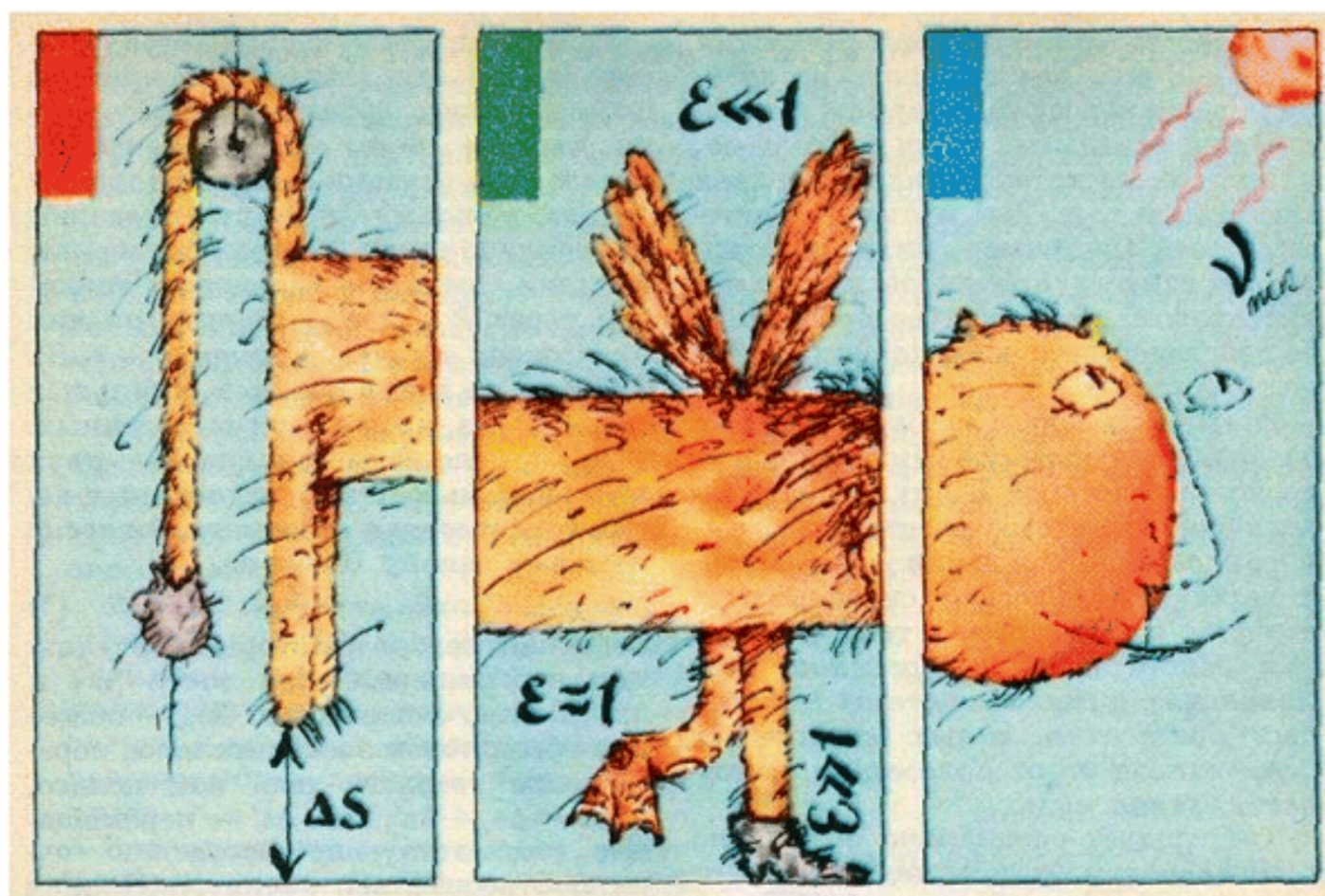


Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики



Лектор: Генерал теории Меры, Александр Иванович Тюленев

Для вас техали: *Потапов Станислав,
Сысоева Александра,
Цеденов Артем,
Бадоря Пётр,
Баронов Михаил,
Шуминов Эзра
Петракова Анастасия
Габидулин Андрей
Некрылов Леонид
Тюленев Александр*

Содержание

1	Введение	2
1.1	Полнота пространств L_p	2
1.2	Неполнота $\mathbb{R}L_p$	5
1.3	Функции ограниченной вариации	6
1.4	Абсолютно непрерывные функции	8
2	Ряды Фурье	9
2.1	Неформальная идея	9
2.2	Строгая теория	10
2.3	Компактная форма записи	11
2.4	Теорема Римана–Лебега	12
2.5	Вторая теорема о среднем	12
3	Сходимость ряда Фурье в точке.	14
3.1	Признаки поточечной сходимости рядов Фурье (продолжение).	16
3.2	Суммы Фейера.	18
3.3	Теорема Фейера	20
3.4	Скорость убывания коэффициентов Фурье	22
4	Введение в теорию евклидовых пространств.	23
5	Аппроксимация функций	27
5.1	Аппроксимативная единица	30
6	Лекции 8, 9	30
7	Лекции 10, 11	31
7.1	Интеграл Дирихле	31
7.2	Преобразование Фурье	34
7.3	Интеграл Фурье	35
7.4	Преобразование Фурье свертки	37
8	Обобщенные функции	40
9	Анекдоты	42

1 Введение

1.1 Полнота пространств L_p

(X, \mathfrak{M}, μ) — пространство с мерой.

$p \in [1, +\infty]$

$\tilde{L}_p(\mu)$ — полунормированное линейное пространство. Лишь *полунормированное* потому, что равенство 0 интеграла в p -ой степени от функции не означает равенство 0 этой функции, а лишь равенство этой функции нулю почти всюду.

$L_p(\mu)$ — нормированное линейное пространство.

Это всё было в прошлом семестре, теперь же мы докажем полноту пространства L_p .

Определение 1.1. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство (л.н.п.) Оно называется *полным*, если

\forall фундаментальная (по норме $\|\cdot\|$) последовательность $\{x^n\}$ пространства E сходится по норме пространства E к некоторому элементу $x \in E$.

Определение 1.2. Дано $E = (E, \|\cdot\|)$ — л.н.п. Пара последовательностей $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ и $\{S^k\}_{k=1}^\infty$, где

$$S^k := \sum_{n=1}^k x^n,$$

называется *формальным рядом* в E . При этом $\{S^k\}_{k=1}^\infty$ называется последовательностью *частичных сумм* ряда, а $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ — членами ряда. Часто пишут просто

$$\sum_{k=1}^\infty x^k \text{ — формальный ряд.}$$

Примечание. В определении выше ряд мы называем *формальным* потому, что ещё не было ничего сказано про его сходимость.

Определение 1.3. Ряд $\sum_{k=1}^\infty x^k$ называется *сходящимся* в л.н.п. E , если

$$\exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=1}^n x^k \right\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Определение 1.4. Ряд $\sum_{k=1}^\infty x^k$ называется *абсолютно сходящимся* в л.н.п. E , если:

$$\sum_{k=1}^\infty \|x^k\| \text{ — сходится}$$

Напоминание. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall m \geq N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

1. Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, но не каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу из своего пространства.
2. Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, называется *полным*.

3. Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Теорема 1.1. (Критерий полноты) E — л.н.н. полно $\iff \forall$ абсолютно сходящийся в E ряд является сходящимся.

Доказательство.

(\implies)

Пусть E полно и $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится абсолютно $\implies \sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$ — сходящийся числовой ряд, а значит последовательность частичных сумм фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=n}^m \|x^k\| < \varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника: $\left\| \sum_{k=n}^m x^k \right\| \leq \sum_{k=n}^m \|x^k\| < \varepsilon$.

Тогда $\{S^n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм исходной последовательности фундаментальна в E .

Но E — полно $\implies \exists x \in E : \|x - S^n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \implies$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится в E

(\impliedby)

Пусть $\{x^n\}$ — фундаментальная последовательность в E . Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Берём $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_k = 2^{-k}$.

$\exists \{N_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_k \hookrightarrow \|x^n - x^m\| \leq 2^{-k}.$$

Рассмотрим $\{x^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность п-ти $\{x^n\}$.

Возьмём $y_k := x^{N_{k+1}} - x^{N_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Положим $y_0 := x^{N_1}$.

Рассмотрим формальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$. В силу выбора подпоследовательности, если в качестве n выбрать N_k , а в качестве m выбрать N_{k+1} , то неравенство $\|x^n - x^m\| \leq 2^{-k}$ будет выполнено $\implies \|y_k\| \leq 2^{-k} \implies \sum_{k=0}^{\infty} y_k$ абсолютно сходится в E .

Но по условию доказываемого утверждения, любой абсолютно сходящийся в E ряд сходится в E , значит

$$\text{ряд } \sum_{k=0}^{\infty} y_k \text{ сходится } \implies \exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=0}^l y_k \right\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty.$$

При этом

$$\sum_{k=0}^l y_k = y_0 + y_1 + \dots + y_l = x^{N_1} + x^{N_2} - x^{N_1} + \dots + x^{N_{l+1}} - x^{N_l} = x^{N_l}.$$

Объединив два последних результата, получим

$$\exists x \in E : \|x - x^{N_l}\| \rightarrow 0, l \rightarrow \infty.$$

В итоге доказали существование элемента $x \in E$ т.ч. к нему сходится подпоследовательности $\{x^{N_l}\}_{l=1}^{\infty}$.

Теперь остаётся воспользоваться условием фундаментальности и получить сходимость всей последовательности.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L \in \mathbb{N} : \forall l \geq L \hookrightarrow \|x - x^{N_l}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq M \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N := \max\{L, M\} \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow \|x - x^n\| \leq \|x - x^{N_m}\| + \|x^{N_m} - x^n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Теорема 1.2. Пусть $p \in [1, +\infty]$. Тогда $L_p(\mu)$ полно.

Доказательство. Разберём случай $p \in [1, +\infty)$. В силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что любой абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$ сходится в $L_p(\mu)$.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ — абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$. То есть $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p$ сходится как числовой ряд. Используем неравенство Минковского:

$$\forall N \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^N |f_k| \right)^p \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^N \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

Определим $F_n := \left(\sum_{k=1}^N |f_k| \right)^p$. Тогда $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ — монотонная (неубывающая) функциональная последовательность.

Напоминание. Монотонность функциональной последовательности — это монотонность последовательность по n при каждом фиксированном x .

Тогда по теореме Леви

$$\begin{aligned} \exists \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_X F_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p} &= \left(\int_X \lim_{N \rightarrow \infty} F_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \\ \Rightarrow \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty. \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| &\text{ конечна при } \mu\text{-п.в. } x \in X. \end{aligned}$$

При фиксированном x имеем $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ — обычный числовой ряд, а для него из абсолютной сходимости следует сходимость.

$$\Rightarrow \text{при } \mu\text{-п.в. } x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ конечна.}$$

Положим $F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, эта функция корректно определена μ -п.в. При этом μ — полная мера (меру считаем полной, если не было оговорено обратного).

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x), \text{ этот предел существует для } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

Остаётся доказать, что $\left\| F - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Обозначим n -ый член этой последовательности как J_n .

$$J_n = \left(\int_X \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\int_X \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad \otimes$$

Рассмотрим сумму ряда, как предел:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)|.$$

Вспомним лемму Фату:

$$\text{При } g_k \geq 0 \text{ верно } \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) d\mu(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) d\mu(x).$$

Тогда по лемме Фату:

$$\left(\int_X \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \otimes \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\int_X |f_k(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Итого $J_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. □

1.2 Неполнота $\mathbb{R}L_p$

Определение 1.5. Пусть $\mathbb{R}L_p([a, b])$ — лин. пространство функций, p -ая степень модуля которых интегрируема по Риману.

Замечание. С таким определением это не является нормированным пространством. Чтобы сделать его нормированным, нужно аккуратно ввести класс эквивалентности.

Теорема 1.3. Пространство $\mathbb{R}L_p([a, b])$ неполно.

Доказательство.

Без ограничения общности, $[a, b] = [0, 1]$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Перенумеруем рациональные точки отрезка $[0, 1]$: $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_k\}$.

$$G_n := \bigcup_{k=1}^n \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right) \cap [0, 1].$$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Тогда χ_{G_n} интегрируема по Риману по критерию Лебега, потому что как характеристическая функция объединения конечного набора интервалов, пересечённых с отрезком, она обладает конечным числом разрывов.

Докажем, что χ_G имеет мн-во точек разрыва положительной меры Лебега. Для этого рассмотрим $F = [0, 1] \setminus G$. Тогда $\chi_G(F) = 0$, но так как \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} , во всех точках F ф-ия χ_G разрывна. При этом по счётной полуаддитивности меры Лебега $\mathcal{L}^n(G) \leq \frac{1}{2}$, а значит $\mathcal{L}^n(F) \geq \frac{1}{2} > 0$.

Введём обозначения

$$E_k := \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right) \cap [0, 1]$$

$$G_m^n := \bigcup_{k=n}^m E_k$$

(в новых обозначениях $G_n = G_n^1$) и покажем фундаментальность последовательности $\{\chi_{G_n}\}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\chi_{G_m}(x) - \chi_{G_n}(x)| dx &= \text{так как } G_n \subseteq G_m = \int_0^1 \chi_{G_m \setminus G_n}(x) dx \leq \int_0^1 \chi_{G_m^n}(x) dx \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \int_0^1 \chi_{E_k}(x) dx = \sum_{k=n+1}^m \frac{\varepsilon}{2^k} \rightarrow 0, \text{ при } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итого, последовательность $\{\chi_{G_n}\} \subset \mathbb{RL}_p([0, 1])$ фундаментальна, но её предел χ_G не лежит в пространстве $\mathbb{RL}_p([0, 1])$, значит это пространство не полно. \square

1.3 Функции ограниченной вариации

Определение 1.6. Пусть T — разбиение отрезка $[a, b]$, т.е.

$$T = \{x_i\}_{i=0}^{N_T}, \quad N_T \in \mathbb{N}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_T} = b.$$

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$V_T(f)$ — вариация ф-ии f по разбиению T

$$V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

$$V_a^b(f) := \sup_{T - \text{разб. } [a, b]} V_T(f)$$

Определение 1.7. f называется ф-ией ограниченной вариации на $[a, b]$, если

$$V_a^b(f) < +\infty.$$

Обозначается $f \in BV([a, b])$

Теорема 1.4. $BV([a, b])$ — линейное пространство.

Доказательство.

Покажем, что $f_1, f_2 \in BV([a, b]) \implies \alpha f_1 + \beta f_2 \in BV([a, b])$.

Пусть T — произвольное разбиение $[a, b]$. Тогда по неравенству треугольника

$$V_T(\alpha f_1 + \beta f_2) \leq |\alpha| V_T(f_1) + |\beta| V_T(f_2).$$

\square

Лемма 1.1. Если $\forall f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна на $[a, b]$, то $f \in BV([a, b])$ и её $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

Доказательство. Очевидно. \square

Лемма 1.2. Пусть $-\infty < a < c < b < +\infty$. Тогда

$$f \in BV([a, b]) \iff \begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$$

В случае, если $f \in BV([a, b])$, тогда

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Доказательство.

1. \implies и \geq

Пусть $f \in BV([a, b])$, T_1 — произв. разб. $[a, c]$, T_2 — произв. разб. $[c, b]$.

$T = T_1 \cup T_2$ — разб. о-ка $[a, b]$.

$$V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_T(f) \leq V_a^b(f).$$

Взяв \sup сначала по T_1 , а потом по T_2 , получим $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$.

2. \impliedby и \leq

$$\text{Пусть } \begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$$

Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^N$ — произв. разб. отрезка $[a, b]$.

Если $c = x_i$ при некотором i , то это простой случай, так как тогда можно $\{x_j\}_{j=0}^i$ выбрать в качестве T_1 , а $\{x_j\}_{j=i}^N$ выбрать в качестве T_2 . И тогда очевидным образом $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$, а взяв \sup по всем T получим $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$.

Теперь рассмотрим более интересный случай, когда ни при каком i x_i не равно c . Тогда $c \in (x_i, x_{i+1})$ при некотором i .

$$\begin{aligned} V_T(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(c)| + |f(c) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \otimes \end{aligned}$$

Обозначим разбиения:

$$T_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_i, c\},$$

$$T_2 = \{c, x_{i+1}, \dots, x_N\}.$$

Тогда полученный ранее результат можно оценить как

$$\otimes V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Итого $V_T(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Взяв \sup по всем T , получим:

$$\sup_T V_T(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Если оба слагаемых в правой части конечны, то и V_a^b конечна.

Итого из первого и второго пункта

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

□

Теперь воспользуемся этой леммой для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.5. Пусть $f \in BV([a, b])$. Тогда ф-ия $g(x) := V_a^x$ монотонно не убывает на $[a, b]$

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда применим только что доказанную лемму, выбрав $a = a, c = x_1, b = x_2$.

$$\begin{aligned} V_a^{x_2}(f) &= V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) \\ V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) &= V_{x_1}^{x_2}(f) \geq 0 \\ g(x_2) - g(x_1) &\geq 0 \\ g(x_2) &\geq g(x_1) \end{aligned}$$

□

Теорема 1.6. Пусть $f \in BV([a, b])$. Тогда $\exists f_1$ и f_2 монотонно неубывающие на $[a, b]$ такие, что $f = f_1 - f_2$.

Доказательство. Определим $f_1(x) := V_a^x(f) \quad \forall x \in [a, b]$. По только что доказанной теореме это монотонно неубывающая функция.

Докажем, что ф-ия $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ монотонно не убывает.

$$a \leq x \leq y \leq b.$$

$$f_2(y) - f_2(x) = [f_1(y) - f(y)] - [f_1(x) - f(x)] = [f_1(y) - f_1(x)] - [f(y) - f(x)] \stackrel{(1)}{=} V_x^y(f) - [f(y) - f(x)].$$

(1) В силу аддитивности вариации по отрезкам

Заметим, что $V_x^y(f) = \sup_T V_T(f) \geq V_{\{x, y\}}(f) = |f(y) - f(x)|$. Тогда предыдущее выражение не меньше 0, а значит f_2 не убывает. □

Следствие. $\forall f \in BV([a, b])$ имеет не более чем счётное множество т. разрыва 1-го рода.

1.4 Абсолютно непрерывные функции

Определение 1.8. Ф-ия $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной на $[a, b]$, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \text{ дизъюнктивной системы } \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |a_k - b_k| < \delta(\varepsilon) \\ \hookrightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

$AC([a, b])$ — мн-во всех абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций.

Замечание. $f \in AC([a, b])$ является непрерывной на $[a, b]$. Обратное неверно

Контрпример.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \in C([0, 1])$, но $f \notin BV([0, 1])$, а значит по теореме, которая будет доказана ниже, $f \notin AC([0, 1])$.

Теорема 1.7. Если $f \in AC([a, b])$, то $f \in BV([a, b])$.

Доказательство. Запишем (1.4.1) при $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta = \delta(1) > 0 : \forall$ конечного попарно непересекающегося набора интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |b_k - a_k| < \delta \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < 1$. Теперь разобьём отрезок $[a, b]$. Пусть $\mathbb{N} \ni M := \left\lceil \frac{|b-a|}{\delta} \right\rceil + 1$.

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= a + \frac{b-a}{M} \\ &\vdots \\ x_M &= a + b - a = b. \end{aligned}$$

То есть поделили отрезок $[a, b]$ на одинаковые куски.

Так как $x_{i+1} - x_i < \delta$ (специально для выполнения этого было взято достаточно большое M), то \forall разб. о-ка $[x_i, x_{i+1}]$ образует естественным образом конечным набор дизъюнктивных интервалов суммарной длины меньше δ , а значит по абсолютной непрерывности $V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < 1 \quad \forall i$

Тогда в силу аддитивности вариации

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{M-1} V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < \sum_{i=0}^{M-1} 1 = M < +\infty.$$

□

2 Ряды Фурье

Идея представления функции тригонометрическим рядом являлась одной из центральных на рубеже 18-19 веков. Однако, строгая теория оформилась лишь к началу 20-века.

2.1 Неформальная идея

Прежде чем переходить к строгим формулировкам, поясним неформально корни идей, лежащих в основе теории рядов Фурье.

Если $V := (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – конечномерное евклидово пространство, а $\{e_n\}_{n=1}^N$ – ортогональный базис в V , то любой вектор $x \in V$ имеет следующее разложение по базису $\{e_n\}_{n=1}^N$:

$$x = \sum_{n=1}^N \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n. \quad (2.1.1)$$

Естественно поставить вопрос, имеется ли аналог (2.1.1) для бесконечномерных евклидовых пространств?

Оказывается, в некоторых важных случаях ответ на этот вопрос положительный. Более точно, если $H := (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – бесконечномерное гильбертово пространство (то есть евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением), а $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в нем, то для всякого $x \in H$ имеем

$$x = \sum_{n=1}^\infty \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n. \quad (2.1.2)$$

При этом числа

$$c_n(x) := \frac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1.3)$$

называются *коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$* , а ряд в правой части (2.1.2) – *рядом Фурье элемента x по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$* .

Частный случай гильбертова пространства – $L_2([-l, l])$, где $l > 0$ – фиксированное число. Действительно, скалярное произведение, порождающее L_2 -норму, задается формулой (мы рассматриваем случай комплексного пространства)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-l}^l f(x) \bar{g}(x) dx.$$

Можно показать, что система функций

$$1, \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \dots \quad (2.1.4)$$

является ортогональным базисом в пространстве $L_2([-l, l])$. Иными словами, для любой функции $f \in L_2([-l, l])$ ее ряд Фурье сходится к ней в смысле среднего квадратичного. Кроме того, ортогональным базисом является также система комплексных экспонент

$$\{e^{\frac{i\pi k x}{l}}\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (2.1.5)$$

Отметим, однако, что формально, при $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты

$$a_k(f) := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx, \quad b_k(f) := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx$$

имеют смысл для $f \in L_1([-l, l])$.

Примечание. Здесь и далее a_k, b_k это коэффициенты перед косинусом и синусом соответственно, а c_k перед комплексной экспонентой.

2.2 Строгая теория

Определение 2.1. Гильбертово пространство — это вещественное линейное пространство H , на котором задано скалярное произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющее следующим аксиомам для всех $x, y, z \in H$ и $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (симметричность),
2. $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (линейность по первому аргументу),
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$, причём $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (положительная определённость).

При этом пространство H считается **полным** по норме, индуцированной внутренним произведением:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

То есть всякая фундаментальная последовательность в H сходится в H .

Определение 2.2. (Топологический базис или базис Шаудера) Пусть у нас есть X - л.н.п, будем говорить что система ненулевых векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом Шаудера пространства X , если:

$$\forall x \in X \exists! \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R} \hookrightarrow \|x - \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) e_k\| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

То есть $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) e_k$. Из единственности в определении следует линейная лезависимость системы векторов.

Без ограничения общности будем работать с элементами $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Каждому такому элементу можно сопоставить формальный ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе

$$f \sim a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx),$$

а также по системе комплексных экспонент

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}.$$

При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим оператор n -ой частичной суммы ряда Фурье $S_n : L_1([-\pi, \pi]) \rightarrow C([-\pi, \pi])$. При $f \in L_1([-\pi, \pi])$ положим

$$S_n[f](x) := a_0(f) + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx).$$

2.3 Компактная форма записи

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \cos(kx) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \sin(kx) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

где D_n – ядро Дирихле, то есть

$$\begin{aligned} D_n(x) &:= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})} \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \sin\left(k\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(k\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \right] \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\pi \sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Свойства ядра Дирихле:

- 1) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$;
- 2) D_n – четная 2π -периодическая функция.

2.4 Теорема Римана–Лебега

Докажем теперь важную теорему Римана–Лебега об осцилляции.

Примечание. (От редакторов) Эту теорему более наглядной делает ее более простая версия, без комплексных экспонент, а с тригонометрическими функциями, тогда мы понимаем что $y = \omega$ это "частота колебаний" нашего синуса:

Функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a, b) . Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\omega x) dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(\omega x) dx = 0.$$

Теорема 2.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу множество и $f \in L_1(E)$. Тогда

$$I(y) := \int_E f(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx \rightarrow 0, \quad \|y\| \rightarrow +\infty. \quad (2.4.1)$$

Доказательство. Будем считать функцию f продолженной нулем вне множества E . При $y \neq 0$ рассмотрим вектор $h = h(y) := \frac{\pi y}{\|y\|^2}$. Тогда сделав замену переменной $x = x' - h$ имеем

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x' - h) e^{-i\pi} e^{i\langle x', y \rangle} dx' = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x - h) e^{i\langle x, y \rangle} dx.$$

Таким образом, поскольку $h(y) \rightarrow 0$, $\|y\| \rightarrow \infty$, получим

$$2|I(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - h(y))) e^{i\langle x, y \rangle} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - h(y))| dx \rightarrow 0, \quad \|y\| \rightarrow +\infty. \quad (2.4.2)$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f \in L_1([-\pi, \pi])$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k(f) = 0.$$

2.5 Вторая теорема о среднем

В этом пункте мы докажем одно вспомогательное утверждение из теории интеграла Римана, которое будет очень важно при доказательстве достаточных условий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 2.2. Пусть $g \in R([a, b])$, а f нестрого монотонна на $[a, b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx. \quad (2.5.1)$$

Если, кроме того, f неотрицательна на $[a, b]$, то справедливы более простые формулы:

а) если f нестрого убывает, то при некотором $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx; \quad (2.5.2)$$

б) если f нестрого возрастает, то при некотором $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx. \quad (2.5.3)$$

Доказательство. Отметим, что $fg \in R([a, b])$, что легко следует из критерия Лебега. Поэтому, левые части формул (2.5.1)–(2.5.3) имеют смысл.

Мы докажем лишь формулу (2.5.2), поскольку (2.5.3) доказывается аналогично, а равенство (2.5.1) легко вытекает из (2.5.2) и (2.5.3).

Step 1. Итак, пусть f неотрицательна и нестрого убывает на $[a, b]$. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. То есть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Тогда, очевидно, в силу линейности интеграла Римана имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x) dx =: \Sigma_1(T) + \Sigma_2(T). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Step 2. Поскольку $g \in R([a, b])$, она ограничена на $[a, b]$. Следовательно, $\sup_{x \in [a, b]} |g(x)| < +\infty$. Легко видеть, что

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) |x_i - x_{i+1}|,$$

где $\omega_i := \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$ – колебание функции f на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Таким образом, в силу критерия интегрируемости, имеем (здесь и далее через $l(T)$ обозначена мелкость разбиения T)

$$\Sigma_1(T) \rightarrow 0, \quad l(T) \rightarrow 0. \quad (2.5.5)$$

Step 3. Рассмотрим функцию $G(x) := \int_a^x g(t) dt$. Очевидно, что G непрерывна на $[a, b]$. Используя преобразование Абеля, имеем (здесь использовано, что $G(x_0) = G(a) = 0$)

$$\begin{aligned} \Sigma_2(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i) \\ &= f(x_{n-1})G(b) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i))G(x_i). \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

В силу непрерывности G на $[a, b]$ найдутся константы m, M , для которых $m \leq G(x) \leq M$ при всех $x \in [a, b]$. Ключевое наблюдение состоит в том, что в силу невозрастания f , имеем $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$ при всех i . Суммируя сделанные наблюдения, имеем

$$\begin{aligned} mf(a) &= m \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + mf(x_{n-1}) \\ &\leq \Sigma_2(T) \leq M \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + Mf(x_{n-1}) = Mf(a). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Из (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.7) следует, что $\exists \lim_{l(T) \rightarrow 0} \Sigma_1(T) = \int_a^b f(x)g(x) dx$ и, кроме того,

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mf(a). \quad (2.5.8)$$

Step 4. Если $f(a) = 0$, то в силу (2.5.8) в качестве ξ можно взять любую точку отрезка $[a, b]$. Если $f(a) \neq 0$, то в силу теоремы о промежуточном значении, примененной к непрерывной функции G , из (2.5.8) выводим, что найдется точка $\xi \in [a, b]$, для которой

$$G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (2.5.9)$$

Теорема полностью доказана.

3 Сходимость ряда Фурье в точке.

Мы начнём с формулировки общего критерия сходимости, не требующего знания конкретных свойств регулярности функций. Поэтому мы называем его “абстрактным”. Он бесполезен с практической точки зрения, поскольку по сути является переформулировкой определения. С другой стороны, такая формулировка окажется полезной при доказательстве конкретных признаков сходимости рядов Фурье.

Абстрактный критерий сходимости.

Комбинируя (??), (??), и пользуясь четностью ядра Дирихле, при $f \in L_1([-\pi, \pi])$ получим

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t - x)}{\sin(\frac{t-x}{2})} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} f(x - u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} f(x + u) du. \end{aligned} \quad (3.0.1)$$

Лемма 3.1. При $n \in \mathbb{N}$ и $u \in (-\pi, \pi)$ справедливо равенство

$$D_n(u) = \frac{\sin(nu)}{\pi u} + \frac{1}{2\pi} (\cos(nu) + g(u) \sin(nu)), \quad (3.0.2)$$

где функция $g : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ не зависит от n и ограничена на интервале $(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы, получим

$$D_n(u) = \frac{\sin(nu) \cos(\frac{u}{2})}{2\pi \sin(\frac{u}{2})} + \frac{\cos(nu)}{2\pi} = \frac{\sin(nu)}{\pi u} + \frac{1}{2\pi} (\cos(nu) + g(u) \sin(nu)), \quad (3.0.3)$$

где мы положили $g(0) = 0$ и

$$g(u) := \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{u}{2})} - \frac{2}{u}, \quad u \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}.$$

Нетрудно видеть, что g – нечетная на $(-\pi, \pi)$ и монотонно убывает. Поэтому, $|g(u)| \leq 2/\pi$ при всех $u \in (-\pi, \pi)$.

Лемма доказана.

Теперь мы готовы сформулировать “абстрактный” критерий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 3.1. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является 2π -периодичной, и $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Ряд Фурье f сходится в точке $x \in \mathbb{R}$ к числу $S \in \mathbb{R}$ в том и только том случае, если существует $\delta \in (0, \pi]$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - S \right] \frac{\sin(nu)}{u} du = 0. \quad (3.0.4)$$

Доказательство. Нам будет удобно сделать несколько шагов.

Шаг 1. В силу леммы 3.1 мы можем переписать (3.0.1) в виде

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} f(x+u) du + \varepsilon_n[f](x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} f(x-u) du + \varepsilon_n[f](x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(x-u) + f(x+u)}{2} \right] \frac{\sin(nu)}{\pi u} du + \varepsilon_n[f](x), \end{aligned} \quad (3.0.5)$$

где мы положили (равенство справедливо в силу четности косинуса и в силу четности произведения $g(u) \sin(nu)$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_n[f](x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)(\cos(nu) + g(u) \sin(nu)) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)(\cos(nu) + g(u) \sin(nu)) du. \end{aligned} \quad (3.0.6)$$

По теореме Римана–Лебега ?? имеем $\varepsilon_n[f](x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Шаг 2. Используя рассуждения предыдущего шага для $f \equiv 1$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} du = 1 + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.0.7)$$

Шаг 3. Комбинируя (3.0.4) и (3.0.7), имеем

$$|S - S_n[f](x)| = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - S \right] \frac{\sin(nu)}{\pi u} du + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.0.8)$$

Шаг 4. Функция $1/u$ ограничена на интервале (δ, π) (при любом фиксированном $\delta > 0$). Следовательно, по теореме Римана–Лебега получим

$$\int_{\delta}^{\pi} \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - S \right] \frac{\sin(nu)}{\pi u} du = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, учитывая четность функции $\sin(nu)/u$, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - S \right] \frac{\sin(nu)}{\pi u} du &= 2 \int_0^{\delta} \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - S \right] \frac{\sin(nu)}{\pi u} du \\ &+ 2 \int_{\delta}^{\pi} \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - S \right] \frac{\sin(nu)}{\pi u} du \\ &= 2 \int_0^{\delta} \left[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - S \right] \frac{\sin(nu)}{\pi u} du + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.0.9)$$

Комбинируя (3.0.8) и (3.0.9), получим (3.0.4).

Теорема доказана.

Теперь установим признак Дирихле–Жордана.

Теорема 3.2. Если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -периодична, и $f \in BV((a,b)) \cap L_1([-\pi,\pi])$ для некоторого интервала (a,b) , то её ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in (a,b)$, причем

$$S_n[f](x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. В силу теоремы о представлении функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций, достаточно рассмотреть случай, когда f не убывает.

Шаг 1. Зафиксируем точку $x_0 \in (a,b)$. В силу теоремы 3.1 достаточно доказать, что при некотором $\delta > 0$

$$I_n := \int_0^\delta \frac{\sin(nu)}{u} [f(x_0 + u) - f(x_0)] du \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Шаг 2. По признаку Дирихле несобственный интеграл (понимаемый в смысле Римана или в смысле Лебега)

$$J := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

является сходящимся. Поэтому существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin(nu)}{u} du \right| = \left| \int_{nt_1}^{nt_2} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq C \quad \forall t_1 < t_2. \quad (3.0.10)$$

Шаг 3. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, что $U_\delta(x_0) \subset (a,b)$ и при этом $|f(x_0 + 0) - f(x_0 + u)| < \frac{\varepsilon}{2C}$ при всех $u \in (0, \delta(\varepsilon))$. В силу второй теоремы о среднем имеем

$$I_n^1 := \int_0^{\delta(\varepsilon)} \frac{\sin(nu)}{u} [f(x_0 + u) - f(x_0)] du = [f(x_0 + \xi) - f(x_0)] \int_\xi^{\delta(\varepsilon)} \frac{\sin(nu)}{u} du.$$

Отсюда и из (3.0.10) имеем $|I_n^1| < \varepsilon/2$.

Шаг 4. В силу теоремы Римана–Лебега ?? имеем существование такого числа $N_\varepsilon := N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$, что при $n \geq N_\varepsilon$

$$|I_n^2| := \left| \int_{\delta(\varepsilon)}^\delta \frac{\sin(nu)}{u} [f(x_0 + u) - f(x_0)] du \right| < \varepsilon/2.$$

Шаг 5. Собирая вышеприведенные оценки, получаем, что $|I_n| < \varepsilon$ при всех $n \geq N_\varepsilon$.

Теорема полностью доказана.

3.1 Признаки поточечной сходимости рядов Фурье (продолжение).

Определение 3.1. Будем говорить, что точка x_0 функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является регулярной, если в ней $\exists f(x_0 \pm 0)$ и $\exists f'_\pm(x_0)$.

Следствие (Из признака Дини). Пусть дана 2π -периодическая функция $f \in L_1([-\pi,\pi])$. Тогда если x_0 — регулярная точка функции f , то ряд Фурье f сходится в ней к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Для доказательства в силу признака Дини достаточно проверить, что $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\int_0^\delta |f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)| \frac{du}{u} < +\infty.$$

Поскольку

$$\frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} \rightarrow f'_+(x_0), u \rightarrow +0 \quad \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u} \rightarrow f'_-(x_0), u \rightarrow +0.$$

То есть существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} \right| \in \left[\frac{|f'_+(x_0)|}{2}, 2|f'_+(x_0)| \right] \quad \left| \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u} \right| \in \left[\frac{|f'_-(x_0)|}{2}, 2|f'_-(x_0)| \right] \forall u \in (0, \delta).$$

А значит выполнено условие Дини и ряд сходится к полусумме односторонних пределов. \square

Пример (Шварц). Существует непрерывная 2π -периодическая функция такая, что её ряд Фурье расходится в нуле.

Определим функцию f как

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \sin n_k t & t \in [t_k, t_{k-1}], k = 2, \dots \end{cases}$$

где $n_k = 2^{k!}$, $t_1 = \pi$ и $t_k = \frac{2\pi}{n_k}$, $k > 1$. Определим $J_n[f]$ как

$$J_n[f](0) = \int_0^\pi \frac{\sin nt}{t} f(t) dt.$$

Исследуем поведение $J_n[f]$ на гармониках n_k :

$$J_{n_k}[f](0) = \int_0^\pi \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt = \int_0^{t_k} \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt + \int_{t_k}^{t_{k-1}} \frac{\sin^2 n_k t}{t\sqrt{k}} dt + \int_{t_{k-1}}^\pi \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt = F_k + J_k + H_k.$$

Рассмотрим для начала поведение интеграла J_k :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \sin^2 \tau \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \frac{1 - \cos 2\tau}{2\tau} d\tau.$$

где $A_k = 2\pi \frac{n_k}{n_{k-1}}$. Заметим, что

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos 2\tau}{\tau} d\tau.$$

сходится по признаку Дирихле, а значит

$$\exists C > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \int_{2\pi}^{A_k} \frac{\cos 2\tau}{2\tau} d\tau \right| < C.$$

С другой стороны,

$$\int_{2\pi}^{A_k} \frac{d\tau}{2\tau} = \ln \frac{A_k}{2\pi} = \frac{1}{2} (k! - (k-1)!) \ln 2 \geq \frac{k! \ln 2}{3}.$$

А значит

$$J_k \geq \frac{\ln 2}{3\sqrt{k}} k! + O(1).$$

Оценим H_k :

$$|H_k| \leq \int_{t_{k-1}}^\pi \ln \frac{\pi}{t_{k-1}} \ln \frac{n_{k-1}}{2} \leq (k-1)! \ln 2.$$

И последний интеграл:

$$|F_k| \leq \int_0^{t_k} \left| \frac{\sin n_k t}{t} f(t) \right| dt \leq \int_0^{t_k} \frac{|\sin n_k t|}{t} |f(t)| dt \leq \int_0^{t_k} |n_k f(t)| dt \leq \frac{n_k t_k}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, получается:

$$J_{n_k}[f](0) \geq \frac{\ln 2}{3\sqrt{k}} k! + O(1) - (k-1)! \ln 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \geq (k-1)! \ln 2 \left(\frac{\sqrt{k}}{3} - 1 \right) + O(1) \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty.$$

А значит $S_{n_k}[f](0) \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty$ и ряд Фурье функции f расходится в нуле.

3.2 Суммы Фейера.

Определение 3.2. Пусть дана 2π -периодическая $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Суммой Фейера для f будем называть

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_i[f].$$

Распишем подробнее сумму Фейера через выражение для ядер Дирихле:

$$\sigma_n[f](x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-u)}{\sin u/2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+1/2)u du.$$

В тоже время,

$$\frac{1}{\sin u/2} (\sin u/2 + \dots + \sin(n-1/2)u) \sin u/2 = \frac{1}{2 \sin u/2} (1 - \cos nu).$$

Определение 3.3. Ядром Фейера будем называть

$$\Phi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k = \frac{\sin^2 nu/2}{2\pi n \sin^2 u/2}.$$

Тогда сумма Фейера для f может быть записана как свёртка ядра Фейера и функции f :

$$\sigma_n[f](x) = \Phi_n * f = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-u) f(u) du.$$

Ядро Фейера можно также записать в виде

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(u) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|j|<k} e^{iku} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{iku}$$

Утверждение 3.1. Нетрудно заметить некоторые свойства ядра Фейера:

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \Phi_n \geq 0$.
- ▷ Φ_n — 2π -периодичная функция.
- ▷ Поскольку $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) du = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1.$$

- ▷ Для ядра Фейера справедливо т.н. «фокусирующее свойство»:
при всяком $\delta > 0$ и $\delta < |u| < \pi$ верно

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin nu/2}{\sin u/2} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi n \sin^2 \delta/2} \leq \frac{\pi}{2n\delta^2} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

Таким образом,

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \sup_{\delta < |u| < \pi} \Phi_n(u) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

Определение 3.4. Будем говорить, что для $\alpha \in (0, 1)$ функция лежит в $H^\alpha(\mathbb{R})$ (т.е. удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α) если

$$\exists C > 0 \forall x', x'' \in \mathbb{R} \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| \leq C|x' - x''|^\alpha.$$

Теорема 3.3. Пусть дана 2π -периодическая $f \in H^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда ряд Фурье f сходится к ней равномерно на \mathbb{R} . Более того,

$$\left| S_n[f](x) - f(x) \right| \leq C \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для начала рассмотрим отклонения от суммы Фейера:

$$\sigma_n[f](x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\Phi_n(t)dt.$$

То есть

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\Phi_n(t)dt \leq \frac{C}{2\pi n} \int_0^{\pi} t^\alpha \cdot \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2 t/2} dt \leq (*)$$

Но, поскольку $\sin t/2 \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}$, то

$$(*) \leq \frac{C\pi}{2n} \int_0^{\pi} t^{\alpha-2} \sin^2(nt/2) dt = (*)$$

Теперь сделаем замену $nt/2 = u$ и получим

$$(*) = \frac{C\pi}{2n} \int_0^{\pi n/2} \left(\frac{2u}{n}\right)^{\alpha-2} \cdot \sin^2 u \cdot \frac{2u}{n} du \leq \frac{2^{\alpha-2}C\pi}{n^\alpha} \int_0^{\pi n/2} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}} du.$$

Но $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}} du$ сходится в несобственном смысле, а значит $\exists \tilde{C} > 0$ такая, что

$$\left| \int_0^{\pi n/2} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}} du \right| \leq \tilde{C}.$$

И отклонение суммы Фейера от функции оценивается как

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| \leq \frac{M}{n^\alpha}.$$

Пусть $\varphi_n = f - \sigma_n[f]$. Тогда

$$\left| S_n[f](x) - f(x) \right| = \left| S_n[\varphi_n](x) - \varphi_n(x) \right|,$$

поскольку

$$S_n[\sigma_n[f]] = \sigma_n[f].$$

А это верно из того, что сумма Фейера – это тригонометрический полином n -ой степени. Тогда

$$\left| S_n[f](x) - f(x) \right| \leq |S_n[\varphi_n](x)| + |\varphi_n(x)| = (*)$$

Оценка для φ_n уже есть выше. Для оператора частичной суммы некоторой 2π -периодической функции g мы можем дать следующую оценку:

$$\begin{aligned} S_n[g](x) &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t)| \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} \right| dt \leq \\ &\leq 2 \sup_{[-\pi, \pi]} |g| \cdot \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} \right| dt \leq \\ &\leq C_1 \sup |g| \int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{|\sin v|}{v} dv \leq \tilde{C} \sup |g| \ln n. \end{aligned}$$

Таким образом

$$(*) \leq \hat{C} \frac{M \ln n}{n^\alpha}.$$

Что доказывает равномерную сходимостъ и показывает требуемую оценку на отклонение частичной суммы. \square

Замечание. Рассуждая аналогично, в случае $\alpha = 1$ можно получить более грубую оценку:

$$\|S_n[f] - f\|_{C([- \pi, \pi])} \leq \frac{C \ln^2 n}{n}.$$

Но на самом деле можно при условии $f \in LIP(\mathbb{R})$ справедлива более сильная оценка:

$$\|S_n[f] - f\|_C \leq \frac{C \ln n}{n}.$$

3.3 Теорема Фейера

Теорема 3.4. Пусть $f \in C([- \pi, \pi])$ и f — 2π -периодична. Тогда $\sigma_n[f] \xrightarrow[\mathbb{R}]{} f$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу периодичности $\sigma_n[f]$ и f достаточно доказать, что $\sigma_n[f] \xrightarrow{[- \pi, \pi]} f$, $n \rightarrow \infty$.

Поскольку $f \in C([- \pi, \pi])$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна. Значит её модуль непрерывности стремится к нулю:

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x', x'' \in [-2\pi, 2\pi] \\ |x' - x''| < \delta}} |f(x') - f(x'')| \rightarrow 0, \delta \rightarrow +0.$$

Формально, описанное выше выражение определено для $\delta \in (0, 4\pi)$. Запишем по определению сумму Фейера:

$$\sigma_n[f](x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Phi_n(x-t) dt, \text{ где } \Phi_n(t) \text{ — ядро Фейера.}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} |\sigma_n[f](x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x) dt \right| \leq I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt = I_1(\delta) + I_2(\delta). \\ I_1(\delta) &= \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt \leq \omega_\delta[f] \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) dt \leq \omega_\delta[f]. \end{aligned}$$

В этой оценке мы ограничиваем сверху $|f(x-t) - f(t)|$ через модуль непрерывности,

$$\text{а } \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) dt \leq 1.$$

$$I_2(\delta) = \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \Phi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt.$$

Так как f — непрерывна на $[-2\pi, 2\pi]$, то $\exists M > 0$ такое, что $|f(x)| \leq M \forall x \in [-2\pi, 2\pi]$. Тогда можем оценить $|f(x-t) - f(x)| \leq |f(x)| + |f(x-t)| \leq 2M$.

Из вышеприведенного утверждения и того, что $\forall \delta > 0 \sup_{\delta < |u| < \pi} \Phi_n(u) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ и ограничения, описанного выше, получаем:

$$I_2(\delta) \leq 2M \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \Phi_n(t) dt \leq 2M \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$\forall \varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что $I_1(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем, при фиксированном $\delta(\varepsilon)$ выберем $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таким, что $\forall n > N(\varepsilon) I_2(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Итого, получается, $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\delta(\varepsilon)) = \tilde{N}(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow I_n < \varepsilon$. \square

Определение 3.5. Функция $T_n(x) = c_0 + \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=0}^n \sin(kx)$ называется тригонометрическим полиномом степени n , если $|a_n| + |b_n| \neq 0$.

Следствие (Первая теорема Вейерштрасса). Пусть $f \in C([- \pi, \pi])$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0 \exists$ тригонометрический полином T_ε такой, что $\|f - T_\varepsilon\|_{C([- \pi, \pi])} \leq \varepsilon$.

Следствие (Теорема Вейерштрасса). Пусть $-\infty < a < b < \infty$ и $f \in C([a, b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ полином $P_\varepsilon[f]$ такой, что $\|f - P_\varepsilon[f]\|_{C([a, b])} < \varepsilon$.

Доказательство. Для удобства доказательства перенесем отрезок $[a, b]$ в отрезок $[0, \pi]$. Пусть $x \in [a, b]$, а $t \in [0, \pi]$. Обозначим $\varphi(x)$ — взаимно однозначная функция, преобразующая точку из первого отрезка в точку из второго отрезка. Тогда $x(t) = \varphi^{-1}(t) = a + \frac{b-a}{\pi}t$.

Заметим, что $f \circ \varphi \in C([0, \pi])$. Продолжим f чётным образом. Получим функцию $\tilde{f} \in C([- \pi, \pi])$ и $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$.

Применим теорему Фейера к функции \tilde{f} .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \sigma_n[\tilde{f}] \text{ такая, что } \|\tilde{f} - \sigma_n[\tilde{f}]\|_{C([- \pi, \pi])} < \varepsilon.$$

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k[\tilde{f}], \text{ где } S_k[\tilde{f}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j(\tilde{f}) \cos(jx) + \sum_{j=1}^k b_j(\tilde{f}) \sin(jx)$$

Вспомним, что $\cos(jx)$ и $\sin(jx)$ — аналитические $\forall j \in \mathbb{N}$. Следовательно, на любом отрезке $[-A, A] \subset \mathbb{R}$ к ним равномерно сходятся их ряды Тейлора. Тогда мы можем приблизить $\cos(jx)$ и $\sin(jx)$ полиномами Тейлора настолько, чтобы после сложения получилось что-то «небольшое». Обозначим $P_j(x)$ — полином Тейлора для $\sin(jx)$, а $Q_j(x)$ — полином Тейлора для $\cos(jx)$. Можно выбрать полиномы Тейлора так, чтобы существовали ε_j и $\tilde{\varepsilon}_j$ такие, что:

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |P_j(x) - \sin(jx)| < \varepsilon_j$$

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |Q_j(x) - \cos(jx)| < \tilde{\varepsilon}_j$$

И при этом выполнялось:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k |a_j| \varepsilon_j + |b_j| \tilde{\varepsilon}_j \right) < \varepsilon$$

Тогда, полагая

$$P_\varepsilon[\tilde{f}] := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j(\tilde{f}) Q_j + b_j(\tilde{f}) P_j \right)$$

$P_\varepsilon[f](t)$ «живет» на отрезке $[-\pi, \pi]$. Теперь мы хотим перенести его на $[0, 1]$.

Положим $t(x) = \frac{x-a}{b-a}\pi$. Тогда $P_\varepsilon[f] = P_\varepsilon[\tilde{f}](t(x))$ — искомый полином, так как $\tilde{f}(t(x)) = f(x)$.

Тогда заметим, что $\sup_{t \in [-\pi, \pi]} |\tilde{f}(t) - P_\varepsilon[\tilde{f}](t)| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P_\varepsilon[f](x)| < \varepsilon$. \square

3.4 Скорость убывания коэффициентов Фурье

Общая концепция: чем более гладкая функция, тем быстрее убывают коэффициенты Фурье.

Лемма 3.2 (Основная). Пусть $f \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Тогда $c_f(y) = f(x)e^{-ixy} = O(\frac{1}{n}), y \rightarrow \infty$.

Доказательство. Так как $f \in BV(\mathbb{R})$, то $f(x) = u(x) + v(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где $u(x)$ — нестрого возрастающая функция на \mathbb{R} , а $v(x)$ — нестрого убывающая функция на \mathbb{R} .

Тогда можно записать $\forall a, b : -\infty < a < b < \infty$:

$$\begin{aligned} c_{[a,b]}(y) &= \int_a^b f(x)e^{-ixy} dx = \int_a^b u(x)e^{-ixy} dx + \int_a^b v(x)e^{-ixy} dx \Rightarrow \\ \exists \xi \in [a, b], \zeta \in [a, b] : c_{[a,b]}(y) &= u(a+0) \int_a^\xi e^{-ixy} dx + u(b-0) \int_\xi^b e^{-ixy} dx + \\ &+ v(a+0) \int_a^\zeta e^{-ixy} dx + v(b-0) \int_\zeta^b e^{-ixy} dx. \end{aligned}$$

Ключевое наблюдение: если $f \in BV(\mathbb{R})$ и интегрируема, то $f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$.

Пусть $f \not\rightarrow 0$. Тогда $\exists > 0$ такой, что $\forall \delta > 0 \exists x : |f(x)| > C$. Но при этом, $f \in L_1(\mathbb{R})$, так как интегрируема. Тогда, $\exists \tilde{x} : |\tilde{x}| > \delta, |f(\tilde{x})| < \frac{C}{2}$. Получаем противоречие, так как можно получить бесконечный набор точек $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$, которые мы набираем по описанному выше условию.

Ограничим:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^\xi e^{-ixy} dx \right| &< \frac{2}{|y|} & \left| \int_\xi^b e^{-ixy} dx \right| &< \frac{2}{|y|} \\ \left| \int_a^\zeta e^{-ixy} dx \right| &< \frac{2}{|y|} & \left| \int_\zeta^b e^{-ixy} dx \right| &< \frac{2}{|y|} \\ u(a+0) &\leq V_{\mathbb{R}}(f) & u(b-0) &\leq V_{\mathbb{R}}(f) \\ v(a+0) &\leq V_{\mathbb{R}}(f) & v(b-0) &\leq V_{\mathbb{R}}(f) \end{aligned}$$

Получаем: $|c_{[a,b]}(y)| \leq \frac{8V_{\mathbb{R}}(f)}{|y|}$ — оценка не зависит от выбора интервала $[a, b]$. Устремляя $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$, получаем требуемое. \square

Теорема 3.5 (б/д). Пусть $F \in AC([a, b])$. Тогда F почти всюду имеет классическую производную и, более того, восстанавливается через свою производную по формуле Ньютона - Лейбница.

Теорема 3.6 (Интегрирование по частям, б/д). Пусть $F \in AC([a, b]), g \in L_1([a, b])$. Тогда верна формула интегрирования по частям: $\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx$,

где $G(x) = \int_a^x g(t)dt$

Следствие. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая, такая, что $f^{(k-1)} \in AC([-\pi, \pi])$. Пусть $f^{(k)}$ почти всюду может быть изменена на множестве меры ноль таким образом, что $f^{(k)} \in BV([-\pi, \pi])$. Тогда $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{inx}dx = f(x)e^{inx}|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Прделаем эту операцию k раз. Так как f — 2π -периодична и $f^{(k)} \in AC([-\pi, \pi])$ — тоже 2π -периодична:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}e^{-inx}dx = (in)^k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Но $f^{(k)}$ можно считать $BV([-\pi, \pi])$.

Рассмотрим функцию $F = \begin{cases} f^{(k)}(x), & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $F \in BV([-\pi, \pi])$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx =$

$\int_{\mathbb{R}} F(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$ в силу леммы. С учетом того, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{(in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{inx}dx$ получаем требуемое. □

4 Введение в теорию евклидовых пространств.

Определение 4.1. Пусть $E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — евклидово пространство. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система из ненулевых векторов в нём. Тогда $\forall f \in E$ будем называть

$$\alpha_k(f) = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}, k \in \mathbb{N}.$$

коэффициентом Фурье элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Теорема 4.1 (минимальное свойство коэффициентов Фурье). Пусть $E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — евклидово пространство. Тогда $\forall f \in E \hookrightarrow$

$$\inf_{\beta_1, \dots, \beta_n} \left\| f - \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k(f) e_k \right\|.$$

Доказательство. Пусть $d_n = \sum_{k=1}^n (\alpha_k(f) - \beta_k) e_k$, где β_i — произвольные вещественные коэффициенты. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right\|^2 &= \left\| f - S_n[f] + S_n[f] - \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right\|^2 = \\ &= \langle f - S_n + d_n, f - S_n + d_n \rangle = \langle f - S_n, f - S_n \rangle + 2\langle d_n, f - S_n \rangle + \langle d_n, d_n \rangle, \end{aligned}$$

Где под $S_n[f]$ понимается n -ая сумма ряда Фурье, то есть $S_n[f] = \sum_{k=1}^n \alpha_k(f) e_k$. Заметим, что $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ верно, что

$$\langle e_k, f - S_n[f] \rangle = \langle e_k, f \rangle - \langle e_k, S_n[f] \rangle = \langle e_k, f \rangle - \langle e_k, \alpha_k(f) e_k \rangle = 0.$$

Значит $2\langle d_n, f - S_n \rangle = 0$, и квадрат отклонения выражается как

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right\|^2 = \langle f, f \rangle + \langle d_n, d_n \rangle \geq \langle f, f \rangle,$$

причём минимум достигается при $d_n = 0$. Но, тогда, из ортогональности системы и определения d_n , мы получаем что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\| f - S_n[f] \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right\|.$$

для всяких $\{\beta_i\}$. То есть

$$\left\| f - S_n[f] \right\| \leq \inf_{\beta_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n} \left\| f - \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right\|.$$

Поскольку $S_n[f] = \sum_{k=1}^n \alpha_k(f) e_k$, то утверждение теоремы доказано. \square

Примечание (Геометрическая интерпретация теоремы.). По сути теорема говорит, о том что при проектировании вектора на подпространство, натянутое на первые n базисных векторов наименьшую «длину» (то есть норму) имеет ортогональная проекция на него.

Теорема 4.2 (О единственности). Пусть $E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — евклидово пространство и $f \in E$. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в E и $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ (где сходимость ряда понимается в смысле нормы) Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \alpha_k$ — коэффициент Фурье f .

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$. Тогда

$$|\langle f, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle| = |\langle f - S_n, e_k \rangle| \leq \|f - S_n\| \|e_k\| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

А значит $\forall k \in \mathbb{N} \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle S_n, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle$. В силу ортогональности системы мы получаем искомое утверждение. \square

Лемма 4.1. Пусть дано $E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — евклидово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо следующее:

$$\|f\|^2 = \|f - S_n[f]\|^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2(f) \langle e_k, e_k \rangle$$

Доказательство. Доказательство очевидно в силу ортогональности системы и линейности скалярного произведения. \square

Следствие (Неравенство Бесселя). В условиях предыдущей леммы $\forall f \in E$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы и неотрицательности нормы $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2(f) \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Взятие супремума по $n \in \mathbb{N}$ завершает доказательство. \square

Теорема 4.3 (Рисс, Фишер). Пусть $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — гильбертово пространство (то есть полное относительно нормы евклидово пространство). Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ сходится к некоторому элементу $f \in H$ в смысле евклидовой нормы.
2. Для некоторой $f \in H$ выполняется $\alpha_k = \alpha_k(f)$ при всяком натуральном k .
3. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2$ — сходится.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) очевидна в силу теоремы о единственности: α_k будут просто коэффициентами Фурье своей суммы.

Импликация 2) \Rightarrow 3) очевидна в силу неравенства Бесселя.

Покажем что 3) \Rightarrow 1). Пусть, без ограничения общности, m и n — натуральные и $m > n$. Тогда

$$\left\langle \sum_{k=n}^m \alpha_k e_k, \sum_{k=n}^m \alpha_k e_k \right\rangle = \left\| \sum_{k=n}^m \alpha_k e_k \right\|^2.$$

В силу ортогональности системы и Критерия Коши сходимости числового ряда

$$\sum_{k=n}^m |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2 \rightarrow 0, n, m \rightarrow +\infty.$$

Тогда последовательность частичных сумм ряда фундаментальна и он сходится к $f \in H$, поскольку H — полно. Импликация доказана. \square

Определение 4.2. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Система векторов $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется полной в E , если $\forall f \forall \varepsilon > 0 \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ такая, что $\|f - \sum_{k=1}^n c_k e_k\| < \varepsilon$.

Примечание. Всякий базис Шаудера является полной системой. Обратное неверно: контрпримером является $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ в $C([-1, 1])$. Она полна по теореме Вейерштрасса, но не является базисом. Предположим противное. Тогда для

$$f(x) = |x| \exists! \{c_k\}_{k=0}^{+\infty} : |x| = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k.$$

причём равенство понимается в равномерном смысле. Но тогда по теореме о дифференцируемости степенного ряда мы получаем дифференцируемость f в нуле — противоречие.

Определение 4.3. Пусть $E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — евклидово пространство. Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется замкнутой, если из ортогональности f каждому e_k следует то, что $f = 0$.

Теорема 4.4 («Основная» теорема.). Пусть $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — гильбертово пространство. Пусть $\{e_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Следующие условия эквивалентны:

1. Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — полна.
2. Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — базис.
3. $\forall f \in H$ ряд Фурье по системе $\{e_k\}$ сходится к f .
4. Справедливо равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2.$$

5. Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — замкнута.

Доказательство. Покажем импликацию 1) \Rightarrow 2).

Пусть $\Delta_n = \inf_{\beta_1, \dots, \beta_n} \left\| f - \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right\|, n \in \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что $\Delta_{n+1} \leq \Delta_n \forall n \in \mathbb{N}$, поскольку занулением лишнего коэффициента сводится к предыдущей дельте. Тогда, из монотонности последовательности и неотрицательности каждого из её членов следует существование предела, равного инфимуму:

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = \inf_n \Delta_n.$$

Поскольку по определению полноты $\forall f \in H \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} :$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

то $\inf_n \Delta_n = 0$. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье $\Delta_n = \|f - S_n[f]\|$. А значит $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — базис (из существования предела Δ_n и теоремы о единственности).

Импликация 2) \Rightarrow 3) верна по теореме о единственности — эти коэффициенты в единственном разложении по базису и будут коэффициентами ряда Фурье.

Импликация 3) \Rightarrow 4) следует из ранее доказанной леммы:

$$\|f\|^2 = \|f - S_n[f]\|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k(f) e_k| \langle e_k, e_k \rangle.$$

При устремлении n в бесконечность получаем равенство Парсеваля.

Заметим, что та же самая лемма даёт нам из выполнения равенства Парсеваля базисность системы, а значит 4) \Rightarrow 2. Ранее было замечено, что из базисности системы векторов следует её полнота, то есть 2) \Rightarrow 1). При этом, в вышеприведённых рассуждениях полнота нигде не использовалась, а значит 1), 2), 3), 4) эквивалентны и при условии отсутствия полноты.

Покажем 4) \Rightarrow 5). Пусть существует $f \in H$ такой, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow f \perp e_k$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \alpha_k(f) = 0$ и $\|f\|^2 = 0$ по равенству Парсеваля. По определению нормы $f = 0$ и система замкнута.

Покажем 5) \Rightarrow 1). Зафиксируем $f \in H$. Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k(f)|^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2 < +\infty.$$

По теореме Рисса-Фишера ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f) e_k$ сходится к некоторому элементу $S \in H$. Заметим, что $\langle S, e_k \rangle = \alpha_k(f) \langle e_k, e_k \rangle$ — по теореме о единственности. Тогда $\langle S, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle \forall k \in \mathbb{N}$. Из замкнутости системы $\{e_k\}$ следует что $S - f = 0 \Rightarrow S = f$ и теорема доказана. \square

Примечание. В неполных евклидовых пространствах система может быть замкнута, но не полна. Введём обозначение $e_k = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ (где 1 стоит на k -ом месте).

И пусть $e = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots)$. Рассмотрим тогда подпространство l_2 , которое обозначим за E и определим как

$$E = \text{Lin}(e, e_2, e_3, \dots).$$

с индуцированным скалярным произведением. Очевидно, что E — неполно:

$$\left\| \left(e - \sum_{k=2}^n \frac{e_k}{k} \right) - e_1 \right\| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

но $e_1 \notin E$.

В E система $\{e_2, e_3, \dots\}$ — замкнута (вектор $(c, 0, \dots) \notin E$, а значит если вектор ортогонален всем e_k , то он равен 0), но не полна (e не выражается через e_k).

5 Аппроксимация функций

Для наших целей понадобится приближать наши функции другими, более понятными.

Определение 5.1. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если она является линейной комбинацией индикаторов ячеек.

Теперь докажем, что такие функции приближают по норме L_p .

Теорема 5.1. Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо, $f \in L_p(E)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ ступенчатая функция } h_\varepsilon : \|f - h_\varepsilon\|_{L_p(E)} < \varepsilon.$$

Идея доказательства: как обычно мы доказываем это сначала для простых функций, а позже для всех, сводя к уже доказанному с помощью приближений.

Доказательство. Разобьём доказательство на шаги

1. Пусть $f = I_G$, где множество G имеет конечную меру. Тогда из определения верхней меры следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \{P_k\}_{k=1}^{\infty} : \lambda^n(G) + \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k).$$

Теперь из сходимости ряда мер ячеек следует, что можно взять такой большой номер N :

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^n(P_k) < \varepsilon.$$

По теореме о дизъюнктном представлении в полукольце существует набор непересекающихся $\{Q_l\}_{l=1}^m : P_1 \cup \dots \cup P_N = \bigsqcup_{l=1}^m Q_l$. Обозначим за $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_k, B = P_1 \cup \dots \cup P_N$. Тогда

$$I_B = \sum_{l=1}^m I_{Q_l}.$$

Возьмем в качестве приближающей ступенчатой функции I_B . Осталось доказать, что она приближает с точностью до ε по норме.

$$\begin{aligned} \|f - h\|_{L_p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_A(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_A(x) - I_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= (\lambda^n(A \setminus G))^{\frac{1}{p}} + (\lambda^n(A \setminus B))^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

2. Если f – простая, то есть линейная комбинация индикаторов множеств конечной меры, явно сводится к пункту 1 с помощью неравенства треугольника.
3. $f \in L_p(E)$ произвольная, тогда из определения интеграла Лебега можно ее приблизить простой с точностью до $\varepsilon/2$, а простые мы уже умеем приближать ступенчатыми с точностью до $\varepsilon/2$. Осталось применить неравенство треугольника и требуемое будет доказано

□

Теперь, благодаря доказанной технике можем доказать следующую теорему:

Теорема 5.2. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:

$$\|f(x) - f(x - h)\|_{L_p} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

Идея доказательства: Обозначим за $f_h(x) = f(x - h)$, заметим, что в силу неравенства треугольника:

$$\|f - f_h\| \leq \|f - g\| + \|g - g_h\| + \|f_h - g_h\| \quad \forall g \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

Ясно, что можно g можно подобрать, чтобы 1 и 3 слагаемые были маленькими, проблема лишь в том, чтобы уменьшить второе слагаемое.

Доказательство. Заметим, что для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \|f_h - g_h\| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - h) - g(x - h)| dx = \{\text{выполним замену переменной } t = x - h\} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)| dt = \|f - g\| \end{aligned}$$

Тогда в качестве g возьмем ступенчатую функцию, которая приближает f . Осталось теперь доказать, что g можно приблизить g_h . Из теоремы о дизъюнктном представлении следует, что g можно представить в виде:

$$g(x) = \sum_{k=1}^n a_k I_{Q_k}(x), \quad Q_k - \text{ячейка}$$

$$\|g - g_h\|_p \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot \|I_{Q_k} - I_{Q_k+h}\|$$

Что стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

□

Лемма 5.1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ измеримая функция, тогда отображения

$$(x, y) \rightarrow f(x - y)$$

$$(x, y) \rightarrow f(x + y)$$

измеримы.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Обозначим за $E_c = \{x \mid f(x) > c\}$, оно является измеримым из условия леммы. Теперь рассмотрим следующее линейное отображение:

$$T : (x, y) \longrightarrow (x - y, y).$$

Оно обратимо, так как определено обратное отображение $T^{-1}((x, y)) = (x + y, y)$. Осталось лишь заметить, что верно:

$$\{(x, y) \mid x - y \in E_c\} = T^{-1}(E_c \times \mathbb{R}^n) = \{(x, y) \mid f(x - y) > c\}.$$

Отсюда следует требуемое. □

Теперь мы готовы к определению свертки функций и к доказательству корректности этого определения.

Теорема 5.3. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

1. Для λ -почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ корректно определена функция (будет называть ее сверткой)
 $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$.
2. $f * g$ измерима в широком смысле.
3. $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$
4. $\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$H(x, y) = |f(x - y)| \cdot |g(y)|.$$

Ясно, что это неотрицательная, измеримая функция, тогда по теореме Тонелли:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} H(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx \right) dy.$$

Подробнее остановимся на втором интеграле, внутренний интеграл преобразуется так:

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| dx = |g(y)| \cdot \|f\|_{L_1}$$

Тогда весь интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx \right) dy = \|f\|_{L_1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy = \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1} < +\infty$$

Теперь применим теорему Фубини для $F(x, y) = f(x - y)g(y)$, так как выше мы показали, что $F(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда пункты 1, 2 из нее сразу следуют. Покажем оставшиеся:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dy \right) dx = \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$$

□

Сформулируем еще одну теорему

Теорема 5.4. Пусть $p \in [1, +\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда:

1. $f * g(x)$ корректно определена для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

2. $f * g(x)$ равномерно непрерывна на \mathbb{R}^n .

Доказательство. Докажем последовательно

1. По неравенству Гельдера получаем:

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_{p'}} < +\infty$$

2. Обозначим за $(f * g)_h(x) = f * g(x-h)$, $f_h(x) = f(x-h)$. Верно равенство:

$$(f * g)_h(x) - f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-h)g(y)dy - f * g(x) = f_h * g(x) - f * g(x)$$

Теперь оценим отклонение свертки при сдвиге:

$$|(f * g)_h(x) - f * g(x)| = |f_h * g(x) - f * g(x)| \leq \|f_h - f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_{p'}}$$

Теперь по уже доказанному утверждению, получаем, что правая часть стремится к 0 и при этом оценка не зависит от x . Таким образом, требуемое доказано.

3. Осталось рассмотреть случаи, когда одно из p, p' равно $+\infty$. А именно рассмотрим случай, когда $p = \infty, p' = 1$. Для этого случая достаточно лишь заметить, что совершенно аналогично доказывается неравенство:

$$|f * g(x)| \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_\infty}$$

□

5.1 Аппроксимативная единица

Определение 5.2. Назовем семейство функций $\{w_t(x)\}_{t \in (0, +\infty)}$ аппроксимативной единицей, если $\forall t > 0$:

1.

$$w_t(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2.

$$\int_{\mathbb{R}^n} w_t(x) dx = 1$$

3.

$$\forall \delta > 0 \lim_{t \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} w_t(x) dx = 0$$

Пример. Соболевской шапкой назовем следующую функцию:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

6 Лекции 8, 9

В процессе...

7 Лекции 10, 11

7.1 Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{— интеграл Дирихле}$$

Примечание. Понимаем как собственный интеграл Лебега

Теорема 7.1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство.

Сделаем регуляризацию (добавим множитель, чтобы сделать интеграл собственным)
Рассмотрим функцию:

$$F(x, y) := \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy},$$

$$x, y \in [0, +\infty)$$

$$F(x, 0) = \frac{\sin x}{x},$$

Доопределим в нуле:

$$F(0, 0) = 1,$$

Тогда функция непрерывна на $[0, +\infty)^2$

Рассмотрим интеграл:

$$D := \int_0^{+\infty} F(x, y) dx$$

Сначала действуем формально (продифференцируем):

$$D'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dy} (e^{-xy}) \cdot \frac{\sin x}{x} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \cdot \sin x dx$$

Из формулы Эйлера $e^{ix} = i \sin x + \cos x$:

$$\begin{aligned} D'(y) &= -\operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \cdot e^{ix} dx = -\operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-x(i-y)} dx = -\operatorname{Im} \left(\frac{e^{-x(i-y)}}{i-y} \Big|_0^{+\infty} \right) = -\operatorname{Im} \left(0 - \frac{1}{i-y} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{i-y} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{-i-y}{1+y^2} \right) = \frac{-1}{y^2+1} \end{aligned}$$

Итого:

$$D'(y) = \frac{-1}{y^2+1}, y > 0$$

$$\forall y_1, y_2 > 0 \quad \text{при } y_2 > y_1 \quad D(y_2) - D(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} D'(y) dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan y_1 - \arctan y_2$$

При $y_2 \rightarrow +\infty$:

$$D(y_2) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy_2} dx$$

Возьмем под модуль:

$$|D(y_2)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy_2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy_2} dx = \frac{1}{y_2} \rightarrow +0, \quad y_2 \rightarrow +\infty$$

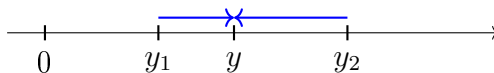
Перейдем к пределу, когда $y_2 \rightarrow +\infty, y_1 \rightarrow +0$:

$$-\lim_{y_1 \rightarrow +0} D(y_1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{y_1 \rightarrow +0} D(y_1) = \frac{\pi}{2}$$

Примечание. Если доказать, что $D(y)$ непрерывен в нуле справа, т.е. что $\lim_{y \rightarrow +0} D(y) = D(0)$, то получим искомое

Покажем, что $D(y)$ — непрерывна и существует $D'(y), \forall y > 0$.

Зафиксируем произвольные y_1, y_2 , такие что $0 < y_1 < y < y_2$



Примечание. Чтобы можно было дифференцировать по y , достаточно проверить, что интеграл $D(y)$ сходится $\forall y > 0$ и что $-\int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy} dx$ сходится равномерно по y .

Очевидно, что $\sin x \cdot e^{-xy}$ непрерывна на $[y_1, y_2] \times [0, +\infty)$.

$\frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}$, доопределенная в нуле тоже непрерывна на $[y_1, y_2] \times [0, +\infty)$.

$$\left| \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy} \right| \leq e^{-xy}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy} \in L_1([0, +\infty)) \quad (\text{принадлежит } L_1 \text{ как функция от } x) \quad \forall y > 0$$

$$\Rightarrow D(x) \text{ сходится } \forall y > 0$$

Назовем $J(y) = -\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$. (от 1 потому что так будет проще применить признак Дирихле)

Покажем, что $J(y)$ сходится равномерно по y на $[y_1, y_2]$

Воспользуемся признаком Дирихле:

1.

$$\sup_{y>0} \sup_A \left| \int_1^A \sin x dx \right| \leq 2$$

2.

$$\frac{e^{-x \cdot y}}{x} \downarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty \quad \forall y > 0$$

3.

$$0 \leq \frac{e^{-xy}}{x} \leq \frac{e^{-x \cdot y_1}}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty \forall y \in [0, y_2], \forall x > 1 \Rightarrow$$

$$\sup_{y \in [0, y_2]} e^{-xy} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

\Rightarrow В силу признака Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ сходится равномерно по y

В силу признака Вейерштрасса $\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx$ сходится равномерно по $y \in [y_1, y_2]$

$$|\sin x e^{-xy}| \leq e^{-x \cdot y_1}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x \cdot y_1} dx \quad - \text{сход.}$$

Это доказывает, что можно дифференцировать интеграл по параметру при любом $y > 0$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ сходится равномерно по y

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ сходится равномерно по $y \in [0, y_2]$ $\forall y_2 > 0$.

Примечание. Мы доказали от 1 до $+\infty$. Но интеграл от 0 до $+\infty$ отличается минимально:

На $[0, 1] \times [0, y_2]$ функция $F(x, y) = \frac{\sin x}{x} e^{-xy}$ непрерывна по совокупности переменных.

\Rightarrow Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ сходится равномерно по y на множестве $[0, y_2]$.

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ сходится равномерно по y на множестве $[0, y_2]$.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ сход. равномерно по y на $[0, y_2] \forall y_2 > 0$

2. $\frac{\sin x}{x} = \lim_{y \rightarrow +0} e^{-xy} \frac{\sin x}{x}$

3. В силу непрерывности $F: \frac{\sin x}{x} \xleftarrow{[0, t]} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \forall t > 0$

Из этого в совокупности следует:

$$\int_0^t e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx \longrightarrow \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \quad \forall t > 0$$

Выполнены все условия теоремы о переходе к пределу по параметру в несобственном интеграле

$$\Rightarrow \exists \lim_{y \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

А это и означает непрерывность функции D в нуле справа.

\Rightarrow все переходы в настоящем доказательстве обоснованы \Rightarrow интеграл Дирихле полностью посчитан

□

7.2 Преобразование Фурье

Определение 7.1. Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Тогда $\mathcal{F}[f](x) := \text{V.P.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$

Примечание. **V.P.** (от фран. *Valeur Principale*) — интеграл в смысле главного значения.

$$\text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) dy := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(y) e^{-ixy} dy$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](y) := \text{V.P.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(x) dx$$

Примечание.

$$\text{Если } f \in L_1(\mathbb{R}), \text{ то } \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

Ключевое отличие от несобственного интеграла Лебега: Пределы интегрирования берутся симметрично.

В обычном несобственном интеграле имеем независимые друг от друга пределы A_1 и A_2 :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy = \lim_{\substack{A_1 \rightarrow +\infty \\ A_2 \rightarrow -\infty}} \int_{A_2}^{A_1} f(y) e^{-ixy} dy$$

Пример. Пусть g - произвольная нечетная функция на \mathbb{R} . $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy = 0.$$

(а интеграл Лебега, и даже несобственный интеграл Лебега может не существовать)

Вопрос.

$$\text{Когда } \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = f?$$

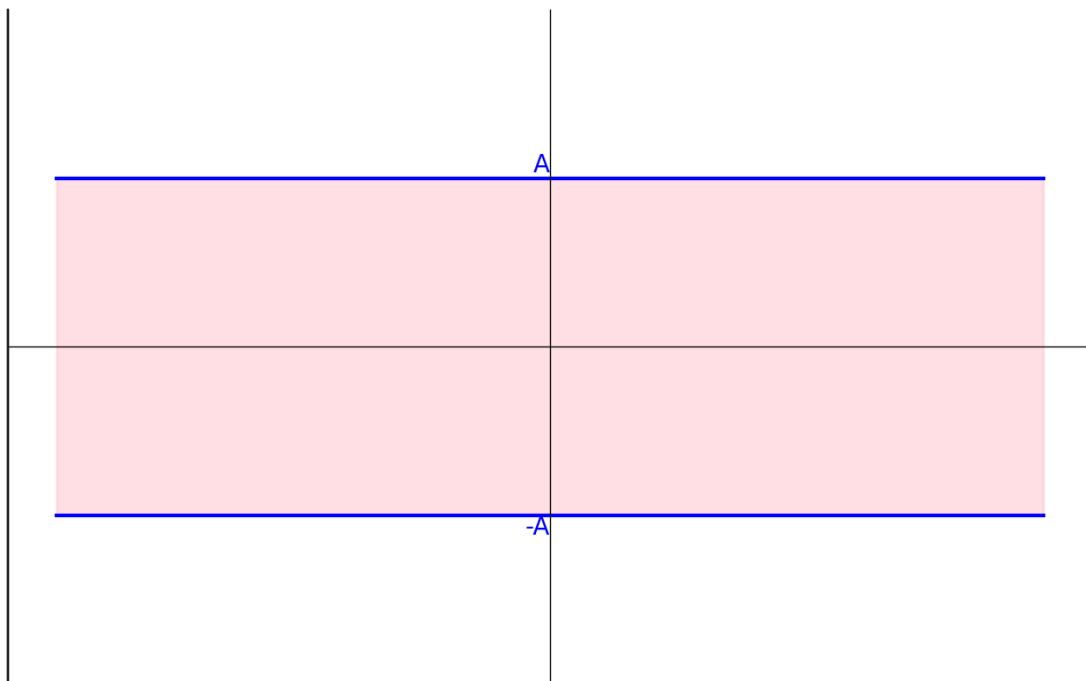
На первый взгляд кажется, что всегда. Однако не все так просто.

$$\text{Пусть } I_A[f](x) := \int_{-A}^A \mathcal{F}[f](y) e^{ixy} dy, \quad \forall A > 0.$$

Лемма 7.1 (Ключевая). Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall A > 0$ справедливо равенство:

$$I_A[f](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(At)}{\pi t} dt.$$

Доказательство. Заметим, что $F(y, u) = f(u)e^{i(x-u)y}$ интегрируема на множестве $(-A, A) \times \mathbb{R}$ при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$. По y значения меняются от $-A$ до A , а по u — по всей числовой прямой. $|F(y, u)| \leq |f(u)|$, а она интегрируема в полосе, потому что полоса — это конечный промежуток



\Rightarrow по теореме Фубини:

$$\begin{aligned} I_A[f](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-A}^A f(u) e^{i(x-u)y} dy \right) du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left[\int_{-A}^A \cos(x-u)y dy \right] du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{2 \sin A(x-u)}{x-u} du = \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\sin A(x-u)}{\pi(x-u)} du = \{x-u=t\} = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin(At)}{\pi t} dt \end{aligned}$$

□

7.3 Интеграл Фурье

Определение 7.2. Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Если $\exists \lim_{A \rightarrow +\infty} I_A[f](x)$ при $x \in \mathbb{R}$, то говорят, что \exists интеграл Фурье функции f

По сути интеграл Фурье совпадает с $F^{-1}[F[f]]$.

Теорема 7.2. Пусть $\tilde{f} \in L_1(-\pi, \pi)$ и 2π -периодична.

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и совпадает с \tilde{f} в некоторой окрестности точки $\underline{x} \in \mathbb{R}$. Тогда интеграл Фурье в точке \underline{x} сходится к \tilde{f} в этой точке. \Leftrightarrow ряд Фурье функции \tilde{f} сходится в точке \underline{x} .

Более того, в случае сходимости справедливо равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](y) e^{ixy} dy = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\tilde{f}) e^{inx}$$

Доказательство. Докажем, что

$$I_A[f](\underline{x}) - S_{[A]}[\tilde{f}](\underline{x}) \longrightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty, \text{ где } [A] - \text{целая часть числа } A$$

Из ключевой леммы (7.1) следует, что $I_A[f](\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}} f(\underline{x} - t) \frac{\sin(At)}{\pi t} dt$

Предположим, что $f \equiv \tilde{f}$ в $U_\delta(\underline{x})$

$$I_A[f](\underline{x}) = \int_{-S}^0 f(\underline{x} - t) \cdot \frac{\sin(At)}{\pi t} dt + O(1), \quad A \rightarrow +\infty$$

Это следует из теоремы Риммана об осцилляции

С другой имеем формулу:

$$S_n[\tilde{f}](x) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\underline{x} - t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt + \varepsilon_n[\tilde{f}](\underline{x})$$

По теореме Риммана об осцилляции:

$$S_n[\tilde{f}](x) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\underline{x} - t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt + \varepsilon_n[\tilde{f}](\underline{x}) = \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{f}(\underline{x} - t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt + O(1), \quad n \rightarrow +\infty$$

Если $A = n$, то $I_A[f](\underline{x}) - S_{[A]}[\tilde{f}](\underline{x}) \longrightarrow 0$ очевидно доказано

В общем случае, окгда A — нецелое, можем посмотреть на целую часть A (вспомним, что I_A — это интеграл от преобразования Фурье).

$$\begin{aligned} |I_A[f](\underline{x}) - I_{[A]}[f](\underline{x})| &\leq \int_{A-1}^A |\mathcal{F}[f](y)| dy + \int_A^{A+1} |\mathcal{F}[f](y)| dy \\ &\leq 2 \sup_{|y| \geq A-1} |\mathcal{F}[f](y)| \longrightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Действительно, по теореме Риммана об осцилляции

$$\mathcal{F}[f](y) \longrightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty,$$

$$\mathcal{F}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy \longrightarrow 0, y \longrightarrow \infty$$

Так как $f \in L_1(\mathbb{R})$ по усл, имеем право брать обычный Лебеговский интеграл

В итоге по неравенству треугольника:

$$\begin{aligned} |I_A[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})| &\leq |I_A[f](\underline{x}) - I_{[A]}[f](\underline{x})| \\ &\quad + |I_{[A]}[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое $|I_A[f](\underline{x}) - I_{[A]}[f](\underline{x})| \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty$ так как мы только что доказали следующее:

$$\leq 2 \sup_{|y| \geq A-1} |\mathcal{F}[f](y)| \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty$$

Второе слагаемое тоже $|I_{[A]}[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})| \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty$, так как при целых A $I_A[f](\underline{x}) = S_n[\tilde{f}(x)]$ с точностью до $o(1)$, потому что $f = \tilde{f}$ в δ -окрестности \underline{x}

□

Следствие. Все признаки поточечной сходимости рядов Фурье переносятся и на интеграл Фурье (т е от функции требуются такие же условия локального поведения)

Пример. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f \in BV(U_\delta(\underline{x}))$ при $\delta > 0$. Тогда $F^{-1}[\mathcal{F}[f]](\underline{x}) = f(\underline{x})$.

Аналогично для условия Дини и условия Гёльдера.

Следствие. Все признаки которые были для рядов Фурье, для них есть аналоги:

1. Пусть $f \in \mathbb{L}_1^{loc}(\mathbb{R})$ в некоторой $U_\delta(\underline{x})$ и имеет тограниченную вариацию, тогда:

$$f(\underline{x}) = F^{-1}[F[f]](\underline{x})$$

2. Пусть $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Гёльдера с степенью $\alpha \in (0; 1]$ в некоторой $U_\delta(\underline{x})$. Тогда:

$$f(\underline{x}) = F^{-1}[F[f]](\underline{x})$$

3. (Условие Дини) Пусть $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ и $\exists \delta > 0$ и $\exists c > 0$ такие что:

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(\underline{x}-u) + f(\underline{x}+u)}{2} - C \right| \frac{du}{u} < +\infty$$

Тогда $F^{-1}[F[f]](\underline{x}) = C$

7.4 Преобразование Фурье свертки

Напоминание. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Сверткой называют $f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$. $f * g$ корректно определенная измеримая функция. Она является интегрируемой, если f и g интегрируемы. Свертка обладает свойствами:

- ▷ Коммутативность. $f * g = g * f$
- ▷ Ассоциативность. $(f * g) * h = f * (g * h)$

Теорема 7.3. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда

$$F[f * g](x) = \sqrt{2\pi} F[f](x) F[g](x),$$

где

$$F[h](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} h(y) dy.$$

Доказательство. По определению

$$F[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} (f * g)(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y-t) g(t) dt \right) dy.$$

Меняем порядок интегрирования и расписываем $e^{-ixy} = e^{-ix(y-t+t)} = e^{-ixt} e^{-ix(y-t)}$:

$$\begin{aligned} F[f * g](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} e^{-ix(y-t)} f(y-t) g(t) dy dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-ixt} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(y-t)} f(y-t) dy \right) dt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл по y при замене переменной $u = y - t$ даёт

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(y-t)} f(y-t) dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} f(u) du = \sqrt{2\pi} F[f](x).$$

Следовательно

$$F[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi} F[f](x) \right) \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-ixt} dt = \sqrt{2\pi} F[f](x) F[g](x).$$

□

Примечание. Интеграл двойного интегрирования можно менять местами по теореме Фубини (а для неотрицательных функций по теореме Тонелли), поскольку

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(y-t)| |g(t)| dy dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-t)| dy \right) dt = \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Таким образом все переходы с перестановкой интегралов обоснованы.

Теорема 7.4 (преобразование Фурье производной). Пусть

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}), \quad f' \in L^1(\mathbb{R}),$$

и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f'](y) = iy \mathcal{F}[f](y),$$

Доказательство. **Шаг 1.** Сначала докажем, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Так как $f' \in L^1(\mathbb{R})$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) dt =: A$$

существует. Предположим $A \neq 0$. Тогда найдётся X_A такое, что при $x > X_A$ есть

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2} \implies \int_{X_A}^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty,$$

что противоречит условию $f \in L^1(\mathbb{R})$. Аналогичным рассуждением получаем и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Шаг 2. Интегрируем преобразование Фурье f' по частям:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ixy} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-iy) e^{-ixy} dx \\ &= iy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = iy \mathcal{F}[f](y).\end{aligned}$$

Поскольку $f(x)e^{-ixy} \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, граничные слагаемые равны нулю. □

Следствие. Пусть $k \in \mathbb{N}$,

$$f, f', \dots, f^{(k-1)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ и кусочно непрерывна на } \mathbb{R}.$$

Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](y) = (iy)^k \mathcal{F}[f](y),$$

и при $|y| \rightarrow \infty$ выполняется

$$\mathcal{F}[f](y) = o(|y|^{-k}).$$

Доказательство. Докажем по индукции по k .

База ($k = 1$) — это теорема о преобразовании Фурье производной:

$$\mathcal{F}[f'](y) = iy \mathcal{F}[f](y).$$

Шаг индукции. Предположим, что для $k - 1$ уже доказано

$$\mathcal{F}[f^{(k-1)}](y) = (iy)^{k-1} \mathcal{F}[f](y).$$

Поскольку $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{(k-1)}(x) = 0$ (аналогично первому доказательству), применяем к $f^{(k-1)}$ тот же приём интегрирования по частям:

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](y) = iy \mathcal{F}[f^{(k-1)}](y) = iy (iy)^{k-1} \mathcal{F}[f](y) = (iy)^k \mathcal{F}[f](y).$$

Асимптотика. Из формулы

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](y) = (iy)^k \mathcal{F}[f](y)$$

получаем

$$\mathcal{F}[f](y) = (iy)^{-k} \mathcal{F}[f^{(k)}](y).$$

Но $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, и по лемме Римана–Лебега $\mathcal{F}[f^{(k)}](y) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$. Значит

$$\mathcal{F}[f](y) = o(|y|^{-k}), \quad |y| \rightarrow \infty.$$

□

Теорема 7.5 (Дифференцирование преобразования Фурье). Пусть

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x f(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Тогда функция

$$\mathcal{F}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx$$

непрерывна и имеет непрерывную первую производную по параметру y :

$$\frac{d}{dy} \mathcal{F}[f](y) = \mathcal{F}[-ix f(x)](y).$$

Доказательство. Зафиксируем конечный отрезок $[y_1, y_2] \subset \mathbb{R}$ и положим

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} f(x).$$

Тогда

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) dx.$$

Вычислим частную производную по y :

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-ix) e^{-ixy} f(x).$$

По условию $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, поэтому

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \right| = \frac{|x f(x)|}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{— интегрируемая функция (независимо от } y \text{)}.$$

Следовательно, по теореме Лебега о дифференцировании параметрического интеграла под знаком интеграла можно переставить дифференцирование и интегрирование:

$$\frac{d}{dy} \mathcal{F}[f](y) = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) dx = \mathcal{F}[-ix f(x)](y).$$

При этом та же теорема гарантирует непрерывность производной по y , а из непрерывности ядра $g(x, y)$ по y и теоремы Лебега об обмене предела и интеграла следует непрерывность $\mathcal{F}[f](y)$. \square

8 Обобщенные функции

Лемма 8.1 (Дю Буа—Реймона). Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Тогда $f = 0$ почти везде.

Доказательство. **Шаг 1.** По теореме Лебега о дифференцировании интеграла почти всюду

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy \quad (*)$$

Пусть $E = \{x : f(x) \neq 0\}$ имеет положительную меру.

Шаг 2. Для $x \in E$ и $\varepsilon > 0$ по (*) существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left| \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy - f(x) \right| < \varepsilon/2 \quad \forall 0 < r < \delta.$$

Возьмём тест-функцию

$$\psi_r(y) = \frac{1}{|B_r(x)|} \psi\left(\frac{y-x}{r}\right),$$

где $\psi \in C_0^\infty$, $\psi \geq 0$, $\int \psi = 1$, $\text{supp } \psi \subset B_1(0)$. Тогда $\psi_r \in C_0^\infty$, $\int \psi_r = 1$, $\text{supp } \psi_r \subset B_r(x)$, и

$$\left| \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy - \int f(y) \psi_r(y) dy \right| \leq \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_{r+\delta}(x) \setminus B_r(x)} |f(y)| dy < \varepsilon/2.$$

Шаг 3. По условию $\int f \psi_r = 0$, поэтому

$$|f(x)| \leq \left| \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f - \int f \psi_r \right| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольна, получаем $f(x) = 0$ для почти всех x . \square

Определение 8.1 (Пространство пробных функций). Пусть

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

— пространство пробных функций. Последовательность $\{\varphi_m\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi,$$

если выполняются одновременно два условия:

$$1) \exists C > 0 : \operatorname{supp} \varphi_m \subset B_C(0) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$2) \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n : \quad D^\alpha \varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi \quad \text{равномерно на } \mathbb{R}^n.$$

Здесь

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Определение 8.2. Обозначим

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$$

— пространство всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Функционал

$$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

удовлетворяет двум условиям:

$$1. \text{ (Линейность) } T(\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

$$2. \text{ (Непрерывность) } \varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi \text{ в } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies T(\varphi_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} T(\varphi).$$

Определение 8.3. Пусть

$$\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Говорят, что φ является *регулярным* обобщённым функционалом (или регулярной обобщённой функцией), если

$$\exists f_\varphi \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{такое, что} \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\varphi(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

В противном случае φ называют *сингулярным* распределением.

9 Анекдоты

1. Но для счастья этого мало, понимаете? В среднеквадратичном смысле это конечно хорошо, но это как средняя зарплата, у кого-то много, у кого-то мало, а в среднем ничего