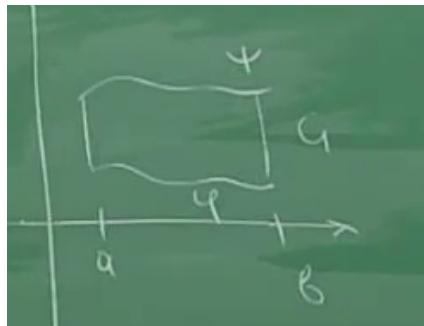
У каждого из простых кусочно-гладких контуров есть конечное число особых точек (в данном

контексте - точек, где  $r'(t)$  не является непрерывной) и конечное число точек перехода через ноль у  $r'(t)$  (то есть таких точек  $t_0$ , что или  $x'(t_0) = 0$ , или  $y'(t_0) = 0$ , причём или при  $t_0 = 0$ , или при  $t_0 + 0$  они не равны нулю). Накроем их достаточно малыми прямоугольниками, так, чтобы в один прямоугольник попала только одна такая точка. Теперь, очевидно, что оставшиеся гладкие отрезки кривых можно хорошо покрыть прямоугольниками – они монотонны относительно одной из осей. Всякую точку перехода через 0, не являющуюся особой тоже можно покрыть без проблем: просто одна из функций  $\varphi/\psi$  не будет монотонной. Для хорошего покрытия особой точки, нам, быть может, потребуется разрезать получившийся прямоугольник на две части.  $\square$

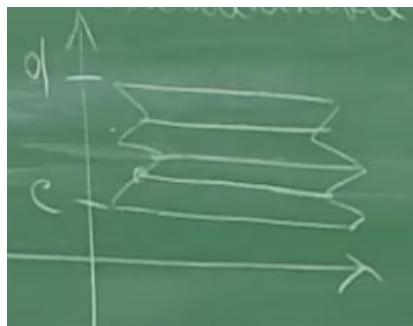
**Теорема 8.1** (Формула Грина). *Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  – область:  $\partial G$  состоит из дизъюнктивного объединения простых кусочно-гладких контуров  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$ . Пусть  $\forall i \in \overline{1, \dots, N}$   $\Gamma_i^+$  положительно ориентирована относительно  $G$ ,  $\partial G^+ := \bigsqcup_{i=1}^N \Gamma_i^+$ . Пусть  $F \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$ . Тогда, если  $F = (P \ Q)^T$ , то*

$$\int_{\partial G^+} (F, dr) = \int_{\partial G^+} P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

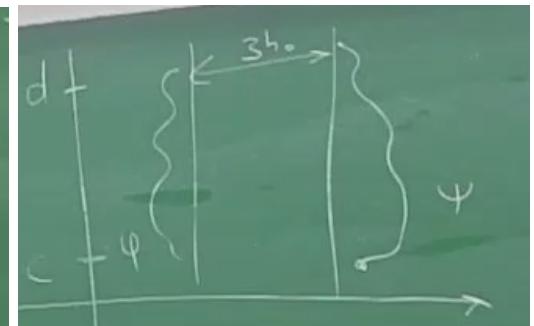
*Доказательство.*  $F = F_1 + F_2$ ,  $F_1 = (P \ 0)^T$ ,  $F_2 = (0 \ Q)^T$ . Теорему достаточно доказать для  $F_1$ , доказательство для  $F_2$  аналогично. Будем последовательно усложнять область  $G$ (на картинках показана эволюция нашей области):



Шаг 1.



Шаг 2.



Шаг 3.

**Шаг 1.** Будем считать  $G$  элементарной относительно  $Oy$ :

$$G = \{(x, y) \mid x \in (a, b), y \in (\varphi(x), \psi(x))\}$$

Тогда по теореме Фубини и учитывая что  $\frac{\partial P}{\partial y}$  непрерывно дифференцируема, а значит интеграл Лебега совпадает с интегралом Риммана и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b (P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))) dx$$

Полагая  $\Gamma_1 = \{r = (x, \varphi(x)) \mid x \in [a, b]\}$  и  $\Gamma_2 = \{\rho = (x, \psi(x)) \mid x \in [a, b]\}$ , можем заметить, что  $r'(x) = (1, \varphi'(x))$  и  $\rho'(x) = (1, \psi'(x))$ . Но, Тогда

$$\int_a^b P(x, \varphi(x)) dx = \int_{\Gamma_1^+} (F_1, dr)$$

$$- \int_a^b P(x, \psi(x)) dx = \int_{\Gamma_2^+} (F_1, dr)$$

Поскольку вторая компонента поля  $F_1$  нулевая, то интеграл по вертикальным отрезкам нулевой, а значит в этом случае формула доказана.

**Шаг 2.** Пусть область  $G$  элементарна относительно  $Ox$ :

$$G = \{(x, y) \mid y \in (c, d), x \in (\varphi(y), \psi(y))\}$$

Предположим, дополнительно, что  $\varphi$  и  $\psi$  — кусочно-линейные. Если брать картинку, то края уже не отрезки, а ломаные, т.е.  $\exists T = \{t_i\}_{t=0}^N$  т.ч.  $c = t_0 < t_1 < \dots < t_N = d$  и  $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}, \psi|_{[t_i, t_{i+1}]}$  — отрезки. Тогда на каждой из областей  $G_i$ , на которые  $G$  делится прямыми  $y = t_i$ , справедливость формулы Грина уже показана:

$$\iint_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial G_i^+} P dx$$

Теперь, заметим, что формула Грина верна и для объединения всех этих областей, поскольку  $\iint$  аддитивен по множествам  $G_i$ , а объединением кривых  $\partial G_i^+$  будет  $\partial G^+$ , поскольку на прямой  $y = t_{i+1}$  где пересекаются  $\partial G_i^+$  и  $\partial G_{i+1}^+$  интегралы по отрезку "выпиливаются" друг об друга, поскольку имеют противоположные направления.

**Шаг 3.** Пусть область  $G$  — элементарна относительно  $Ox$ , а  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные непрерывные и кусочно непрерывно-дифференцируемые на  $[c, d]$ :

$$G = \{(x, y) \mid y \in (c, d), x \in (\varphi(y), \psi(y))\}$$

И, при этом,  $\exists h_0 > 0$  т.ч.  $\forall y \in [c, d] \hookrightarrow \psi(y) - \varphi(y) \geqslant 3h_0$ , чтобы зазор между кривыми не "схлопнулся". Зафиксируем  $h \in (0, h_0)$ . Сдвинем  $\varphi$  на  $h$  вправо, а  $\psi$  — на  $h$  влево, и получим некоторые кривые  $\Gamma_{1,h} = \Gamma_1 + (h, 0)$  и  $\Gamma_{2,h} = \Gamma_2 - (h, 0)$  и функции  $\psi_h = \psi - h, \varphi_h = \varphi + h$ .

Пусть  $T = \{t_i\}$  — разбиение отрезка  $[c, d]$  с достаточно малой мелкостью, а  $\varphi_h^T$  и  $\psi_h^T$  — порождённые этим разбиением ломаные не пересекаются т.ч.  $\varphi(y) < \varphi_h^T(y) < \varphi(y) + 3/2h$  и  $\psi(y) - 3/2h < \psi_h^T(y) < \psi(y)$ . Такая мелкость существует, поскольку  $\psi$  и  $\varphi$  — кусочно 1-гладкие и  $\exists \max |\psi'(y)|$  и  $\exists \max |\varphi'(y)|$ . Пусть  $G_h$  — область, запертая между  $\varphi_h$  и  $\psi_h$ , а  $G_h^T$  — область, запертая между  $\varphi_h^T$  и  $\psi_h^T$ . По предыдущему шагу мы имеем

$$\iint_{G_h^T} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{(\partial G_h^T)^+} P dx$$

По лемме о приближении кривой ломанными

$$\int_{(\Gamma_{i,h}^T)^+} P dx \longrightarrow \int_{(\Gamma_{i,h})^+} P dx, \quad l(T) \rightarrow 0$$

С другой стороны,

$$\left| \iint_{G_h^T} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy - \iint_{G_h} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right| \leqslant \max_{\bar{G}} \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| \cdot |\mathcal{L}^2(G_h^T \Delta G_h)| \rightarrow 0, \quad l(T) \rightarrow 0$$

Таким образом формулу Грина верна для  $G_h$ .

Устремим  $h \rightarrow +0$ , используя теорему Фубини:

$$\left| \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy - \iint_{G_h} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right| \leqslant \max_{\bar{G}} \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| \cdot |\mathcal{L}^2(G \Delta G_h)| \leqslant M \cdot 2h \cdot |c - d| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow +0$$

Теперь покажем, что  $\int_{\partial G_h^+} P dx \rightarrow \int_{\partial G^+} P dx, h \rightarrow +0$ . Для этого достаточно показать, что  $\int_{\Gamma_i, h} P dx \rightarrow \int_{\Gamma_i} P dx, h \rightarrow +0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_{1,h}} P dx - \int_{\Gamma_1} P dx \right| &= \int_c^d |P(\varphi(y) + h, y) - P(\varphi(y), y)| \cdot |\varphi'(y)| dy \leq \\ &\leq |c - d| \max_{[c,d]} |\varphi'(y)| \max_{[c,d]} |P(\varphi(y), y) - P(\varphi(y) + h, y)| \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Таким образом этот шаг доказан.

**Шаг 4.** Предположим теперь что  $G$  — проста относительно  $Ox$ . Теперь не запрещается чтобы  $\varphi(d) = \psi(d), \psi(c) = \varphi(c)$ ; напомним, что  $\varphi < \psi$  на  $(c, d)$  и  $\varphi, \psi$  — непрерывные и кусочно непрерывно-дифференцируемые. Зафиксируем некоторое  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим  $G_\varepsilon = \{(x, y) \mid c + \varepsilon < y < d - \varepsilon, x \in (\varphi(y), \psi(y))\}$ . Так как  $\psi \varphi \in C([c, d])$  и  $\varphi - \psi > 0$  на отрезке  $[c + \varepsilon; d - \varepsilon]$ , непрерывная функция на отрезке достигает минимума и она положительна, а значит  $\exists h_0 > 0 : \psi - \varphi \geq 3h_0 \forall y \in [c + \varepsilon; d - \varepsilon]$ . Для  $G_\varepsilon$  утверждение доказано на предыдущем шаге. Тогда

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{G_\varepsilon} P'_y dx dy = - \int_{\partial G_\varepsilon^+} P dx$$

Устремим  $\varepsilon$  к 0:

$$\left| \iint_G P'_y dx dy - \iint_{G_\varepsilon} P'_y dx dy \right| = \left| \iint_{G \setminus G_\varepsilon} P'_y dx dy \right| \leq \max_{\bar{G}} \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| |\mathcal{L}^2(G \setminus G_\varepsilon)| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

Пусть  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  — это  $G|_{y=c}$  и  $G|_{y=d}$  соответственно, а  $\Gamma_{3,\varepsilon} = G_\varepsilon|_{y=c+\varepsilon}$  и  $\Gamma_{4,\varepsilon} = G_\varepsilon|_{y=d-\varepsilon}$ . Очевидно, что к «боковым» кривым  $\Gamma_1 = \{(\psi(y), y) \mid y \in (c, d)\}$  и  $\Gamma_2 = \{(\varphi(y), y) \mid y \in (c, d)\}$  сходятся  $\Gamma_{1,\varepsilon} = \{(\psi(y), y) \mid y \in (c + \varepsilon, d - \varepsilon)\}$  и  $\Gamma_{2,\varepsilon} = \{(\varphi(y), y) \mid y \in (c + \varepsilon, d - \varepsilon)\}$  и соответственно сходятся интегралы по этим кривым. Если  $\Gamma_3$  — точка, то очевидно, что  $\int_{\Gamma_{3,\varepsilon}} P dx \rightarrow \int_{\Gamma_3} P dx, \varepsilon \rightarrow 0$ . Иначе

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Gamma_{3,\varepsilon}} P(x, c + \varepsilon) dx - \int_{\Gamma_3} P(x, c) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} |P(x, c + \varepsilon) - P(x)| dx + \int_{\Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)} \max(|P(x, c + \varepsilon)|, |P(x, c)|) dx \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Шаг 5.** Применяя лемму о разбиении мы получаем конечное множество элементарных областей, удовлетворяющих условиям леммы  $\{G_i\}_{i=1}^N$ . Для каждого  $G_i$  мы можем применить уже доказанное и получить:

$$\iint_{G_i} Q'_x - P'_y dx dy = \int_{G_i^+} P dx + Q dy.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^N \iint_{G_i} Q'_x - P'_y dx dy = \iint_G Q'_x - P'_y dx dy.$$

Для каждого  $i \in \{1, \dots, N\}$  определим внутреннюю границу  $\partial^i G_i^+ = \partial G_i^+ \cap G$  и внешнюю границу  $\partial^e G_i^+ = \partial G_i^+ \cap \partial G$ . Ясно, что

$$\bigcup_{i=1}^N \partial^e G_i^+ = \partial G^+.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial^e G_i^+} Pdx + Qdy = \int_{\partial G^+} Pdx + Qdy.$$

Пусть  $\partial^i G_i^+ \neq \emptyset$ . Пусть существует такое  $j$ , что  $\partial^i G_i^+ \cap \partial^i G_j^+ \neq \emptyset$  и пусть они пересекаются по промежутку (случай пересечения по точке тривиален). Тогда пересечение – это промежуток, наделённый двумя противоположными ориентациями. Но тогда

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial^i G_i^+} Pdx + Qdy = 0.$$

Из этого следует необходимое равенство и получается утверждение теоремы.  $\square$

## 9 Поверхностные интегралы

### 9.1 Поверхности

**Примечание.** (от редактора) В данном параграфе не следует путать топологическое определение границы множества  $\partial S = \bar{S} \setminus \text{int}(S)$  и понятие края (в смысле дифференциальной геометрии), которое определяется для поверхностей. Точка  $p \in S$  принадлежит краю, если её окрестность в  $S$  (как в двумерной поверхности) "обрывается". К сожалению край обозначается также  $\partial S$  и понять где-что можно только из контекста. В этом параграфе будет только край. Рассмотрим разницу на примере, у сферы границей является вся сфера, а края нет, но вот у полусфера уже есть край — это ее экватор.

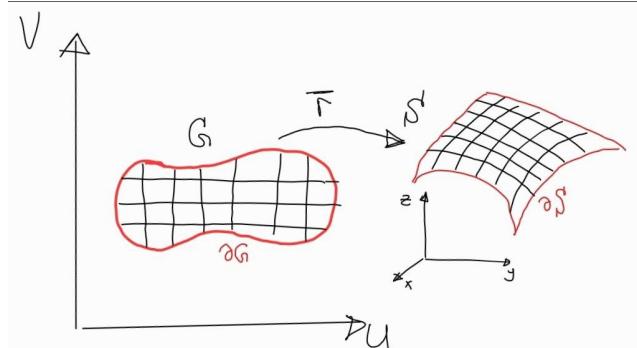
**Напоминание.** Будем говорить, что  $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , является гомеоморфизмом, если  $\exists F^{-1}: F(\Omega) \mapsto \Omega$ , такое что  $F^{-1} \in C(F(\Omega), \Omega)$ .

**Напоминание.** Множество  $G \in R^n$  называется областью, если:

- ▷  $G$  является открытым множеством.
- ▷  $G$  является связным множеством (любые две точки из  $G$  можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в  $G$ ).

**Определение 9.1.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{uv}^2$  – область. Пусть  $\bar{r}: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{r} \in C(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$  и  $\bar{r}$  – гомеоморфизм на  $G$ . Тогда будем называть:

- $S := \bar{r}(\bar{G})$  – поверхностью;
- $\partial S := \bar{r}(\partial G)$  – краем этой поверхности.



**Определение 9.2.** Будем говорить, что  $S = \bar{r}(\bar{G})$  — простая гладкая поверхность, если:

- $G$  — область, граница которой является простым кусочно-гладким контуром (то есть замкнутая кривая без самопересечений кроме начала и конца, параметризация непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируема и не имеет не более чем конечное число особых точек);
- $\bar{r} : \bar{G} \rightarrow S$  — гомеоморфизм;
- $\bar{r} \in C^1(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ ;
- $[\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v] \neq 0$  всюду на  $\bar{G}$  (частные производные продолжаются на границу по непрерывности).

Параметры  $u, v$  можно рассматривать как внутренние координаты точек поверхности. Фиксируя одну из координат, мы получаем два семейства координатных кривых, покрывающих поверхность координатной сеткой.

**Примечание.** Верхняя половина сферы является простой гладкой поверхностью, а вот вся сфера уже не является простой гладкой поверхностью. Для этого придумали кусочно гладкую поверхность, см. далее

**Примечание.** Будем называть касательной плоскостью к простой гладкой поверхности в точке  $(u^0, v^0)$  линейную оболочку векторов  $\bar{r}'_u(u^0, v^0)$  и  $\bar{r}'_v(u^0, v^0)$  — касательных векторов к координатным линиям. Вектором нормали в точке будем называть:

$$\bar{n}(\bar{r}(u_0, v_0)) := \frac{[\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v]}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}.$$

**Определение 9.3.** Пусть  $\bar{r} : \bar{G} \rightarrow S$  — отображение, удовлетворяющее условиям 1) – 4) предыдущего определения. Будем говорить что  $\bar{\rho} : \bar{\Omega} \rightarrow S$  — допустимая параметризация, если  $\exists \bar{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{G}$  ( $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}_{\alpha, \beta}^2$ , а  $\bar{G} \subset \mathbb{R}_{u, v}^2$ ) всюду невырожденное такое, причём  $J_F > 0$ , что  $\bar{\rho} = \bar{r} \circ \bar{F}$ .

**Напоминание.** (Дифференцируемость композиции функций) Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открыто и непусто,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  — открыто и непусто.  $F : G \rightarrow \Omega$  дифференцируемо в точке  $x^0 \in G$ ,  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  дифференцируемо в точке  $y^0 = F(x^0) \in \Omega$ . Тогда для композиции  $\varphi = H \circ F$ , якобиан будет равен:  $J_\varphi(x^0) = \mathcal{D}(H \circ F)(x^0) = \mathcal{D}H(F(x^0))\mathcal{D}F(x^0)$ , а  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial H_k}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$

**Лемма 9.1.** Касательная плоскость и вектор нормали не зависят от выбора допустимой параметризации.

*Доказательство.* Пусть  $\bar{\rho}$  и  $\bar{r}$  — две допустимые параметризации. Тогда

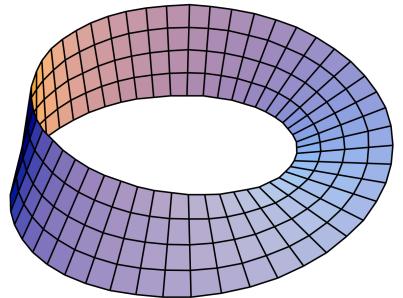
$$\bar{\rho}(\alpha, \beta) = \bar{r}(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)).$$

Тогда по теореме о дифференцировании композиции:

$$\begin{cases} \bar{\rho}'_\alpha = \bar{r}'_u u'_\alpha + \bar{r}'_v v'_\alpha \\ \bar{\rho}'_\beta = \bar{r}'_u u'_\beta + \bar{r}'_v v'_\beta \end{cases} \Rightarrow [\bar{\rho}'_\alpha \times \bar{\rho}'_\beta] = [\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v] \cdot J_F(\alpha, \beta)$$

Где  $F = (u, v)^T$  — отображение репараметризации. Тогда вектора нормали коллинеарны и, следовательно, касательные плоскости совпадают.  $\square$

**Определение 9.4.** Будем говорить что  $S = \bar{r}(\bar{G})$  — поверхность — ориентируемая, если на ней существует непрерывное поле единичных нормалей, то есть существует  $\bar{n} : S \rightarrow S_1^{\mathbb{R}^3} : \bar{n} \in C(S, S^2)$ .



**Примечание.** Не всякая поверхность ориентируема, например лента Мёбиуса. Далее с неориентируемыми поверхностями мы работать не будем.

**Примечание.** Всякая простая гладкая поверхность ориентируема, причём она имеет ровно две ориентации, которые задаются как

$$\bar{n}_\pm = \pm \frac{[\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v]}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}.$$

**Следствие.** Ориентация простой гладкой поверхности не зависит от выбора допустимой параметризации.

**Определение 9.5** (Ориентация края). Пусть есть простая гладкая (а значит ориентируемая) поверхность  $S$  с допустимой параметризацией  $\bar{r} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Пусть  $\partial G = \{\rho(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$  — простой кусочно-гладкий контур;  $\bar{v} = \bar{r}'(t) \neq 0$ . По определению,  $\partial S = \bar{r}(\partial G)$ . Тогда касательный вектор  $\bar{\tau}$  к краю  $\partial S$ :

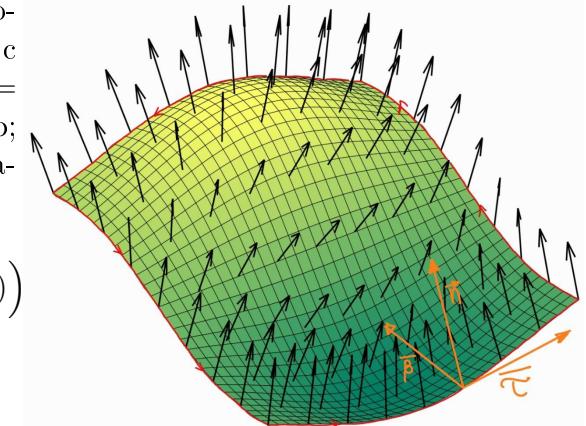
$$\bar{\tau}(t_0) = \frac{d}{dt} \bar{r}(\bar{\rho}(t))|_{t=t_0} = \bar{r}'_u(u(t_0), v(t_0)) u'(t_0) + \bar{r}'_v(u(t_0), v(t_0)) v'(t_0)$$

Пусть

$$\bar{\xi}(h) = \rho(t_0) + h \bar{n}(t_0),$$

где  $\bar{n}$  — вектор внутренней нормали. Тогда введём вектор  $\bar{\beta}$  как

$$\beta(t_0) = (\bar{r} \circ \bar{\xi})'_h|_{h=0} = \bar{r}'_u n_u + \bar{r}'_v n_v.$$



**Определение 9.6.** Будем говорить, что край  $\partial S$  простой гладкой поверхности ориентирован относительно неё положительно, если в любой точке гладкости края тройка векторов  $(\bar{\tau}, \bar{\beta}, \bar{n})$  — правая. Неформально, у нас есть поле нормалей поверхностей, обходя край, область будет слева

**Лемма 9.2** (Достаточное условие ориентируемости края поверхности). *Пусть заданы правые базисы в  $\mathbb{R}_{uv}^2$  и  $\mathbb{R}_{xyz}^3$ . Пусть  $\partial G$  положительно ориентирована относительно области  $G$ .*

1. Пусть  $S = \bar{r}(\bar{G})$  — простая гладкая поверхность;

2.  $\partial S$  ориентирован согласованно с ориентацией  $\partial G$ ;

3. Пусть  $S$  ориентирована полем  $\bar{n} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}$ .

Тогда  $\partial S$  ориентирован положительно относительно  $S$ . (Если нарушить только условие 2 или 3, то будет отрицательно ориентирован, а если оба сразу, то положительно)

**Доказательство.** Из условия правости базиса на поверхности следует, что если  $\rho(t_0)$  — точка гладкости границы  $G$ , то  $\bar{v}, \bar{N}$  — правая двойка, то есть

$$\det \begin{pmatrix} u'(t_0) & N_u \\ v'(t_0) & N_v \end{pmatrix} > 0.$$

Касательный вектор к поверхности записывается как

$$\bar{\tau}(t_0) = \frac{d}{dt} \bar{r}(u(t), v(t))|_{t=t_0} = \bar{r}'_u(u(t_0), v(t_0)) u'(t_0) + \bar{r}'_v(u(t_0), v(t_0)) v'(t_0)$$

А вектор бинормали как

$$\bar{\beta}(t_0) = \frac{d}{dt} \bar{r}(t_0 + \bar{N}t)|_{t=0} = \bar{r}'_u(u(t_0), v(t_0)) N_u + \bar{r}'_v(u(t_0), v(t_0)) N_v$$

Тогда

$$[\bar{\tau}(t_0) \times \bar{\beta}(t_0)] = [\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v] \cdot \begin{vmatrix} u'(t_0) & N_u \\ v'(t_0) & N_v \end{vmatrix}$$

Значит  $\bar{\tau} \times \bar{\beta}$  коллинеарен нормали и  $\bar{\tau}, \bar{\beta}, \bar{n}$  — правая тройка.  $\square$

**Определение 9.7.** Будем говорить, что  $S$  — кусочно-гладкая поверхность, если:

- ▷  $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$ , где каждая из  $S_i$  — простая гладкая поверхность
- ▷  $S_i \cap S_j = \partial S_i \cap \partial S_j$  для всяких двух  $i$  и  $j$ .
- ▷  $\partial S_i \cap \partial S_j$  — либо состоит из конечного числа точек, либо пусто, либо состоит из конечного числа простых кусочно-гладких кривых (и, быть может, конечного числа точек). Будем называть два куска соседними, если они пересекаются по кусочно-гладкой кривой.
- ▷ Для  $\forall i, j, k : i \neq j, i \neq k, j \neq k$  выполнено, что  $\partial S_i \cap \partial S_j \cap \partial S_k$  состоит из не более чем конечного числа точек.
- ▷  $\forall i \neq j$  существует конечный набор  $S_i = S_{k_1}, \dots, S_{k_s} = S_j$  т.ч.  $S_{k_r}$  и  $S_{k_{r+1}}$  — соседние для всех  $r$ .

**Пример.** Это определение это естественное обобщение многогранников. Примеры кусочно гладких поверхностей: сфера, конус, пирамида. Пример не кусочно гладкой поверхности это два конуса, которые стоят вертикально, но касаются основаниями в одной точке

**Определение 9.8.** Пусть есть кусочно-гладкая поверхность  $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$ . Для каждого куска поверхности определим внешнюю часть границы следующим образом:  $\partial^e S_i$  — все такие точки, т.ч. они лежат только на  $\partial S_i$ , то есть  $\forall j \neq i \leftarrow \partial^e S_i \cap \partial S_j = \emptyset$ , а внутреннюю — как все остальные точки границы. Пусть ориентация  $\partial S_j$  выбрана так, что если  $S_i$  и  $S_j$  — соседние, то  $\partial S_i \cap \partial S_j$  — то положительная ориентация кривой относительно  $S_i$  соответствует отрицательной ориентации кривой относительно  $S_j$ , т.е. ориентации согласованы. Тогда будем говорить, что  $\partial S = \bigcup_{i=1}^N \partial^e S_i \cup A$ , где  $A$  — конечное множество точек ориентирован, и его ориентация соответствует ориентации  $\partial^e S_i$ .

**Определение 9.9.** Край кусочно-гладкой поверхности  $S$  называется ориентированным согласовано с ориентацией  $S$ , если  $\forall i$  край  $S_i$  ориентирован согласовано с ориентацией  $S$ .

## 9.2 Поверхностные интегралы I рода

Физический смысл — это вычисление массы тела с распределением плотности  $f(\bar{r})$ .

**Определение 9.10.** Пусть  $S = \bar{r}(\bar{G})$  — простая гладкая поверхность. Пусть  $f: S \rightarrow \mathbb{R}: f \in C(S, \mathbb{R})$ . Тогда *поверхностным интегралом первого рода* будем называть

$$\iint_S f(\bar{r}) ds := \iint_G f(\bar{r}(u, v)) |[\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v]| dudv.$$

**Определение 9.11.** *Площадью* простой гладкой поверхности будем по определению называть

$$\iint_S 1 ds = \iint_G |[\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v]| dudv.$$

**Лемма 9.3.** Пусть простая гладкая поверхность  $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$  — объединение простых гладких поверхностей, пересекающихся только по краям,  $f \in C(S, \mathbb{R})$ . Тогда

$$\iint_S f ds = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} f ds.$$

*Доказательство.* Очевидно следует из определения и аддитивности интеграла.  $\square$

**Определение 9.12.** Пусть  $S = \bar{r}(\bar{G})$  — кусочно-гладкая поверхность. Пусть  $f \in C(S, \mathbb{R})$ . Тогда если  $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$ , то по определению

$$\iint_S f ds = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} f ds.$$

**Факт** (Доказательство оставлено в качестве упражнения). *Определение корректно, и доказательство аналогично доказательству корректности интеграла Лебега от простых функций.*

**Теорема 9.1.** ПИПР не зависит от параметризации поверхности.

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай простой гладкой поверхности. Пусть  $S = \bar{r}(\bar{G}) = \bar{r} \circ w(\bar{\Omega})$  где  $\bar{\Omega} \xrightarrow{w} \bar{G}$  и  $J_w \neq 0$  в любой точке  $\bar{\Omega}$ . Пусть

$$w(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} u(\alpha, \beta) \\ v(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$$

Пусть  $f \in C(S, \mathbb{R})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iint_S f ds &= \iint_{\bar{G}} f(\bar{r}(u, v)) |[\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v]| dudv = \iint_{\bar{\Omega}} f(\bar{r} \circ w(\alpha, \beta)) |[\bar{r}'_u(\alpha, \beta) \times \bar{r}'_v(\alpha, \beta)]| |J_w| d\alpha d\beta = \\ &= \iint_{\bar{\Omega}} f(R(\alpha, \beta)) |[\bar{R}'_\alpha(\alpha, \beta) \times \bar{R}'_\beta(\alpha, \beta)]| d\alpha d\beta \end{aligned}$$

Где  $\bar{R} = \bar{r} \circ w$ .  $\square$

**Лемма 9.4.** Пусть

$$S = \left\{ \bar{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \overline{G} \right\}$$

Для некоторой  $z \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R})$ . Тогда

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_G f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

*Доказательство.* Поскольку

$$\bar{r}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix}, \quad \bar{r}'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

Тогда  $|\bar{r}'_x \times \bar{r}'_y| = \sqrt{|\bar{r}'_x|^2 |\bar{r}'_y|^2 - (\bar{r}'_x \cdot \bar{r}'_y)^2} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ .  $\square$

### 9.3 Поверхностный интеграл II рода

Физический смысл — это поток векторного поля через поверхность в направлении, задаваемом нормалью.

**Определение 9.13.** Пусть  $S = \bar{r}(\overline{G})$  — кусочно-гладкая поверхность, ориентированная полем единичных нормалей  $\bar{n}$ . Пусть  $\bar{F} \in C(S, \mathbb{R}^3)$  и

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Тогда определим интеграл второго рода как

$$\iint_S (\bar{F}, \bar{ds}) = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy := \iint_S (\bar{F}, \bar{n}) ds.$$

**Лемма 9.5.** Не зависит от параметризации поверхности (при сохранении ориентации поверхности те  $J_F > 0$ )

*Доказательство.* Поскольку ПИПР не зависит от параметризации, и поле нормалей тоже не зависит от параметризации то интеграл не изменится.  $\square$

**Лемма 9.6.** Пусть  $S = \bar{r}(\overline{G})$  — простая ориентированная гладкая поверхность. Пусть  $\bar{F} \in C(S, \mathbb{R}^3)$ ,  $\bar{F} = (P \ Q \ R)^T$ . Тогда

$$\iint_S (\bar{F}, \bar{ds}) = \pm \iint_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv$$

Определяется  $\pm$  по ориентации поверхности. Пусть  $\bar{r}_0 = \bar{r}(u_0, v_0) \in S$ . Если  $\bar{n}(\bar{r}_0)$  и  $[\bar{r}'_u(u_0, v_0) \times \bar{r}'_v(u_0, v_0)]$  сонаправлены, то «+», иначе — «-».

*Доказательство.* Для производной простой гладкой поверхности поле нормалей выглядит как

$$\bar{n}(\bar{r}) = \pm \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}.$$

Знак выбирается в зависимости от изначальной ориентации поверхности. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_S (\bar{F}, \bar{d}s) &= \iint_S (\bar{F}, \bar{n}) ds = \iint_G (\bar{F}(\bar{r}(u, v)), \bar{n}(\bar{r}(u, v))) |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| du dv = \\ &= \pm \iint_G (\bar{F}(\bar{r}(u, v)), \bar{r}'_u(u, v) \times \bar{r}'_v(u, v)) du dv = \pm \iint_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv. \end{aligned}$$

□

**Теорема 9.2.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{xy}^2$  — область с границей, являющейся простым гладким кусочно гладким контуром и  $z \in C^1(\bar{G})$  и  $S = \text{graph } z$ . Пусть  $S^+$  — поверхность  $S$ , ориентированная полем нормалей  $\bar{n} = (n_x \ n_y \ n_z)^T$  таким, что  $n_z \geq 0$ . Тогда

$$\iint_{S^+} f(x, y, z) dx dy = \iint_G f(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

*Доказательство.* Пусть

$$\bar{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{r}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix}, \quad \bar{r}'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

Тогда используя предыдущую лемму и то, что  $\bar{F} = (0 \ 0 \ f)^T$ , то мы получаем, что

$$\iint_S f dx dy = \iint_G \begin{vmatrix} 0 & 0 & f \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dx dy = \iint_G f(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

□

## 9.4 Формула Остроградского-Гаусса

**Определение 9.14.** Будем называть наблой формальный дифференциальный оператор  $\nabla$ :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Он действует следующим образом:

$$\nabla \left( \sum_i \alpha_i p_i \right) = \sum_i \alpha_i \nabla p_i$$

(Если  $\alpha_i$  — константы)

Набла удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\nabla(pq) = \nabla(\overset{\downarrow}{p}, q) + \nabla(p, \overset{\downarrow}{q}) = (\nabla p, q) + (p, \nabla q)$$

**Определение 9.15.** Определим операцию взятия градиента как

$$\operatorname{grad} a = \nabla a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

**Определение 9.16.** Определим дивергенцию векторного поля как

$$\operatorname{div} \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

**Определение 9.17.** Определим операцию взятия ротора как

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \nabla \times \bar{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

**Примечание.** (от редактора)

- ▷ Геометрический смысл дивергенции заключается в том, что это предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую данную точку, к объёму, ограниченному этой поверхностью, когда она стягивается к точке. Вспомните теорему Гаусса, если взять заряд, то поток будет равен  $4\pi q_{in}$ .
- ▷ Геометрический смысл ротора заключается в том, что это циркуляция по малому контуру, то, насколько в конкретной точке поток поворачивается. Представьте закрепленный шарик в воде, за счет вязкости этот шарик будет вращаться в каком-то направлении, а угловая скорость вращения это удвоенное значение ротора

**Определение 9.18.** Область  $G$  называют сильно элементарной областью в  $\mathbb{R}_{xyz}^3$ , если она элементарна относительно каждой из осей.

**Определение 9.19.** Будем говорить, что область  $G$  элементарна относительно  $Oz$ , т.е.  $\exists E \in \mathbb{R}_{xy}^2$  такая, что  $G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in E, z \in (\varphi(x, y), \psi(x, y))\}$  где  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  — гладкие в  $E$

**Теорема 9.3.** Пусть  $G$  — сильно элементарная область в  $\mathbb{R}_{xyz}^3$ . Пусть  $\partial G$  — кусочно-гладкая поверхность, ориентированная полем внешних нормалей. Пусть  $\bar{F} \in C^1(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ . Тогда

$$\iiint_G \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz = \iint_{\partial G^+} (\bar{F}, \bar{ds})$$

*Доказательство.* Пусть

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Тогда, необходимо доказать, что

$$\iiint_G \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz = \iiint_G P'_x + Q'_y + R'_z dx dy dz = \iint_{\partial G^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

В силу линейности интеграла мы можем доказать только для одной из компонент  $\bar{F}$ . Пусть это будет, без ограничения общности,

$$\bar{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$$

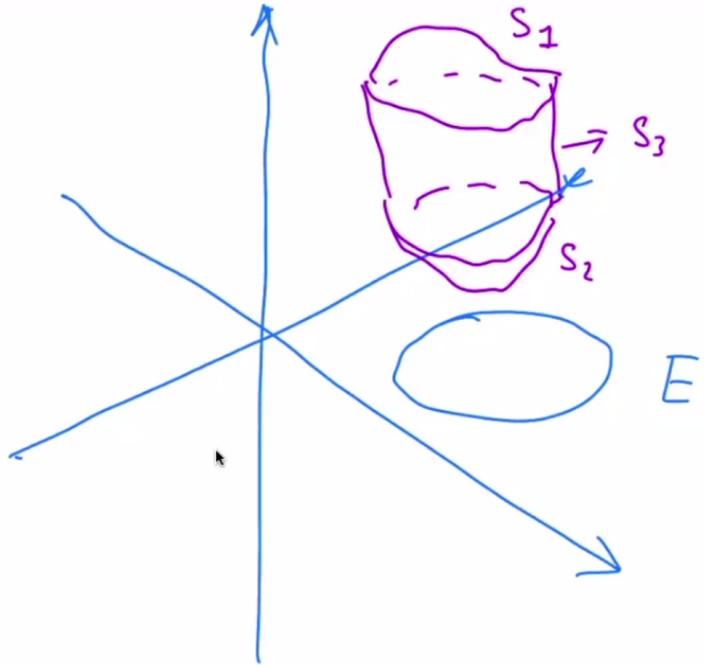
Тогда, необходимо доказать

$$\iiint_G R'_z dxdydz = \iint_{\partial G^+} R dx dy$$

Поскольку  $G$  — элементарно относительно  $Oz$ , то существует  $E \subset \mathbb{R}_{xy}^2$  и  $\psi, \varphi \in C^1(\bar{E}, \mathbb{R})$  т.ч.  $\varphi < \psi$ .

Тогда

$$G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in E, \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}$$



Введём следующие обозначения:

$$S_1 = \{(x, y, \psi(x, y)) \mid (x, y) \in \bar{E}\}$$

$$S_2 = \{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in \bar{E}\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial E, \varphi \leq z \leq \psi\}$$

Поскольку поле внешних нормалей к  $S_3$  параллельно плоскости плоскости  $Oxy$ , а следовательно его  $z$ -компоненты  $n_z = 0$ . Тогда

$$\iint_{S_3} R dx dy = \iint_{S_3} R \cdot n_z ds = 0$$

В тоже время, по теореме о вычислении поверхностного интеграла в случае графика:

$$\iint_{S_1} R dx dy = \iint_E R(x, y, \psi(x, y)) dx dy$$

$$\iint_{S_2} R dx dy = - \iint_E R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$$

Но, тогда

$$\iint_{\partial G^+} R dx dy = \iint_{S_1} R dx dy + \iint_{S_2} R dx dy + \iint_{S_3} R dx dy = \iint_E R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy =$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница (так как поле непрерывно дифференцируемо в замыкании), а в конце по принципу Кавальери:

$$= \iint_E \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} R'_z(x, y, t) dt \right) dx dy = \iiint_G R'_z dxdydz$$

Теорема доказана (для остальных компонент результат получается аналогично) □

**Теорема 9.4** (Остроградский, Гаусс). Пусть есть область  $G$ , т.ч.  $G = \bigcup_{i=1}^N \cup E$  где  $G_i$  — элементарные области, а  $E = \bigcup_{j=1}^N S_j$ , где  $S_j$  — кусочно-гладкие поверхности, лежащие на границах

областей  $G_i$ . Пусть  $\partial G^+$  — кусочно-гладкая поверхность, ориентированная полем внешних нормалей. И пусть задано  $\bar{F} \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$ . Тогда

$$\iiint_G \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz = \iint_{\partial G^+} (\bar{F}, \bar{ds})$$

*Доказательство.* Для каждой из элементарных областей справедливо утверждение предыдущей теоремы:

$$\iiint_{G_i} \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz = \iint_{\partial G_i^+} (\bar{F}, \bar{ds})$$

Очевидно, что

$$\iiint_G \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz = \sum_{i=1}^N \iiint_{G_i} \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz$$

Поскольку  $\mathcal{L}^3$  для кусочно-гладкой поверхности равна 0. С другой стороны, пусть  $S_{il}$  — общая часть границы  $G_i$  и  $G_l$ . Заметим, что если  $S_{il}^+$  — внешне-ориентирована по отношению к  $G_i$ , то она же будет внутренне ориентирована по отношению к  $G_l$ . А значит, в сумме интегралов по всем  $\partial G_i^+$  они все взаимно уничтожаются, и тогда справедливо

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}, \bar{ds}) = \iint_{\partial G^+} (\bar{F}, \bar{ds})$$

Теорема доказана. □

## 9.5 Формула Кельвина-Стокса

**Теорема 9.5** (Кельвин, Стокс). *Пусть  $S = \bar{r}(\bar{G})$  — поверхность. Пусть выполнены следующие условия:*

- ▷  $S$  — простая гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^3$ ;  $G \subset \mathbb{R}_{uv}^2$
- ▷  $\bar{r} \in C^2(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$
- ▷  $\partial G$  — простой кусочно-гладкий контур
- ▷  $S$  — ориентируема и  $\partial S^+$  — положительно ориентирована относительно  $S$ .
- ▷  $\exists \Omega : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \supset S$ ,  $\Omega$  — открытое и пусть  $\bar{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$

Тогда

$$\iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{ds}) = \int_{\partial S^+} (\bar{a}, \bar{dr})$$

*Доказательство.* **Шаг 1.** Пусть

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Поскольку ротор линеен, мы можем доказать теорему только для

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ помня что } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix}$$

И показать

$$\iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}_1, \overline{ds}) = \int_{\partial S^+} (\bar{a}_1, \overline{dr})$$

**Шаг 2.** Поскольку  $S$  — простая гладкая поверхность, то у неё есть две ориентации:

$$\bar{n} = \pm \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}$$

Докажем для положительной ориентации, для другой доказательство аналогично. Рассмотрим ситуацию, где  $(u, v)$  — правая СК, и  $\partial G^+$  — ориентирована положительно относительно  $G$ . Тогда

$$\int_{\partial S^+} (\bar{a}_1, \overline{dr}) = \int_{\partial S^+} P dx = \int_{\alpha}^{\beta} Px'_t dt = \int_{\alpha}^{\beta} P(x'_u u'_t + x'_v v'_t) dt = \int_{\partial G^+} Px'_u du + Px'_v dv = (*)$$

**Шаг 3.** Теперь используем формулу Грина:

$$(*) = \iint_G [(Px'_v)'_u - (Px'_u)'_v] dudv = \iint_G (P'_u x'_v + Px''_{vu} - P'_v x'_u - Px''_{uv}) dudv = \iint_G (P'_u x'_v - P'_v x'_u) dudv = (*)$$

Именно здесь требуется условие  $\bar{r} \in C^2(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ . У нас сокращаются компоненты  $Px''_{uv} = P''_{vu}$ .

**Шаг 4.** Поскольку:

$$\begin{cases} P'_u = P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u \\ P'_v = P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v \end{cases}$$

То

$$(*) = \iint_G P'_y (y'_u x'_v - y'_v x'_u) + P'_z (z'_u x'_v - z'_v x'_u) dudv = \iint_G P'_z \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - P'_y \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

**Шаг 5.** С другой стороны, поскольку

$$\operatorname{rot} \bar{a}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P'_z \\ -P'_y \end{pmatrix}$$

То

$$\iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}_1, \overline{ds}) = \iint_G \begin{vmatrix} 0 & P'_z & -P'_y \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv = \iint_G P'_z \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - P'_y \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv$$

Но это в точности то что нам нужно, и таким образом получается что теорема доказана.  $\square$

**Примечание.** Теорема Кельвина-Стокса справедлива при более слабом условии:  $\bar{r} \in C^1(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ .

**Теорема 9.6** (Кельвин-Стокс для кусочной-гладкой поверхности). *Пусть  $S \in \mathbb{R}^3$  — кусочно-гладкая поверхность. Пусть  $\partial S^+$  — ориентированный положительно относительно  $S$  край, состоящий из конечного числа простых кусочно-гладких кривых. Пусть задано открытое  $\Omega \supset S$  и в нём  $\bar{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Тогда*

$$\iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}, \overline{ds}) = \int_{\partial S^+} (\bar{a}, \overline{dr})$$

*Доказательство.* Используя замечание и предыдущую теорему для каждого куска мы получаем формулу Стокса. Далее, суммируя по всем кускам мы получим необходимое. Ключевой момент — при суммировании циркуляций для соседних кусков циркуляция по общему краю равна 0, в силу противоположных ориентаций.  $\square$

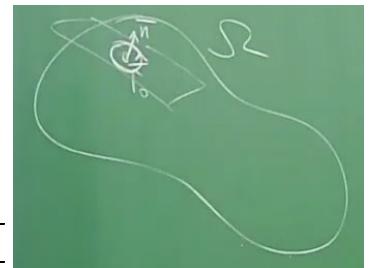
## 10 Элементы теории поля

### 10.1 Геометрическое определение ротации

**Теорема 10.1.** Пусть в непустой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  задано гладкое поле  $\bar{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Тогда  $\forall \bar{r}_0 \in \Omega$  справедливо следующее равенство:

$$(\bar{n}, \operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r}_0)) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{\partial S_\delta^+(\bar{r}_0)} (\bar{a}, \bar{dr}).$$

Где  $\bar{n}$  — вектор, задающий положительную ориентацию,  $S_\delta^+$  — окружность радиуса  $\delta > 0$  лежащая в плоскости, проходящая через  $\bar{r}_0$  перпендикулярно вектору  $\bar{n}$ . Ориентация  $\partial S_\delta^+(\bar{r}_0)$  согласована с  $\bar{n}$ .



*Доказательство.* Зафиксируем произвольную точку  $\bar{r}_0 \in \Omega$ .

Так как  $\Omega$  открыто,  $\exists \delta_0 > 0: B_{\delta_0}(\bar{r}_0) \subset \Omega$ .  $\forall \delta \in (0, \delta_0)$  рассмотрим сечение шара  $B_\delta(\bar{r}_0)$  плоскостью, проходящей через  $\bar{r}_0$  перпендикулярно  $\bar{n}$ . Применим теорему Стокса к получившемуся кругу и получим:

$$\frac{1}{\pi \delta^2} \int_{\partial S_\delta^+} (\bar{a}, \bar{dr}) = \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{S_\delta^+} (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{ds})$$

Рассмотрим

$$\left| (\bar{n}, \operatorname{rot} \bar{a})(\bar{r}_0) - \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{S_\delta^+} (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{n}) ds \right| = (*)$$

Покажем что  $(*)$  стремится к 0, при  $\delta \rightarrow +0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi \delta^2} \left| \iint_{S_\delta^+} (\bar{n}, \operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r}_0)) - (\bar{n}, \operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r})) \right| ds &\leqslant \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{S_\delta^+} |(\bar{n}, \operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r}) - \operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r}_0))| ds \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{S_\delta^+} \left| \left( \bar{n}, \sup_{S_\delta^+} |\operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r}) - \operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r}_0)| \right) \right| ds = \left| \left( \bar{n}, \sup_{S_\delta^+} |\operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r}) - \operatorname{rot} \bar{a}(\bar{r}_0)| \right) \right| \xrightarrow{\delta \rightarrow +0} 0 \end{aligned}$$

В силу непрерывности ротора, как функции от  $r$

□

### 10.2 Потенциальные поля

**Определение 10.1.** Пусть  $\Omega$  — непустая область в  $\mathbb{R}^n$  и  $\bar{a} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Будем говорить что  $\bar{a}$  — потенциально в  $\Omega$ , если существует  $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ :  $\bar{a} = \operatorname{grad} \varphi$ ;  $\varphi$  будем называть *потенциалом*.

**Теорема 10.2.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — непустая область,  $\bar{a} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Следующие условия эквивалентны:

▷ Для всякого простого кусочно-гладкого контура  $\Gamma \subset \Omega$  выполнено

$$\oint_{\Gamma} (\bar{a}, \bar{dr}) = 0$$

▷ Для любых кусочно-гладких кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с общим началом и концом и больше нигде не пересекающихся справедливо

$$\int_{\Gamma_1} (\bar{a}, \bar{dr}) = \int_{\Gamma_2} (\bar{a}, \bar{dr})$$

▷  $\bar{a}$  потенциально в  $\Omega$

*Доказательство.* Импликация  $1) \Rightarrow 2)$  очевидна: пусть у нас есть такие  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Тогда, если мы применим 1) к замкнутому контуру  $\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ , то мы получим нужное.

Докажем  $3) \Rightarrow 1)$ . Пусть  $\exists \varphi : \bar{a} = \operatorname{grad} \varphi$ . Пусть  $\Gamma = \{\bar{r}(t) | t \in [a, b]\}$  и  $r(a) = r(b)$  — кусочно-гладкий контур. Тогда

$$\int_{\Gamma} (\bar{a}, \bar{dr}) = \int_{\Gamma} (\nabla \varphi, \bar{dr}) = \int_a^b (\nabla \varphi, \dot{\bar{r}}(t)) dt = (*)$$

Заметим, что для  $\varphi \circ \bar{r}$  верно следующее:

$$\frac{d}{dt} \varphi \circ \bar{r}(t) = \varphi'_x x'_t + \varphi'_y y'_t + \varphi'_z z'_t = (\nabla \varphi, \dot{\bar{r}}(t))$$

Т.е. для  $(*)$  используя это и формулу Ньютона-Лейбница получим, что

$$(*) = \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi \circ \bar{r} dt = \varphi \circ \bar{r}(b) - \varphi \circ \bar{r}(a) = 0$$

Теперь докажем импликацию  $2) \Rightarrow 3)$ . Зафиксируем произвольную точку  $\bar{r}_0 \in \Omega$ . Положим  $\varphi(\bar{r}) = \int_{\Gamma} (\bar{a}, \bar{dr})$  где  $\Gamma$  — кусочно-гладкая кривая без самопересечений, соединяющая  $\bar{r}_0$  и  $\bar{r}$ .

**Примечание.** На самом деле, не очевидно что существует такая кусочно-гладкая кривая; но поскольку область — линейно-связна, то существует непрерывная кривая  $\Gamma$ , соединяющая всякие две точки. Значит, поскольку  $\Gamma$  — компактна, и  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  — замкнуто, то  $\operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \Gamma) > 0$  и тогда  $\Gamma$  отделена от  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  некоторой «трубочкой». Значит при достаточно мелком разбиении у нас вписана ломаная в эту трубочку, а значит у нас есть кусочно-гладкая кривая, соединяющая две точки.

Заметим, что в силу условия 2) определение  $\varphi$  корректно. Теперь покажем что  $\varphi$  — действительно потенциал для  $\bar{a}$  в  $\Omega$ . Зафиксируем произвольную точку  $\bar{r}_*$ . Существует  $\delta_0 > 0$  т.ч.  $B_\delta(\bar{r}_*) \subset \Omega$ . Тогда, если  $\bar{l}$  — произвольный единичный вектор, то для  $\delta \in (0, \delta_0)$ :

$$\varphi(\bar{r}_* + t\bar{l}) - \varphi(\bar{r}_*) = \int_{\Gamma_l} (\bar{a}, \bar{dr}) = \frac{1}{t} \int_0^t (\bar{a}(\bar{r}(\xi)), \bar{l}) d\xi \rightarrow (\bar{a}(\bar{r}_*), \bar{l}), t \rightarrow +0$$

Значит  $\frac{d\varphi}{d\bar{l}}(\bar{r}_*) = (\bar{a}(\bar{r}_*), \bar{l})$  Из этого и гладкости  $\varphi$  мы получаем нужное утверждение.  $\square$

**Определение 10.2.** Поле  $\bar{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  называется безвихревым в  $\Omega$  если  $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$  в  $\Omega$ .

**Определение 10.3.** Пусть дана область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Она называется поверхностью односвязной если для любого простого кусочно-гладкого контура  $\Gamma \subset \Omega$  существует кусочно-гладкая поверхность  $S \subset \Omega$  такая, что  $\partial S = \Gamma$

**Теорема 10.3.** Пусть задано гладкое поле  $\bar{a}$  в некоторой области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^3$ . Тогда

▷ Если  $\bar{a}$  — потенциально, то оно безвихревое

▷ Если  $\bar{a}$  — безвихревое и  $\Omega$  — поверхности односвязна, то  $\bar{a}$  — потенциально

*Доказательство.* Пусть  $\bar{a}$  — потенциально. Тогда интеграл по любому замкнутому контуру равен 0. Тогда поле — безвихревое в силу теоремы о геометрическом смысле ротации.

Пусть  $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$  в  $\Omega$ . Поскольку  $\Omega$  поверхность односвязная то для всякого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\Gamma$  существует поверхность  $S \subset \Omega$  т.ч.  $\partial S = \Gamma$ . Значит применяя теорему Стокса-Кельвина мы получаем

$$\int_{\Gamma} (\bar{a}, \overline{dr}) = \int_S (\operatorname{rot} \bar{a}, \overline{ds}) = 0$$

И по предыдущей теореме поле  $\bar{a}$  — потенциальное.  $\square$

**Примечание.** Если  $\Omega$  — не поверхность односвязно, то поле может быть безвихревым но не потенциальным. Пусть  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus Oz$  и

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{0}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Его ротация очевидно равна 0. Но по такому контуру  $\Gamma = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$  циркуляция ненулевая.

### 10.3 Геометрический смысл дивергенции

**Теорема 10.4.** Пусть дано гладкое поле  $\bar{a} \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$ , где  $G$  — непустое открытое множество. Тогда для произвольного  $x \in G$  верно следующее:

$$\operatorname{div} \bar{a}(x) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{4/3\pi r^3} \iint_{S_r(x)} (\bar{a}, \overline{ds})$$

*Доказательство.* При всех достаточно малых  $r > 0$  шар  $B_r(x) \subset G$ . По теореме Остроградского-Гаусса

$$\iint_{S_r(x)} (\bar{a}, \overline{ds}) = \iiint_{B_r(x)} \operatorname{div} \bar{a}(y) dy$$

С другой стороны,

$$\operatorname{div} \bar{a}(x) = \frac{1}{4/3\pi r^3} \iint_{B_r(x)} \operatorname{div} \bar{a}(y) dy$$

В силу непрерывности  $\operatorname{div} \bar{a}$ :

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{div} \bar{a}(x) - \frac{1}{4/3\pi r^3} \iint_{S_r(x)} (\bar{a}, \overline{ds}) \right| &= \frac{1}{4/3\pi r^3} \left| \iiint_{B_r(x)} \operatorname{div} \bar{a}(x) dy - \iiint_{B_r(x)} \operatorname{div} \bar{a}(y) dy \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{4/3\pi r^3} \iint_{B_r(x)} |\operatorname{div} \bar{a}(x) - \operatorname{div} \bar{a}(y)| dy \leqslant \sup_{y \in B_r(x)} |\operatorname{div} \bar{a}(x) - \operatorname{div} \bar{a}(y)| \rightarrow 0, r \rightarrow +0 \end{aligned}$$

$\square$

**Определение 10.4.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^3$  — непустая область. Поле  $\bar{a} \in C(G, \mathbb{R}^3)$  называется *соленоидальным* в области  $G$ , если

$$\iint_{\Sigma} (\bar{a}, \overline{ds}) = 0.$$

Для всякой замкнутой кусочно-гладкой  $\Sigma$ , лежащей в  $G$ , то есть такой поверхности, что существует  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область такая, что  $\partial\Omega = \Sigma$

**Вопрос.** Как связаны следующие утверждения?

1. Поле  $\bar{a}$  имеет нулевую дивергенцию в  $G$
2. Поле  $\bar{a}$  соленоидально в  $G$

**Лемма 10.1.** Очевидно, что из соленоидальности следует бездивергентность

*Доказательство.* Используем теорему о геометрическом смысле дивергенции.  $\square$

**Пример.** Контрпримером для 1)  $\Rightarrow$  2) служит кулоновское поле

$$\bar{a} = \frac{\bar{r}}{r^3}$$

Его дивергенция равна 0 в  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , но при этом

$$\iint_{S_r(0)} (\bar{a}, \bar{ds}) = 4\pi \neq 0$$

А значит поле несоленоидально.

**Определение 10.5.** Будем называть область  $G \subset \mathbb{R}^3$  объёмно односвязной, если всякая замкнутая кусочно-гладкая поверхность  $\Sigma \subset G$  ограничивает область  $\Omega$  такую, что  $\Sigma = \partial\Omega$  и  $\Omega \subset G$ .

**Лемма 10.2.** Если есть гладкое поле, которое бездивергентно в объёмно-односвязной области, то это поле соленоидально

*Доказательство.* Для поверхности  $\Sigma$  существует  $\Omega$ , т.ч.  $\partial\Omega = \Sigma$  и  $\Omega \subset G$ . Тогда, используя теорему Остроградского-Гаусса, мы получаем, что  $\iint_{\Sigma} (\bar{a}, \bar{ds}) = 0$ .  $\square$

## 11 Анекдоты

1. Ну и тут возникает вопрос, как это(систему множеств) пощупать?  
Как говорил мой коллега в Италии: No Chance  
Потому что мы с вами не боги, а всего лишь люди
2. Как я возьму множество всех сигма алгебр содержащих  $\mathcal{E}$  Ну это из разряда давайте прыгнем на Луну. Ну или из разряда, как в моем любимом фильме:  
- Видишь суслика?  
- Нет  
- И я нет  
- А он есть
3. Вот и всё. Понятно что произошло?  
Чет как-то вы подсдулись немножко...  
Ну нет, я понимаю что это сложно, для первого восприятия это правда сложно. Я сам когда читал в первый раз, я обалдел, как очень все хитро получается. Кажется что здесь где-то подвох зашит. Но на самом деле нет
4. - Поняли что сказал? Нет?  
Ну кто не понял пересмотрите на видеозаписи и все станет понятно
5. Ну если кто сейчас не понял с первого раза. Потом замедленно это пересмотрите и убедитесь, что я говорю очень простые вещи
6. (Теорема Тонелли) смотрим, получаем удовольствие, да?)
7. Что-то народ стал убегать, отключаться... что вы отключаетесь то?
8. Все я уже зарапортовался... все разобрались
9. Такое множество называется множеством Витали, которое названо в честь Болонского математика Джузеппе Витали. При чем Витали - это не погоняло, это фамилия  
Сама Болония – прекрасный итальянский городок, генерал Тюленев любит туда летать.  
Эту часть сказали убрать из тела. Видимо не любил туда летать :(((
10. Хорошо, ну давайте переходим к поверхностным интегралам. Сейчас жизнь станет полегче, потому что я не буду давать общий интеграл по многообразию. ... Сейчас в конце будет спуск с горы)
11. (параметризуем сферу) .. этот корень будет иметь бесконечную производную, чтобы сделать параметризацию кусочно гладкой поднимем одну шляпку на уровень Италии, а вторую опустим на уровень Аргентины