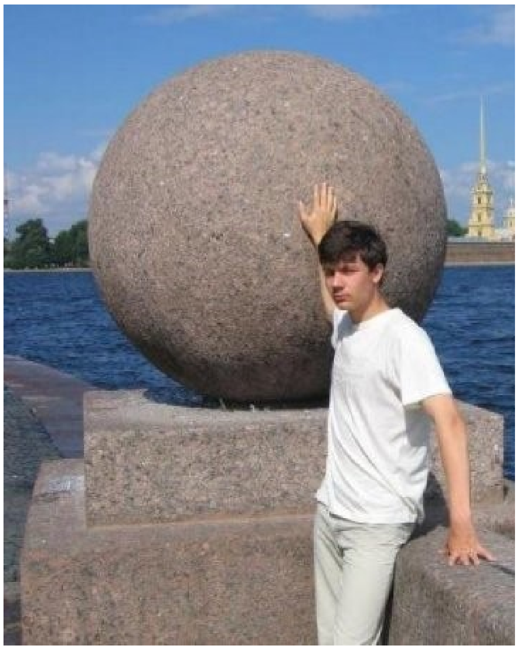
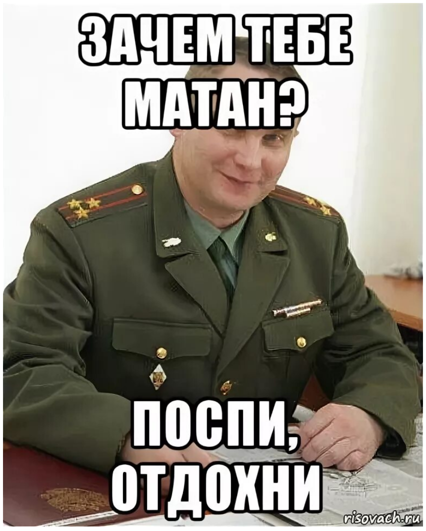
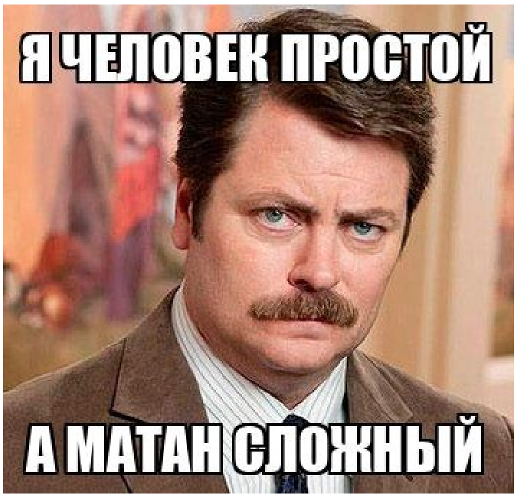
Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

Лектор: Александр Иванович Тюленев

Для вас техали: *Потапов Станислав*,
Сысоева Александра,
Цеденов Артем,
Бадоля Пётр,
Баронов Михаил,
Шуминов Эзра
Петракова Анастасия

Содержание

1 Абстрактная теория меры

1.1 Системы множеств

Определение 1.1. Пусть I — индексное множество, A_α — абстрактное множество $\forall\alpha \in I$. Тогда *системой множеств* назовём совокупность всех A_α и будем обозначать $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Лемма 1.1. *Пусть X — абстрактное множество и $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — система подмножеств X, то есть $A_\alpha \subset X$ $\forall\alpha \in I$. Тогда*

1. $X \backslash \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in I} X \backslash A_\alpha$
2. $X \backslash \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in I} X \backslash A_\alpha$
3. $A \cap \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in I} A \cap A_\alpha$

Доказательство. Доказательство состоит в проговаривании смысла равенств.

Лежит в объединении $\Leftrightarrow$ Лежит хотя бы в одном.

Лежит в пересечении $\Leftrightarrow$ Лежит в каждом. □

Определение 1.2. Пусть A и B — абстрактные множества. Назовём их *симметрической разностью* множество, определяемое равенством $A \triangle B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

Определение 1.3. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность множеств. Её *нижним* пределом $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ назовём все x такие, что каждый из них принадлежит всем A_n, начиная с некоторого номера $N(x)$, то есть

$$\forall x \in \varliminf_{n\to\infty} A_n \ \exists N(x) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(x) \hookrightarrow x \in A_n$$

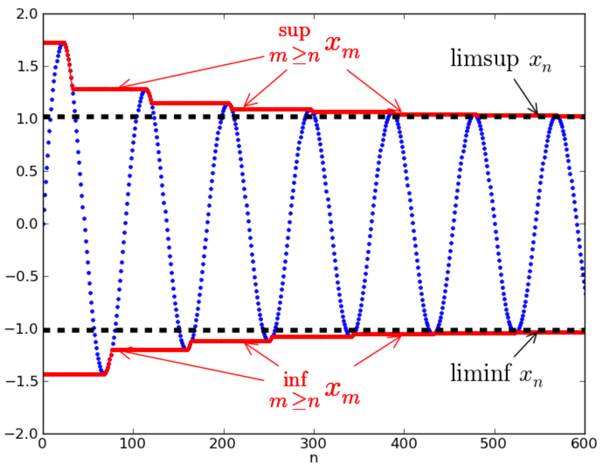
$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$$

Определение 1.4. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность множеств. Её *верхним* пределом $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ назовём все x такие, что каждый из них принадлежит бесконечному набору множеств из $\{A_n\}$, то есть

$$\forall x \in \varlimsup_{n\to\infty} A_n \ \forall N \in \mathbb{N} : \exists n(x, N) \geqslant N \hookrightarrow x \in A_n$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$$

Утверждение 1.1. $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$



Прим редактора: геометрическая интуиция про эти пределы. Иллюстрация верхнего предела и нижнего предела. Последовательность $\{x_n\}$ показана синим цветом. Две красные кривые приближаются к верхнему пределу и нижнему пределу $\{x_n\}$, показаны пунктирными черными линиями. Идея перехода от последовательностей к множествам принадлежит Михаилу Баронову. Представьте теперь что эти числа это размеры шаров(очевидно неотрицательные) с центром в нуле

Определение 1.5. Систему множеств $\mathcal{R}$ назовём *кольцом*, если $\forall A, B \in \mathcal{R}$ выполнено:

1. $A \cup B \in \mathcal{R}$;
2. $A \cap B \in \mathcal{R}$;
3. $A \backslash B \in \mathcal{R}$.

Определение 1.6. Будем говорить, что в кольце есть «единица», если $\exists X \in \mathcal{R} : A \subset X \; \forall A \in \mathcal{R}$

Определение 1.7. Кольцо с единицей назовём *алгеброй.*

Определение 1.8. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей X и $A \in \mathcal{A}$, тогда дополнением A назовём множество $A^c := X \backslash A$.

Замечание. Нетрудно заметить, что для любого кольца $\mathcal{R}$ и любой алгебры $\mathcal{A}$ выполняется:

1. $\varnothing \in \mathcal{R}$;
2. $A^c \in \mathcal{A} \; \forall A \in \mathcal{A}$;
3. $\forall A, B \in \mathcal{R} \hookrightarrow A \vartriangle B \in \mathcal{R}$.

На самом деле, для определения кольца достаточно было использовать только пересечение и симметрическую разность, потому что объединение и вычитание выражаются через них:

- $A \backslash B = A \cap B^c$;
- $A \cup B = (A \Delta B) \; \Delta \; (A \cap B)$.

Определение 1.9. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *σ-алгеброй*, если $\forall$ последовательности $\{A_n\} \subset \mathcal{A} \hookrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Замечание. Для σ-алгебры также верно, что любое счётное пересечение в ней лежит (это верно в силу закона двойственности).

Пример. Тривиальные σ-алгебры: $\{\varnothing, X\}$, 2^X.

Лемма 1.2. *Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ - семейство алгебр, с «единицей» X. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}$ - алгебра с единицей X.*

Доказательство. X — «единица», для всех алгебр из семейства $\Rightarrow X \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$.

Покажем, что $\forall A, B \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \hookrightarrow A \backslash B, A \cap B, A \cup B \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$

$$A, B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in I \hookrightarrow A, B \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow A \backslash B, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}_\alpha \ \forall \alpha \in I \Rightarrow A \backslash B, A \cap B, A \cup B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

□

Замечание. Аналогично доказывается то же утверждение, но для семейства σ-алгебр, с общей «единицей» X.

Теорема 1.1. $\forall$ *системы* $\mathcal{E}$ *подмножеств множества* X *существует и единственна наименьшая по включению* σ*-алгебра, содержащая* $\mathcal{E}$*. То есть,* σ*-алгебра, порождённая* $\mathcal{E}$*, и обозначается* $\mathcal{M}(\mathcal{E})$*.*

Доказательство. Разобьём доказательство на шаги.

▷ **Существование**.

Рассмотрим семейство всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{E}$, обозначим его $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Это семейство не пусто, потому что в нём есть хотя бы один тривиальный пример.

Положим $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$. Оно является σ-алгеброй по лемме. Также оно содержит $\mathcal{E}$, поскольку $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_\alpha \ \forall \alpha \in I$.

▷ **Минимальность**.

Пусть есть $\mathcal{M}'$ — σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Но так как она содержит $\mathcal{E}$, то $\exists \alpha' \in I \colon \mathcal{M}' = \mathcal{M}_{\alpha'}$. Но $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}_{\alpha'}$. Значит она минимальна.

▷ **Единственность**.

Если бы их было две, то первая должна содержать вторую и вторая первую, значит они равны.

□

Примечание. Данная процедура пополнения неконструктивная для бесконечных множеств. Мы не предъявили алгоритм построения, а лишь доказали существование.

Пример. Рассмотрим абстрактное множество X. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, n \in \mathbb{N}$ — набор подмножеств X, где $A_0 := X$. Рассмотрим всевозможные наборы $\varepsilon = (0, 1, 1, 0, \dots, 0)$ из 0 и 1. $A_\varepsilon = \bigcap\limits_{k=0}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}$. Теперь составим нашу систему $\mathcal{M}$ из A_ε и их всевозможных объединений. Это и будет σ-алгеброй. В ней $\leqslant 2^{2^n}$ элементов.

Определение 1.10. Если (X, ρ) — метрическое пространство, то $\mathcal{B}(X)$ — *борелевская* σ*-алгебра*, то есть наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества в X.

Замечание. Сам по себе набор открытых множеств не образует алгебру. Если мы возьмём в качестве метрического пространства $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ и рассмотрим интервал $A = (0, 1)$, то $A^c = \mathbb{R} \backslash A$ - не открыто.

Замечание. Борелевские подмножества — это не все подмножества. Мощность борелевской системы в $\mathbb{R}^n$ континуальна, а множество всех подмножеств гиперконтинуально

Замечание. Непрерывное отображение борелевского не всегда борелевское. Но это за пределами программы. Кому интересно см. Суслинские множества

Примеры. Пусть X — абстрактное множество.

1. $\{\varnothing, X\}$ - σ-алгебра;
2. 2^X - семейство подмножеств X является σ-алгеброй;
3. $\mathcal{M}$ - все такие подмножества числовой прямой, что-либо оно счётно, либо его дополнение не более чем счётно. Это также является σ-алгеброй;
4. $\mathcal{M}$ - все такие подмножества числовой прямой, что-либо оно, либо его дополнение не более чем конечно. Это является алгеброй, но не σ-алгеброй.

Определение 1.11. Система множеств $\mathcal{P}$ называется *полукольцом*, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$;
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \hookrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$;
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}\ A \backslash B = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n$, где $A_n \in \mathcal{P}$.

Замечание. В определении полукольца мы не требуем что работаем с подмножествами какого-то большого множества, это просто система множеств

Пример. Приведём пример полукольца (даже с единицей), но не кольца:

$$X = [a, b), \quad \mathcal{P} = \{[\alpha, \beta) : a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b\}.$$

(Доказательство оставлено читателю в качестве упражнения)

Лемма 1.3. *Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность множеств, тогда их объединение можно представить в виде дизъюнктного, то есть $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C_n := A_n \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$, $C_1 = A_1$*

Доказательство. Покажем включение в обе стороны:

- ▷ $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}\ C_n \subset A_n$
- ▷ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$

  $\forall x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \quad m_x := \min\{n \in N \colon x \in A_n\}, m_0 := \varnothing$

  Из определения m_x, следует: $x \notin A_m\ \forall m < m_x \Rightarrow x \in A_{m_x} \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{m_x - 1} A_k \Rightarrow x \in C_{m_x} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$

□

Теорема 1.2. *(Теорема о дизъюнктном разбиении) Пусть $\mathcal{P}$ - полукольцо, а $P, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}$. Тогда*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ конечное семейство попарно непересекающихся множеств $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч. $P \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$*

2. *$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ $\exists R_k \in \mathcal{P}$ $(k = 1, \ldots, N)$, т.ч. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} R_k$. При этом $\forall k \in \{1, \ldots, N\}$ и $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, либо $R_k \subset P_i$, либо $R_k \cap P_i = \varnothing$ (*)*

Замечание. Первый пункт теоремы нетривиален, как могло показаться, ведь по определению то выполнено, для $n = 1$, но вот $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ не обязательно лежит в полукольце. Тем не менее мы можем дополнить элементами полукольца

Доказательство. Рассмотрим доказательство каждого пункта по отдельности

1. Докажем по индукции.

   ▷ **База:** Для $n = 1$ утверждение следует из определения полукольца.

   ▷ **Предположение:** Пусть утверждение доказано при $n = l$.

   ▷ **Шаг:** Докажем для $n = l + 1$.

   $P \backslash (P_1 \cup \cdots \cup P_l) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$, где $Q_i \in \mathcal{P}$

   В силу закона двойственности:

   $P \backslash (P_1 \cup \cdots \cup P_l \cup P_{l+1}) = (P \backslash P_{l+1}) \cap (P \backslash (P_1 \cup \cdots \cup P_l))$

   $P \backslash P_{l+1} = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} S_j$, где $S_j \in \mathcal{P}$

   Рассмотрим, всевозможные пересечения $Q_i \cap S_j$.

   Тогда $(P \backslash P_{l+1}) \cap (P \backslash (P_1 \cup \cdots \cup P_l)) = (\bigsqcup\limits_{j=1}^{k} S_j) \cap (\bigsqcup\limits_{i=1}^{m} Q_i) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} S_j \cap Q_i$

   Так как $S_j, Q_i \in \mathcal{P} \Rightarrow S_j \cap Q_i \in \mathcal{P}$. Следовательно, сделав шаг индукции, мы получили конечное дизъюнктное разбиение для $n = l + 1$. Значит доказательство по индукции выполнено.

2. Докажем по индукции.

   ▷ **База:** Для $n = 2$: $P_1 \cup P_2 = (P_1 \backslash P_2) \sqcup (P_1 \cap P_2) \sqcup (P_2 \backslash P_1) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} Q_i \sqcup (P_1 \cap P_2) \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} S_j$

   ▷ **Предположение:** Пусть доказали при $n \leqslant n'$.

   ▷ **Шаг:** Докажем для $n' + 1$. Очевидно, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n'+1} P_i = P_{n'+1} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n'} P_i$

   Рассмотрим множества $I_1 = P_{n'+1} \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n'} P_i$, $I_2 = P_{n'+1} \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n'} P_i$, $I_3 = \bigcup\limits_{i=1}^{n'} P_i \backslash P_{n'+1}$. Тогда $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = P_{n'+1} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n'} P_i$

   Из первого пункта теоремы следует, что $I_1 = \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} S_j$, где $S_j \in \mathcal{P}$ при каждом j.

   По предположению индукции: $I_2 = P_{n'+1} \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n'} P_i = P_{n'+1} \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} R_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} (R_k \cap P_{n'+1})$, из определения полукольца $R_k \cap P_{n'+1} \in \mathcal{P}$.

По предположению индукции: $I_3 = \bigcup\limits_{i=1}^{n'} P_i \backslash P_{n'+1} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} R_k \backslash P_{n'+1} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} (R_k \backslash P_{n'+1})$, из определения полукольца $R_k \backslash P_{n'+1} = \bigsqcup\limits_{t=1}^{m} M_t\ \forall k \in \{1, \ldots, N\}$, где $M_t \in \mathcal{P}$.

Заметим, что $I_1 \cap I_2 = I_2 \cap I_3 = I_3 \cap I_1 = \varnothing$. Таким образом мы разложили три не пересекающихся множества в дизъюнктные объединения, значит мы всё это собираем вместе, нумеруем единым индексом и получаем то, что хотели.

Свойство (*) видно из построения. Очевидно, что $R_k \backslash P_{n'+1} \not\subseteq P_{n'+1}$, $R_k \backslash P_{n'+1} \subset R_k \Rightarrow R_k \backslash P_{n'+1} \subset P_q$, для какого-то $q < n$. А для n уже доказано (предположение индукции).

□

Определение 1.12. Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ - полукольца. Определим их *тензорное произведение* $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}_1, Q \in \mathcal{P}_2\}$. Произведение пустых по определению положим пустым.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ - полукольца, тогда $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ - тоже полукольцо.*

Доказательство. Докажем все свойства из определения полукольца по порядку.

1. *Свойство 1.* $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$

2. *Свойство 2.* Теперь докажем, что пересечение тоже лежит в произведении
$(C_1 \times D_1) \cap (C_2 \times D_2) = (C_1 \cap C_2) \times (D_1 \cap D_2)$.

3. *Свойство 3.*
Рассмотрим $A \in \mathcal{P}_1$ и $B \in \mathcal{P}_2$ и $E \subset A \times B$ при $E \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.
Т.к. $E \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$, то $\exists C \in \mathcal{P}_1$ и $\exists D \in \mathcal{P}_2$, т.ч. $C \times D = E$.
Из определения полукольца следует, что $A \backslash C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} A_i,\ \ A_i \in \mathcal{P}_1$.
Также, из определения полукольца следует, что $B \backslash D = \bigsqcup\limits_{j=1}^{L} B_j,\ \ B_j \in \mathcal{P}_2$.
Дополнительно определим $A_0 := C$ и $B_0 := D$
Определим $F_{ij} := A_i \times B_j$. Из определения тензорного произведения $F_{ij} \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$
Заметим, что $F_{ij} \cap F_{i^* j^*} = \varnothing$, при $(i,j) \neq (i^*, j^*)$
Значит $A \times B = \bigsqcup\limits_{i,j=0}^{N,L} F_{ij} \Rightarrow (A \times B) \backslash (C \times D) = \bigsqcup\limits_{i,j=0,\ (i,j)\neq(0,0)}^{N,L} F_{ij}$

□

Следствие. Эта конструкция будет часто использоваться. Пусть
$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
$b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$
и $[a, b) := \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i)\ b_i \geqslant a_i\ \forall i$
Тогда система всех $[\alpha, \beta)$ содержащихся в $[a, b)$ (где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ $\beta_i \geqslant \alpha_i\ \forall i$) образует полукольцо с единицей $[a, b)$

Утверждение 1.2. *Любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить, как не более чем счётное объединение полуоткрытых параллелепипедов с рациональными вершинами.*

Доказательство. Оставляется в качестве упражнения читателю (есть в Макарове-Подкорытове)
□

1.2 Свойства полуколец

Определение 1.13. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо. Тогда отображение $\mu\colon \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ называется конечно-аддитивной мерой, если:

1. $\mu(\varnothing) := 0$;
2. Если $C \in \mathcal{P}$ и $C = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k,\ Q_k \in \mathcal{P}$, тогда $\mu(C) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(Q_k)$.

Лемма 1.4. *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, μ — мера на $\mathcal{P}$, тогда верны следующие свойства:*

1. *Монотонность: $\forall A, B \in \mathcal{P},\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$;*
2. *Продвинутая монотонность: Если $A \in \mathcal{P}$ и $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$ - попарно не пересекаются и $A_i \subset A\ \forall i$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$;*
3. *Полуаддитивность: Если $B \in \mathcal{P}, B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $A_i \in \mathcal{P}$ при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, то $\mu(B) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.*

Доказательство. Докажем пункты по порядку.

1. Следует из 2).
2. Из теоремы о дизъюнктом разбиении $A \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} Q_k \Rightarrow A = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \sqcup (\bigsqcup\limits_{k=1}^{N} Q_k)$. Значит, из свойств меры получим $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum\limits_{k=1}^{N} \mu(Q_k)$, но так как $\mu(Q_k) \geqslant 0$, то $\sum\limits_{k=1}^{N} \mu(Q_k) \geqslant 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$
3. Заметим, что $B \cap A_i \in \mathcal{P}$, и при этом, так как $\mathcal{P}$ - полукольцо, $B \setminus A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_i} Q_{i,j}$, где $Q_{i,j} \in \mathcal{P}\ \forall i, j$

   Тогда по определению меры $\mu(A_i) = \mu(B \cap A_i) + \sum\limits_{j=1}^{m_i} \mu(Q_{i,j})\ \forall i$

□

Теорема 1.4. *Пусть $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ — полукольца, а μ и ν — конечно-аддитивные меры на $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ соответственно. Тогда $\forall P \in \mathcal{P}^1, Q \in \mathcal{P}^2$ определим $(\mu \otimes \nu)(P \times Q) = \mu(P) \cdot \nu(Q)$ (причём считаем, что $+\infty \cdot +\infty = +\infty$). Докажем, что $\mu \otimes \nu$ — конечно-аддитивная мера на $\mathcal{P}^1 \otimes \mathcal{P}^2$.*

Доказательство. Для начала рассмотрим случай так называемого сеточного разбиения, то есть:

$$P \times Q = \bigsqcup_{i=1, j=1}^{n,m} P_i \times Q_j, \quad \text{где } P_i \in \mathcal{P}^1, Q_j \in \mathcal{P}^2$$

Тогда по определению $(\mu \otimes \nu)$ мы получаем следующее:

$$(\mu \otimes \nu)(P \times Q) = \mu(P)\nu(Q) = \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} \nu(Q_j) = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} \mu(P_i) \cdot \nu(Q_j) = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} (\mu \otimes \nu)(P_i \times Q_j)$$

Что показывает корректность теоремы при таком сеточном разбиении.
Пусть у нас есть произвольное разбиение:

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^{l} P_k \times Q_k$$

Тогда по теореме о дизъюнктном разбиении у нас справедливы следующие равенства:

$$P_1 \cup \ldots \cup P_l = \bigsqcup_{i=1}^{N} P'_i, \text{ причём } \forall i\ \forall k\ (P'_i \subset P_k \vee P'_i \cap P_k = \varnothing);$$

$$Q_1 \cup \ldots \cup Q_l = \bigsqcup_{i=1}^{M} Q'_j, \text{ причём } \forall j\ \forall k\ (Q'_j \subset Q_k \vee Q'_j \cap Q_k = \varnothing).$$

Теперь мы можем свести задачу к сеточному разбиению. Заметим, что $\{P'_i \times Q'_j\}_{i,j=1,1}^{N,M}$ даёт сеточное разбиение $P \times Q$. Причём поскольку

$$\bigsqcup_{\{i | P'_i \subset P_k\}} P'_i = P_k \text{ и } \bigsqcup_{\{j | Q'_j \subset Q_k\}} Q'_j = Q_k$$

образуют сеточное разбиение для $P_k \times Q_k$. Следовательно, справедливо равенство:

$$(\mu \otimes \nu)(P \times Q) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\mu \otimes \nu)(P'_i \times Q'_j) = \sum_{k=1}^{l} \Big(\sum_{\{(i,j) | P'_i \subset P_k \wedge Q'_j \subset Q_k\}} (\mu \otimes \nu)(P'_i \times Q'_j) \Big) = \sum_{k=1}^{l} (\mu \otimes \nu)(P_k \times Q_k)$$

что и требовалось показать. □

1.3 Меры на полукольцах

Определение 1.14. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо множеств, то будем говорить, что конечно-аддитивная мера μ на $\mathcal{P}$ является счётно-аддитивной, если:

$$\forall\ A \in \mathcal{P} : A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup \ldots$$

где $\{A_i\} \subset \mathcal{P}$ выполняется

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Определение 1.15. Назовём одномерной ячейкой множество $[a, b), -\infty < a \leqslant b < +\infty$. Эту конструкцию можно обобщить на $\mathbb{R}^n$, и n-мерной ячейкой $[a, b)$, где $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n)$ назвать множество $[a, b) = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$.

Упражнение. *Семейство всех ячеек в $\mathbb{R}^n$ образует полукольцо множеств $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*
1. Замкнутость относительно пересечения
Пусть $A = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$, $\quad B = [c_1, d_1) \times \cdots \times [c_n, d_n)$. Тогда их пересечение:

$$A \cap B = \prod_{i=1}^{n} \big([a_i, b_i) \cap [c_i, d_i) \big).$$

Поскольку пересечение двух полуинтервалов $[a_i, b_i) \cap [c_i, d_i)$ также является полуинтервалом (возможно, пустым), результатом пересечения $A \cap B$ будет ячейка из $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Замкнутость относительно разности

Для разности $A \setminus B$ можно рассмотреть случаи, когда каждое измерение i пересекается частично или полностью. Разность можно разложить на конечное число ячеек следующим образом:

Разделим A на подмножества, исключая пересечения с B. Каждое измерение порождает максимум два новых отрезка (до и после пересечения). Таким образом, разность $A \setminus B$ представляется в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся ячеек.

Определение 1.16. Введём одномерную меру Лебега на полукольце ячеек равенством $\lambda_1([a,b)) = |b-a|$. Тогда n-мерную Лебега на полукольце ячеек получим равенством $\lambda_n([a,b)) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_1([a_i,b_i))$, т.е. как тензорное произведение мер на тензорном произведении n одномерных полуколец.

Определение 1.17. Будем говорить, что мера на полукольце является счётно-полуаддитивной, если $\forall A \in \mathcal{P}$ и $\forall \{A_i\} \subset \mathcal{P}$ такой что $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ выполняется $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Теорема 1.5. *Для меры μ на полукольце множеств $\mathcal{P}$ условия счётной аддитивности и счётной полуаддитивности равносильны.*

Доказательство. Пусть μ — счётно-полуаддитивна. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{P}$. Тогда из полуаддитивности следует

$$\mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

С другой стороны, из монотонности меры следует $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$$

Возьмём супремум по n:

$$\mu(A) \geqslant \sup_n \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Таким образом мы получаем счётную аддитивность меры μ.

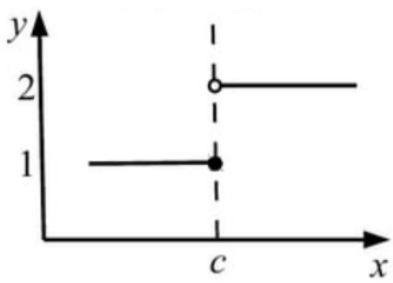
Пусть μ — счётно-аддитивна. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Пусть $A_i' = A \cap A_i$. Определим $\{P_{n,i}\}$ как

$$A_1' = P_{1,1}$$

$$A_k' \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i' = \bigsqcup_{j=1}^{N_k} P_{k,j}$$

Тогда $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{i=1}^{N_n} P_{n,i}$, следовательно, в силу монотонности, $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{N_n} \mu(P_{n,i}) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n') \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. $\square$

Напоминание. Функция $f : [a,b) \to R$ называют непрерывной слева, если $\forall c \in [a,b) \hookrightarrow \lim\limits_{x \to c-0} = f(c)$



Теорема 1.6. *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо одномерных ячеек и дана строго возрастающая функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывная слева. Определим $\nu_g([a,b))=|g(b)-g(a)|$. Тогда ν_g — счётно-аддитивная мера на полукольце ячеек.*

Доказательство. Пусть $[a,b)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)$. В силу непрерывности слева мы можем выбрать $t\in(a,b)$ такой, что $|\nu_g([a,t))-\nu_g([a,b))|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall i\in\mathbb{N}$ выберем $\delta_i:[a_i-\delta_i,b_i)\supset[a_i,b_i)$ так, чтобы $|\nu_g([a_i-\delta_i,b_i))-\nu_g([a_i,b_i))|<\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Тогда $[a,b)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i-\delta_i,b_i)$; $[a,t]\subset[a,b)$. По лемме Гейне-Бореля, есть некоторое конечное подпокрытие мощности N: $[a,t)\subset[a,t]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}(a_i-\delta_i,b_i)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}[a_i-\delta_i,b_i)$. Заметим, что конечная аддитивность, и, как следствие, конечная полуаддитивность очевидны для ν_g. Значит,

$$\nu_g([a,t))\leqslant\sum_{i=1}^{N}\nu_g([a_i-\delta_i,b_i])\leqslant\sum_{i=1}^{N}\nu_g([a_i,b_i))+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\nu_g([a_i,b_i))+\frac{\varepsilon}{2}$$

Но по выбору t:

$$\nu_g([a,b))\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\nu_g([a_i,b_i))+\varepsilon$$

Поскольку $\varepsilon>0$ было выбрано произвольно, то мы получили счётно-полуаддитивную меру на полукольце, что по ранее доказанной теореме равносильно счётно-аддитивности меры ν_g. □

Пример. Приведём пример конечно-, но не счётно-аддитивной меры. Пусть $\mathcal{P}=2^{\mathbb{R}^n}$. Примем $\mu(A)=0$, если A — ограничено, и $+\infty$ иначе. Её конечная аддитивность очевидна: сумма конечного числа нулей равна 0, а если там появляется хотя бы одно неограниченное множество, то их объединение становится неограниченным. Но эта мера не является счётно-аддитивной, поскольку мы можем взять просто $\mathbb{Q}^n$: с одной стороны, его мера $+\infty$, поскольку оно неограниченно, а с другой стороны оно получается как счётное объединение по всем рациональным точкам. Сумма счётного числа нулей равна нулю, а следовательно его мера должна быть равна 0. Получено противоречие. Значит, мера не счётно-аддитивна.

1.4 Внешняя мера

Определение 1.18. Пусть X — абстрактное множество, а 2^X — система всех его подмножеств. Функцию τ: $2^X\to[0,+\infty]$ будем называть внешней мерой (по Каратеодори), если выполнены следующие условия:

1. $\tau(\varnothing)=0$;
2. Если $A\subset\bigcup\limits_{i}^{\infty}A_i$, то $\tau(A)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tau(A_i)$.

Определение 1.19. Множество $A\subset X$ называется τ-измеримым, если

$$\forall E\subset X \text{ верно, что } \tau(E)=\tau(E\cap A)+\tau(E\setminus A)$$

Далее будем обозначать это условие как $(*)$. Прим. ред именно для любого множества E, мы как будто выбираем "пробное"множество, которое множество A аддитивно разбивает

Примечание. Заметим, что для проверки условия $(*)$ достаточно проверить, что

$$\tau(E)\geqslant\tau(E\cap A)+\tau(E\setminus A)$$

для любого $E\subset X$. Обратное неравенство очевидно из 2) пункта определения внешней меры

Определение 1.20. Обозначим $\mathfrak{M}_\tau$ семейство всех τ-измеримых подмножеств множества X. Очевидно, что $\varnothing, X \in \mathfrak{M}_\tau$.

Теорема 1.7. *Система $\mathfrak{M}_\tau$ — σ-алгебра, при этом сужение τ на $\mathfrak{M}_\tau$, обозначается $\tau|_{\mathfrak{M}_\tau}$, и является счётно-аддитивной мерой на ней.*

Доказательство. Для начала заметим, что эквивалентной записью условия измеримости является

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^c)$$

Значит, $\mathfrak{M}_\tau$ замкнута относительно операции дополнения.
Покажем, что система замкнута относительно объединений. Пусть $A, B \in \mathfrak{M}_\tau$. Пусть $E \subset X$. Тогда из измеримости A :

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A)$$

А из измеримости B мы получаем следующее:

$$\tau(E \setminus A) = \tau((E \setminus A) \cap B) + \tau((E \setminus A) \setminus B)$$

Таким образом,

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B) + \tau(E \setminus (A \cup B))$$

В тоже время, поскольку $(E \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap B) \supset E \cap (A \cup B)$, то

$$\tau(E) \geqslant \tau(E \cap (A \cup B)) + \tau(E \setminus (A \cup B))$$

Таким образом, мы показали, что $\mathfrak{M}_\tau$ — алгебра с единицей X.
Покажем, что τ является конечно-аддитивной мерой на этой алгебре. Зафиксируем $A, B \in \mathfrak{M}_\tau$ такие, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда из измеримости A следует, что при $E = A \sqcup B$ выполняется следующее

$$\tau(A \sqcup B) = \tau((A \sqcup B) \cap A) + \tau((A \sqcup B) \setminus A) = \tau(A) + \tau(B)$$

Что нам и требовалось показать. Теперь по индукции это продолжается для произвольного числа дизъюнктных множеств алгебры.
Докажем даже более сильную версию конечной аддитивности. Заметим, что

$$(E \cap (A \sqcup B)) \cap A = E \cap A$$

$$(E \cap (A \sqcup B)) \setminus A = E \cap B$$

А значит, поскольку $A \sqcup B \in \mathfrak{M}_\tau$, то

$$\tau(E \cap (A \sqcup B)) = \tau((E \cap (A \sqcup B)) \cap A) + \tau((E \cap (A \sqcup B)) \setminus A) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap B)$$

Поэтому верно следующее утверждение. Для $\forall E \subset X$ и для $\forall$ дизъюнктной системы $\{A_i\}_{i=1}^N$ справедливо такое равенство:

$$\tau(E \cap (\bigsqcup_{i=1}^N A_i)) = \sum_{i=1}^N \tau(E \cap A_i)$$

С другой стороны, поскольку любая алгебра является полукольцом, и τ — счётно-полуаддитивная мера на $\mathfrak{M}_\tau$, то мы получаем что τ — счётно-аддитивная мера на $\mathfrak{M}_\tau$.
Теперь покажем, что $\mathfrak{M}_\tau$ — σ-алгебра.

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_\tau$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ если $i \neq j$. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Заметим, что из того, что наша система множеств является алгеброй, следует для $\forall E \subset X$

$$\tau(E) = \tau(E \cap (\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i)) + \tau(E \setminus (\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \tau(E \cap A_i) + \tau(E \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \tau(E \cap A_i) + \tau(E \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

Поскольку это верно для произвольного $n \in \mathbb{N}$, то, взяв sup по $n \in \mathbb{N}$, мы получаем

$$\tau(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tau(E \cap A_i) + \tau(E \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geqslant \tau(E \cap \bigsqcup A_i) + \tau(E \setminus \bigsqcup A_i)$$

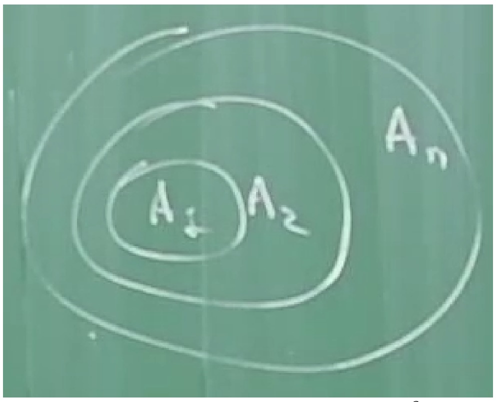
Значит, A — измеримое.

Пусть теперь A_i не обязательно дизъюнктные. Тогда определив $A'_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$, мы получим последовательность дизъюнктных $\{A'_i\}$ с тем же объединением. Поскольку это объединение лежит в алгебре, то мы получаем, что $\mathfrak{M}_\tau$ — σ-алгебра. □

Теорема 1.8. *Конечно-аддитивная мера μ на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ является счётно-аддитивной $\Longleftrightarrow$ μ непрерывна снизу, то есть для последовательности $\{A_i\} \subset \mathfrak{M}$: $A_i \subset A_{i+1}$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \hookrightarrow \mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.*

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Пусть μ — счётно-аддитивна. Тогда поскольку $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра, то определив $A'_1 := A_1, A'_n := A_n \setminus A_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$ мы получим дизъюнктную последовательность множеств с тем же объединением. Тогда

$$\mu(A) = \mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A'_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$$



Схематическое описание множеств, непрерывных снизу, где кольца между A_k и A_{k+1} это A'_{k+1}

($\Longleftarrow$) Пусть μ — непрерывна снизу. Хотим получить счетную аддитивность. Тогда если мы возьмём произвольную последовательность дизъюнктных множеств $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ и определим $F_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, то мы получим искомую монотонную последовательность множеств $F_k \subset F_{k+1}$. Из конечной аддитивности меры $\mu(F_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(A_i)$. Отсюда и из непрерывности меры следует, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) = \mu(A)$ □

Определение 1.21. Конечно-аддитивной мера μ на полукольце $\mathcal{P}$ подмножеств множества X называется <u>σ-конечной</u>, если

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \in \mathcal{P} \ \ \forall \text{ и } \mu(P_n) < +\infty \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если же $\mu(X) < +\infty$, то мера называется <u>конечной</u>.

Определение 1.22. Тройка $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ называется <u>*измеримым пространством*</u>, если:

- ▷ X — абстрактное множество.
- ▷ $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра подмножеств множества X.
- ▷ μ — счетно-аддитивная неотрицательная функция на этой σ-алгебре, то есть $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$.

Функция μ называется мерой на этой σ-алгебре, а сама $\mathfrak{M}$ называется σ-алгеброй измеримых подмножеств.

Определение 1.23. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство. Мера μ называется <u>полной</u>, если

$$\forall E \in \mathfrak{M} \text{ из того, что } \mu(E) = 0 \Longrightarrow \ E' \in \mathfrak{M} \quad \forall E' \subset E.$$

Пример. Неполная мера.
Возьмем $X = \mathbb{R}^n$, в качестве $\mathfrak{M}$ возьмем борелевскую σ-алгебру, а в качестве μ же — мера Лебега. Тогда это неполная мера, так как бывают неборелевские множества.

Теорема 1.9. *Пусть μ — <u>конечная</u> конечно-аддитивная мера на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{M}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Мера μ счетно-аддитивна на $\mathfrak{M}$.*
2. *Мера μ непрерывна сверху, то есть если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ $(A_{n+1} \subset A_n \forall n \in \mathbb{N})$ и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu(A) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n)$.*
3. *Мера μ непрерывна сверху в нуле, то есть если $\{A_n\} \subset \mathfrak{M}$ $(A_{n+1} \subset A_n \forall n \in \mathbb{N})$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.*

Доказательство.

- ▷ **1) $\Longrightarrow$ 2)**
  Рассмотрим множество $B = A_1 \backslash A$. Аналогично получим множества $B_k = A_1 \backslash A_k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда $B_{k+1} \supset B_k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ и $B = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} B_k$.
  В силу доказанной непрерывности снизу

$$\mu(B) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \mu(B_k)$$

  Но, используя конечность меры, получим, что $\mu(B_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k) \Longrightarrow$

$$\mu(B) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \mu(B_k) = \lim_{k \longrightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{k \longrightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A_1) - \mu(B) = \mu(A_1 \backslash B) = \mu(A)$$

  Получили искомое.

▷ **2) $\Longrightarrow$ 3)**
Очевидно, так как третье утверждение — частный случай второго.

▷ **3) $\Longrightarrow$ 1)**
Пусть $C = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k$. Возьмем $C^n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k$, $\widetilde{C^n} = C \setminus C^n$. Тогда $\widetilde{C}^{n+1} \subset \widetilde{C^n}$. Из наших определений $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{C^n} = \varnothing$.
Тогда в силу пункта 3, $\exists \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mu(\widetilde{C^n}) = 0$, значит, в силу конечной аддитивности меры

$$\mu(C) = \mu(C^n) + \mu(\widetilde{C^n}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) + \mu(\widetilde{C^n})$$

Но мы получили, что $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mu(\widetilde{C^n}) = 0$, значит, $\exists \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(C_k) = \mu(C)$, а это и есть счетная аддитивность.

□

1.5 Продолжение меры с полукольца на σ-алгебру

Определение 1.24. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо подмножеств множества X. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$. Для всякого множества $E \subset X$ определим его *верхнюю меру* по Каратеодори равенством:

$$\mu^*(E) := \inf_{E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j), \quad \{P_j\} \subset \mathcal{P} \right\}.$$

Замечание. Если ни одного такого покрытия E не существует, то формально считаем $\mu^*(E) = +\infty$.

Теорема 1.10. *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо подмножеств множества X. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$. Тогда μ^* является внешней мерой и $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$.*

Доказательство. **Шаг 1.** Докажем справедливость равенства $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$.
Фиксируем $P \in \mathcal{P}$. Тогда заметим, что его можно покрыть самим собой и пустыми множествами, то есть

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, \text{ где } P_i = \varnothing,\ i > 1,\ P_1 = P$$

При таком выборе покрытия $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(P_i) = \mu(P)$. Но мы берем инфимум по всем покрытиям, а он не может быть больше, чем конкретное покрытие $\Longrightarrow \mu^*(P) \leqslant \mu(P)$.
Докажем обратное неравенство. Пусть теперь $\{P_j\} \subset \mathcal{P}$ — произвольное покрытие P. Тогда так как счетно-аддитивная мера на полукольце счетно-полуаддитивна, $\mu(P) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(P_j)$. Взяв инфимум от обеих частей по всем возможным покрытиям, получим $\mu(P) \leqslant \mu^*(P)$.
Получили 2 противоположных неравенства $\Longrightarrow \mu^*(P) = \mu(P)$. А так как множество P было выбрано произвольно, это верно $\forall P \in \mathcal{P}$.

Шаг 2. Покажем теперь, что μ^* — внешняя мера. Из доказанного выше следует, что $\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$. Осталось проверить счетную полуаддитивность μ^*.

Прим. ред. мы доказываем второе свойство внешней меры (счетная полуаддитивность), а значит мы хотим доказать неравенство полуаддитивности для произвольного покрытия$\{E_n\}$ нашего множества E (поэтому мы не могли например сразу покрывать элементами полукольца).
Возьмем произвольное множество $E \subset X$, произвольную последовательность множество $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, так, что $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. По определению инфимума $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \{P_{n,j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P} \text{ т.ч. } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{n,j}) \leqslant \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Тогда $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_{n,j} \Longrightarrow$ по определению:

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{n,j}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ можно выбрать произвольно, получаем, что $\mu^*(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ — счетная полуаддитивность доказана. □

Теорема 1.11. *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо подмножеств множества X. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$. Пусть μ^* — внешняя мера, построенная по формуле. Тогда любое множество из $\mathcal{P}$ измеримо по Каратеодори, то есть $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}_{\mu^*}$.*

Доказательство. Требуется доказать, что $\forall E \subset X$ и для любого фиксированного $P \in \mathcal{P}$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \backslash P) \Longleftrightarrow \mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \backslash P)$$

Прим. ред. смысл трюка в том, что, пока мы на полукольце у нас продолженная мера совпадает с нашей мерой. А у самой меры мы требовали σ-аддитивность, а продолженная мера только σ-полуаддитивна. В итоге мы переходим к обычной мере, разбиваем пробное множество, а дальше получаем нужное неравенство возвращаясь к продолженной мере и пользуясь полуаддитивностью.
Начнем с простого случая: будем брать не любое E, а только из полукольца. По определению полукольца $E \backslash P = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P} \ \ \forall j \in \{1, \ldots, N\}$. В силу только что доказанного

$$\mu^*(E) = \mu(E) = \mu\left((E \cap P) \sqcup (\bigsqcup_{j=1}^{N} Q_j)\right) = (\text{в силу конечной аддитивности } \mu) =$$

$$= \mu(E \cap P) + \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j) = \mu^*(E \cap P) + \sum_{j=1}^{N} \mu^*(Q_j) \geqslant \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \backslash P),$$

так как $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu^*(Q_j) \geqslant \mu^*(\bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j)$. Получили искомое.

Теперь рассмотрим общий случай. Без ограничения общности считаем, что $\mu^*(E) < +\infty$. Возьмем покрытие E элементами из полукольца: $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$. Тогда из случая выше знаем, что P_j измерим: $\forall j \in \mathbb{N}: \ \mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \backslash P) \leqslant \mu^*(P_j)$.

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} (P_j \cap P) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j) \cap P$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(P_j \backslash P) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j) \backslash P$$

Воспринимая левые части равенств, как покрытия правых, и пользуясь счетной полуаддитивностью μ^*, получим:

$$\mu^*\left((\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j) \cap P\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \cap P) \text{ и } \mu^*\left((\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j) \backslash P\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \backslash P).$$

Суммируем эти 2 неравенства.

$$\mu^*\left((\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j) \cap P\right) + \mu^*\left((\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j) \backslash P\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \backslash P)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j)$$

Воспользуемся монотонностью μ^*: $\mu^*(E \cap P) \leqslant \mu^*\left((\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j) \cap P\right)$ и $\mu^*(E \backslash P) \leqslant \mu^*\left((\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j) \backslash P\right)$ $\Longrightarrow$

$$\mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \backslash P) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \longrightarrow \mu^*(E)$$

Взяв инфимум по всем покрытиям E последовательностями $\{P_j\}$, получим искомое. □

Теорема 1.12. *(Единственность продолжения) Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо подмножеств множества X. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$. Пусть μ^* — продолжение μ на σ-алгебру $\mathfrak{M}_{\mu^*}$, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}_{\mu^*}$, а ν — продолжение μ на какую-то другую σ-алгебру $\mathfrak{M}_\nu$, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}_\nu$. Тогда верно следующее:*

1. *$\nu(A) \leqslant \mu^*(A)\ \ \forall A \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_\nu$. Если $\mu^*(A) < +\infty$, то $\mu^*(A) = \nu(A)$.*
2. *Если μ — σ-конечна, то $\mu^*(A) = \nu(A)\ \ \forall A \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_\nu$.*

Доказательство. **Шаг 1** Пусть $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$ — произвольное покрытие. В силу счетной полуаддитивности ν, а также так как ν — это продолжение, а на $\mathcal{P}$ оно совпадает:

$$\nu(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j)\ (*)$$

Возьмем инфимум в (*) по всем возможным покрытиям A последовательностями $\{P_j\}$. Получим

$$\nu(A) \leqslant \inf_{A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j} \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j)\right\} = \mu^*(A)$$

Таким образом, доказали неравенство в пункте 1.
Шаг 2 Покажем, что $\forall P \in \mathcal{P}$ $\mu(P) < +\infty$ и $\forall A \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_\nu$ справедливо равенство:

$$\nu(P \cap A) = \mu^*(P \cap A)$$

Предположим противное(мы уже доказали в 1 шаге "$\leqslant$"):

$$\nu(P \cap A) < \mu^*(P \cap A)$$

$P \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \Longrightarrow$ измерим по Каратеодори $\Longrightarrow$

$$\mu(P) = \mu^*(P) = \mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \backslash A) > \nu(P \cap A) + \nu(P \backslash A) = \nu(P) = \mu(P)$$

Но так как $\mu(P) < +\infty$, это невозможно $\Longrightarrow$ равенство выше верно.
Если μ — σ-конечна, либо если $\mu^*(A) < +\infty$, то можно покрыть $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$ т.ч.

$$\mu(P_j) < +\infty \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ и } \{P_j\} \in \mathcal{P}$$

Но верно, что $\mu^*(A \cap P_j) = \nu(A \cap P_j) \Longrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap P_j)$$

По теореме о дизъюнктном разбиении P_j можно считать попарно непересекающимися (несложно реализовать ее и для счетных объединений). Тогда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap P_j) = \nu(A)$, а в силу счетной полуаддитивности $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap P_j) \geqslant \mu^*(A) \Longrightarrow \mu^*(A) \leqslant \nu(A)$. Уже есть противоположное неравенство $\Longrightarrow$ получили искомое. □

Напоминание. Если $\mathcal{E}$ — система множеств. $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ — минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.

Следствие. Если μ — σ-конечная счетно-аддитивная мера на полукольце $\mathcal{P}$, то продолжение на $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$ единственно, то есть на пересечении сигма алгебр они совпадают.

Замечание. $(X, \mathfrak{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ — измеримое пространство, причем μ^* — полная мера.

Лемма 1.5. *Пусть μ^* — внешняя мера, построенная по счетно-аддитивной мере μ на полукольце $\mathcal{P}$. Пусть $E \subset X$: $\mu^*(E) < +\infty$. Тогда $\exists$ множество*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j}, \text{ где } P_{n,j} \in \mathcal{P} \text{ такое что } \mu^*(C) = \mu^*(E)$$

Причем $C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$. То есть если множество имеет конечную меру, то оно не обязательно измеримо, но вот у него есть измеримый envelope(покрытие) той же самой меры

Доказательство. Так как $\mu^*(E) < +\infty$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \{P_{n,j}\} \in \mathcal{P}$: $\dfrac{1}{2^n} + \mu^*(E) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(P_{n,j})$ (по определению инфимума). Тогда

$$C^N = \bigcap_{n=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j} \supset E \quad \forall N \in \mathbb{N} \Longrightarrow C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j} \supset E, C \in \mathfrak{M}_{\mu^*}.$$

В силу монотонности и счетной полуаддитивности::

$$\mu^*(C) \leqslant \mu^*(C^N) \leqslant \mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{N,j}) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_{N,j}) \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{2^N}.$$

Так как N — произвольно, $\mu^*(C) \leqslant \mu^*(E)$, но с другой стороны $C \supset E \Longrightarrow$ в силу монотонности μ^* $\mu^*(C) \geqslant \mu^*(E) \Longrightarrow \mu^*(C) = \mu^*(E)$. □

Теорема 1.13. *Пусть* $E \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$ *и* $\mu^*(E) < +\infty$. *Тогда* $\exists B,\ C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ *т.ч.* $B \subset E \subset C$ *и* $\mu^*(C \backslash B) = 0$.

Доказательство. Множество $\supset E$ со свойством $\mu^*(C) = \mu^*(E)$ построили в предыдущей лемме. Построим B.
Определим множество $e := C \backslash E$ — измеримо. Применим к e предыдущую лемму и получим $\widetilde{e} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$, при этом $\mu^*(\widetilde{e}) = 0$. Тогда

$$B = C \backslash \widetilde{e}$$

□

Теорема 1.14. *Пусть* μ *— счетно-аддитивная* σ*-конечная мера на полукольце* $\mathcal{P}$ *подмножеств множества* X. *Пусть* ν *— полная мера на* σ*-алгебре* $\mathfrak{M}_\nu$, *являющаяся продолжением* μ. *Тогда* $\mathfrak{M}_{\mu^*} \subset \mathfrak{M}_\nu$.

Доказательство. По предыдущей теореме $\nu|_{\mathfrak{M}(\mathcal{P})} = \mu^*|_{\mathfrak{M}(\mathcal{P})}$. Зафиксируем произвольное множество e: $\mu^*(e) = 0$. Покажем, что $e \in \mathfrak{M}_\nu$ и $\nu(e) = 0$.
Так как μ^* полна $e \in \mathfrak{M}_{\mu*} \implies \exists \widetilde{e} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ и $e \subset \widetilde{e}$. Это слежует из предыдущей теоремы $\mu^*(\widetilde{e}) = 0$ $\implies$ т.к. $\nu|_{\mathfrak{M}(\mathcal{P})} = \mu^*|_{\mathfrak{M}(\mathcal{P})}$

$$\widetilde{e} \in \mathfrak{M}_\nu \text{ и } \nu(\widetilde{e}) = 0$$

Но ν полна $\implies e \in \mathfrak{M}_\nu$.

Теперь фиксируем произвольное $A \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$, такое что $\mu^*(A) < +\infty$. Покажем, что $A \in \mathfrak{M}_\nu$.
По лемме $\exists C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ т.ч. $\mu^*(C) = \mu^*(A)$, а т.к. A — измеримо, $e = C \backslash A \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$ и $\mu^*(C \backslash A) = \mu^*(C) - \mu^*(A) = 0$. Значит $A = C \backslash e \implies A \in \mathfrak{M}_\nu$.

В общем случае, если A только лишь измеримо, но необязательно имеет конечную меру, то согласно σ-конечночти μ, пространство X можно представить в виде $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_n \in \mathcal{P}$ и $\mu(X_n) < +\infty$. Тогда $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A \cap X_n \implies \mu^*(A \cap X_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$, а для этого применим прошлый случай. Тогда $A \cap X_n \in \mathfrak{M}_\nu\ \forall n \in \mathbb{N} \implies$ по определению σ-алгебры $A \in \mathfrak{M}_\nu$. □

2 Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

2.1 Конструкция меры Лебега

Напоминание. Рассмотрим систему множеств:

$$\mathcal{P}_n := \{[a,b)|a = (a_1,...,a_n),\, b = (b_1,...,b_n), a_i \leqslant b_i,\, i \in 1,\dots,n\}$$

Система $\mathcal{P}_n$ является полукольцом. Определим меру на $\mathcal{P}_n$ равенством:

$$\mu\Big([a,b)\Big) := \prod_{i=1}^{n} \mu\Big([a_i,b_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} |a_i - b_i|.$$

Замечание. Используя рассуждения, аналогичные одномерным, доказывается, что μ — счетно-аддитивная мера на полукольце $\mathcal{P}_n$. Кроме того μ — σ-конечная мера на $\mathcal{P}_n$, т.к. $\mathbb{R}^n$ представимо в виде $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{d=1}^{\infty} [-d,\, d)$, где $d = (d_1,...,d_n) \in \mathbb{N}^n$.

Определение 2.1. Применим к $\mathcal{P}_n$ конструкцию продолжения по Каратеодори и получим верхнюю меру:

$$\mu_n^*(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(P_j) : \{P_j\} \subset \mathcal{P},\, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right\} \text{— верхняя мера Лебега в } \mathbb{R}^n.$$

Определение 2.2. Минимальная σ-алгебра, порожденная полукольцом ячеек $\mathcal{P}_n$, называется борелевской сигма алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}^n$

Определение 2.3. Примерим рассуждения предыдущего параграфа к мере μ на полукольце $\mathcal{P}_n$ ячеек. Мы получим верхнюю меру μ^*, которая породит $\mathfrak{M}_n$ — класс всех измеримых множеств в $\mathbb{R}^n$. Мы доказывали, что продолжение по Каратеодори на борелевской сигма алгебре единственно. Минимальная сигма алгебра содержится в сигма алгебре измеримых $\Longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$

Определение 2.4. Сужение μ^* на $\mathfrak{M}_n$ мы будем обозначать $\mathcal{L}^n$

Замечание. Базовые свойства $\mathcal{L}^n$ и $\mathfrak{M}_n$:

1. $\forall$ открытые множества в $\mathbb{R}^n$ измерим, т.е. содержатся в $\mathfrak{M}_n$
2. $\forall$ замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ измерим, т.е. содержатся в $\mathfrak{M}_n$
3. $\forall A \in \mathfrak{M}_n$ $\mathcal{L}^n(A) < +\infty$. Из теоремы про envelope $\Longrightarrow \exists B,\, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ т.ч. $B \subset A \subset C$ и $\mathcal{L}^n(C \setminus B) = 0$. Следовательно, любое измеримое есть борелевское с точностью до множества меры 0.
4. Счетное объединение измеримых по Лебегу множеств меры 0 является множеством меры 0, в частности, любое не более, чем счетное подмножество в $\mathbb{R}^n$ имеет меру 0. Это следует из счетной полуаддитивности.
5. $\mathcal{L}^n$ — полная мера.

2.2 Неизмеримые по Лебегу множества

В прошлый раз была введена мера Лебега, которая определена на $\sigma-$алгебре измеримых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Но возникает естественный вопрос: «Все ли подмножества в $\mathbb{R}^n$ являются измеримыми?»

Для построения примера не измеримого по Лебегу множества нам понадобится аксиома выбора.

Утверждение 2.1. *(Аксиома выбора) Пусть задано произвольное семейство абстрактных множеств $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Тогда существует отображение $F : I \to \bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$, такое что:*

$$\forall\alpha \in I\ F(\alpha) \in E_\alpha$$

Кроме того, корректно определено множество $E = \{F(\alpha) \mid \alpha \in I\}$.

То есть утверждается, что из любого семейства (не обязательно счетного) множеств можно выбрать по элементу.

Факт. *Применяя аксиому выбора, мы получаем парадокс Банаха-Тарского: Шар можно разбить на куски, которые можно сложить в два ровно таких же шара. (См Википедию)*

Теорема 2.1. *Для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathbb{R}^n$ положительной меры существует его неизмеримое подмножество E.*

Доказательство. Введем в множестве A отношение $\sim$:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$$

Ясно, что это отношение эквивалентности (оно рефлексивно, транзитивно, симметрично). Тогда рассмотрим семейство классов эквивалентности $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Пользуясь аксиомой выбора, построим множество $E \subset A$. E определяется тем, что:

$$\forall\alpha \in I\ E \cap E_\alpha = \{x_\alpha\}.$$

Тогда множество E искомое. Покажем это.
Без ограничения общности считаем, что A — ограничено, то $\exists R > 0 :\ ||x - y|| \leqslant R\ \forall x, y \in A$. Рассмотрим всевозможные рациональные сдвиги множества E, модуль сдвига которых не превосходит R. По построению:

$$(E + r) \cap (E + r') = \varnothing,\ r \neq r'$$

Иначе бы получилось так, что есть в E два элемента, которые лежат в одном классе эквивалентности. С другой стороны:

$$A \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^n,\ ||r||\leqslant R} (E + r)$$

Предположим, что E измеримо, тогда возможны случаи.

1. $\mathcal{L}^n(E) = 0$. Но это невозможно, так как $\mathcal{L}^n(A) > 0$.

2. $\mathcal{L}^n(E) > 0$. Тогда получается, что:

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}^n,||r||\leqslant R} (E + r)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^n(E + r_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^n(E) = +\infty$$

Это не возможно, так как $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}^n,||r||\leqslant R}(E+r) \in B_{2R}(x) \forall x \in E \Longrightarrow \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}^n,||r||\leqslant R}(E+r)\right) < +\infty$ □

2.3 Регулярность меры Лебега.

Регулярность по сути означает то, что мы можем «сложные» множества приближать более «простыми». Для начала сформулируем следующую теорему:

Теорема 2.2. *(Верхняя регулярность меры Лебега) Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу. Тогда:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \textit{открытое множество } G_\varepsilon \textit{ такое что } E \subset G_\varepsilon : \ \mathcal{L}^n(G_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$$

Доказательство. **Шаг 1.** Рассмотрим случай, когда мера E конечна. Тогда по определению верхней меры для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность ячеек $\{P_k\} \subset \mathcal{P}_n$ такая что:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(P_k) < \mathcal{L}^n(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь воспользуемся непрерывность меры слева ($a_k' < a$):

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \forall P_k = [a_k, b_k) \ \exists P_k' = [a_k', b_k) : \ \mathcal{L}^n(P_k') < \mathcal{L}^n(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_k \subset (a_k', b_k) \subset [a_k', b_k) = P_k'$$

Тогда определим искомое множество равенством:

$$G_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k', b_k)$$

Докажем, что оно подходит, используя счетную полуаддитивность:

$$\mathcal{L}^n(G_\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n\Big((a_k', b_k)\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(P_k') \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathcal{L}^n(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Big) \leqslant \mathcal{L}^n(E) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Кроме того, имеем:

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k', b_k) \subseteq G_\varepsilon$$

$$\mathcal{L}^n(G_\varepsilon \setminus E) = \mathcal{L}^n(G_\varepsilon) - \mathcal{L}^n(E) < \varepsilon.$$

Шаг 2. Поскольку $\mathcal{L}^n$ $\sigma-$конечная мера на $\mathbb{R}^n$, тогда мы можем доказать утверждение для множеств бесконечной меры, «развалив» на множества конечной меры. То есть, можно представить множество E в виде дизъюнктного объединения множеств E_n конечной меры. Например, пересекая с кубами с ребром a. Понятно что их бесконечное объединение даст искомое множество. Получается:

Если $\mathcal{L}^n(E) = +\infty$, то: $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, т.ч $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \mathcal{L}^n(E_k) < +\infty$.

Пользуясь уже доказанным, получим:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \text{ открытое множество } G_\varepsilon(k) : \ E_k \subset G_\varepsilon(k) \text{ и } \mathcal{L}^n(G_\varepsilon(k) \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Тогда положим $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_\varepsilon(k)$. Ясно, что $E \subseteq G_\varepsilon$ и G_ε открытое. Осталось проверить, что мера их разности меньше ε. Имеем:

$$G_\varepsilon \setminus E = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_\varepsilon(k)\Big) \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(G_\varepsilon(k) \setminus E\Big) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(G_\varepsilon(k) \setminus E_k\Big)$$

Теперь осталось воспользоваться счетной полуаддитивностью меры Лебега:

$$\mathcal{L}^n(G_\varepsilon \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n\Bigg(G_\varepsilon(k) \setminus E_k\Bigg) < \varepsilon$$

□

Следствие. (регулярность меры Лебега). Пусть E измеримо по Лебегу. Тогда:

1. $\mathcal{L}^n(E) = \inf\{\mathcal{L}^n(G): \ G - \text{ открытое } E \subseteq G\}$
2. $\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(F): \ F - \text{ замкнутое } F \subseteq E\}$
3. $\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(K): \ K - \text{ компакт } K \subseteq E\}$

Доказательство. **Пункт 1.** Мгновенно следует из предыдущей теоремы.
Пункт 2. Применим предыдущую теорему для $\mathbb{R}^n \setminus E$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists G_\varepsilon: \ \mathbb{R}^n \setminus E \subset G_\varepsilon, \ \mathcal{L}^n(G_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$$

Но тогда рассмотрим множество $F_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus G_\varepsilon$. Поскольку $E \setminus (F_\varepsilon) = G_\varepsilon \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)$. Имеем:

$$\mathcal{L}^n(E \setminus (F_\varepsilon)) < \varepsilon$$

Откуда и вытекает требуемое.
Пункт 3. Для начала поймем, как же нам получить компакт из произвольного замкнутого множества F. Заметим, что:

$$\forall j \in \mathbb{N}: \ K_j(F) = F \cap [-j, j]^n - \text{ компакт}$$

Таким образом, мы построили возрастающую последовательность компактов, поскольку мера Лебега непрерывна снизу, имеем:

$$\exists \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^n(K_j(F)) = \mathcal{L}^n(F)$$

Согласно предыдущему пункту:

$$\mathcal{L}^n(E) = \sup\Big\{\mathcal{L}^n(F): \ F - \text{ замкнутое } F \subseteq E\Big\} =$$

$$= \sup_{F\subset E}\sup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(K_j(F)) = \sup\Big\{\mathcal{L}^n(K): \ K - \text{компакт} \subseteq E\Big\}$$

□

Следствие. Для любого измеримого $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. Существует возрастающая последовательность компактов $\{K_j\}, \ K_j \subseteq E \ \forall j \in \mathbb{N}$:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e, \ \mathcal{L}^n(e) = 0$$

2. Существует убывающая последовательность открытых множеств $\{G_j\}, \ E \subseteq G_j$ таких, что$\forall j \in \mathbb{N}$, кроме того:

$$e \cup E = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j, \ \mathcal{L}^n(e) = 0$$

Доказательство. Докажем первое, а второе доказывается аналогично. Рассмотрим для начала случай, когда E имеет конечную меру. По доказанному:

$$\mathcal{L}^n(E) = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : \ K - \ \text{компакт } K \subseteq E\}$$

Тогда существует последовательность компактов $K_1', K_2', \ldots, K_j'$:

$$\mathcal{L}^n(E) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(K_j')$$

По этой последовательности построим возрастающую последовательность компактов:

$$K_j = \bigcup_{k=1}^{j} K_j', \ j \in \mathbb{N}.$$

И при этом:

$$\mathcal{L}^n(E) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(K_j).$$

Значит:

$$\mathcal{L}^n(E \setminus K_j) = \mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(K_j) \to 0, \ j \to \infty.$$

Теперь осталось показать, что $e := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(E \setminus K_j)$ имеет меру нуль. В силу монотонности меры Лебега:

$$0 \leqslant \mathcal{L}^n(e) \leqslant \mathcal{L}^n(E \setminus K_j) = \mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(K_j) \to 0.$$

Откуда получаем требуемое.
Если же E имеет бесконечную меру, то существует: последовательность попарно непересекающихся множеств E_j таких что: $\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j = E$ и $\mathcal{L}^n(E_j) < +\infty, \ \forall j \in \mathbb{N}$.
Тогда $\forall j \in \mathbb{N}$, применив только что доказанное, получим:

$$E_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{ij} \cup e_j.$$

Следовательно:

$$E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{=1}^{\infty} K_{ij} \cup e_j\right).$$

Если мы перенумеруем соответствующие множества одним индексом, то можем получить:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{K_j} \cup e$$

Таким образом, требуемое доказано. □

Замечание. Множества, которые можно представить в виде счетного объединения компактов, называются сигма компактными, получается любое измеримое это сигма компактное, с точностью до множества меры ноль.

2.4 Элементы геометрической теории меры.

Для начала сформулируем 5B-covering lemma.

Лемма 2.1. *(Витали) Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ произвольное ограниченное множество (не обязательно измеримое), $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ покрытие E шарами. При этом $sup\{r(B_\alpha)|\ \alpha \in I\} < +\infty$. Тогда существует такое, не более чем счетное дизъюнктное подсемейство $\{B_n\}$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, что:*

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{N} 5B_n$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из ограниченности множества E и ограниченности радиусов следует, что $\exists R > 0$ такое что:

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \subset B_R(0)$$

План доказательства: берем какой-то шар достаточно большого радиуса (не меньше чем половина размера самого большого шара R_k), далее убираем из семейства все шары которые пересекаются с выбранным нами шаром и получаем новое семейство поменьше $\mathcal{B}_{k+1}$, так берем шары пока можем взять. Опишем этот процесс формально, выберем шары раздутые в 5 раз и покажем, они действительно покрывают E:

База индукции: Изначальное семейство совпадает со всем множеством шаров $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}$. Положим:

$$R_1 = \sup\Big\{r(B)|\ B \in \mathcal{B}_1\Big\} < +\infty$$

Пусть:

$$B_1 - \text{ произвольный шар из } \mathcal{B}_1, \text{ для которого } r(B_1) > \frac{R_1}{2}$$

Пусть: $\mathcal{B}_2 = \{B|\ B \cap B_1 = \varnothing\}$ - те шары которые не пересекаются с выбранным шаром

Переход: предположим, что мы построили семейства $\mathcal{B}_i$ и шары B_i при $i = 1, \ldots, j$. Положим:

$$\mathcal{B}_{j+1} = \{B \in \mathcal{B}|\ B \text{ не пересекает } \bigsqcup_{i=1}^{j} B_i\}$$

Если же $\mathcal{B}_{j+1}$ оказалось пустым, то заканчиваем построение. В противном случае, продолжаем. Положим:

$$R_{j+1} = \sup\{r(B)|\ B \in \mathcal{B}_{j+1}.\}$$

Пусть

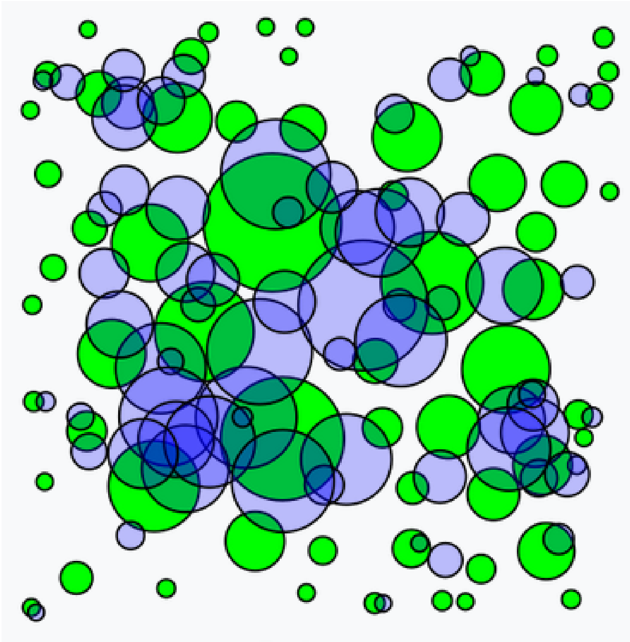
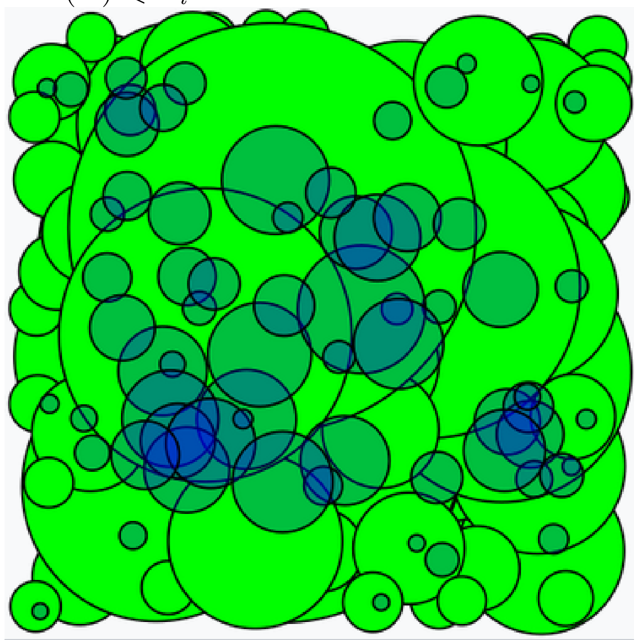
$$B_{j+1} - \text{ произвольный шар из } \mathcal{B}_{j+1}, \text{ для которого } r(B_{j+1}) > \frac{R_{j+1}}{2}$$

Заметим, что семейства включены друг в друга: $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{B}_j$. По построению радиусы не возрастают: $R_1 \geqslant R_2 \geqslant \ldots \geqslant R_j$. А выбранные шары $\{B_i\}_{i=1}^{j}$ - дизъюнкты. Построение закончено, докажем, что оно искомое.

Рассмотрим случай, когда построение закончится на $j+1$ шаге, то есть $\mathcal{B}_{j+1} = \varnothing$. В таком случае:

$$\forall B \in \mathcal{B} \text{ пересекает } \bigsqcup_{i=1}^{j} B_i$$

Выберем $i \in \{1, \ldots, j+1\}$ минимально возможным, что B пересекает B_i. Докажем, что $r(B) \leqslant R_i$. Действительно, при $i = 1$ это очевидно, ведь R_1 это супремум радиусов всех шаров и никакой элемент не больше. А если $i > 1$, то получается, что $B \in \mathcal{B}_i$, так как i был выбран минимально возможным, то так как мы еще не выкинули B из семейства, то радиус шара не больше чем супремум по всем радиусам в семействе, тогда получается $r(B) \leqslant R_i$.

Пояснение к картинке. Мы выбрали зеленые шары. Все остальные синие цепляются как ожерелье за зеленые шары. Мы надуваем зеленые шары в 5 раз и они покрывают все синие шары, а значит и все множество E

Теперь зафиксируем точку $x \in E$, так как множество покрыто шарами, то $\exists B: \ x \in B$ пусть центр шара B_i это x_i, а также выберем произвольную точку $y \in B \cap B_i$. По неравенству треугольника:

$$||x - x_i|| \leqslant ||x_i - y|| + ||y - x|| \leqslant r(B_i) + diam(B) \leqslant r(B_i) + 2R_i < r(B_i) + 4r(B_i) = 5r(B_i)$$

Получили, что:

$$B \subset 5B_i$$

А отсюда следует требуемое. Ведь $E \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \subset \bigsqcup\limits_{i=1}^{j} B_i$

Теперь же рассмотрим случай, когда построение происходит бесконечно. Получается последовательность попарно непересекающихся шаров $\{B_i\}$. В силу замечания $\{B_i\} \subset B_R(0)$. Поэтому в силу дизъюнктонсти семейства $\{\mathcal{B}_\rangle\}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) \leqslant \mathcal{L}^n(B_R(0)) < +\infty$$

Мы мажорировали ряд конечным числом, а значит он сходится, но тогда понято что радиусы шаров стремятся к нулю:

$$\mathcal{L}^n(B_i) \to 0, \ j \to \infty$$

Следовательно $R_j \to 0, j \to \infty$.

Выберем произвольный шар $B \in \mathcal{B}, \ r(B) > 0$. В силу уже доказанного следует, что $\exists i \in \mathbb{N}:$ $B_i \cap B \neq \varnothing$. Иначе бы B лежал во всех семействах $\mathcal{B}_i$, но радиус $r(B)$ фиксирован, а радиусы семейств стремятся к 0. Используя рассуждения аналогичные оценке на рдиус раров в конечном случае, получаем требуемое и в этом случае. $\square$

Определение 2.5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ произвольное множество(даже неизмеримое). Будем говорить, что семейство непустых открытых шаров $\mathcal{B}$ образуют покрытие Витали(fine covering) множества E, если

$$\forall x \in E \ \forall r > 0 \ \exists B \in \mathcal{B} \text{ с центром в } x, \text{ таких, что } r(B) < r.$$

То есть это покрытие множества шарами сколь угодно малого радиуса в каждой точке множества.

Теорема 2.3. *(Витали о тонком покрытии) Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ произвольное ограниченное множество. Пусть $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ его покрытие Витали. Тогда существует не более чем счетное* *дизъюнктное* *подсемейство $\{B_n\}_{n=1}^N$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, для которого верно равенство:*

$$\mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) = 0.$$

Замечание. Предыдущая лемма была грубая в том, что, чтобы покрыть множество нужно было шары раздувать шары в 5 раз. А это покрытие называется тонким, так как оно покроет множество, но с точностью до меры ноль. Крутость теоремы в том, что из какого-то несчетного набора шаров с какими-то радиусами, из которого можно выделить семейство непересекающихся, таких, что они покроют наше множество с точностью до меры ноль

Доказательство. Выкинем большие шары:

$$\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B} |\ r(B) \leqslant 1\}.$$

Ясно, что семейство образует покрытие Витали множества E. Ведь для каждой точки все также есть достаточно малый шар ее покрывающий. Множество E ограничено, радиусы шаров ограничены. Значит к этому семейству $\mathcal{B}_1$ применима лемма Витали. Тогда возможны два случая:
Случай 1. Количество шаров, построенных в лемме Витали конечно. Хотим доказать, что набор который получился $\{B_k\}_{k=1}^N$, можно не упятерять, он и так покрывает с точностью до множества меры ноль.
Действительно $\mathcal{B}_{N+1} = \varnothing$ для некоторого натурального N. Любой шар из $\mathcal{B}_1$ пересекает какой-то B_j.
Ключевой момент(мы хотим это доказать) заключается в том что:

$$\forall x \in E \setminus (\bigcup_{j=1}^N B_j) \Longleftrightarrow x \in \partial B_j$$

Действительно, из того что $\mathcal{B}_1$ это покрытие Витали следует, что $\exists \{r_l\}_{l=1}^\infty$, стремящаяся к нулю монотонно убывая $\{B_{r_l}(x)\} \subset \mathcal{B}_1$. Значит для некоторого $j \in \mathbb{N}$, а такой j всегда существует, так как шаров конечное число:

$$\forall l \in \mathbb{N}: \ B_{r_l}(x) \cap B_j \neq \varnothing.$$

Тогда x - это предельная точка по определению. Тогда мы имеем требуемое. А значит:

$$E \subset \bigcup_{j=1}^N B_j \cup \bigcup_{j=1}^N \partial B_j$$

Факт. Границы шаров имеют меру нуль. Так как их конечное количество, то требуемое верно.
Случай 2. Количество шаров бесконечно. То есть $N = +\infty$.
План доказательства и ключевое наблюдение: $\mathcal{B}_{N+1}$ является покрытием Витали для множества $E_N = E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \overline{B_i}\right)$. Здесь тонкий момент. Мы покрывали E по построению леммы Витали N шарами. Не покрыли. Значит если точка не попала ни в шар, ни на его границу. То она на положительном расстоянии от этого шара. Тк у нас было fine covering. То существует достаточно малый шар для этой точки, которая никуда не попала. Этот шар лежит в $\mathcal{B}_{N+1}$. Ведь $\mathcal{B}_{N+1}$ не пустое и это по построению семейство шаров, которые ни с кем не пересеклись из выбранных шаров.
Второй еще более тонкий момент. Что происходит дальше. Мы берем этот конечный набор из N шаров. Вычитаем из множества эти шары. Далее у нас остался какой-то обрезанный кусок

множества. Для него мы еще раз применяем лемму Витали(C это дизъюнктные шары, которые получаются из леммы) Получаем набор шаров $\{C\}$. этот оставшийся кусок множества покрывается $5C$. То есть мы представляем наше множество E как объединение шаров B и Шаров $5C$. А далее мы доказываем, что увеличивая количество N изначально выбранных шаров B, то мера $5C$ стремится к нулю. Докажем это формально:

Применим лемму Витали для $E_N, \mathcal{B}_{N+1}$:

$$E_N \subset \bigcup_{j=N+1}^{\infty} 5B_j$$

Но шары не пересекаются, значит действуя по аналогии с предыдущей леммой:

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \mathcal{L}^n(5B_j) \to 0, N \to \infty$$

Тогда:

$$\mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_j}\right) \leqslant \mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \overline{B_j}\right) \leqslant 5^n \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathcal{L}^n(5B_j)$$

Отсюда предельным переходом в неравенстве:

$$\mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_j}\right) = 0.$$

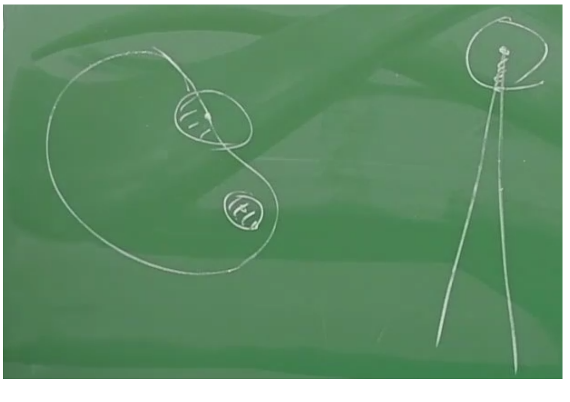
Но используя определение границы:

$$\mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leqslant \mathcal{L}^n\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_j}\right) + \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \partial B_j\right).$$

Следовательно, так как мера границ шаров равна нулю, их счетное объединение тоже имеет меру ноль, то мы доказали что, хотели $\square$

Примечание. Лемма Витали, и теорема Витали останутся в силе, если требование открытых шаров заменить требованием замкнутых шаров с положительными радиусами (если радиус равен нулю, очевидно нельзя покрыть отрезок такими шарами).

2.5 Точки плотности



Геометрическая интуиция про точки плотности примерно следующая: берем точку, а в ней шары все меньшего радиуса, и смотрим какая доля шара пересекается с множеством. Верхние примеры, когда шар только частично пересекает множество, а нижний шар полностью лежит в множестве. Так вот теорема о точках плотности как раз про то, что несущественно пересекающих точек «мало» (их мера ноль).

Определение 2.6. Для точки $x \in E$ определим нижняя плотность равенством

$$\underline{D}_E(x) = \varliminf_{r \to +0} \frac{\mu^*(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))},$$

Кроме того определим верхнюю плотность равенством:

$$\overline{D}_E(x) = \varlimsup_{r \to +0} \frac{\mu^*(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}$$

Определение 2.7. Если $\underline{D}_E(x) = \overline{D}_E(x) = D_E(x)$, то это число называется плотностью точки x относительно множества E

Определение 2.8. Если $D_E(x) = 1$, то x называется точкой плотности множества E, то есть:

$$\exists \lim_{r \to +0} \frac{\mu^*(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1.$$

Теорема 2.4. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу множество. Тогда $\mathcal{L}^n-$ почти всякая точка $x \in E$ является точкой его плотности, то есть:*

$$\forall \mathcal{L}^n - \textit{почти любая } x \in E \hookrightarrow \exists \lim_{r \to +0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1.$$

Замечание. В определении плотности в числителе μ^*, так как само множество E не обязательно измеримо, а вот в теореме мы требуем измеримость, поэтому там стоит $\mathcal{L}^n$.

Доказательство. Зафиксируем $q \in (0,1)$ и определим множество $E(q)$ равенством:

$$E(q) = \{x \in E : \underline{D}_E(x) \leqslant q\}$$

Значит:

$$\forall x \in E(q)\ \exists \{r_j(x)\} \text{ последовательность монотонно убывающая к нулю, причем}$$

$$\exists \lim_{j \to \infty} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_{r_j}(x))}{\mathcal{L}^n(B_{r_j}(x))} \leqslant q.$$

Заметим, что

$$\bigcup_{x \in E_q} \{B_{r_j}(x)\}_{j=0}^{\infty} \text{ образует покрытие Витали } E(q)$$

Зафиксируем теперь $\varepsilon \in (0, 1-q)$, далее будем предполагать, что (иначе можно такие шары «выкинуть», сохранив покрытие Витали):

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_{r_j}(x))}{\mathcal{L}^n(B_{r_j}(x))} \leqslant q + \varepsilon,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

В силу теоремы Витали, существует дизъюнктный набор шаров $\{B_j(q)\}_{j=1}^{\infty}$, покрывающий $E(q)$ с точностью до меры 0, то есть:

$$E(q) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j(q) \cup e(q),\ \text{где } \mathcal{L}^n(e(q)) = 0$$

Тогда в силу счетной полуаддитивности меры Лебега:

$$\mathcal{L}^n(E(q)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E(q) \cap B_j(q)) + \mathcal{L}^n(e(q)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (q+\varepsilon)\mathcal{L}^n(B_j(q)) = (q+\varepsilon)\mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j(q)) \leqslant (*)$$

Пусть G открытое множество, содержащее $E(q)$, и такое что, $\mathcal{L}^n(G(q) \setminus E(q)) < \varepsilon \cdot \mathcal{L}^n(E(q))$. И далее можем считать, шары содержатся в этом множестве, теперь продолжим оценку:

$$(*) \leqslant (q+\varepsilon)\mathcal{L}^n(G(q)) \leqslant (q+\varepsilon)(1+\varepsilon)\mathcal{L}^n(E(q))$$

Так как $\varepsilon > 0$ был выбран произвольно, то $\mathcal{L}^n(E(q)) = 0$. Тогда $\underline{E} = \{x \in E : \underline{D}_E(x) < 1\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E(1-\frac{1}{2j})$ имеет меру нуль, значит почти все точки E являются точками плотности $\square$

3 Измеримые функции

3.1 Измеримые и борелевские функции

Определение 3.1. Пару $(X, \mathfrak{M})$ из абстрактного множества X и σ-алгебры его подмножеств $\mathfrak{M}$ будем называть измеримым пространством.

Определение 3.2. Пусть $(X, \mathfrak{M})$ — измеримое пространство и задана функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Её будем называть $\mathfrak{M}$-измеримой, если

$$\forall c \in \mathbb{R} \hookrightarrow f^{-1}((c, +\infty]) \in \mathfrak{M}$$

Определение 3.3. Будем называть $\mathfrak{M}$-измеримую функцию борелевской, если $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Примечание. Распишем некоторые полезные факты из теории множеств. Пусть задано отображение $f\colon X \to Y$. Тогда $\forall A, B \subset Y$:

- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
- $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$;

Для объединения и пересечения прообразов справедливы более сильные утверждения.
$\forall \{E_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset 2^Y$:

- $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha \in I} E_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(E_\alpha)$;
- $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(E_\alpha)$;

Замечание. Введём следующее обозначение: $E(f < a) = \{x \in E \mid f(x) < a\}$. Аналогичные обозначения введём для $\leqslant, >, \geqslant$.

Лемма 3.1. *Пусть $E \subset X, E \in \mathfrak{M}$, где $(X, \mathfrak{M})$ — измеримое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\forall a \in \mathbb{R}\ E(f < a) \in \mathfrak{M}$;
2. $\forall a \in \mathbb{R}\ E(f \leqslant a) \in \mathfrak{M}$;
3. $\forall a \in \mathbb{R}\ E(f > a) \in \mathfrak{M}$;
4. $\forall a \in \mathbb{R}\ E(f \geqslant a) \in \mathfrak{M}$;

Доказательство. Докажем лемму по схеме 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3):

3) $\Rightarrow$ 4) Заметим, что $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(f \geqslant a) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(f > a - 1/n)$. Из замкнутости $\mathfrak{M}$ относительно счётных пересечений следует необходимое.

4) $\Rightarrow$ 1) Заметим, что $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(f < a) = E \setminus E(f \geqslant a)$, из чего очевидно следует необходимое.

1) $\Rightarrow$ 2) Заметим, что $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(f \leqslant a) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(f < a + 1/n)$.

2) $\Rightarrow$ 3) Заметим, что $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow E(f > a) = E \setminus E(f \leqslant a)$.

$\square$

Следствие. Пусть дано измеримое пространство $(X, \mathfrak{M})$ и на нём задана $\mathfrak{M}$-измеримая функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, где $E \subset X, E \in \mathfrak{M}$. Тогда выполнено следующее:

1. $\forall c \in \overline{\mathbb{R}} \hookrightarrow \ f^{-1}(\{c\}) \in \mathfrak{M}$;
2. $f^{-1}(\lfloor a, b \rceil) \in \mathfrak{M}$, где $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$;
3. $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$;

Доказательство. Для начала докажем первую часть утверждения.
Зафиксируем $c \in \mathbb{R}$. Тогда прообраз точки представим в следующем виде:

$$f^{-1}(\{c\}) = f^{-1}([-\infty, c]) \cap f^{-1}([c, +\infty])$$

Поэтому $f^{-1}(\{c\}) \in \mathfrak{M}$.
Если же $c = +\infty$, то

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([n, +\infty])$$

Значит прообраз $+\infty$ также измерим.
Для $c = -\infty$ аналогично:

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, -n]) \Rightarrow f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{M}$$

Докажем вторую часть утверждения.
Рассмотрим случай полуинтервала:

$$f^{-1}((a, b]) = f^{-1}([-\infty, b]) \setminus f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathfrak{M}.$$

Для доказательства того, что отрезок/интервал лежат в $\mathfrak{M}$ необходимо просто добавить/вычесть точку к полуинтервалу. В предельных случаях:

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([-n, n]) \in \mathfrak{M};$$

$$f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathfrak{M}.$$

Докажем третью часть утверждения.
Рассмотрим все такие $B \subset \mathbb{R}$, что $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$. Заметим, что система таких множеств

$$\mathcal{R} = \{B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}\}$$

является σ-алгеброй. По только что доказанному, $\mathcal{R}$ содержит все промежутки. Но, борелевская σ-алгебра – минимальная σ-алгебра, содержащая все промежутки. Значит, $R \supset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $\square$

Примечание. До этого было введено понятие измеримости на всем пространстве, а теперь введем понятие измеримости на множестве. Пусть $(X, \mathfrak{M})$ — измеримое пространство, $E \subset X, E \in \mathfrak{M}$ и функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда если $\forall c \in \mathbb{R}\ E(f > c) \in \mathfrak{M}$, то будем называть f измеримой на E. Если $E = X$, то f — $\mathfrak{M}$-измерима на всем пространстве.

Замечание. Если $E \in \mathfrak{M}$, то любую функцию, измеримую на E можно продолжить 0 на дополнении к E и получить функцию, измеримую на всём пространстве.
Верно и обратное: если f — $\mathfrak{M}$-измеримая на X, то $f|_E$ — $\mathfrak{M}$-измерима на E.

Лемма 3.2. *Пусть дана $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$. Тогда если $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримо на E_n для любого n, то f — измеримо и на объединении.*

Доказательство. Очевидно:

$$f|^{-1}_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n}((c, +\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f|^{-1}_{E_n}((c, +\infty])$$

и прообраз измерим как счётное объединение измеримых. □

3.2 Предельный переход для измеримых функций

Теорема 3.1. *Пусть дано измеримое пространство $(X, \mathfrak{M})$ и последовательность измеримых на нём функций $\{f_n\}$. Тогда верно следующее:*

1. $\overline{f} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *и* $\underline{f} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *— измеримы на X;*
2. $\overline{F} = \limsup\limits_{n\to+\infty} f_n$ *и* $\underline{F} = \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n$ *— измеримы на X.*

Доказательство. Заметим, что

$$X(\underline{f} < a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X(f_n < a)$$

Из этого следует, что $\forall a \in \mathbb{R}\ X(\underline{f} < a) \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, функция $\underline{f}$ — измерима. Аналогичное рассуждение (только с $X(\overline{f} > a)$) верно для супремума. Теперь, для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k$$

По первой части утверждения каждый из инфинумов является измеримой функцией, а следовательно супремум по ним тоже измерим, что и требовалось доказать. Для верхнего предела доказательство аналогично. □

Следствие. Пусть $E = \{x \in X \mid \underline{F}(x) = \overline{F}(x)\}$. Это множество – измеримо, и, более того, функция $F = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ — измерима на E.

Теорема 3.2. *Пусть дана непустое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, функция $\varphi \in C(G)$. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — измеримые функции, такие, что $f = (f_1, \ldots, f_n) \in G\ \forall x \in X$ (стандартно, $(X, \mathfrak{M})$ — измеримое пространство, каждая из функций задана на нём). Тогда $\varphi \circ f$ — измерима на X.*

Доказательство. Поскольку φ — непрерывно, то $\varphi^{-1}((c,+\infty]) = \varphi^{-1}((c,+\infty))$. По критерию непрерывности прообраз открытого $(c,+\infty)$ относительно открыт, то есть $\varphi^{-1}((c,+\infty)) = G\cap\Omega_c$. В тоже время $f^{-1}(G\cap\Omega_c) = f^{-1}(\Omega_c)$, так как f отображает X в подмножество G.
Поскольку Ω_c — открытое, оно представимо в виде

$$\Omega_c = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [a^m, b^m)$$

Значит прообраз Ω_c представляется в виде

$$f^{-1}(\Omega_c) = f^{-1}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} [a^m, b^m)\right) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} f^{-1}([a^m, b^m)) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}([a_k^m, b_k^m))$$

Поскольку каждая из f_k — измерима, то прообраз всякой ячейки измерим. Тогда пересечение измеримых – измеримо, и счётное объединение тоже измеримо, а следовательно $\varphi\circ f$ — измеримая функция. □

Замечание. Договоримся о следующем распространении арифметических операций на $\pm\infty$:

1. $0\cdot\pm\infty = \pm\infty\cdot 0 = 0$;
2. $(\pm\infty)+(\pm\infty) = \pm\infty$;
3. $\forall c\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\} : c\cdot\pm\infty = \pm\infty, c>0 \wedge c\cdot\pm\infty = \mp\infty, c<0$;
4. $\forall c\in\mathbb{R} : c+(+\infty) = +\infty$;
5. $\forall c\in\mathbb{R} : c-(+\infty) = c+(-\infty) = -\infty$;
6. $(+\infty)-(+\infty) = 0$ и аналогичные;
7. $\forall c\in\overline{\mathbb{R}} : \frac{c}{\pm\infty} = 0$.

Теорема 3.3. *Пусть f и g — измеримые функции. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *$f\cdot g$ — измеримая;*
2. *$f+g$ — измеримая;*
3. *αf — измеримая, $\alpha\in\mathbb{R}$;*
4. *f^p — измеримая, если $p>0$ и $f\geqslant 0$;*
5. *$\frac{1}{f}$ — измеримая на множестве, на котором $f\neq 0$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим такие точки, в которых f и g конечны одновременно. Это множество $E = \{x \mid f(x)\in\mathbb{R}, g(x)\in\mathbb{R}\}$ измеримо. Пусть $\varphi(x,y) = xy, \varphi\in C^2(\mathbb{R}^2)$. Определим $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ как $\tilde{f}|_E = f, \tilde{f}|_{E^c} = 0$; $\tilde{g}$ — аналогично. Тогда $\tilde{f}\cdot\tilde{g} = \varphi(\tilde{f},\tilde{g})$ и является измеримой функцией по предыдущей теореме. Значит fg — измерима на E, поскольку является сужением измеримой на измеримое. Если же одно из значений является $\pm\infty$, то эти случаи рассматриваются достаточно очевидно: прообразы $\pm\infty$ и 0 получаются как пересечения/объединения измеримых множеств, поэтому функция fg будет измерима всюду.

2., 3. Аналогично 1) пункту.

4. Если функция конечна, то $\varphi(x) = x^p$ — непрерывна и по предыдущей теореме функция измерима на подмножестве, где функция конечна. А если f принимает бесконечные значения, то считая $(+\infty)^p = +\infty$ мы получаем постоянство на $f^{-1}(\{+\infty\})$. Тогда функция будет измерима на объединении, т.е. всюду.

5. На множестве $X(f \neq 0)$ мы можем рассмотреть её композицию с $\varphi(x) = 1/x$ — непрерывной на множестве $\mathbb{R} \setminus 0$. Тогда в точках, где f — конечна мы получаем измеримость композиции, а в точках бесконечности мы получаем измеримость как объединение измеримых.

□

3.3 Простые функции

Определение 3.4. Пусть дано измеримое пространство $(X, \mathfrak{M})$. Пусть дана функция $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда, если существуют $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ и дизъюнктные множества $E_1, \dots E_n \in \mathfrak{M}$ такие, что

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$$

то функция f называется простой. То есть простая функция — такая у которой множество значений конечно.

Пример. Функция Дирихле — простая.

Определение 3.5. Для простой функции f существует состоящее из измеримых множеств конечное разбиение множества X (мы будем называть его допустимым для f), на элементах которого f постоянна. Такое разбиение можно получить, например, следующим образом. Пусть $a_1, \dots, a_N$ — всевозможные попарно различные значения f. Положим $E_k = f^{-1}(\{a_k\})$. Очевидно, что эти множества измеримы и образуют разбиение множества X, которое допустимо для f.

Примечание. Допустимое разбиение, вообще говоря, не единственно: разбив любое из образующих его множеств на измеримые части, мы получим "более мелкое"допустимое разбиение. Таким образом, функция f может принимать и одинаковые значения на разных элементах своего допустимого разбиения. Кроме того, мы не исключаем случая, когда некоторые его элементы пусты.

Примечание. Определение простой функции корректно, поскольку если есть два допустимых набора множеств то их всякие попарные пересечения тоже образуют допустимый набор множеств.

Лемма 3.3. *Сумма, разность и произведение простых функций тоже является простой функцией.*

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ и $g = \sum\limits_{j=1}^{m} a'_j \chi_{E'_j}$. Тогда

$$f + g = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} (a_i + a'_j) \chi_{E_i \cap E'_j}$$

Аналогичные рассуждения проводятся для разности и произведения простых функций. □

Теорема 3.4. *Пусть дано измеримое пространство $(X, \mathfrak{M})$, и на нём задана измеримая функция $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\exists \ \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность простых функций: $f_n \xrightarrow{X} f, n \to +\infty$.*

Доказательство. **Шаг 1.** Рассмотрим сначала $f \geqslant 0$.

Зафиксируем некоторое $n \in \mathbb{N}$. Определим $\Delta_{k,n} = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$. Тогда $[0, n) = \bigsqcup\limits_{k=0}^{n^2-1} \Delta_{k,n}$.

Пусть $E_{k,n} = f^{-1}(\Delta_{k,n})$. Теперь определим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{n}, & x \in E_{k,n} \\ n, & x \in f^{-1}([n, +\infty]) \end{cases}, \text{— она, очевидно, простая}$$

Пусть $f(x) < +\infty$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1/n$ (оцениваем как бы «колебанием»).
А так как $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N \hookrightarrow f(x) \in [0, n)$, то $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ $\forall n \geqslant N \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$.
Если же рассмотреть

$$E^{\infty} = f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([n, +\infty]),$$

то $f_n|_{E^{\infty}} = n$, а следовательно если $f(x) = +\infty$, то $f_n(x) \to f(x), n \to +\infty$.
Шаг 2. Пусть теперь функция f — произвольная. Тогда определим $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$. В таком случае $f = f_+ - f_-$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта мы аппроксимируем f_+ и f_-, а после из того, что разность простых – простая мы получаем необходимую последовательность функций для f. □

4 Различные виды сходимости

4.1 Сходимость по мере и почти всюду

Зафиксируем пространство с полной мерой $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. X — абстрактное множество, $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра на нём, μ — счётно-аддитивная полная мера на $\mathfrak{M}$.

Определение 4.1. $\mathcal{L}_0(X, \mu)$ — линейное пространство измеримых почти всюду конечных функций над X.

Напоминание. (Из 2 семестра) Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если

$$\forall x \in X \hookrightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

При этом записывают это так:

$$f_n \underset{X}{\to} f,\ n \to \infty.$$

Определение 4.2. (Сходимость почти всюду) Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на E функций, где $E \in \mathfrak{M}$. Будем говорить что f_n сходится почти всюду (далее – п.в.) к измеримой функции f, если

$$\mu\Big(\{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x),\ n \to +\infty\}\Big) = 0.$$

Будем обозначать как $f_n \xrightarrow[E]{\text{п.в.}} f, n \to +\infty$.

Определение 4.3. (Сходимость по мере) Пусть есть последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_0(E, \mu)$, где $E \in \mathfrak{M}$. Будем говорить, что f_n сходится по мере к $f \in \mathcal{L}_0(E, \mu)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \mu\Big(\{x \in E \mid\ |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}\Big) \to 0, n \to \infty.$$

Данная сходимость обозначается как $f_n \xrightarrow[E]{\mu} f, n \to +\infty$.

Таким образом, $f_n \xrightarrow[E]{\mu} f, n \to +\infty$, если для достаточно больших n каждая из функций равномерно близка к f на множестве, получаемым удалением из E множества сколь угодно малой меры. Стоит заметить, что поскольку для каждой из функций это удаляемое множество своё, и в общем случае нельзя удалить одно множество, вне которого все функции f_n с достаточно большими номерами были бы равномерно близки к предельной.

Утверждение 4.1. *Из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду.*

Доказательство. Определим $\forall n \in \mathbb{N}$ следующий набор множеств:

$$\Delta_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}.$$

Можно заметить, что $\forall m \in \mathbb{N}\ m = 2^n + k, k \in \overline{0, \ldots, 2^n - 1}$, причём n, k определяются единственным образом. Зададим последовательность функций $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом: $h_m = \chi_{\Delta_{k,n}(m)}$. Заметим, что при $m \to \infty$, $n \to \infty$ тоже. Тогда верно следующее: $\mathcal{L}^1(\Delta_{k,m}) = 2^{-n} \to 0, n \to \infty$, где $\mathcal{L}^1$ — одномерная мера Лебега. Значит

$$\mathcal{L}^1(\{x \in [0,1] \mid h_m(x) > 0\}) \leqslant 2^{-n} \to 0, m \to \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow h_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathcal{L}^1} 0$. В то же время $h_m \overset{[0,1]}{\underset{\text{п.в.}}{\not\to}} 0$, поскольку ни в какой точке $h_m(x)$ не имеет предела. $\square$

Утверждение 4.2. *Из сходимости п.в. не следует сходимость по мере.*

Доказательство. Возьмём $f_n = \chi_{[n,+\infty)}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\text{п.в.}} 0, n \to +\infty$, но так как мера точек, больших $1/2$ всегда бесконечна, то сходимость по мере отсутствует. $\square$

Теорема 4.1 (Лебега)**.** *Пусть мера пространства конечна* ($\mu(X) < +\infty$). *Тогда из сходимости почти всюду следует сходимость по мере.*

Доказательство. **Шаг 1**. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — это монотонная последовательность неотрицательных измеримых убывающих функций, сходящаяся к $f \equiv 0$ п.в. функций, то есть $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$: $f_n \geqslant 0$ и $f_n \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} 0, n \to \infty$. Определим

$$\forall \varepsilon > 0\ E_n(\varepsilon) = \{x \in X \mid f_n(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

Заметим, что $E_{n+1}(\varepsilon) \subset E_n(\varepsilon)\ \forall n \in \mathbb{N}$. В то же время так как есть сходимость почти всюду, то с какого-то номера мы «упадем» меньше ε, а значит $\mu\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n(\varepsilon)\Big) = 0$.

Теперь в силу непрерывности меры сверху (именно здесь применяется конечность меры X) получаем, что $\mu(E_n(\varepsilon)) \to 0, n \to \infty$, следовательно $f_n \xrightarrow[X]{\mu} 0, n \to \infty$.

Шаг 2. Теперь рассмотрим общий случай. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций, п.в. сходящаяся к f.

Определим $h_n(x) = \sup\limits_{k \geqslant n} |f_k - f|$. Она измерима, так как супремум измеримых измерим. Супремум конечен почти всюду, ведь почти всюду f_k сходится к f, а f почти всюду конечна. $\forall n \in \mathbb{N}$ и для п.в. $x \in X\ h_n(x) < +\infty$ Тогда ясно, что h_n удовлетворяет частному случаю, и по доказанному $h_n \xrightarrow[X]{\mu} 0, n \to \infty$. Но тогда, применяя предыдущий шаг, мы получаем $|f_n - f| \leqslant h_n$, то $E(|f_n - f| > \varepsilon) \subset E(h_n > \varepsilon)$, а значит $\mu(E(|f_n - f| > \varepsilon)) \to 0, n \to \infty$, то есть $f_k \xrightarrow[X]{\mu} f, k \to +\infty$. $\square$

Замечание. Почему нужна конечность меры X: если мы возьмем $\chi_{[n,+\infty)}$, то их пересечение пусто, но мера каждого луча $+\infty$ и тогда последний переход шага 1 не работает.

4.2 Почти равномерная сходимость

Примечание. Зафиксируем некоторое пространство с полной мерой, т.е. тройку $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ такую, что X — абстрактное множество, $\mathfrak{M}$ — сигма-алгебра его подмножеств, а μ — полная счётно-аддитивная мера на $\mathfrak{M}$.

Напоминание. (Из 2 семестра) Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f : X \to \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N, \ \forall x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Определение 4.4. (Почти равномерная сходимость) Будем говорить что последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mathfrak{M})$ сходится почти равномерно к $f \in \mathcal{L}_0(X, \mathfrak{M})$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon \in \mathfrak{M}$ такое, что $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f_n \underset{X \setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} f$ и обозначать это как $f_n \overset{\text{п.р.}}{\underset{X}{\rightrightarrows}} f, n \to \infty$.

Лемма 4.1 (Бореля-Кантелли)**.** *Пусть* $\{E_n\} \subset \mathfrak{M}$*:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$*. Тогда*

$$\mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant n}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

Доказательство. Идея в том, что если ряд сошелся, то «размеры» множеств стремятся к нулю. Распишем это формально: Если $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \mu(E_n) \to 0, N \to \infty$, то:

$$0 \leqslant \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant i}^{\infty} E_k\right) \leqslant \mu\left(\bigcap_{i=1}^{N}\bigcup_{k\geqslant i}^{\infty} E_k\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \mu(E_k) \to 0, N \to \infty$$

Первое неравенство верно, так как мера не отрицательна.
Второе — так как «если из пересечения что-то выкинуть не станет больше».
Третье получается, если взять $i = n$ и $i = n + 1$, легко заметить, что их пересечение равносильно тому, чтобы выкинуть E_n.
Четвертое — в силу счетной полуаддитивности.
Далее из теоремы о двух милиционерах получаем искомое. Значит $\mu(\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n) = 0$. ☐

Следствие (Признак сходимости почти всюду и почти равномерно)**.** Пусть $\{g_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ g_n \geqslant 0$. И дана бесконечно малая положительная числовая последовательность $\{\varepsilon_n\}$. Определим $X_n = X(g_n > \varepsilon_n)$.
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) < +\infty$, то выполнено:
1. $g_n \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} 0, \ n \to +\infty$;
2. Более того, $g_n \overset{\text{п.р.}}{\underset{X}{\rightrightarrows}} 0, \ n \to +\infty$.

Примечание. Идея в том, что если положительная числовая последовательность $\{\varepsilon_n\}$ бесконечно мала, то, чтобы ряд из множеств, где значения $g_n(x) > \varepsilon_n$, стремился к нулю, нужно, чтобы n-ый остаток ряда стремился к нулю.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $E_n(\varepsilon) = X(g_n > \varepsilon)$. Так как $\{\varepsilon_n\}$ — стремится к нулю, то $\exists N_0$: $\varepsilon_{N_0} < \varepsilon$, и тогда начиная с него $E_n(\varepsilon) \subset X_n$. Тогда первые N_0 не влияют на сходимость. А из сходимости ряда $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} \mu(X_n) < +\infty$ и из монотонности меры следует $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$.

Пусть $x \notin \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N}$: $x \notin E_n \forall n \geqslant N$. Но это значит, что $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \varepsilon\ \forall n \geqslant N$. Тогда, если мы возьмём $\varepsilon_k = 1/k$, то так как в силу леммы Бореля-Кантелли $\mu(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n(\varepsilon_k)) = 0$, то для $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n(\varepsilon_k)$ верно следующее: $x \notin F \Rightarrow g_n(x) \to 0, n \to +\infty$. Значит, поскольку F — множество меры нуль, то $g_n \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} 0$, $n \to +\infty$.

Теперь покажем п.р. сходимость $\{g_n\}$. Если мы зафиксируем $\varepsilon > 0$, то $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} \mu(X_n) < \varepsilon$. Тогда возьмём в качестве $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=N(\varepsilon)}^{\infty} X_k$. Если $x \notin E_\varepsilon$, то $\forall n \geqslant N\ \forall x \in X \hookrightarrow g_n(x) < \varepsilon_n$. Тогда поскольку ε_n — бесконечно малая, то $\sup\limits_X g_n(x) \to 0, n \to +\infty$, а значит g_n равномерно сходится на $X \setminus E_\varepsilon$. Значит есть п.р. сходимость на X. $\square$

4.3 Теоремы Рисса и Егорова

Теорема 4.2 (Рисс)**.** *Пусть дана последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$, сходящаяся по мере к некоторой $f \in \mathcal{L}_0(X, \mu)$. Тогда у неё существует подпоследовательность $f_{n_k} \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} f, k \to +\infty$*

Доказательство. Так как f_n сходится к f по мере, то $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \to 0, n \to +\infty$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k$:

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\{x \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}) < +\infty$, а значит применяя следствие из леммы Бореля-Кантелли, мы получаем, что $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ п.в. сходится к f; более того, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ п.р. сходится к f. $\square$

Теорема 4.3 (Егоров)**.** *Пусть даны $E \in \mathfrak{M}$: $\mu(E) < +\infty$ и последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_0(E, \mu)$. Тогда если последовательность сходится п.в. к $f \in \mathcal{L}_0(E, \mu)$, то она сходится п.р.*

Доказательство. Пусть $g_n = \sup\limits_{k \geqslant n} |f_k - f|$. По условию, $g_n \xrightarrow[E]{\text{п.в.}} 0, n \to +\infty$. Поскольку мера пространства конечна, то из сходимости п.в. следует сходимость по мере (согласно теореме Лебега). Тогда по теореме Рисса существует подпоследовательность g_{n_k}, сходящаяся п.р к $0, k \to +\infty$. Покажем, что из этого следует, что и вся g_n сходится п.р.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists E_\varepsilon : \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon \hookrightarrow g_{n_k} \underset{E \setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} 0$$

Что означает сходимость равномерно на E_ε? То, что $\sup\limits_{x \in E \setminus E_\varepsilon} |g_{n_k}(x)| \to 0, k \to +\infty$. Но последовательность g_n — монотонна. А значит $\sup\limits_{x \in E \setminus E_\varepsilon} |g_{n_k}(x)| \to 0, n \to +\infty$, то есть $g_n \underset{E \setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} 0$. Но тогда поскольку $|f_n - f| \leqslant g_n$, то $f_n \underset{E \setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} f$, $n \to \infty$, то есть мы получаем п.р. сходимость к f. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть X — пространство с σ-конечной мерой μ. Тогда существует конечная мера ν, уважающая множества меры нуль, т.е. $\mu(E) = 0 \Longleftrightarrow \nu(E) = 0$*

Доказательство. Поскольку X — пространство с σ-конечной мерой, то $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$, где мера каждого из X_k — конечна. Тогда определим ν как

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\mu(E \cap X_k)}{\mu(X_k)}$$

Очевидно, что ν удовлетворяет требованиям. □

Теорема 4.4 (о диагональной последовательности). *Пусть X — пространство с σ-конечной мерой. Тогда если есть $\{g_n\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$, сходящаяся п.в. к $h \in \mathcal{L}_0(X, \mu)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ есть $\{f_{n,k}\} \subset \mathcal{L}_0(X, \mu)$ сходящаяся п.в. к g_n, то $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k(n) \in \mathbb{N}$ такая, что $f_{n,k(n)} \xrightarrow[X]{\text{п.в.}} h, n \to +\infty$.*

Доказательство. Предположим, что $\mu(X) < +\infty$. Тогда по теореме Лебега из сходимости п.в. следует сходимость по мере, то есть $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f_{n,k} \xrightarrow{\mu} g_n, k \to +\infty$. То есть

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists E_n = \left\{ x \mid |f_{n,k(n)} - g_n| > \frac{1}{n} \right\} :\ \mu(E_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Тогда заметим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$, а значит, применяя следствие из леммы Бореля-Кантелли, мы получаем, что $\psi_n = f_{n,k(n)} - g_n$ сходится к нулю п.в. Тогда $h - f_{n,k(n)} = h - g_n - \psi_n$. Поскольку $h - g_n$ п.в. сходится к нулю, и ψ_n п.в. сходится к нулю, то и $h - f_{n,k(n)}$ п.в. сходится к нулю, то есть $f_{n,k(n)} \xrightarrow{\text{п.в.}} h, n \to +\infty$. Пусть теперь X — пространство с σ-конечной мерой. Тогда мы применяем ранее доказанное к $(X, \mathfrak{M}, \nu)$, где ν из леммы 4.2, и получаем требуемое; а поскольку ν уважает множества меры нуль, то множество точек отсутствия сходимости сохранит меру нуль. □

4.4 Теорема Лузина. Аппроксимация измеримых функций непрерывными

Примечание. Далее работаем в $\mathbb{R}^n$ со стандартной мерой Лебега.

Напоминание. Расстоянием от точки до множества будем называть число $\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \|x - y\|$.

Лемма 4.3. *Функция расстояния от точки до множества является $1-$липшицевой.*

Доказательство. Пусть $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Тогда согласно неравенству треугольника, $\|x - y\| \leqslant \|x - x'\| + \|x' - y\|$. Возьмём инфимум по всем $y \in E$:

$$\rho(x, E) \leqslant \|x - x'\| + \rho(x', E).$$

Поскольку это верно для произвольных x, x', то справедливо следующее:

$$|\rho(x, E) - \rho(x', E)| \leqslant \|x - x'\|.$$

То есть ρ — 1-липшицева. □

Лемма 4.4. *Пусть K_0, K_1 — непересекающиеся компакты в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует непрерывная функция h_{K_0,K_1}, разделяющая K_0 и K_1, то есть $\forall x \in K_0 \hookrightarrow h(x) = 0, \forall x \in K_1 \hookrightarrow h(x) = 1$.*

Доказательство. Положим

$$h_{K_0,K_1}(x) = \frac{\rho(x, K_0)}{\rho(x, K_0) + \rho(x, K_1)}.$$

Если компакты непересекаются, расстояние между ними положительно. Благодаря этому знаменатель дроби нигде не обращается в ноль.

Очевидно, что эта функция удовлетворяет всем условиям леммы. □

Теорема 4.5. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Тогда существует $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся почти всюду к χ_K.*

Доказательство. Заметим, что $G = \mathbb{R}^n \setminus K$ — открытое, а значит измеримое. Тогда из регулярности меры Лебега следует возможность исчерпать G компактами: $G = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (здесь равенство предполагается с точностью до меры нуль), причём $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow K_n \subset K_{n+1}$. Таким образом, взяв $f_n = h_{K_n,K}$ мы получаем искомую последовательность непрерывных функций: очевидно, что любая точка вне K начиная с некоторого N окажется в K_N и после этого $f_n(x)$ будет равен 0; для любой точки компакта значение функции всегда равно 1. □

Теорема 4.6 (Теорема Фреше/2 теорема Рисса)**.** *Пусть h — произвольная измеримая функция на X. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R}^n)$: $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{\text{п.в.}} h, n \to +\infty$*

Доказательство. Докажем теорему в несколько шагов.
Пусть φ — харфункция некоторого измеримого множества E. Согласно внутренней регулярности меры Лебега, его можно исчерпать компактами с точностью до меры нуль: $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \cup e$, т.ч. $K_n \subset K_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}^n(e) = 0$. Тогда поскольку мы можем аппроксимировать харфункцию компакта непрерывными, и харфункции компактов почти всюду на $\mathbb{R}^n$ сходятся к харфункции E, то в силу σ-конечности $\mathcal{L}^n$ по теореме о диагональной последовательности $\exists\{g_{n,k(n)}\}_{n=1}^{\infty}$: $g_{n,k(n)} \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{\text{п.в.}} \chi_E, n \to +\infty$, и все $g_{n,k(n)}$ — непрерывные на $\mathbb{R}^n$.
Пусть теперь ψ — некоторая простая функция; Очевидно, что она также аппроксимируется непрерывными функциями, поскольку является линейной комбинацией харфункций некоторых дизъюнктных измеримых множеств.
Пусть теперь h — произвольная измеримая функция. Тогда существует последовательность простых функций $\{g_n\}$ т.ч. $g_n \to h, n \to +\infty$. В тоже время, $\forall n \in \mathbb{N}$ существует $f_{n,k} \xrightarrow{\text{п.в.}} g_n, k \to +\infty$ — последовательность непрерывных функций. В силу сигма-конечности $\mathcal{L}^n$ мы можем применить теорему о диагональной последовательности и получить $f_{n,k(n)} \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{\text{п.в.}} h, n \to +\infty$. □

Определение 4.5. *C-свойством Лузина* будем называть следующее условие на функцию:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists E_\varepsilon : \mathcal{L}^n(E_\varepsilon) < \varepsilon \wedge \exists f_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon \hookrightarrow f(x) = f_\varepsilon(x).$$

Теорема 4.7 (Лузина)**.** *Произвольная измеримая п.в. конечная функция f в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет C-свойству Лузина.*

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m(0) \setminus \overline{B_{m-1}(0)} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(0) \cup \{0\}.$$

По теореме Фреше существует последовательность $\{f_l\} \subset C(\mathbb{R}^n)$: $f_l \xrightarrow[\mathbb{R}^n]{\text{п.в.}} f, l \to +\infty$. В тоже время, поскольку мера каждого шарового слоя – конечна, то мы можем применить теорему Егорова на каждом из них, и получить п.р. сходимость на каждом из них, то есть

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists e_m \subset E_m \hookrightarrow f_l \underset{E_m \setminus e_m}{\rightrightarrows} f, l \to +\infty,$$

причём $\mu(e_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m}$. Но тогда $\mathcal{L}^n(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i) \leqslant \varepsilon$. Тогда мы можем взять $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} e_m \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$. Очевидно, что на всё остальном пространстве f_l сходится к f равномерно, а следовательно f непрерывно на нём, таким образом мы получаем утверждение задачи. □

5 Интеграл Лебега

5.1 Определение интеграла Лебега и его корректность

Напоминание. Простая функция — функция с конечным числом значений.

Определение 5.1 (Интеграл Лебега Toy version 1)**.** Пусть f — простая неотрицательная функция. Тогда интегралом Лебега на множестве E от неё будем называть

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(E_k \cap E) \in [0, +\infty]$$

Определение 5.2. Простую неотрицательную функцию f будем называть *интегрируемой по Лебегу*, если интеграл от неё конечен.

Лемма 5.1. *Определение интеграла Лебега для простой функции корректно, то есть интеграл Лебега не зависит от разбиения.*

Доказательство. Пусть $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} E_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{M} F_j$ и простая неотрицательная функция $f = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i} = \sum\limits_{j=1}^{M} b_j \chi_{F_j}$. Заметим, что $\{E_i \cap F_j\}_{i,j}$ — допустимое разбиение для f, $E_i \cap E = \bigsqcup\limits_{j=1}^{M} E_i \cap F_j \cap E$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \mu(E \cap E_i) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} a_i \mu(E \cap E_i \cap F_j) =$$

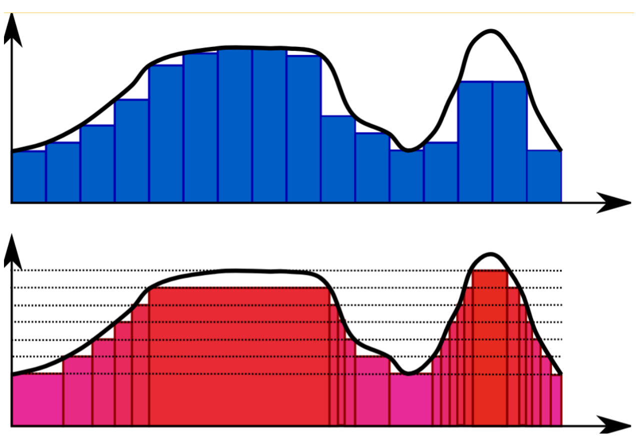
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} b_j \mu(E \cap E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} b_j \mu(E \cap E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{M} b_j \mu(E \cap F_j)$$

$\square$

Определение 5.3 (Интеграл Лебега Toy version 2)**.** Пусть f — неотрицательная измеримая функция. Тогда

$$\int\limits_E f d\mu = \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant f} \int\limits_E \psi d\mu,$$

где супремум берётся по всем таким простым функциям ψ.



Пояснение к картинке. Синий цвет — это сумма Дарбу, разбиение по области определения. А красный — это сумма Лебега. Мы приближаем нашу функцию простыми, разбиение по оси значений функции.

Определение 5.4 (Интеграл Лебега)**.** Пусть f — произвольная измеримая на E функция. Тогда $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = \max(f, 0), f_- = \max(-f, 0)$. Определим *интеграл Лебега* от неё как

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E f_+ d\mu - \int\limits_E f_- d\mu,$$

в случае конечности интегралов от неотрицательных частей. Иначе будем говорить что функция f не интегрируема по Лебегу.

Определение 5.5. Произвольную измеримую функцию f будем называть *интегрируемой по Лебегу*, если $\int\limits_E f_+ d\mu < +\infty$ и $\int\limits_E f_- d\mu < +\infty$.

5.2 Неравенства Гёльдера, Минковского и Чебышёва. Пространства L_p

Пусть $X = (X, \mathfrak{M}, \mu)$ — пространство с мерой.

Определение 5.6. Пусть $p \in [1, +\infty), E \in \mathfrak{M}$. Тогда положим:

$$\widetilde{L_p}(E, \mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(E, \mu) \Big| \int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$$

Лемма 5.2 (Неравенство Юнга)**.** $\forall a, b \geqslant 0 \hookrightarrow$

$$ab \leqslant a^p/p + b^{p'}/p', \text{ где } 1/p + 1/p' = 1.$$

Доказательство. Из выпуклости логарифма вверх мы можем оценить

$$\ln(a^p/p + b^{p'}/p') \geqslant \ln(a^p)/p + \ln(b^{p'})/p' = \ln a + \ln b = \ln ab$$

Потенцируем и получим исходное неравенство:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

□

Теорема 5.1 (Неравенство Гёльдера)**.** *Пусть $f \in \widetilde{L_p}(E, \mu), g \in \widetilde{L_{p'}}(E, \mu)$, где $p, p' \in (1, +\infty)$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда $(f \cdot g) \in \widetilde{L_1}$ и*

$$\int\limits_E |fg| d\mu \leqslant \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_E |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p'}$$

Доказательство. Пусть $A = (\int\limits_E |f|^p d\mu)^{1/p}, B = (\int\limits_E |g|^{p'} d\mu)^{1/p'}$. Предположим, что $A > 0$ и $B > 0$ (случаи, когда $A = 0$ или $B = 0$ тривиальны). Нормируем $\widetilde{f} = f/A, \widetilde{g} = g/B$. Тогда

$$\left(\int\limits_E |\widetilde{f}|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int\limits_E |\widetilde{g}|^{p'} d\mu\right)^{1/p'} = 1$$

Используя неравенство Юнга

$$\int\limits_E |\widetilde{f}\widetilde{g}| d\mu \leqslant \int\limits_E \left(\frac{|\widetilde{f}|^p}{p} + \frac{|\widetilde{g}|^{p'}}{p'}\right) d\mu = \frac{1}{p}\int\limits_E |\widetilde{f}|^p d\mu + \frac{1}{p'}\int\limits_E |\widetilde{g}|^{p'} d\mu = 1.$$

Теперь, домножив на A и B, мы получаем искомое. □

Примечание. В доказательстве неравенства Гёльдера используются свойства интеграла Лебега, показанные далее в п. 5.3.

Напоминание. Если $p \in [1, +\infty)$, то обозначим

$$\widetilde{L_p}(E,\mu) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \Big| f \text{ — измерима в широком смысле на } E, \int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$$

Примечание. Обозначим за $\mathcal{N}(E)$ — линейное пространство всех измеримых в широком смысле функций на E, т.ч. они равны 0 п.в. и «выкинем» их. Это сделано, чтобы у нас не страдала аксиома нормы связанная с нулем(Мы поменяли функцию на множестве меры нуль, и получили нулевой интеграл) Тогда:

$$L_p(E,\mu) = \widetilde{L_p}(E,\mu)/\mathcal{N}(E)$$

Является ЛНП с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Примечание. L_p - это фактор пространство, те его элемент то класс эквивалентности $[f] = f + \mathcal{N}(E)$

Проверим выполнение аксиом нормы:

- ▷ Не отрицательность очевидна.
- ▷ $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ — в силу факторизации и ранее доказанных свойств.
- ▷ Неравенством треугольника является неравенство Минковского.

Лемма 5.3 (Неравенство Минковского). *Пусть* $f, g \in \widetilde{L_p}(E)$. *Тогда* $f + g \in \widetilde{L_p}(E)$ *и* $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Доказательство. Так как $|f+g|^p \leqslant (2\max(|f|,|g|))^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$, то и $\int\limits_E |f+g|^p d\mu < +\infty$, а значит $f + g \in \widetilde{L_p}(E)$. Тогда

$$\int\limits_E |f+g|^p d\mu = \int\limits_E |f+g||f+g|^{p-1} d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} d\mu = \int\limits_E |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int\limits_E |g||f+g|^{p-1} d\mu = \int\limits_E |f||f+g|^{p/p'} d\mu + \int\limits_E |g||f+g|^{p/p'} d\mu \leqslant$$

По неравенству Гёльдера с показателем p, p' :

$$\leqslant \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^p\right)^{1/p'} + \left(\int\limits_E |g|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_E |f+g|^p\right)^{1/p'}.$$

Теперь, поскольку $1/p + 1/p' = 1$, то если мы поделим на $(\int\limits_E |f+g|^p)^{1/p'} < +\infty$ обе части, то мы получим необходимое неравенство. □

Определение 5.7. Будем называть <u>*существенным супремумом*</u> для измеримой функции f на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ следующее:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{L > 0 \mid \mu(|f| > L) = 0\}$$

Определение 5.8. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — пространство с мерой. Будем говорить что $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — существенно ограничена, если $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| < +\infty$.

Определение 5.9. Определим L_∞ как ЛНП классов эквивалентности существенно ограниченных на X функций с нормой ess sup, то есть $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_X |f|$.

Примечание. Неравенства Гёльдера и Минковского работают и в этом случае, то есть при $p = 1/p = +\infty$.

Теорема 5.2 (Неравенство Чебышева)**.** *Пусть даны положительные p и t и заданная на X функция f. Тогда если $E_t = \{x \in X \mid |f| \geqslant t\}$, то*

$$\mu(E_t) \leqslant \frac{1}{t^p} \int\limits_X |f|^p d\mu.$$

Доказательство.

$$t^p \mu(E_t) = \int\limits_{E_t} t^p d\mu \leqslant \int\limits_{E_t} |f|^p d\mu \leqslant \int\limits_X |f|^p d\mu.$$

□

Замечание. Принадлежность f пространству $\widetilde{L_p}(E)$ не необходима, так как тогда в правой части $+\infty$ и неравенство тривиально.

5.3 Свойства интеграла Лебега для неотрицательных функций

Напоминание. Пусть сейчас и далее фиксировано некоторое пространство с мерой $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Напоминание. Если g — неотрицательная измеримая функция на $E \in \mathfrak{M}$, то $\int\limits_E g d\mu = \sup\limits_{0 \leqslant \varphi \leqslant g} \int\limits_E \varphi d\mu$, где супремум берётся по простым функциям φ, таким что $0 \leqslant \varphi \leqslant g$ на E.

Утверждение 5.1 (Монотонность по функциям)**.** *Пусть $E \in \mathfrak{M}$, f, g — неотрицательные измеримые функции. Тогда, если $f \leqslant g$ на E, то $\int\limits_E f d\mu \leqslant \int\limits_E g d\mu$.*

Доказательство. Пусть ψ, h — две простые функции: $\psi \leqslant h$ на E. У них есть допустимые разбиения X. Заметим, что если мы попарно пересечём множества разбиения для ψ с множествами разбиения для h, то мы получим общее допустимое разбиение $\{A_i\}_{i=1}^N$ для этих функций: $\psi = \sum\limits_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$, аналогично $h = \sum\limits_{i=1}^N b_i \chi_{A_i}$. Тогда, зная, что $\forall k \in \{1, \dots, N\} \hookrightarrow a_k \leqslant b_k$, получаем:

$$\int\limits_E \psi d\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(E \cap A_i) \leqslant \sum_{i=1}^N b_i \mu(E \cap A_i) = \int\limits_E h d\mu.$$

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть у нас ψ — произвольная неотрицательная простая функция такая, что $\psi \leqslant f$ на E. В тоже время, $f \leqslant g$ по условию. Тогда

$$\int\limits_E f d\mu = \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant f} \int\limits_E \psi d\mu \leqslant \sup_{0 \leqslant h \leqslant g} \int\limits_E h d\mu = \int\limits_E g d\mu,$$

где супремум берётся по всем функциям φ и h. □

Утверждение 5.2. *Пусть множество E: $\mu(E) = 0$. Тогда* $\int\limits_E f d\mu = 0$.

Доказательство. Для простой функции это очевидно по определению интеграла. В общем случае для неотрицательной функции g:

$$\int\limits_E g d\mu = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant g} \int\limits_E \varphi d\mu = 0.$$

В общем случае $g = g_+ - g_-$. □

Утверждение 5.3. *Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Тогда* $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X f \cdot \chi_E d\mu$.

Доказательство. Покажем, что для простых функций это так. Пусть ψ — простая, а $\{A_i\}_{i=1}^N$ — допустимое разбиение для ψ. Тогда

$$\chi_E \psi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i \cap E} + 0 \cdot \chi_{X \setminus E}.$$

Значит,

$$\int\limits_X \chi_E \psi d\mu = \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k \cap E) + 0\mu(X \setminus E) = \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k \cap E) = \int\limits_E \psi d\mu.$$

Пусть ψ — простая: $0 \leqslant \psi \leqslant f$ на E. Обозначим это условие $(*)$. Пусть h — простая, и $0 \leqslant h \leqslant \chi_E f$ на X. Заметим, что $h = \chi_E h$. Значит, в силу монотонности интеграла, верно следующее:

$$\int\limits_X h d\mu = \int\limits_X \chi_E h d\mu = \int\limits_E h d\mu \leqslant \int\limits_E f d\mu.$$

Теперь если мы возьмём sup по всем таким h, то получим:

$$\int\limits_X \chi_E f d\mu = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \chi_E f} \int\limits_X h d\mu \leqslant \int\limits_E f d\mu.$$

Рассмотрим произвольную ψ, удовлетворяющую условию $(*)$:

$$\int\limits_E \psi d\mu = \int\limits_X \chi_E \psi d\mu \leqslant \int\limits_X \chi_E f d\mu.$$

Возьмём супремум по всем таким функциям таким ψ:

$$\int\limits_E f d\mu = \sup_{\psi} \int\limits_E \psi d\mu \leqslant \int\limits_X \chi_E f d\mu.$$

Значит, имеем равенство:

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X \chi_E f d\mu.$$

□

Следствие (Монотонность по множеству)**.** Пусть $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \subset B$, $f : X \to [0, +\infty]$ — измеримая. Тогда

$$\int\limits_A f d\mu = \int\limits_X f \chi_A d\mu \leqslant \int\limits_X f \chi_B d\mu = \int\limits_B f d\mu.$$

Теорема 5.3 (Беппо Леви)**.** *Пусть дана последовательность $\{f_n\}$ неотрицательных измеримых на X функций: $f_n \leqslant f_{n+1}$ на X, сходящаяся μ−п.в. на X к функции f. Тогда верно следующее:*

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

Доказательство. Пусть $L_n = \int\limits_X f_n d\mu$. Заметим, что $\{L_n\}$ — монотонно не убывает в $[0, +\infty]$. Значит, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \sup\limits_n L_n = L$. Поскольку $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f \geqslant f_n$, значит:

$$\int\limits_X f d\mu \geqslant \int\limits_X f_n d\mu.$$

Следовательно,

$$\int\limits_X f d\mu \geqslant L = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n d\mu.$$

Теперь необходимо показать обратное неравенство. Зафиксируем $\theta \in (0, 1)$. Пусть g — произвольная неотрицательная простая функция, т.ч. $0 \leqslant g \leqslant f$ на X.
Рассмотрим $X_n = X(f_n \geqslant \theta g)$. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ldots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots$. В тоже время, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = X$. Действительно, множество, где $g = 0$ заведомо исчерпывается. Если $g(x) > 0$, то так как $g \leqslant f \Rightarrow \theta g < f$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$, значит с некоторого $N \hookrightarrow f_N(x) > \theta g(x) \Rightarrow x \in X_N$, поэтому $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = X$.
Тогда $\forall A \in \mathfrak{M} \hookrightarrow A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A \cap X_n$. В силу непрерывности меры снизу мы получаем, что $\forall A \in \mathfrak{M}$

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty}\mu(A \cap X_n) \quad (*)$$

Т.е.

$$\int\limits_X f_n d\mu \geqslant \int\limits_{X_n} f_n d\mu \geqslant \int\limits_{X_n} \theta g d\mu = \theta\sum_{k=1}^{N} a_k\mu(A_k \cap X_n).$$

Устремим n в бесконечность и воспользуемся $(*)$:

$$L = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n d\mu \geqslant \theta\sum_{k=1}^{N} a_k\mu(A_k \cap X) = \theta\int\limits_X g d\mu.$$

В силу произвольного выбора θ, при взятии супремума по θ, мы получим следующее неравенство:

$$L \geqslant \int\limits_X g d\mu.$$

Теперь взяв супремум по всем таким g мы получим искомое включение:

$$L \geqslant \sup_g \int\limits_X g d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

□

Теорема 5.4 (Фату)**.** *Пусть* $\{f_n\}$ *— последовательность неотрицательных измеримых функций. Тогда верно следующее:*

$$\int\limits_X \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

Доказательство. Вспомним, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} f_k(x)$. Обозначим за $g_n = \inf\limits_{k\geqslant n} f_k$. Заметим, что последовательность $\{g_n\}$ — монотонна. Тогда $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Применив теорему Леви к $\{g_n\}$, получим:

$$\int\limits_X \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to+\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X \inf_{k\geqslant n} f_k d\mu \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \int\limits_X f_k d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

□

Утверждение 5.4 (Аддитивность по функциям)**.** *Пусть* f, g *неотрицательные измеримые функции. Тогда верно следующее:*

$$\int\limits_X (f+g) d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu.$$

Доказательство. Сначала докажем это для простых функций $\psi : 0 \leqslant \psi \leqslant f, h : 0 \leqslant h \leqslant g$. Возьмём общее для них разбиение. Тогда имеем равенства

$$\psi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{C_k},\ \ h = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{C_k}.$$

По определению интеграла для простых функций:

$$\int\limits_X (\psi + h) d\mu = \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)\mu(C_k) = \sum_{k=1}^N a_k \mu(C_k) + \sum_{k=1}^N b_k \mu(C_k) = \int\limits_X \psi d\mu + \int\limits_X h d\mu.$$

Теперь покажем справедливость утверждения для произвольных измеримых функций. Поскольку любая измеримая является пределом последовательности простых (без ограничения общности последовательность можно взять возрастающей; если же она не возрастающая, то просто берём $t_k = \max\limits_{i=1}^{k} f_k$), то $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, $g = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n$. Тогда используя теорему Леви мы получаем следующее:

$$\int\limits_X (f+g) d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to+\infty} (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X (f_n + g_n) d\mu =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu + \int\limits_X g_n d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu + \int\limits_X \lim_{n\to+\infty} g_n d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu.$$

□

Утверждение 5.5 (Положительная однородность)**.** *Пусть* f *— неотрицательная измеримая функция. Тогда* $\forall \alpha \geqslant 0 \hookrightarrow \int\limits_X \alpha f d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству аддитивности по функциям. □

Утверждение 5.6. *Пусть* $E \in \mathfrak{M}$, $\{E_n\}_{k=1}^N \subset \mathfrak{M}$ *и* $E = \bigcup\limits_{n=1}^N E_n$. *Тогда для произвольной измеримой неотрицательной функции* f *верно следующее:*

$$\int\limits_E f d\mu < +\infty \Longleftrightarrow \forall k \int\limits_{E_k} f d\mu < +\infty.$$

Более того, если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^N E_k$, *то*

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{k=1}^N \int\limits_{E_k} f d\mu.$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Заметим, что $\int\limits_{E_k} f d\mu \leqslant \int\limits_E f d\mu$, а значит, если $\int\limits_E f d\mu < +\infty$, то и $\forall k \int\limits_{E_k} f d\mu < +\infty$.

($\Longleftarrow$) Пусть теперь $\forall k \int\limits_{E_k} f d\mu < +\infty$. Но тогда $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X f\chi_E d\mu \leqslant \int\limits_X f \sum\limits_{k=1}^N \chi_{E_k} d\mu = \sum\limits_{k=1}^N \int\limits_{E_k} f d\mu < +\infty$.

Если же набор множеств E_k разбивает E, тогда $\chi_E = \sum\limits_{k=1}^N \chi_{E_k}$, поэтому очевидно выполнение равенства. □

Утверждение 5.7. *Пусть* $E \in \mathfrak{M}$: $\mu(E) > 0$ *и дана измеримая* $f > 0$ *на* E. *Тогда* $\int\limits_E f d\mu > 0$.

Доказательство. Пусть $E_n = E(f > 1/n)$. Тогда $E = \bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$. Следовательно, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\mu(E_{n_0}) > 0$. Значит,

$$\int\limits_E f d\mu \geqslant \int\limits_{E_{n_0}} f d\mu \geqslant \int\limits_{E_{n_0}} \frac{1}{n_0} d\mu = \frac{1}{n_0}\mu(E_{n_0}) > 0.$$

□

5.4 Свойства интеграла Лебега от произвольных измеримых функций

Утверждение 5.8. f *— интегрируема по Лебегу* $\Longleftrightarrow$ $|f|$ *— интегрируема по Лебегу.*

Доказательство. Пусть $f_+ = \max(f, 0)$ и $f_- = \max(-f, 0)$. Тогда
Если f — интегрируема по Лебегу, то согласно определению $\int f_+ d\mu < +\infty$ и $\int f_- d\mu < +\infty$. Поскольку $|f| = f_+ + f_-$, то $\int |f| d\mu < +\infty$.
Если $|f|$ — интегрируема по Лебегу, то $\int |f| d\mu < +\infty$, а поскольку $f_+ \leqslant f$ и $f_- \leqslant f$, то $\int f_+ d\mu < +\infty$ и $\int f_- d\mu < +\infty$, а значит f — интегрируема по Лебегу. □

Примечание. Для интеграла по Риману, утверждение выше неверно.

Утверждение 5.9. *Пусть* f *— интегрируемая по Лебегу функция на* E. *Тогда*

$$\left| \int\limits_E f d\mu \right| \leqslant \int\limits_E |f| d\mu.$$

Доказательство. Используя неравенство треугольника для определения интеграла от модуля функции

$$\left| \int\limits_E f d\mu \right| = \left| \int\limits_E f_+ d\mu - \int\limits_E f_- d\mu \right| \leqslant \left| \int\limits_E f_+ d\mu \right| + \left| \int\limits_E f_- d\mu \right| = \int\limits_E f_+ d\mu + \int\limits_E f_- d\mu = \int\limits_E |f| d\mu.$$

□

Утверждение 5.10. *Пусть f интегрируема по Лебегу на E. Тогда она п.в. конечна на E.*

Доказательство. Поскольку интегрируемость f равносильно интегрируемости $|f|$, то $\int\limits_E |f|d\mu < +\infty$. Пусть $E_0 = \{x \mid f(x) = \pm\infty\} \subset E$. Тогда

$$+\infty > \int\limits_E |f|d\mu \geqslant \int\limits_{E_0} |f|d\mu \geqslant \int\limits_{E_0} nd\mu,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Но $\int\limits_{E_0} nd\mu = n\mu(E_0)$,

$$\mu(E_0) \leqslant \frac{1}{n}\int\limits_E |f|d\mu,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

А значит E_0 — множество меры нуль. □

Утверждение 5.11. *Пусть E — произвольное множество и $\int\limits_E |f|d\mu = 0$. Тогда f п.в. равна 0.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда существует множество положительной меры $e \subset E$: $|f| > 0$ на e. Но, по свойству интеграла Лебега для неотрицательных функций $\int\limits_e |f|d\mu > 0$, чего не может быть в силу $0 = \int\limits_E |f|d\mu \geqslant \int\limits_e |f|d\mu$. Значит функция п.в. равна 0. □

Утверждение 5.12. *Пусть f — ограниченная измеримая функция. Тогда она интегрируема по Лебегу на множестве конечной меры.*

Доказательство. Пусть E — множество конечной меры. Тогда $|f| < C$ на этом множестве. Значит, $\int\limits_E |f|d\mu \leqslant \int\limits_E Cd\mu < +\infty$, что равносильно интегрируемости f. □

Утверждение 5.13. *Пусть $f = g$ п.в. на множестве E. Тогда верно следующее:*

- ▷ *f — интегрируема по Лебегу $\iff$ g — интегрируема по Лебегу;*
- ▷ *Если f интегрируема по Лебегу, то $\int\limits_E fd\mu = \int\limits_E gd\mu$.*

Доказательство. Интегрируемость f равносильна интегрируемости $|f|$, а интегрируемость g равносильна интегрируемости $|g|$. Тогда пусть $e = \{x|f(x) \neq g(x)\}$. Так как $\mu(e) = 0$, то $\int\limits_e |f|d\mu = \int\limits_e |g|d\mu = 0$. Значит $\int\limits_{E\setminus e} |f|d\mu = \int\limits_{E\setminus e} |g|d\mu$, и, в силу аддитивности интеграла по множеству, мы получаем утверждение. □

Утверждение 5.14. *Пусть множества E, E': $\mu(E \triangle E') = 0$. Тогда для всякой измеримой f верно следующее:*

- ▷ *f — интегрируема по Лебегу на $E \iff f$ — интегрируема по Лебегу на E';*
- ▷ *Если f — интегрируема на E, то $\int\limits_E fd\mu = \int\limits_{E'} fd\mu$.*

Доказательство. Доказательство аналогично. □

Определение 5.10. Будем называть функцию $f : E \to \mathbb{R}$ *измеримой в широком смысле* на $E \in \mathfrak{M}$, если $\exists E' : E' \subset E$: f — измерима на E', и $\mu(E \setminus E') = 0$.

Замечание. То есть если функция не определена на множестве меры ноль, мы «не чувствуем» это.

Примечание. В силу только что доказанных свойств интеграла Лебега, при работе с ним можно использовать функции, измеримые в широком смысле.

Утверждение 5.15. *Пусть* $f, g \in \widetilde{L_1}$. *Тогда если* $f \leqslant g$ *п.в., то*

$$\int\limits_E f d\mu \leqslant \int\limits_E g d\mu.$$

Доказательство. Пусть $f = f_+ - f_-, g = g_+ - g_-$. Тогда

$$f_+ + g_- \leqslant f_- + g_+$$

почти всюду. Значит, в силу монотонности,

$$\int\limits_E (f_+ + g_-) d\mu \leqslant \int\limits_E (g_+ + f_-) d\mu.$$

Так как f, g — интегрируемы по Лебегу, то

$$\int\limits_E f_+ d\mu - \int\limits_E f_- d\mu \leqslant \int\limits_E g_+ d\mu - \int\limits_E g_- d\mu.$$

Что нам и требовалось получить. □

Утверждение 5.16 (Аддитивность по функциям)**.** *Пусть* $f, g \in \widetilde{L_1}$. *Тогда*

$$\int\limits_E (f + g) d\mu = \int\limits_E f d\mu + \int\limits_E g d\mu.$$

Доказательство. Пусть $f = f_+ - f_-, g = g_+ - g_-$. Пусть $h = f + g$. Тогда $h = f + g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$. С другой стороны, $h = h_+ - h_-$. Т.е.

$$h_+ - h_- = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

Значит,

$$h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_-.$$

Но тогда

$$\int\limits_E (h_+ + f_- + g_-) d\mu = \int\limits_E (h_- + f_+ + g_+) d\mu.$$

А значит

$$\int_E h_+ d\mu + \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu = \int_E h_- d\mu + \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu.$$

В силу конечности всех этих интегралов мы и получаем искомое утверждение. □

Утверждение 5.17 (Однородность интеграла Лебега)**.** *Пусть* $f \in \widetilde{L_1}(E, \mu)$. *Тогда* $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow$

$$\int\limits_E a f d\mu = a \int\limits_E f d\mu.$$

Доказательство. Пусть $a \geqslant 0$. Тогда $f = f_+ - f_-$, и $af = af_+ - af_-$. Тогда из положительной однородности интеграла Лебега для неотрицательных функций следует

$$a \int\limits_E f_+ d\mu = \int\limits_E af_+ d\mu;$$

$$a \int\limits_E f_- d\mu = \int\limits_E af_- d\mu.$$

Поэтому

$$\int\limits_E af d\mu = a \int\limits_E f_+ d\mu - a \int\limits_E f_- d\mu = a \int\limits_E f d\mu.$$

Если же $a < 0$, то в силу уже доказанной положительной однородности нам достаточно рассмотреть случай $a = -1$. Тогда $(-f)_+ = f_-, (-f)_- = f_+$. Значит,

$$\int\limits_E (-f) d\mu = \int\limits_E (-f)_+ d\mu - \int\limits_E (-f)_- d\mu = -(\int\limits_E f_+ d\mu - \int\limits_E f_- d\mu) = -\int\limits_E f d\mu.$$

Утверждение доказано. □

Следствие. Очевидно, что, если $f_1, \dots f_N \in \widetilde{L_1}(E, \mu)$ и даны $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, то

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i \in \widetilde{L_1}(E, \mu).$$

Более того,

$$\int\limits_E \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i d\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \int\limits_E f_i d\mu.$$

5.5 Интеграл Лебега как функция множества

В этом параграфе фиксировано пространство с полной σ-конечной мерой $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Утверждение 5.18 (Аддитивность интеграла Лебега по множеству)**.** *Пусть* $E = \bigcup\limits_{i=1}^N E_i$, *где* $\{E_i\}_{i=1}^N \subset \mathfrak{M}$. *Тогда для произвольной измеримой функции верно следующее:*

$$f \in \widetilde{L_1}(E, \mu) \Longleftrightarrow \forall i \in \overline{1, N} \hookrightarrow f \in \widetilde{L_1}(E_i, \mu).$$

Более того, если $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^N E_i$, *то*

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{i=1}^N \int\limits_{E_i} f d\mu.$$

Доказательство. В силу равносильности интегрируемости функции интегрируемости модуля функции, следующее неравенство нам даёт первое утверждение:

$$|f| \chi_{E_i} \leqslant |f| \chi_E \leqslant |f| \sum_{i=1}^N \chi_{E_i}.$$

Если же $E = \bigsqcup_{i=1}^N E_i$, то $f\chi_E = f \sum\limits_{i=1}^N \chi_{E_i}$. Интегрирование этого равенства с учётом уже доказанной линейности по функциям даёт нам утверждение задачи. □

Теорема 5.5 (Счётная аддитивность интеграла Лебега). *Пусть* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ *и* $E_i \cap E_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$. *Тогда для любой неотрицательной функции* f, *измеримой на* $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ *верно следующее равенство:*

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{E_i} f d\mu.$$

Доказательство. Без ограничения общности мы можем продолжить f на $X \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ нулем. Введём функцию «срезки» первых N элементов:

$$f^N(x) = \sum_{i=1}^{N} \chi_{E_i} f(x).$$

В силу конечной аддитивности по множеству

$$\int\limits_E f^N d\mu = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{E_i} f d\mu.$$

Заметим, что $f^N \leqslant f^{N+1}\ \forall N \in \mathbb{N}$, а значит допустимо применение теоремы Леви:

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_E f^n d\mu = \int\limits_E \lim_{n \to +\infty} f^n d\mu = \int\limits_E f d\mu.$$

Следовательно

$$\int\limits_E f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{E_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{E_i} f d\mu.$$

Что и требовалось доказать. □

Следствие. Принимая во внимания предыдущие свойства интеграла Лебега, мы можем сказать что интеграл Лебега от неотрицательной функции (как функция множества) является счётно-аддитивной мерой на X.

Следствие. Если $f \in \widetilde{L_1}(X, \mu)$, то интеграл Лебега непрерывен сверху и снизу, как функция множества, т.е. если

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \{A_i\} \subset \mathfrak{M}, \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \ldots \quad \text{то} \quad \int\limits_A f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu.$$

И, если

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \{B_i\} \subset \mathfrak{M}, \ldots \supset B_i \supset B_{i+1} \supset \ldots \quad \text{то} \quad \int\limits_B f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_{B_n} f d\mu.$$

Доказательство. Утверждение очевидно из определения интеграла Лебега и непрерывности сверху и снизу конечных мер, порождаемых f_+ и f_-. □

Теорема 5.6 (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть* $f \in \widetilde{L_1}(X, \mu)$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ *т.ч.* $\forall E \in \mathfrak{M} : \mu(E) < \delta \hookrightarrow$

$$\int\limits_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Шаг 1. Заметим, что утверждение задачи для $f = \chi_E$ очевидно: мы можем просто взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Случай простой функции сводится к случаю харфункции.
Шаг 2. Пусть теперь f — неотрицательная измеримая функция, интегрируемая по Лебегу. По определению, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \psi$ — простая, т.ч. $\int\limits_X |f-\psi| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\frac{\varepsilon}{2}) \forall E \in \mathfrak{M}$: $\mu(E) < \delta(\frac{\varepsilon}{2}) \hookrightarrow \int\limits_E \psi d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$, а значит

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E |f-\psi| d\mu + \int\limits_E \psi d\mu < \varepsilon,$$

поскольку $0 \leqslant \int\limits_E (f-\psi) d\mu \leqslant \int\limits_X (f-\psi) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. ☐

Утверждение 5.19. *Пусть $f \in \widetilde{L_1}(X,\mu)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{M}$ конечной меры:*

$$\int\limits_{X \setminus A} |f| d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Известно, что $f \in \widetilde{L_1}(X,\mu) \Longleftrightarrow |f| \in \widetilde{L_1}(X,\mu) \Longleftrightarrow \int\limits_X |f| d\mu < \infty$. Обозначим

$$X_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}, A_n = X \setminus X_n. - \text{ точки где } |f(x)| < \frac{1}{n}.$$

Очевидно, что $\ldots \subset A_{n+1} \subset A_n \subset \ldots$. Множество $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ является множеством нулей $|f|$. В силу непрерывности меры сверху:

$$0 = \int\limits_A |f| d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{A_n} |f| d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{X\setminus X_n} |f| d\mu.$$

Полученное равенство, по сути и доказывает утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon):\ \forall n \geqslant N \hookrightarrow \int\limits_{X\setminus X_n} |f| d\mu < \varepsilon.$$

То есть $\forall \varepsilon > 0\ A_\varepsilon = X_{N(\varepsilon)}$ — подходит. Осталось показать, что $\mu(X_n) < +\infty$. Действительно,

$$\frac{\mu(X_n)}{n} = \int\limits_{X_n} \frac{1}{n} d\mu \leqslant \int\limits_{X_n} |f| d\mu \leqslant \int\limits_X |f| d\mu < +\infty.$$

Из чего следует требуемое. ☐

Теорема 5.7 (Теорема Лебега (о мажорируемой сходимости))**.** *Пусть дана $\{f_n\}$ — последовательность измеримых на X функций, п.в. сходящаяся к f. Пусть $\exists g$ — неотрицательная измеримая функция т.ч.*

- ▷ $g \in \widetilde{L_1}(X,\mu)$
- ▷ g — *мажоранта последовательности* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *т.е.* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n| \leqslant g$ *почти всюду на* X.

Тогда

- ▷ $f \in \widetilde{\mathcal{L}_1}(X,\mu)$

▷

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$$

Доказательство. Положим $f(x) = 0$ в точках, где не существует $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Тогда мы получаем измеримость f в обычном смысле (строго говоря, до этого она была измеримой лишь в широком смысле). Поскольку $|f_n| \leqslant g$ почти всюду, то f_n — интегрируема по Лебегу, поскольку $\int\limits_X |f_n| d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu < +\infty$. Используя лемму Фату, получим интегрируемость f.

Пусть теперь $h_n = \sup\limits_{k\geqslant n} |f - f_k|$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда h_n — неотрицательная измеримая на X функция, при этом п-ть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно сходится к 0 п.в. Тогда $g_n = 2g - h_n$ — неубывающая (в силу невозрастания h_n) последовательность неотрицательных функций, поскольку $2g - |f - f_k| \geqslant 2g - |f| - |f_k| \geqslant 0$. Тогда применяя теорему Леви мы получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X g_n d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to+\infty} g_n d\mu = \int\limits_X 2g d\mu.$$

Отсюда заключаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X \sup_{k\geqslant n} |f - f_k| d\mu = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X |f - f_n| d\mu = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X (f - f_n) d\mu = 0 \Rightarrow \int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu$, что и требовалось доказать. □

Примечание. Условие мажорируемости нельзя отбросить: пусть $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$ всюду, кроме 0, и интеграл от 0 равен 0. Но $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\mathcal{L}^1 = 1, 1 \neq 0$.

5.6 Сравнение интегралов Лебега и Римана

Теорема 5.8. *Пусть $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Тогда $f \in \tilde{L}_1([a,b])$. Более того, верно следующее:*

$$\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_{[a,b]} f(x) d\mathcal{L}^1(x).$$

Доказательство. Пусть фиксировано некоторое натуральное n. Разобьём $[a,b]$ на 2^n равных частей. Тогда обозначим за x_k и Δ_k:

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a), k = \overline{0, 2^n}; \quad \Delta_k = [x_k, x_{k+1}], k = \overline{0, 2^n - 2}, \Delta_{2^n-1} = [x_{2^n-1}, x_{2^n}].$$

Теперь рассмотрим следующие последовательности функций:

$$\underline{f}_n = \sum_{k=0}^{2^n} \inf_{x\in\Delta_k} f \cdot \chi_{\Delta_k} \quad \overline{f}_n = \sum_{k=0}^{2^n} \sup_{x\in\Delta_k} f \cdot \chi_{\Delta_k}.$$

Монотонность этих последовательностей — $\overline{f}_{n+1} \leqslant \overline{f}_n$ и $\underline{f}_{n+1} \geqslant \underline{f}_n$ — очевидна. Также введём для $\underline{f}_n$ и $\overline{f}_n$ обозначения:

$$m_{k,n} = \inf_{\Delta_k} f \quad M_{k,n} = \sup_{\Delta_k} f.$$

Применим теорему Леви (поскольку $\overline{f}_n$ и $\underline{f}_n$ — измеримые) к $g_n = \overline{f}_n - \overline{f}_1$:

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[a,b]} g^n d\mathcal{L}^1 = \int\limits_{[a,b]} \lim_{n\to+\infty} g_n d\mathcal{L}^1 = \int\limits_{[a,b]} g d\mathcal{L}^1.$$

Тогда, поскольку $g_n = \overline{f}_n - \overline{f}_1$, то $g = \overline{f} - \overline{f}_1$ и в силу линейности мы получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n d\mathcal{L}^1 = \int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\mathcal{L}^1.$$

Аналогичными рассуждениями можно получить для $\underline{f} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underline{f}_n$ следующее:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n d\mathcal{L}^1 = \int\limits_{[a,b]} \underline{f} d\mathcal{L}^1.$$

Обозначим S_{T_n} и s_{T_n} верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для разбиения отрезка $[a,b]$ на 2^n равных частей. Очевидно, что выполняются следующие неравенства:

$$s_{T_n} \leqslant \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n d\mathcal{L}^1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} M_{k,n} \frac{1}{2^n} \leqslant S_{T_n}; \quad S_{T_n} \geqslant \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n d\mathcal{L}^1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_{k,n} \frac{1}{2^n} \geqslant s_{T_n}.$$

Из интегрируемости по Риману следует существование предела сумм Дарбу, равного интегралу Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$. Значит

$$\int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\mathcal{L}^1 = \int\limits_{[a,b]} \underline{f} d\mathcal{L}^1 = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Но, в тоже время, $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$. Значит $\int\limits_{[a,b]} (\overline{f} - f) d\mathcal{L}^1 = 0$. Из неотрицательности $\overline{f} - f$ следует, что $\overline{f} = f$ п.в. Тогда

$$\int\limits_{[a,b]} f d\mathcal{L}^1 = \int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\mathcal{L}^1 = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

□

Пример. $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ не интегрируема по Риману, но интегрируема по Лебегу.

Пример (?)**.** Пусть r_k — нумерация рациональных чисел на $[0,1]$. Пусть выбрано некоторое $\delta \in (0,1)$. Определим функцию f равенством

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{(r_k - \frac{\delta}{2^k}, r_k + \frac{\delta}{2^k})}.$$

Функция $f \notin \mathcal{R}([-1,2])$, но $f \in \tilde{L}_1([-1,2])$. Пусть

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \frac{\delta}{2^k}, r_k + \frac{\delta}{2^k}).$$

Множество $F = [0,1] \setminus G$ — множество положительной меры, и множество точек разрыва всегда его содержит, а значит функция f неинтегрируема по Риману в силу критерия Лебега. При этом, в отличии от функции Дирихле, f нельзя поправить на множество нулевой меры так, чтобы она стала интегрируемой по Риману.

Пример. Пусть f задана как

$$f = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1]; \\ 0, & x \notin (0,1] \end{cases}$$

Она интегрируема в несобственном смысле по Риману на $(0,1]$ и интегрируема по Лебегу на $[0,1]$. Определим последовательность функций f_n как

$$f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in [\frac{1}{n}, 1]; \\ 0, & x \notin [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Поскольку $f_n \in \mathcal{R}([0,1])$, то $f_n \in \mathcal{L}_1([0,1])$ и интегралы Римана и Лебега совпадают. Но т.к. $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ и последовательность $\{f_n\}$ монотонна, то применяя теорему Леви мы получаем

$$\int\limits_{[0,1]} f d\mathcal{L}^1 = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n d\mathcal{L}^1 = \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

5.7 Точки Лебега локально интегрируемых функций

Определение 5.11. Будем говорить что $f \in \widetilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и называть её локально интегрируемой по Лебегу, если $\forall R > 0$ $f \in \widetilde{L}_1(B_R(0), \mathcal{L}^n)$.

Определение 5.12. Пусть $f \in \tilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда будем называть $x^* \in \mathbb{R}^n$ точкой Лебега функции f, если

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x^*))} \int\limits_{B_r(x^*)} |f(y) - f(x^*)|dy = 0.$$

Примечание. В каждой точке Лебега

$$f(x^*) = \lim_{r\to+0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x^*))} \int\limits_{B_r(x^*)} f(y)dy$$

Однако обратное неверно, см. Дьяченко Ульянов "Действительный анализ в задачах"

Примечание. Введём следующее обозначение:

$$⨍_{B_r(x^*)} \ldots = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x^*))} \int\limits_{B_r(x^*)} \ldots$$

Лемма 5.4. *Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — пространство с мерой. Тогда, если $f \in \tilde{L}_1(X)$, то существует простая f_ε, что*

$$\int\limits_X |f - f_\varepsilon| d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Если $f \geqslant 0$, то это очевидное следствие из определений интеграла и супремума. Если же она знакопеременна, то мы разбиваем её на две части — f_+ и f_-, и для каждой из них аппроксимируем. То есть, по определению интеграла неотрицательной функции и супремума:

$$\forall \varepsilon \ \exists \text{ простая } f_{+_\varepsilon} : \int\limits_X |f_+ - f_{+_\varepsilon}| d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\forall\varepsilon\ \exists \text{ простая } f_{-\varepsilon} : \int\limits_X |f_- - f_{-\varepsilon}| d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f_{+\varepsilon}(x), & \text{если } \ f(x) \geqslant 0 \\ -f_{-\varepsilon}(x), & \text{если } \ f(x) < 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\int\limits_X |f - f_\varepsilon| d\mu = \int\limits_{X(f\geqslant 0)} |f_+ - f_{+\varepsilon}| d\mu + \int\limits_{X(f<0)} |-f_- + f_{-\varepsilon}| d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Определение 5.13 (Максимальная функция Харди-Литтлвуда)**.** Пусть $f \in \tilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Определим $M[f](x)$ как

$$M[f](x) := \sup_{r>0} ⨍_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

.

Примечание. Заметим измеримость максимальной функции на $\mathbb{R}^n$. При фиксированном $r > 0$ функция

$$x \mapsto ⨍_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

непрерывна, а при фиксированном x функция

$$r \mapsto ⨍_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

непрерывна как функция r. Поэтому $M[f]$ можно вычислять, беря супремум лишь в рациональных точках.

Примечание. Заметим, что если $J = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx > 0$, то $M[f] \notin \widetilde{L}_1(\mathbb{R}^n)$. При достаточно большой $\|x\|$ верно следующее:

$$M[f](x) \geqslant \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2\|x\|(x)})} \int\limits_{B_{2\|x\|(x)}} |f(y)| dy \geqslant \frac{C}{\|x\|^n} J.$$

Якобиан замены в n-мерных полярных координатах содержит $\|x\|^{n-1}$ в качестве радиальной части, поэтому интеграл от $\frac{CJ}{\|x\|^n}$ по $\mathbb{R}^n$ равен $+\infty$.

Лемма 5.5. *Пусть* $f \in \widetilde{L}_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$\forall t > 0 \hookrightarrow \mathcal{L}^n(E_t) \leqslant \frac{5^n}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{L}^n.$$

Где $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M[f](x) > t\}$.

Доказательство. По определению E_t для каждой точки $x \in E_t$ существует шар $B_r(x)$ т.ч.

$$⨍_{B_r(x)} |f(y)| dy \geqslant t.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}^n(B_r(x)) \leqslant \frac{1}{t} \int\limits_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

Тогда радиусы всех таких шаров, покрывающих точки E_t, равномерно ограничены. Пусть теперь $R > 0$ — произвольное действительное число. Положим

$$E_t^R = E_t \cap B_R(0).$$

Полученное таким образом множество E_t^R — ограничено. В силу $5B$-леммы Витали существует не более чем счётный набор дизъюнктивных шаров $\{B_k\}$ такой, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} 5B_k \supset E_t^R.$$

Тогда

$$\mathcal{L}^n(E_t^R) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(5B_k) \leqslant \frac{5^n}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f(y)|dy \leqslant \frac{5^n}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy.$$

(Последний переход получен из дизъюнктивности набора шаров $\{B_k\}$ и монотонности интеграла). Теперь, в силу того, что оценка не зависит от R мы возьмём супремум по R и получим требуемое утверждение. □

Теорема 5.9. *Пусть $f \in \widetilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ является точкой Лебега функции f.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $f = \chi_E, E \in \mathfrak{M}^n$. Тогда,

$$|f(y) - f(x)| = |\chi_E(y) - \chi_E(x)| = \begin{cases} \chi_E(y), & x \notin E \\ 1 - \chi_E(y), & x \in E \end{cases}$$

Но, тогда,

$$\fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|dy = \begin{cases} 1 - \dfrac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} & x \in E; \\ \dfrac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))}, & x \notin E. \end{cases}$$

Правая часть п.в. стремится к 0 при $r \to +0$, поскольку п.в. точки – точки плотности (для E или для дополнения E соответственно). Таким образом для харфункций утверждение доказано.
Шаг 2. Очевидно, что утверждение остаётся справедливым и для простых функций.
Шаг 3.Пусть теперь $f \in \tilde{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Достаточно доказать, что $\forall R > 0$ утверждение выполняется для $\chi_{B_R(0)} f$. Поэтому без ограничения общности мы можем считать $f \in \widetilde{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем $t > 0$. Покажем что $\mathcal{L}^n(E_t(f)) = 0$, где

$$E_t(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{r \to +0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|dy > t\}.$$

Заметим, что

$$\limsup_{r \to +0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|dy \leqslant |f(x)| + \limsup_{r \to +0} \fint_{B_r(x)} |f(y)|dy \leqslant |f(x)| + M[f](x)$$

Очевидно, что $E_t(f) \subset E_t^1(f) \cup E_t^2(f)$, где

$$E_t^1(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > t/2\}, E_t^2(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid M[f](x) > t/2\}.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$\mathcal{L}^n(E_t^1(f)) \leqslant \frac{2}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy.$$

С другой стороны, в силу леммы 5.5

$$\mathcal{L}^n(E_t^2(f)) \leqslant 2 \cdot \frac{5^b}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy.$$

Из полуаддитивности внешней меры следует

$$\lambda^*(E_t(f)) \leqslant \frac{C}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy.$$

<u>Шаг 4.</u> Пусть h — произвольная простая функция, аппроксимирующая f с точностью до ε. Тогда

$F_{f,h}(y) := |f(y)-f(x)|-|h(y)-h(x)| \leqslant R_{f,h}(y) := |f(y)-f(x)-(h(y)-h(x))| \leqslant |f(y)-f(x)|+|h(y)-h(x)| =:$

Усреднив неравенство:

$$\fint_{B_r(x)} F_{f,h}(y)dy \leqslant \fint_{B_r(x)} R_{f,h}(y)dy \leqslant \fint_{B_r(x)} G_{f,h}(y)dy.$$

Перейдём к верхнему пределу при $r \to +0$ и получим, что в силу шага 3

$$\limsup_{r\to+0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|dy = \limsup_{r\to+0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - h(y) - (f(x) - h(x))|dy.$$

для всякой простой h. То есть

$$\lambda^*(E_t(f-h)) = \lambda^*(E_t(f)) \leqslant \frac{C}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y) - h(y)|dy.$$

Поскольку правая часть может быть сколь угодно малой, то $\lambda^*(E_t(f)) = 0$, что и завершает доказательство. $\square$

6 Произведение мер и кратные интегралы

6.1 Теорема о монотонном классе

Определение 6.1. Систему подмножеств $\mathcal{M}$ множества X называют *монотонным классом*, если:

- $\triangleright$ $\forall\{A_i\} \subset \mathcal{M}$: $A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \ldots \hookrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$ (Расширяющаяся последовательность);
- $\triangleright$ $\forall\{B_j\} \subset \mathcal{M}$: $B_1 \subset \ldots \supset B_j \supset B_{j+1} \supset \ldots \hookrightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{M}$ (Сужающаяся последовательность).

Напоминание. Если $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств X, то $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ — минимальная σ-алгебра, порожденная этой алгеброй.

Теорема 6.1 (О монотонном классе)**.** *Пусть есть $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств X, вложенная в некоторый монотонный класс $\mathcal{M}$. Тогда $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$, т.е. пересечение всех монотонных классов, содержащих алгебру $\mathcal{A}$. Класс $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ существует, так как как минимум 2^X это монотонный класс. Покажем, что $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.
($\subset$) Заметим, что $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ является монотонным классом, ведь она замкнута относительно счетных пересечений и объединений, а следовательно $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.
($\supset$) Зафиксируем некоторое $A \in \mathcal{A}$. Рассмотрим систему подмножеств

$$\mathcal{M}_A = \Big\{B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid \big(B \cap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\big) \wedge \big(B^c \cap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\big)\Big\}.$$

Очевидна симметричность $\mathcal{M}_A : B \in \mathcal{M}_A \Longleftrightarrow B^c \in \mathcal{M}_A$.
Из замкнутости алгебры $\mathcal{A}$ очевидно, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$, ведь по определению алгебры пересечение любых двух множеств лежит в алгебре, это верно и для пересечения с дополнением.
Очевидна и монотонность $\mathcal{M}_A$. Возьмем расширяющуюся последовательность $B_1 \subset B_2 \subset \dots B_n \subset \dots \{B_n\} \subset \mathcal{M}_A$. Тогда если B_i это расширяющаяся последовательность и $\{B_i\} \subset \mathcal{M}_A$, то очевидно и $\{B_i \cap A\}$ расширяющаяся последовательность но по определению монотонного класса их объединение лежит в $\mathcal{M}_A$. Если взять дополнения B_i^c то докажем для сужающейся последовательности.
По построению $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}(A)$. Но он и сам является монотонным классом. А следовательно, из минимальности $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и это верно $\forall A \in \mathcal{A}$.
Пусть $A = X$. Тогда $\forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \hookrightarrow B^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, т.е. минимальный монотонный класс симметричен.

Пусть $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Рассмотрим систему множеств

$$\mathcal{N}_E = \{C \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid C \cap E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

Заметим, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}_E$, по аналогичным соображениям $\mathcal{N}_E$ — монотонный класс и $\mathcal{N}_E$ — симметричная система подмножеств X.
Тогда $\mathcal{N}_E = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и это верно $\forall E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, а значит $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно пересечения. Тогда $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ замкнуто и относительно объединения, а значит $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — алгебра. Но, тогда, поскольку любое объединение в алгебре реализуется как объединение возрастающей (а пересечение – как пересечение убывающей) последовательности множеств, то $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — σ-алгебра. Но минимальная точно лежит в нем $\mathcal{M}(A) \supset \mathfrak{M}(A)$, и искомое утверждение получено. В условии теоремы был дан произвольный монотонный класс. Не обязательно минимальный. Поэтому включение $\supset$ доказано. $\square$

Напоминание. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо подмножеств множества X, μ — мера на $\mathcal{P}$. Тогда верхней мерой называем

$$\mu^* = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \mid E \subset \bigcup_j P_j, \{P_j\} \subset \mathcal{P}\right\}$$

Далее вводится измеримость по Каратеодори: A — измеримо, если

$$\forall E \subset X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Измеримые множества образуют σ-алгебру $\mathfrak{M}_\mu$, на которой $\mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}$ — счетно-аддитивная мера, причём $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$, причём продолжение единственно на $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$. Важно что $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$ не то же самое что $\mathfrak{M}_\mu$. В $\mathbb{R}^n$ есть неборелевские измеримые по Лебегу. И, вообще говоря, $\mathfrak{M}_\mu$ шире, к примеру в $\mathbb{R}^n$ есть неборелевские множества, измеримые по Лебегу.

Лемма 6.1. *Пусть $E \in \mathfrak{M}_\mu$: $\mu(E) < +\infty$. Тогда $\exists C, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$:*

$$B \subset E \subset C \text{ и } \mu(B) = \mu(E) = \mu(C).$$

Доказательство. E — измеримое, то есть $\mu^*(E) = \mu(E)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists \{P_{n,j}\}$: $\mu^*(E) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(P_{n,j}) + 1/n$. Определим тогда $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_{n,j}$. В силу монотонности и непрерывности меры сверху C — искомое. Заметим, что $C \setminus E = e \in \mathfrak{M}_\mu$ и $\mu(e) = 0$. Тогда есть $\tilde{B} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$: $\tilde{B} = \bigcap\limits_n \bigcup\limits_j Q_{n,j}$, $\{Q_{n,j}\} \subset \mathcal{P}$ и $\mu(\tilde{B}) = 0$. Тогда $B = C \setminus \tilde{B}$ — искомое. □

6.2 Произведение мер и принцип Кавельери

Мы уже познакомились с произведением мер на полукольцах. Но теперь мы хотим более общую конструкцию: произведение мер на измеримых пространствах. Пусть далее зафиксированы два пространства с полными σ-конечными мерами $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$. Мы хотим построить $\mu \otimes \nu$ на $X \times Y$.

Факт. *Справедливы следующие теоретико-множественные утверждения.*
Пусть $A, A' \subset X$ и $B, B' \subset Y$. Тогда:

- ▷ $A' \times B' \subset A \times B \iff (A' \subset A) \wedge (B' \subset B)$;
- ▷ $(A \setminus A') \times B = (A \times B) \setminus (A' \times B)$;
- ▷ $A \times (B \setminus B') = (A \times B) \setminus (A \times B')$.

Пусть $A_1, \ldots, A_n \subset X$ и $B_1, \ldots B_n \subset Y$. Тогда

- ▷ $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \times B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \times B\Big)$;
- ▷ $A \times \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Big(A \times B_n\Big)$;
- ▷ $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \times B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \times B\Big)$;
- ▷ $A \times \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Big(A \times B_n\Big)$.

Лемма 6.2. *Пусть $\mathcal{P} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}, \mu(A) < +\infty, \nu(B) < \infty\}$. Тогда $\mathcal{P}$ — полукольцо, $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ — счётно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{P}^1 = \{A \mid A \in \mathfrak{M}, \mu(A) < +\infty\}$ и $\mathcal{P}^2 = \{B \mid B \in \mathfrak{N}, \nu(B) < +\infty\}$ — полукольца, а μ и ν — конечно-аддитивные меры на них соответственно. По теореме о тензорном произведении полуколец $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 \otimes \mathcal{P}^2$ — тоже полукольцо, а $\mu \otimes \nu$ — конечно-аддитивная мера на нём. Покажем теперь счётную аддитивность $\mu \otimes \nu$. Пусть

$$P = A \times B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n.$$

Заметим, что

$$\chi_P(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{P_n}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y) \text{ при} (x, y) \ \in X \times Y.$$

Зафиксируем $x \in X$, определим

$$f_n(x,y) := \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y), y \in Y.$$

Заметим, что последовательность $\{f_n(x,\cdot)\}$ состоит из неотрицательных функций. Кроме того, эта последовательность монотонна, то есть $f_{n+1}(x,y) \geqslant f_n(x,y)\ \forall y \in Y$. Следовательно, по теореме Леви:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_Y \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)d\nu(y) = \int\limits_Y \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)d\nu(y) = \chi_A(x)\int\limits_Y \chi_B(y)d\nu(y) = \chi_A(x)\nu(B).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)\chi_{A_k}(x) = \chi_A(x)\nu(B), \forall x \in X.$$

Теперь интегрирование по x вместе с применением теоремы Леви даёт счётную аддитивность:

$$\mu\otimes\nu(A\times B) = \mu(A)\nu(B) = \int\limits_X \chi_A(x)\nu(B)d\mu(x) = \int\limits_X \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \nu(B_k)\chi_{A_k}(x)d\mu(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)\int\limits_X \chi_{A_k}(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)\mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\otimes\nu(A_k\times B_k).$$

$\square$

Определение 6.2. Мера, полученная стандартным продолжением $\mu\otimes\nu$ с $\mathcal{P}$ на $\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$, называется *произведением мер* μ и ν, а полученное пространство $(X\times Y,\ \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N},\ \mu\otimes\nu)$ — *произведением пространств с мерой.*

Примечание. Мера $\mu\otimes\nu$ на $\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$ является σ-конечной мерой, если μ и ν — σ-конечны, и полна, поскольку получена при помощи стандартного продолжения.

Определение 6.3. Пусть $C \in \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$. Тогда

- ▷ $C_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in C\}$ — *сечение первого рода*;
- ▷ $C^y = \{x \in X \mid (x,y) \in C\}$ — *сечение второго рода.*

Лемма 6.3. *Пусть* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — *семейство подмножеств* $X\times Y$. *Тогда:*

- ▷ $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} C_\alpha\right)_x = \bigcup\limits_{\alpha\in I} (C_\alpha)_x$;
- ▷ $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} C_\alpha\right)_x = \bigcap\limits_{\alpha\in I} (C_\alpha)_x$;
- ▷ $(C\setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$;
- ▷ $C\cap C' = \varnothing \Rightarrow C_x \cap C'_x = \varnothing$.

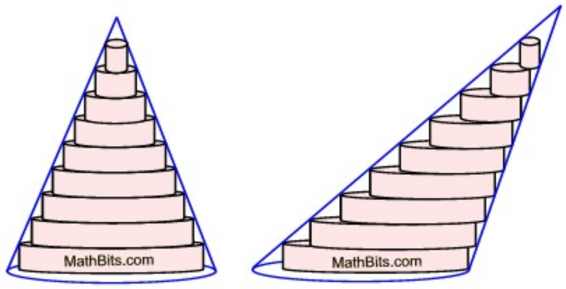
Аналогичные утверждения справедливы и для сечений второго рода.

Теорема 6.2 (Принцип Кавальери)**.** *Пусть* $(X,\mathfrak{M},\mu)$ *и* $(Y,\mathfrak{N},\nu)$ — *пространства с полными* σ-*конечными мерами, а* $(X\times Y,\ \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N},\ \mu\otimes\nu)$ — *их тензорное произведение. Тогда* $\forall C \in \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N} \hookrightarrow$

1. $C_x \in \mathfrak{N}$ *для* μ*-почти всех* $x \in X$*;*

2. $x \mapsto \nu(C_x)$ *измерима в широком смысле(на множестве 0 меры м.б. не определена);*

3. $\mu \otimes \nu(C) = \int\limits_X \nu(C_x)d\mu(x)$*.*



Геометрическая идея: если взять две фигуры и на каждом сечении их площади совпадают, то совпадают и объемы.
Например из любого «косого» треугольника можно сделать прямоугольный треугольник и получить $S = \frac{1}{2}ah$*, поэтому у пирамид и конусов формула объема* $V = \frac{1}{3}Sh$*.*

Примечание. Аналогичные рассуждения верны и для сечений второго рода.

Доказательство. План доказательства: на 1 шаге докажем утверждение теоремы для множеств из $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$. На 2 шаге докажем для множеств меры 0. На 3 шаге представим произвольное измеримое множество через множество меры нуль и множество из $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$. На 4 шаге докажем теорему для пространств σ-конечной меры.
Шаг 1. Определим $\mathcal{P} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}\}$. Предположим, что $\mu(X) < +\infty$ и $\nu(Y) < +\infty$, а $C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ и пока что докажем теорему для такого C.
Пусть $\mathcal{M}$ — такая система подмножеств $X \times Y$, что

▷ $\forall E \in \mathcal{M}\ \forall x \in X \hookrightarrow E_x \in \mathfrak{N}$;

▷ $x \mapsto \nu(E_x)$ — измеримая функция.

Заметим следующие факты про $\mathfrak{M}$:
1) $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ ведь в полукольце измеримые множества, тогда сечение просто постоянная а значит измеримая функция.
2) В тоже время, очевидно, что $\mathcal{M}$ — симметрично, и всякое множество входит в систему со своим дополнением (в силу конечности меры $\nu(E_x^c) = \nu(Y) - \nu(E_x)$).
3) Кроме того, если $C_1, C_2 \in \mathcal{M}$ и $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, то $(C_1)_x \cap (C_2)_x = \varnothing$, а значит $\nu((C_1 \cup C_2)_x) = \nu((C_1 \sqcup C_2)_x) = \nu((C_1)_x) + \nu((C_2)_x)$, а следовательно $C_1 \sqcup C_2 \in \mathcal{M}$.
Поскольку $\mathcal{M} \supset \mathcal{P}$, и замкнуто относительно дополнения и дизъюнктного объединения, то оно содержит произвольные конечные объединения элементов полукольца (которые реализуются как дизъюнктные по соответствующей теореме). В тоже время, $X \times Y \in \mathcal{P}$, а значит $\mathcal{M}$ содержит минимальную алгебру, порожденную этим полукольцом $\mathcal{A}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{M}$.
4) $\mathcal{M}$ - это монотонный класс. Пусть $\{C_i\}$ — возрастающая последовательность множеств в $\mathcal{M}$. Поскольку $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(C_n)_x = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n\right)_x \in \mathfrak{N}$ и по непрерывности меры снизу

$$x \mapsto \nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)_x\right) = \lim_{n \to +\infty} \nu((C_n)_x).$$

А значит $f : x \mapsto \nu(C_x)$ — измерима как поточечный предел последовательности измеримых, следовательно $C \in \mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{M}$ — монотонный класс. Тогда по теореме о монотонном классе $\mathcal{M} \supset \mathfrak{M}(\mathcal{P})$, и условия 1) и 2) теоремы выполнены для всех $C \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$.
Теперь проверим выполнение условия 3):
Пусть $C \in \mathcal{P}$. Тогда 3) — верно. Если рассматривать $\Phi : C \mapsto \int\limits_X \nu(C_x)d\mu(x)$ как функцию множества, то она является счётно-аддитивной мерой (интеграл неотрицательной измеримой функции — счетно-аддитивная функция множества). Но тогда, поскольку эта функция на $\mathcal{P}$ совпадает

с $\mu \otimes \nu$, то в силу единственности продолжения меры на минимальную σ-алгебру, $\Phi \equiv \mu \otimes \nu$ на $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$. На данном этапе принцип Кавальери доказан для $\mathfrak{M}(\mathcal{P})$

Шаг 2. Пусть теперь $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ является измеримым множеством меры нуль. Тогда пользуясь леммой существует его «более хороший» envelope: $\exists \tilde{C} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$ т.ч. $C \subset \tilde{C}$ и $\mu \otimes \nu(\tilde{C}) = 0$. Поскольку для $\tilde{C}$ утверждения теоремы доказаны на 1 шаге, то $\forall x \in X \hookrightarrow (\tilde{C})_x \in \mathfrak{N}$ и

$$0 = \mu \otimes \nu(\tilde{C}) = \int\limits_X \nu(\tilde{C}_x) d\mu(x) \Rightarrow \nu(\tilde{C}_x) = 0 \ \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

В силу включения $C_x \subset \tilde{C}_x$ и полноты меры ν, там где мы получаем $\nu(\tilde{C}_x) = 0$ там и $\nu(C_x) = 0$. Тогда $C_x \in \mathfrak{N}$, μ-п.в. $x \in X$. Утверждения 2) и 3) очевидны (функция, п.в. равная нулю, очевидно, измерима в широком смысле, а ноль действительно равен интегралу от равной п.в. нулю функции).

Шаг 3. Если теперь произвольное множество $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$, то $C = \tilde{C} \setminus e$, где $\mu \otimes \nu(e) = 0$, а $\tilde{C} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P})$.

Используем предыдущий шаг и получаем $\mathfrak{N} \ni C_x = \tilde{C}_x \setminus e_x$ — при μ-п.в. $x \in X$. А функция $x \mapsto \nu(C_x) = \nu(\tilde{C}_x) - \nu(e_x)$, определённая почти везде, совпадает со значениями $\nu(\tilde{C}_x)$ при μ-п.в. $x \in X$, что влечёт её измеримость в широком смысле и равенство 3).

Шаг 4. Теперь перейдём к σ-конечным пространствам X и Y: $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ и $Y = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} Y_j$.

Пусть $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$. Оно разбивается на $C_{n,k} = C \cap (X_n \times Y_k)$. Для каждого из множеств $C_{n,k}$ теорема верна. Тогда очевидна справедливость (1) на всём пространстве. Но, тогда

$$\mu \otimes \nu(C_{n,k}) = \int\limits_{X_k} \nu(Y_n \cap C) d\mu(x).$$

Т.к. $C_x = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (Y_k \cap C_x)$, то $\nu(C_x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(Y_k \cap C_x)$ — измеримая в широком смысле функция. И, наконец, используя теорему Леви, получим

$$\int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{X_n} \nu(C_x) d\mu(x) = \sum_{n=1} \sum_{k=1} \int\limits_{X_n} \nu(Y_k \cap C_x) d\mu(x) = \sum_{n,k} \mu \otimes \nu(C_{n,k}) = \mu \otimes \nu(C).$$

□

6.3 Перемена порядка интегрирования. Сведение кратных интегралов к повторным (Теоремы Тонелли и Фубини)

Далее мы считаем, что зафиксированы два пространства с σ-конечными полными мерами $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ и их тензорное произведение $(X \times Y,\ \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N},\ \mu \otimes \nu)$.

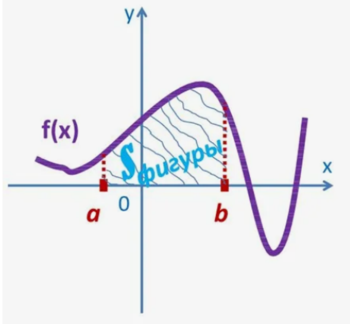
Следствие (Геометрический смысл интеграла Лебега б/д)**.** Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая функция. Тогда определим $\Gamma_f = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \mid t = f(x)\}$ и для неотрицательных f определим подграфик:

$$\Pi_f = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}.$$

Из принципа Кавальери следует следующее:

- ▷ $\mu \otimes \mathcal{L}^1(\Gamma_f) = 0$.
- ▷ Для неотрицательной функции измеримость в широком смысле эквивалентна измеримости её подграфика. Более того, $\mu \otimes \mathcal{L}^1(\Pi_f) = \int\limits_X f d\mu$.

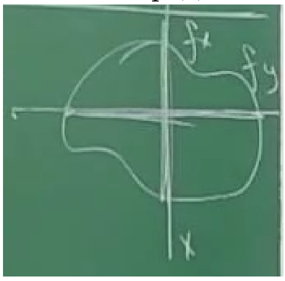
Интеграл Лебега это буквально площадь под графиком неотрицательной измеримой в широком смысле функции(те где-то может быть неопределена)



Определение 6.4. Пусть $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Зафиксируем одну из переменных и оставим вторую переменную. Это буквально значение функции на сечении. Определим следующие функции:

$$\forall x \in X: \quad f_x(\cdot): Y \to \overline{\mathbb{R}},\ y \mapsto f(x,y);$$

$$\forall y \in Y: \quad f^y(\cdot): X \to \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto f(x,y).$$



Теорема 6.3 (Тонелли)**.** *Пусть f — неотрицательная $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$-измеримая функция на $X \times Y$. Тогда верны следующие утверждения:*
(!) Важно, что функция неотрицательная.

1а) *Для μ-п.в. $x \in X \hookrightarrow f_x$ — измерима на Y;*

1б) *Для ν-п.в. $y \in Y \hookrightarrow f^y$ — измерима на X.*

2а) *$\varphi: x \mapsto \int\limits_Y f_x d\nu$ — измеримая в широком смысле функция на X;*

2б) *$\psi: y \mapsto \int\limits_X f^y d\mu$ — измеримая в широком смысле функция на Y.*

3) *Справедливо равенство:*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f_x(y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f^y(x)d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Доказательство. Идея доказательства. Любая измеримая функция является пределом простых. Докажем для характеристической функции измеримого множества с использованием принципа Кавальери. Произвольная простая функция является линейной комбинацией харфункций. Далее с помощью теоремы Леви перейдем к пределу.
Шаг 1. Пусть $f = \chi_C$, где $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$. Значит, фиксируя $\forall x \in X$, получим $f_x = \chi_{C_x}$, поскольку

$$f_x(y) = f(x,y) = \chi_C(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in C \\ 0, & (x,y) \notin C \end{cases} = \begin{cases} 1, & y \in C_x \\ 0, & y \notin C_x \end{cases} = \chi_{C_x}(y).$$

Но x выбран произвольно, тогда из п.1 принципа Кавальери следует что при μ-п.в. $x \in X \hookrightarrow f_x$ — измерима. Так как наша функция это характеристическая функция множества, то её интеграл — мера множества. Тогда из п.2 принципа Кавальери следует измеримость в широком смысле функции φ, а из п.3

$$\mu\otimes\nu(C) = \int\limits_{X\times Y} X_C(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int\limits_X \nu(C_x)d\mu(x) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f_x d\nu\right)d\mu.$$

что и требовалось доказать.
Шаг 2. Если f — произвольная простая неотрицательная функция, то по определению $\exists\{a_1, \ldots, a_n\} \subset [0, +\infty)$ и $E_1, \ldots E_n \subset X$. $(E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j)$ такие, что $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ выполнение всех пунктов теоремы следует из предыдущего шага и линейности интеграла Лебега для неотрицательных функций.
Шаг 3. В общем случае, для неотрицательной измеримой функции f существует неубывающая последовательность простых функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч. $f_n \to f, n \to +\infty$.
Для любого $n \in \mathbb{N}$, для μ-п.в. $x \in X$ функция $(f_n)_x$ — $X \times Y$-измерима. Для каждого n множество где, $(f_n)_x$ не определено свое, но их счётное объединение является множеством нулевой меры. Тогда и μ-п.в. $x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow (f_n)_x$ — измерима. Тогда $(f)_x$ измерима как поточечный предел измеримых и монотонно растущих. Тогда по теореме Леви мы получаем:

$$\varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_Y (f_n)_x(y) d\nu(y).$$

Тогда, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n : x \mapsto \int\limits_Y (f_n)_x d\nu$ измерима в широком смысле, то и её предел $x \mapsto \int\limits_Y f_x d\nu$ тоже измерим в широком смысле как предел при μ-п. в. $\in X$. Из монотонности $\{f_n\}$ и монотонности интеграла по функциям мы получаем монотонность последовательности $\{\varphi_n\}$. Таким образом, можно ещё раз воспользоваться теоремой Леви и получить следующее:

$$\int\limits_X \varphi d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_X \varphi_n d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_X \left(\int\limits_Y (f_n)_x d\nu \right) d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_{X \times Y} f_n d\mu \otimes \nu = \int\limits_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu).$$

Что и требовалось доказать. Для f^y доказательство аналогично.

$\square$

Примечание. Как следует рассматривать теорему Тонелли? Часто довольно сложно посчитать двойной интеграл. Мы переставили пределы как нам нужно, получили конечное. Тогда теорема Тонелли говорит что и при других перестановках будет конечное значение и это все будет равно интегралу. Т.е. обе части либо меньше бесконечности, либо равны бесконечности одновременно

Теорема 6.4 (Фубини). *Пусть f — интегрируемая на $X \times Y$ по $\mu \otimes \nu$ функция $f \in \widetilde{L_1}(X \times Y, \mu \otimes \nu)$. То есть $\int\limits_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) < +\infty$. Тогда справедливо следующее:*

1а) Для μ-п.в. $x \in X \hookrightarrow f_x$ — интегрируема на Y;

1б) Для ν-п.в. $y \in Y \hookrightarrow f^y$ — интегрируема на X.

2а) $\varphi : x \mapsto \int\limits_Y f_x d\nu$ — интегрируема по μ;

2б) $\psi : y \mapsto \int\limits_X f^y d\mu$ — интегрируема по ν.

3) Верно следующее равенство:

$$\int\limits_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int\limits_X \varphi d\mu = \int\limits_Y \psi d\nu.$$

Доказательство. Пусть $f = f_+ - f_-$. Воспользуемся теоремой Тонелли для f_+ и f_-:

$$\int\limits_{X\times Y} f_\pm d(\mu\otimes\nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y (f_\pm)_x d\nu\right) d\mu < +\infty.$$

По ней же $(f_\pm)_x$ — измеримы, а $(\varphi_\pm)_x$ — измеримы в широком смысле, где $\varphi_\pm = \int\limits_Y f_\pm(x,y)d\nu(y)$. Т.к. $\int\limits_X \varphi_\pm d\mu < +\infty$, то $\varphi_\pm$ — интегрируемы, а значит п.в. конечны, а значит $(f_\pm)_x$ — интегрируемы при п.в. $x \in X$. Третий пункт теоремы следует из линейности интеграла Лебега. □

Примечание. Разница между теоремами:

- Теорема Тонелли утверждает, что для неотрицательных функций можно менять порядок интегрирования и гарантирует равенство интегралов. Вне зависимости от конечности интеграла
- Теорема Фубини расширяет это утверждение на случай функций, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, при условии конечности интеграла.

Примечание. Может быть так, что существуют повторные интегралы (более того – они могут быть равны), но при этом f — не интегрируема по $\mu\otimes\nu$.

Пример. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

f не интегрируема на $[-1,1]^2$ по $\mathcal{L}^1\otimes\mathcal{L}^1$, но существуют повторные интегралы.

Пример. Пусть

$$f = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Эта функция не интегрируема по $\mathcal{L}^1\otimes\mathcal{L}^1$, но, при этом, существуют повторные интегралы, равные 0.

6.4 Мера Лебега как произведение мер

Теорема 6.5. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{L}^n\otimes\mathcal{L}^m = \mathcal{L}^m\otimes\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{m+n}$ и $\mathfrak{M}^n\otimes\mathfrak{M}^m = \mathfrak{M}^m\otimes\mathfrak{M}^n = \mathfrak{M}^{m+n}$.*

Доказательство. По определению, $\mathcal{L}^{m+n}$ — стандартное продолжение по Каратеодори меры λ_{m+n}, определённой на $\mathcal{P}^{m+n}$ — полукольце стандартных ячеек в $\mathbb{R}^{m+n}$.
По определению произведения мер, $\mathcal{L}^n\otimes\mathcal{L}^m$ — стандартное продолжение меры

$$m(E\times G) = \mathcal{L}^n(E)\cdot\mathcal{L}^m(G)$$

на полукольце $\mathcal{P}$ множеств вида $E\times G, E\in\mathfrak{M}^n, G\in\mathfrak{M}^m$, где $\mathcal{L}^n(E) < +\infty, \mathcal{L}^m(G) < +\infty$. Тут нужно почувствовать разницу, ведь в первом случае берутся $n+m$ мерные ячейки, а во втором различные декартовы произведения конечных множеств конечной меры, которые тоже образуют полукольцо. Понятно что это разные полукольца, но не сильно :)
Пусть m^* — внешняя мера, порождённая m, λ^*_{m+n} — внешняя мера, порождённая λ_{m+n}.

По ранее доказанной теореме, $m^* \leqslant \lambda^*_{m+n}$ (т.к. $\mathcal{P}^{m+n} \subset \mathcal{P}$).
Пусть E — множество конечной меры m^*. Тогда существует $\{P_j\} \subset \mathcal{P}$ т.ч.

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) \leqslant m^*(E) + \varepsilon$$

Тогда $\forall P_j = E_j \times G_j$ каждый из них измерим в своей сигма алгебре:

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E_j)\mathcal{L}^m(G_j).$$

В силу регулярности меры Лебега $\mathcal{L}^n$ и $\mathcal{L}^m$, $\exists U_i, W_i$ — открытое : $U_i \supset E_i$ и $W_i \supset G_i$ т.ч.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(U_i)\mathcal{L}^m(W_i) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Факт. *Любое открытое в $\mathbb{R}^n$ реализуется в виде не более чем счетного дизъюнктивного объединения ячеек с рациональными центрами и рёбрами.*

Пусть $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ячейки в $\mathbb{R}^n$, $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$. По определению меры ячейки $\mathcal{L}^n(P_i)\mathcal{L}^m(Q_i) = \mathcal{L}^{m+n}(P_i \times Q_i)$. Тогда $\mathcal{L}^{n+m}(U_i \times W_i) = \mathcal{L}^n(U_i)\mathcal{L}^m(W_i)$, т.к. $U_j \times W_j$ — открытое множество. $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_i \times Q_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \times W_j$
Таким образом мы получаем

$$\lambda^*_{n+m}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_{n+m}(U_j \times W_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n+m}(U_j \times W_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(U_j)\mathcal{L}^m(W_j) < m^*(E) + \varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем необходимое неравенство для произвольного множества конечной внешней меры:

$$\lambda^*(E) < m^*(E)$$

Тогда $\lambda^* = m^*$ и теорема доказана. □

7 Замена переменной в интеграле Лебега

7.1 Изменение меры Лебега при отображениях

Напоминание. Отображение $F : E \to \mathbb{R}^m$, где $E \subset \mathbb{R}^n$ называется липшицевым, если $\exists L > 0$, т.ч. $\forall x, y \hookrightarrow \|F(x) - F(y)\| \leqslant L\|x - y\|$. Пишем, что $F \in \mathcal{LIP}(E, \mathbb{R}^m)$. Наименьшая такая L называется константой Липшица и обозначается как L_F.

Факт. *Пусть $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m), \mathcal{O}$ — открытое в $\mathbb{R}^n$. Тогда F локально липшецево, т.е. для любого выпуклого компакта K в $\mathcal{O}$ $\exists L(K) > 0$ т.ч. $F \in \mathcal{LIP}(K, \mathbb{R}^m), L_F = L(K)$.*

Теорема 7.1. *Пусть $\mathcal{O}$ это открытое в $\mathbb{R}^n$ множество. Пусть $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$. Пусть $E \subset \mathcal{O}$ — $\mathcal{L}^n$-измеримо. Тогда $F(E)$ — измеримо по Лебегу.*

Доказательство. В силу регулярности меры Лебега

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_n \cup e,$$

где K_n — возрастающая последовательность компактов, а e — множество меры нуль. Из непрерывности F следует, что $F(K_n)$ — компакт. Тогда

$$F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_n \cup e\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(K_n) \cup F(e).$$

Поскольку счётное объединение компактов — борелевское множество, для измеримости образа достаточно показать, что $F(e)$ — измеримо. Покажем, что $\mathcal{L}^n(F(e)) = 0$. Предположим, что существует ячейка $P \in \mathcal{P}^n$: $e \subset \overline{P} \subset \mathcal{O}$. Тогда из липшицовости F на $\overline{P}$ существует константа Липшица L. В то же время, поскольку $\mathcal{L}^n(e) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует последовательность ячеек $\{Q_j\}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_j) < \varepsilon$.

Факт. *Любая ячейка представляется в виде дизъюнктного объединения кубических ячеек с рациональными ребрами и рациональным центром.*

Тогда $\exists$ $\{\Pi_l\}$ т.ч.

$$e \subset \bigsqcup_{l=1}^{\infty} \Pi_l, \ \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Pi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} (h_l)^n < \varepsilon.$$

Т.к. $diam(F(\Pi_l)) \leqslant Ldiam(\Pi_l) \leqslant Lh_l\sqrt{n}$, то $F(\Pi_l) \subset B_{Lh_l\sqrt{n}} \subset \Pi_{2Lh_l\sqrt{n}} = T_l$. Тогда

$$\lambda^*(F(e)) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(T_l) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} (2Lh_l\sqrt{n})^n \leqslant C \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Pi_l) \leqslant C\varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы получаем, что $\lambda^*(F(e)) = 0$, тк мера Лебега полна, то $F(e)$ измеримо те $\mathcal{L}^n(F(e)) = 0$. Если же e не содержится внутри одной ячейки, то мы можем разбить $\mathcal{O}$ на счётное объединение ячеек, и повторить данное рассуждение для пересечения e с каждой из ячеек. Поскольку счётное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, мы получаем необходимое. □

7.2 Трансляционная инвариантность меры Лебега

Теорема 7.2. *Пусть E — измеримое по Лебегу в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\forall v \in \mathbb{R}^n$ верно следующее: $v + E$ — измеримо и $\mathcal{L}^n(v + E) = \mathcal{L}^n(E)$.*

Доказательство. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $F : x \mapsto x + v$. Так как оно гладко, то $v + E = F(E)$ — измеримо. Для доказательства неизменности меры рассмотрим новую меру $\mu(E) = \mathcal{L}^n(E + v)$. $\forall E \in \mathfrak{M}_n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$$\mu(E) = \mathcal{L}^n(v + \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(v + E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Эти меры очевидно совпадают на полукольце ячеек. А значит меры это продолжение, по единственности продолжения совпадают на пересечении σ-алгебр, то есть просто совпадают. □

Теорема 7.3. *Любая трансляционно инвариантная мера в $\mathbb{R}^n$ совпадает с мерой Лебега с точностью до константы. Пусть μ — трансляционно инвариантная мера, определённая на $\mathfrak{M}^n$ и конечная на компактах. Тогда*

$$\forall E \in \mathfrak{M}^n \hookrightarrow \mu(E) = \mu\big([0,1)^n\big) \cdot \mathcal{L}^n(E) = k \cdot \mathcal{L}^n(E)$$

Доказательство. Если мера $\mu([0,1)^n) = 0$, то в силу трансляционной инвариантности мы получаем, что $\mu \equiv 0$.
Если мера $\mu([0,1)^n) = 1$, то для того, чтобы доказать $\mu \equiv \mathcal{L}^n$ на $\mathfrak{M}^n$ достаточно это проверить на кубических ячейках рационального радиуса. Любую кубическую ячейку можно получить как сдвиги и в силу трансляционной инвариантности достаточно доказать

$$\mu([0,1/k)^n) = 1/k^n \mu\big([0,1)^n\big) = 1/k^n$$

что в точности совпадает с мерой кубической ячейки.
Если мера $\mu([0,1)^n) = k \neq 1$, то пусть $\nu = \mu/k$. Тогда $\nu([0,1)^n) = 1$, а значит $\nu \equiv \mathcal{L}^n$ и $\mu = k\mathcal{L}^n$. □

7.3 Изменение меры Лебега при линейных отображениях

Факт (Из линала, б/д)**.** *Пусть дано обратимое л.о.* $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$*. Тогда существуют ОНБ* $\{g_j\}$ *и* $\{h_j\}$ *и набор положительных чисел* $\{c_j\}$ *т.ч.*

$$V(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, g_j \rangle h_j$$

Доказательство. Рассмотрим V^* — сопряжённое к V преобразование и $W = V^*V$ — с/с преобразование. Для W существует ОНБ из с.в. $\{g_j\}$, соответствующих собственным числам $\{s_j\}$. каждое такое число положительно, поскольку $\langle Wx, x\rangle = \|V(x)\|^2$ положительно определена. Пусть тогда $c_j = \sqrt{s_j}$. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i$$

А значит

$$V(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V g_j = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, g_i \rangle h_j, h_j = \frac{1}{c_j} V g_i$$

Очевидно, что $\{h_j\}$ — ОНБ.

Примечание. При этом, заметим, что $|\det V| = \prod_{j=1}^{m} c_j$, т.к. $(\det V)^2 = \det W = \prod_{j=1}^{m} s_j$.

□

Теорема 7.4. *Пусть дано обратимое л.о.* $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *и измеримое* E*. Тогда* $V(E) \in \mathfrak{M}^m$ *и*

$$\mathcal{L}^m(V(E)) = |\det V| \mathcal{L}^m(E)$$

Доказательство. В силу гладкости л.о. $\mathcal{L}^m(V(E))$ — измеримо. Введём меру $\mu(E) = \mathcal{L}^m(V(E))$ для каждого измеримого по Лебегу. Поскольку V — обратимо, то оно биективно, а следовательно $E_i \cap E_j = \varnothing \Rightarrow V(E_i) \cap V(E_j) = \varnothing$. Из этого следует что μ действительно мера на $\mathfrak{M}^m$. Заметим трансляционную инвариантность μ:

$$\mu(c + E) = \mathcal{L}^m(V(c + E)) = \mathcal{L}^m(V(c) + V(E)) = \mathcal{L}^m(V(E)) = \mu(E)$$

Это означает совпадение μ с мерой Лебега с точностью до постоянного множителя $k : \mu = k\mathcal{L}^m$. Пусть $E = [0,1]^m$ — единичный куб в базисе $\{g_j\}$ для отображения V. Тогда с одной стороны, $\mu([0,1]^m) = k\mathcal{L}^m([0,1]^m) = k$, а с другой стороны отображение V переводит куб в прямоугольный параллелепипед со сторонами c_j; тогда мы получаем, что $k = \prod_{j=1}^{m} c_j = |\det V|$. □

7.4 Абстрактная замена в интеграле Лебега

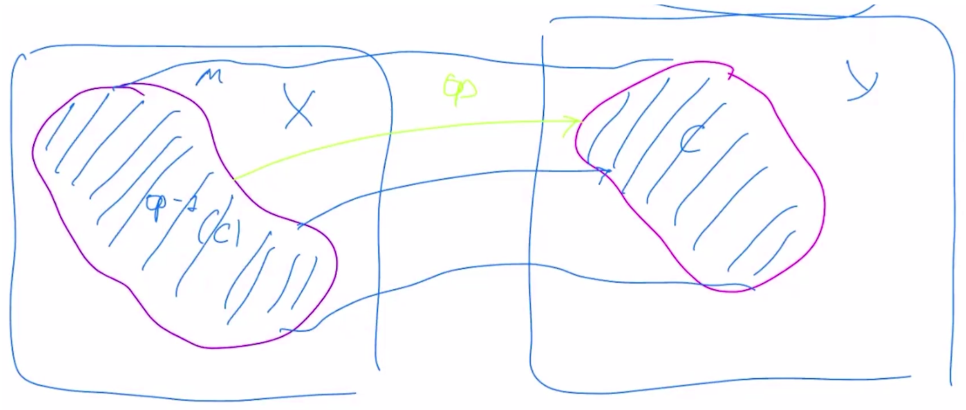
Определение 7.1. Пусть есть пространство с σ-конечной мерой $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и измеримое пространство $(Y, \mathfrak{N})$. Будем называть отображение $\Phi : X \to Y$ измеримым, если прообраз всякого измеримого в Y множества измерим в X, т.е. $\forall C \in \mathfrak{N} \hookrightarrow \Phi^{-1}(C) \in \mathfrak{M}$.

Далее считаем зафиксированными некоторое пространство с мерой $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, некоторое измеримое $(Y, \mathfrak{N})$ и измеримое отображение $\Phi : X \to Y$.

Определение 7.2. Определим push-forward меры μ:

$$\forall C \in \mathfrak{N} : \ \Phi_{\#\mu}(C) = \mu(\Phi^{-1}(C))$$

Идея довольна геометрична. Мы берем множество из образа и смотрим сколько "Массы"в него перетекло из прообраза



push-forward меры действительно является мерой:

$$\Phi_{\#\mu}\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Phi^{-1}(C_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Phi^{-1}(C_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{\#\mu}(C_i)$$

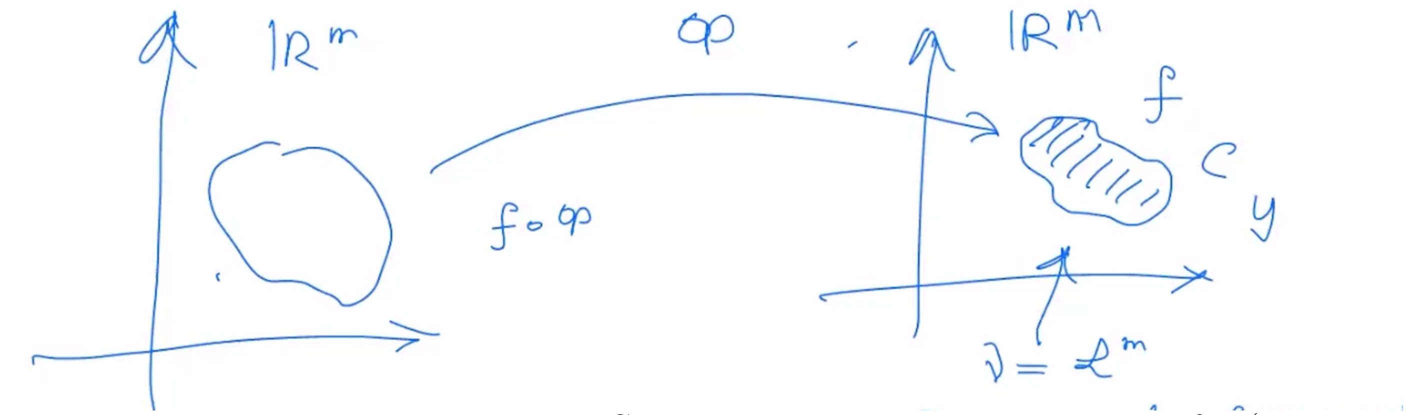
Определение 7.3. Пусть есть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и дано измеримое $\omega : X \to [0, +\infty]$. Тогда мерой μ с весом ω(ω-взвешенной мерой μ) будем называть меру $\omega\mu$ т.ч.

$$\omega\mu(E) = \int_E \omega(x) d\mu(x)$$

Взвешенную меру можно аналогичным способом толкнуть на Y :

$$\Phi_{\omega\mu}(C) = \omega\mu(\Phi^{-1}(C))$$

Геометрическая интерпертация. *Следующая теорема довольна абстракна. Рассмотрим ее геометрический смысл в $\mathbb{R}^m$:*



Мы хотим проинтегрировать множество $C \in Y$ по нашей классической мере в $\mathcal{L}^m$ (Важно *что мы сейчас в образе). Пускай мы сделали какую-то замену координат. Наше множество теперь слева. Очевидно оно как-то поменялось(например на картинке стало больше). Тогда теперь чтобы интегралы совпали нам нужно чтобы его как-то толкнуть отображением* Φ*, но уже с весом во сколько раз изменилось множество. Этот вес равен якобиану отображения(Если отображение линейно, то доказано сверху). В общем случае идея веса в том, что локально функция представима как линейная, и поэтому вес это функция точки.*

Теорема 7.5 (Абстрактная замена переменной в интеграле Лебега)**.** *Пусть* $\nu := \Phi_{\#}(\omega\mu)$*, те* ν *— push-forward* ω*-взвешенной меры* μ *на* $(Y, \mathfrak{N})$*. Тогда для всякой неотрицательной измеримой на* Y *функции* f *(или произвольной интегрируемой на* Y*) верно следующее:*

$$\int\limits_Y f(y)d\nu(y) = \int\limits_X f \circ \Phi(x) \cdot \omega(x)d\mu(x)$$

Доказательство. Идея простая. Докажем для простых, а дальше используем теорему Леви.
Шаг 1. Пусть $f = \chi_C, C \in \mathfrak{N}$. Тогда можно заметить, что $f \circ \Phi = \chi_C \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(C)}$. И действительно:

$$f \circ \Phi(x) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in C \\ 0, & \Phi(x) \notin C \end{cases} \Longrightarrow f \circ \Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Phi^{-1}(C) \\ 0, & x \notin \Phi^{-1}(C) \end{cases} \Longrightarrow f \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(C)}$$

Тогда равенство принимает вид:

$$\int\limits_Y \chi_C(y)d\nu(y) = \nu(C) = \Phi_{\#\omega\mu}(C) = \omega\mu(\Phi^{-1}(C)) = \int\limits_{\Phi^{-1}(C)} \omega(x)d\mu = \int\limits_X \chi_{\Phi^{-1}(C)}(x) \cdot \omega(x)d\mu$$

Шаг 2.В силу линейности интеграла и аддитивности меры данное утверждение очевидным образом продолжается на произвольные неотрицательные простые функции.
Шаг 3.В общем случае, для произвольной неотрицательной измеримой f мы можем рассмотреть неубывающую последовательность неотрицательных простых $f_n \to f, n \to +\infty$. Ввиду справедливости

$$\int\limits_Y f_n d\nu = \int\limits_X f_n \circ \Phi \cdot \omega d\mu$$

для всякого n то переходя к пределу и используя теорему Леви мы получаем

$$\int\limits_Y f d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_Y f_n d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_X f_n \circ \Phi \cdot \omega d\mu = \int\limits_X f \circ \Phi \cdot \omega d\mu$$

Для случая интегрируемой функции f мы можем заметить, что $f \circ \Phi \cdot \omega$ тоже интегрируема, и, далее пишем равенства для f_+ и f_-, вычитаем, и получаем требуемое. □

Определение 7.4. Пусть $(X, \mathfrak{M})$ — измеримое пространство и μ, ν — 2 меры на $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что ν имеет плотность ω относительно μ, если есть неотрицательная измеримая $\omega : X \to [0, +\infty]$ т.ч. $\nu = \omega\mu$. Иногда обозначается $\frac{d\nu}{d\nu}(x) = \omega(x)$

Теорема 7.6 (Критерий плотности, б/д)**.** *Пусть* μ, ν *— 2 меры на* σ*-алгебре* $\mathfrak{M}$ *измеримого пространства* $(X, \mathfrak{M})$*, а* μ *— измеримая неотрицательная функция на* X*. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- ▷ ν *имеет плотность* ω *относительно* μ
- ▷ $\forall A \in \mathfrak{M} \hookrightarrow \mu(A) \inf\limits_{x \in A} \omega \leqslant \nu(A) \leqslant \mu(A) \sup\limits_{x \in A} \omega$

Доказательство. (Из Макарова-Подкорытова) Необходимость очевидна. Покажем достаточность. Очевидно, что мы можем считать, что $\omega > 0$ на рассматриваем множестве B, поскольку

$$\nu(B(\omega = 0)) = \int\limits_{B(\omega=0)} \omega d\mu$$

Пусть есть некоторое $q \in (0, 1)$. Рассмотрим

$$B_j = \{x \in B \mid q^j \leqslant \omega(x) < q^{j-1}\}, j \in \mathbb{Z}$$

Такие множества образуют разбиение множества B, и

$$\mu(B_j)q^j \leqslant \nu(B_j) \leqslant \mu(B_j)q^{j-1}$$

Из монотонности интеграла следует справедливость подобной оценки для ω:

$$\mu(B_j)q^j \leqslant \int\limits_{B_j} \omega d\mu \leqslant \mu(B_j)q^{j-1}$$

Суммируя по $\mathbb{Z}$ мы получаем следующее:

$$q\int\limits_{B} \omega d\mu \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^j \mu(B_j) \leqslant \nu(B) \leqslant \frac{1}{q}\sum_{j\in\mathbb{Z}} q^j \mu(B_j) \leqslant \frac{1}{q}\int\limits_{B} \omega d\mu$$

Теперь, переходя к пределу при $q \to 1$ получаем равенство. □

7.5 Конкретная замена переменной в интеграле Лебега

Напоминание. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества. Будем говорить, что U и V диффеоморфны, если существует диффеоморфизм $F\colon U \mapsto V$, то есть F — взаимооднозначное отображение U на V, такое что $F \in \mathcal{DIF}(U, V)$ и $F^{-1} \in \mathcal{DIF}(V, U)$. Если требовать именно непрерывную дифференцируемость, то такой диффеоморфизм называется гладким

Будем считать фиксированными открытые множества $G, G' \subset \mathbb{R}^m$ и некоторое отображение $\Phi \in C^1(G, G')$, являющееся диффеоморфизмом G на G'.

Теорема 7.7. *Для всякого измеримого $E \subset G$ справедливо следующее равенство:*

$$\Phi_\#\mathcal{L}^m(E) = \mathcal{L}^m(\Phi(E)) = \int\limits_E |\det \mathcal{D}\Phi(x)|dx$$

Доказательство. Напомним, что $J_\Phi = \det \mathcal{D}\Phi$ — якобиан отображения Φ. С учётом критерия достаточно доказать, что для всякого измеримого A выполнено следующее неравенство:

$$\mathcal{L}^m(A) \inf_A |J_\Phi| \leqslant \Phi_\#\mathcal{L}^m(A) \leqslant \mathcal{L}^m(A) \sup_A |J_\Phi|$$

Заметим, что достаточно доказать только правую часть неравенства, поскольку Φ — диффеоморфизм, а значит, применяя полученное неравенство к отображению Φ^{-1} и множеству $\Phi(A)$ мы получим левую часть неравенства. $J_\Phi(x) \cdot J_{\Phi^{-1}}(\Phi(x)) = 1$
Докажем неравенство для кубической ячейки Q т.ч. $\overline{Q} \subset G$:

$$\Phi_\#\mathcal{L}^m(Q) \leqslant \sup_{x\in Q} |J_\Phi| \cdot \mathcal{L}^m(Q)$$

Предположим, что существует такой куб, для которого неравенство неверно и

$$\sup_{x\in Q}|J_\Phi|\cdot\mathcal{L}^m(Q)<\Phi_\#\mathcal{L}^m(Q)$$

В силу строгости неравенства мы можем чуть-чуть увеличить левую часть: т.ч.

$$\exists C \text{ такой что } C>\sup_{x\in Q}|J_\Phi| \text{ и } C\mathcal{L}^m(Q)<\Phi_\#\mathcal{L}^m(Q)$$

Разобьём каждую сторону Q пополам. Те на 2^m равных кубических частей. По принципу Дирихле хотя бы для одной части Q_1 из них подобное неравенство тоже должно выполняться:

$$C\mathcal{L}^m(Q_1)<\Phi_\#\mathcal{L}^m(Q_1)$$

Повторяя это построение для Q_1, построим такую последовательность вложенных кубических ячеек

$$G\supset\overline{Q}\supset\overline{Q_1}\supset\ldots\supset\overline{Q_n}\supset\ldots$$

что

$$C\mathcal{L}^m(Q_n)<\Phi_\#\mathcal{L}^m(Q_n)$$

По теореме Кантора $\exists a\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{Q_n}$. Пусть $L=D_a\Phi$ — линейное и обратимое отображение. Поскольку по условию Φ — диффеоморфизм, L — обратимо, и так как $a\in\overline{Q}$, то $|\det L|=|J_\Phi(a)|<C$. Рассмотрим вспомогательное линейное отображение:

$$\Psi(x)=a+L^{-1}(\Phi(x)-\Phi(a)),\quad x\in\mathbb{R}^m$$

Около точки a отображение стремится к тождественному:

$$\Psi(x)=x+o(x-a),x\to a$$

Поэтому $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ такой малый шар $B_{\delta(\varepsilon)}(a)$, центрированный в a, что

$$\forall x\in B\hookrightarrow\|\Psi(x)-x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\|x-a\|$$

По построению $a\in\overline{Q_n}$ для всякого n и $\overline{Q_n}\subset B$ для достаточно больших n. Тогда поскольку $\|x-a\|\leqslant\sqrt{m}h$ (где h — длина ребра куба $Q_n, x\in Q_n$), то $\|\Psi(x)-x\|\leqslant\varepsilon h$ и аналогичное верно для всех координат разности $\Psi(x)-x$ а значит $\Psi(x)$ принадлежит кубу с длиной ребра $\leqslant(1+2\varepsilon)h$. Тогда:

$$\mathcal{L}^m(\Psi(Q_n))\leqslant\mathcal{L}^m((1+2\varepsilon)Q_n)\leqslant(1+2\varepsilon)^mh^m=(1+2\varepsilon)^m\mathcal{L}^m(Q_n)$$

С другой стороны,

$$\mathcal{L}^m(\Psi(Q_n))=\mathcal{L}^m(a+L^{-1}(\Phi(Q_n)-\Phi(a)))=\mathcal{L}^m(L^{-1}\circ\Phi(Q_n))=|\det L^{-1}|\mathcal{L}^m(\Phi(Q_n))$$

Тогда собирая все полученные неравенства, мы получаем:

$$|\det L^{-1}|\mathcal{L}^m(\Phi(Q_n))\leqslant(1+2\varepsilon)^m\mathcal{L}^m(Q_n)$$

Т.е.

$$\Phi_\#\mathcal{L}^m(Q_n)\leqslant(1+2\varepsilon)^m|J_\Phi(a)|\mathcal{L}^m(Q_n)$$

Но $C\mathcal{L}^m(Q_n)<\Phi_\#\mathcal{L}^m(Q_n)$, а значит

$$C\leqslant(1+2\varepsilon)^m|J_\Phi(a)|$$

Тогда возьмём inf по всем ε, и получим $C \leqslant |J_\Phi(a)|$. Но $C > \sup\limits_{x \in Q} |J_\Phi|$, а поскольку $a \in Q$ то мы получаем противоречие, и неравенство $\Phi_\# \mathcal{L}^m(Q) \leqslant \mathcal{L}(Q) \sup\limits_{x \in Q} |J_\Phi|$ выполняется для всех кубических ячеек Q: их замыкание лежит в G. Но любое открытое множество представляется как дизъюнктивное объединение счётного числа кубических ячеек, а значит неравенство верно и для них. Теперь, используя регулярность меры Лебега, мы можем обобщить результат на произвольное измеримое множество A:

$$\Phi_\# \mathcal{L}^m(A) \leqslant \inf_{A \subset \Omega \subset G} \Phi_\# \mathcal{L}^m(\Omega) \leqslant \inf_{A \subset \Omega \subset G} \mathcal{L}^m(\Omega) \sup_\Omega |J_\Phi| \leqslant \mathcal{L}^m(A) \cdot \sup_A |J_\Phi|$$

□

Следствие. Из непрерывности $|J_\Phi|$ и предыдущей теоремы следует, что

$$|J_\Phi(a)| = \lim_{A \to a} \frac{\mathcal{L}^m(\Phi(A))}{\mathcal{L}^m(A)}$$

Где под пределом мы понимаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathfrak{M}^m \wedge A \subset B_\delta(a) \wedge \mathcal{L}^m(A) > 0 \hookrightarrow \left| \frac{\mathcal{L}^m(\Phi(A))}{\mathcal{L}^m(A)} - |J_\Phi(a)| \right| < \varepsilon.$$

Теорема 7.8. *Пусть Φ — диффеоморфизм G на G'. Тогда для любой измеримой неотрицательной функции f на G' верно следующее:*

$$\int\limits_{G'} f dy = \int\limits_G f \circ \Phi \cdot |J_\Phi| dx$$

Доказательство. Результат очевиден в силу предыдущей теоремы и теоремы об абстрактной замене переменных в интеграле Лебега при подстановке

$$\mu = \mathcal{L}^m, \nu = \mathcal{L}^m, \omega = |J_\Phi|, X = G, Y = G'$$

□

8 Криволинейные интегралы

8.1 Интегралы I рода

Физический смысл — это масса кривой с заданной плотностью.

Определение 8.1. Будем говорить, что $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ кусочно непрерывно-дифференцируема (кусочно 1-гладкая), если $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ и существует некоторое конечное разбиение

$$T = \{t_i\}_{i=0}^N, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$$

для которого верно следующее:

$$\forall i \in \overline{0, N-1} \hookrightarrow f|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^1([t_i, t_{i+1}], \mathbb{R}^n)$$

А в самих точках существую односторонние производные.

Определение 8.2. Пусть $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a,b]\}$ — кривая в $\mathbb{R}^n$, параметризованная кусочно 1-гладкой функцией r. Пусть $f \in C(\Gamma, \mathbb{R})$. Тогда будем называть *криволинейным интегралом I-го рода* f по Γ:

$$\int\limits_{\Gamma} f(r)ds := \int\limits_a^b f(r(t))\|r'(t)\|dt$$

Примечание. То что стоит слева это обозначение, а то что справа это расшифровка

Лемма 8.1. *Криволинейный интеграл I рода не зависит от выбора допустимой параметризации (сохраняющей ориентацию).*

Доказательство. Пусть $r(t) = \rho(\tau(t))$ — кусочно гладкая и $\Gamma = \{\rho(\tau) \mid \tau \in [\alpha, \beta]\}$, а $\tau(t)$ — строго возрастающая гладкая функция, переводящая $[a,b]$ в $[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\tau))\|\rho'(\tau)\|d\tau = \int\limits_a^b f(\rho(\tau(t)))\|\rho'(\tau(t))\|\tau'(t)dt = \int\limits_a^b f(r(t))\|r'(t)\|dt$$

(Это просто замена переменной в Риммановском интеграле. Поскольку $\tau(t)$ — возрастающая, то $\tau' > 0$, и мы можем занести её под норму) $\square$

Лемма 8.2. *Криволинейный интеграл I рода не изменяется при изменении ориентации.*

Доказательство. Пусть $r(t)$ — допустимая параметризация кривой $\Gamma, t \in [a,b]$. Зададим $\rho(t) = r(-t), t \in [-b,-a]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(r(t))\|r'(t)\|dt = -\int\limits_{-a}^{-b} f(r(-t))\|r'(-t)\|d(-t) = \int\limits_{-b}^{-a} f(\rho(t))\|\rho'(t)\|dt$$

$\square$

8.2 Интегралы II рода

Физический смысл — это работа силы вдоль траектории.

Определение 8.3. Пусть $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$ — ориентированная кривая, параметризованная кусочно-гладкой $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Пусть $\overline{F} \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$. Тогда *криволинейным интегралом II-го рода* f по Γ будем называть

$$\int\limits_{\Gamma} (\overline{F}, \overline{dr}) := \int\limits_a^b \langle \overline{F}(r(t)), \overline{r}'(t)\rangle dt$$

Лемма 8.3. *Криволинейный интеграл II рода не зависит от выбора допустимой параметризации (сохраняющей ориентацию).*

Доказательство. Пусть $\rho(\tau(t)) = r(t)$ — репараметризация Γ, $\tau : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ — C^1-гладкая строго возрастающая функция. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta \langle F(\rho(\tau)), \rho'(\tau)\rangle d\tau = \int\limits_a^b \langle F(\rho(\tau(t))), \rho'(\tau)\rangle \tau'(t)dt = \int\limits_a^b \langle F(r(t)), r'(t)\rangle dt.$$

$\square$

Лемма 8.4. *Криволинейный интеграл II рода изменяет знак на противоположный при изменении ориентации.*

Доказательство. Пусть $\tau : t \mapsto -t$ и $\rho(\tau(t)) = r(t)$. Тогда

$$\int\limits_{-b}^{-a} \langle F(\rho(\tau)), \rho'(\tau)\rangle d\tau = \int\limits_{a}^{b} \langle F(\rho(\tau(t))), \rho'(\tau(t))\langle \tau'(t) dt = -\int\limits_{a}^{b} \langle F(r(t)), r'(t)\rangle dt$$

□

Лемма 8.5 (Приближение кривой ломаными:)**.** *Пусть* $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a,b]\}$ *с гладкой параметризацией* r*, не имеющей особых точек (то есть* $r \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *и* $r'(t) \neq 0$ *на* $[a,b]$*). Пусть компакт* $K \subset \mathbb{R}^n$ *и* $h_0 > 0$*:* $K \supset \Gamma$ *и* $K \supset \Gamma_T$*, где* Γ_T *— для всякой ломаной, порождённой конечным разбиением* T *кривой* Γ *с мелкостью* $l(T) < h_0$*. Пусть на* K *задано непрерывное поле* $F : K \to \mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$\exists \lim_{l(T)\to 0} \int\limits_{\Gamma_T} (F, dr) = \int\limits_{\Gamma} (F, dr)$$

Доказательство. Поскольку r — гладкая, то Γ — спрямляема. В тоже время, r — равномерно непрерывна (как непрерывная на компакте по теореме Кантора). То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t_1, t_2 \in [a,b] : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |r(t_1) - r(t_2)| < \varepsilon$$

Аналогично, из непрерывности F на компакте следует её равномерная непрерывность, и

$$\forall \eta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall r_1, r_2 \in K : |r_1 - r_2| < \varepsilon \Rightarrow |F(r_1) - F(r_2)| < \eta$$

Фиксируя $\eta > 0$ выберем $\varepsilon(\eta)$ и $\delta(\varepsilon)$. Тогда для произвольного разбиения T мелкости $l(T) < \delta$ мы получаем:

$$\left| \int\limits_{\Gamma} (F, dr) - \int\limits_{\Gamma_T} (F, dr) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{N_T - 1} \left| \int\limits_{\Gamma(i)} (F, dr) - \int\limits_{\Gamma_{T_i}} (F, dr) \right| \leqslant (*)$$

(Здесь Γ_i — часть кривой Γ между t_i и t_{i+1}, а Γ_{T_i} — отрезок ломаной между этими же точками. А далее мы прибавили и вычли постоянное значение поля в точке $\overline{F}(r(t_i)))$

$$(*) \leqslant \sum_{i=0}^{N_T - 1} \left| \int\limits_{\Delta(i)} \langle F(r(t_i), dr\rangle \right| + \left| \int\limits_{\Delta(i)} \langle F(r) - F(r(t_i)), dr\rangle \right| = \sum_{i=0}^{N_T - 1} \left| \int\limits_{\Delta(i)} \langle F(r) - F(r(t_i)), dr\rangle \right| \leqslant (*)$$

(Здесь $\Delta(i)$ — замкнутая кривая, состоящая из Γ_i и развернутой Γ_{T_i}. Левый интеграл от константы по замкнутой петле равен нулю)

$$(*) \leqslant \sum_{i=0}^{N_T - 1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left| F(r(t)) - F(r(t_i)) \right| \|r'(t)\| dt + \sum_{i=0}^{N_T - 1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left| F(\xi(t)) - F(\xi(t_i)) \right| \|\xi'(t)\| dt \leqslant (*)$$

(Здесь $\xi(t)$ — параметризация ломаной. Здесь же использовано условие $r'(t) \neq 0$.)

$$(*) \leqslant \sum_{i=0}^{N_T - 1} \eta(L(\Gamma_i) + L(\Gamma_{T_i})) \leqslant 2\eta L(\Gamma)$$

Поскольку η выбрана произвольно, то лемма доказана. □

8.3 Формула Грина

Определение 8.4. Будем говорить, что Γ — *простой кусочно-гладкий контур*, если $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$:

1. $r(a) = r(b)$;
2. $r((a, b))$ — инъекция;
3. $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i$, где $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ только, быть может, в концах, и $\forall i \in \overline{1, \ldots, N} \hookrightarrow \Gamma_i$ — гладкая кривая.

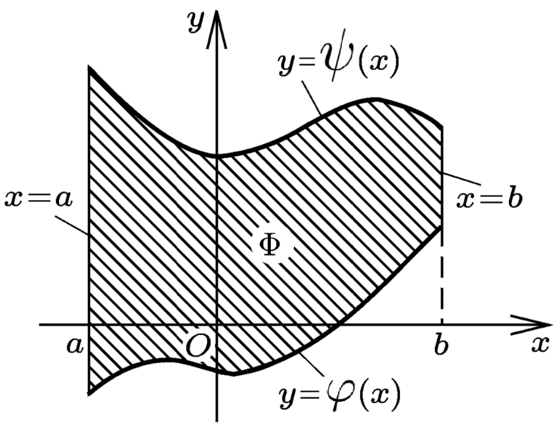
Факт (б/д). *Пусть* $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$ *— гладкая кривая на границе области* $G \subset \mathbb{R}^2$*. Тогда* $\forall t \in (a, b) \exists n(t)$ $(\|n\| = 1)$*:* $n(t) \perp r'(t)$ *и* $\exists \delta(t) > 0$ *т.ч.* $r(t) + n(t) \cdot \tau \in G, \tau \in (0, \delta(t))$.

Доказательство. Очевидно следует из гладкости границы и того, что G — открыто. □

Определение 8.5. Пусть $\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$ — гладкая кривая: $\Gamma = \partial G$, где G — некоторая область в $\mathbb{R}^2$. Будем говорить, что Γ *ориентирована положительно* относительно G, если $\forall t \in [a, b]$ векторы $r'(t)$ и $n(t)$ — правая двойка векторов. Неформально: при обходе границы, наша область должная оставаться слева.

Определение 8.6. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется элементарной относительно Oy, если $\exists$ кусочно непрерывно-дифференцируемые φ и ψ на $[a, b]$: $\varphi \leqslant \psi$ и $G = \{(x, y) \mid x \in (a, b), y \in (\varphi(x), \psi(x))\}$. Аналогично определяется элементарность относительно Ox.

Примечание. Круг не является элементарной областью ни по одной из осей. Тк в концах бесконечная производная. Но его можно разбить элементарные области



Область элементарная отн. Oy

Определение 8.7. Область в $\mathbb{R}^2$ называется *элементарной*, если она элементарна относительно одной из осей.

Лемма 8.6 (о разбиении б/д). *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^2$ *— область, граница которой состоит из конечного числа дизъюнктивных простых кусочно-гладких контуров* $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$*. Тогда она может быть «правильно» разбита на конечное число элементарных областей, т.е.* $\exists \{G_j\}_1^M$*:*

1. $G_i \cap G_j = \varnothing$
2. $G_i \subset G$
3. $\bigcup \overline{G_i} = \overline{G}$
4. $\partial G_i \cap \partial G_j \cap G$ *либо пусто, либо состоит из одной точки, либо является промежутком.*

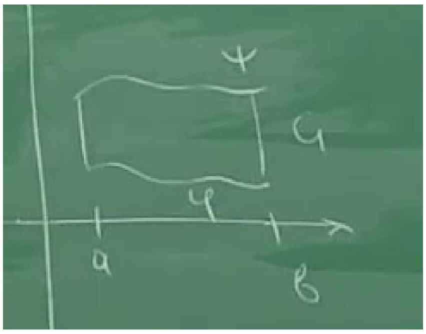
Примечание. Нижеприведённый текст не является официальным доказательством, сформулирован достаточно неформально и по сути своей является лишь идеей доказательства (быть может не полностью корректной).

Доказательство. Заметим, что нам достаточно покрыть границу G конечным числом прямоугольников (стороны которых параллельны координатным осям) так, что пересечение внутренности каждого из них с G было элементарным, поскольку после вычитания из G всех таких прямоугольников у нас останется область, границы которой параллельны координатным осям – такую область можно без каких-либо проблем разбить на объединение прямоугольников требуемым образом.
Ввиду открытости области мы можем выбирать настолько малые прямоугольники, чтобы в принципе не обращать внимание на другие простые кусочно-гладкие контуры при организации разбиения Γ_i.
У каждого из простых кусочно-гладких контуров есть конечное число особых точек (в данном контексте - точек, где $r'(t)$ не является непрерывной) и конечное число точек перехода через ноль у $r'(t)$ (то есть таких точек t_0, что или $x'(t_0) = 0$, или $y'(t_0) = 0$, причём или при $t_0 - 0$, или при $t_0 + 0$ они не равны нулю). Накроем их достаточно малыми прямоугольниками, так, чтобы в один прямоугольник попала только одна такая точка. Теперь, очевидно, что оставшиеся гладкие отрезки кривых можно хорошо покрыть прямоугольниками – они монотонны относительно одной из осей. Всякую точку перехода через 0, не являющуюся особой тоже можно покрыть без проблем: просто одна из функций φ/ψ не будет монотонной. Для хорошего покрытия особой точки, нам, быть может, потребуется разрезать получившийся прямоугольник на две части. □

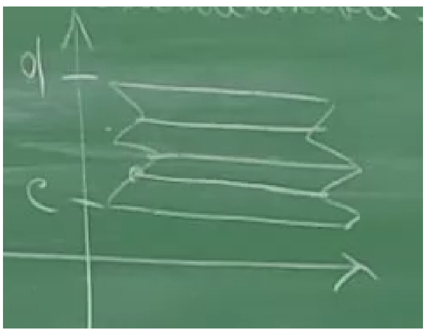
Теорема 8.1 (Формула Грина). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область: ∂G состоит из дизъюнктивного объединения простых кусочно-гладких контуров $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$. Пусть $\forall i \in \overline{1,\ldots,N}$ Γ_i^+ положительно ориентирована относительно G, $\partial G^+ := \bigsqcup\limits_{i=1}^N \Gamma_i^+$. Пусть $F \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$. Тогда, если $F = (P\ Q)^T$, то*

$$\int\limits_{\partial G^+} (F, dr) = \int\limits_{\partial G^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

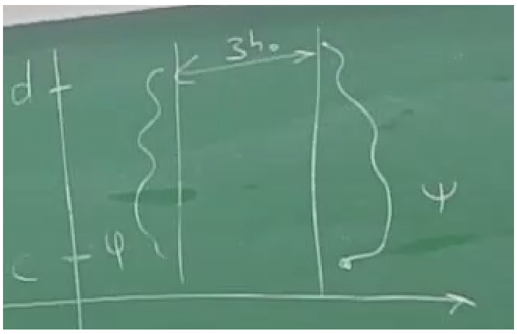
Доказательство. $F = F_1 + F_2, F_1 = (P\ 0)^T, F_2 = (0\ Q)^T$. Теорему достаточно доказать для F_1, доказательство для F_2 аналогично. Будем последовательно усложнять область G(на картинках показана эволюция нашей области):



Шаг 1.



Шаг 2.



Шаг 3.

<u>Шаг 1.</u> Будем считать G элементарной относительно Oy:

$$G = \{(x, y) \mid x \in (a, b), y \in (\varphi(x), \psi(x))\}$$

Тогда по теореме Фубини и учитывая что $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ непрерывно дифференцируема, а значит интеграл Лебега совпадает с интегралом Риммана и по формуле Ньютона-Лейбнция:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b \Big(P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))\Big) dx$$

Полагая $\Gamma_1 = \{r = (x, \varphi(x)) \mid x \in [a, b]\}$ и $\Gamma_2 = \{\rho = (x, \psi(x)) \mid x \in [a, b]\}$, можем заметить, что $r'(x) = (1, \varphi'(x))$ и $\rho'(x) = (1, \psi'(x))$. Но, Тогда

$$\int\limits_a^b P(x, \varphi(x))dx = \int\limits_{\Gamma_1^+} (F_1, dr)$$

$$-\int\limits_a^b P(x, \psi(x))dx = \int\limits_{\Gamma_2^+} (F_1, dr)$$

Поскольку вторая компонента поля F_1 нулевая, то интеграл по вертикальным отрезкам нулевой, а значит в этом случае формула доказана.

Шаг 2. Пусть область G элементарна относительно Ox:

$$G = \{(x, y) \mid y \in (c, d), x \in (\varphi(y), \psi(y))\}$$

Предположим, дополнительно, что φ и ψ — кусочно-линейные. Если брать картинку, то края уже не отрезки, а ломаные, т.е. $\exists T = \{t_i\}_{t=0}^N$ т.ч. $c = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = d$ и $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}, \psi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ — отрезки. Тогда на каждой из областей G_i, на которые G делится прямыми $y = t_i$, справедливость формулы Грина уже показана:

$$\iint_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial G_i^+} Pdx$$

Теперь, заметим, что формула Грина верна и для объединения всех этих областей, поскольку $\iint$ аддитивен по множествам G_i, а объединением кривых ∂G_i^+ будет ∂G^+, поскольку на прямой $y = t_{i+1}$ где пересекаются ∂G_i^+ и ∂G_{i+1}^+ интегралы по отрезку "выпиливаются"друг об друга, поскольку имеют противоположные направления.

Шаг 3. Пусть область G — элементарна относительно Ox, а φ и ψ — произвольные непрерывные и кусочно непрерывно-дифференцируемые на $[c, d]$:

$$G = \{(x, y) \mid y \in (c, d), x \in (\varphi(y), \psi(y))\}$$

И, при этом, $\exists h_0 > 0$ т.ч. $\forall y \in [c, d] \hookrightarrow \psi(y) - \varphi(y) \geqslant 3h_0$, чтобы зазор между кривыми не "схлопнулся". Зафиксируем $h \in (0, h_0)$. Сдвинем φ на h вправо, а ψ — на h влево, и получим некоторые кривые $\Gamma_{1,h} = \Gamma_1 + (h, 0)$ и $\Gamma_{2,h} = \Gamma_2 - (h, 0)$ и функции $\psi_h = \psi - h, \varphi_h = \varphi + h$.

Пусть $T = \{t_i\}$ — разбиение отрезка $[c, d]$ с достаточно малой мелкостью, а φ_h^T и ψ_h^T — порождённые этим разбиением ломаные не пересекаются т.ч. $\varphi(y) < \varphi_h^T(y) < \varphi(y) + 3/2h$ и $\psi(y) - 3/2h < \psi_h^T(y) < \psi(y)$. Такая мелкость существует, поскольку ψ и φ — кусочно 1-гладкие и $\exists \max|\psi'(y)|$ и $\exists \max|\varphi'(y)|$. Пусть G_h — область, запертая между φ_h и ψ_h, а G_h^T — область, запертая между φ_h^T и ψ_h^T. По предыдущему шагу мы имеем

$$\iint\limits_{G_h^T} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{(\partial G_h^T)^+} Pdx$$

По лемме о приближении кривой ломанными

$$\int\limits_{(\Gamma_{i,h}^T)^+} Pdx \longrightarrow \int\limits_{(\Gamma_{i,h})^+} Pdx, \; l(T) \to 0$$

С другой стороны,

$$\Big|\iint\limits_{G_h^T}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy-\iint\limits_{G_h}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy\Big|\leqslant\max_{\overline{G}}|\frac{\partial P}{\partial y}|\cdot|\mathcal{L}^2(G_h^T\triangle G_h)|\to 0,\ \ l(T)\to 0$$

Таким образом формулу Грина верна для G_h.
Устремим $h\to+0$, используя теорему Фубини:

$$\Big|\iint\limits_{G}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy-\iint\limits_{G_h}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy\Big|\leqslant\max_{\overline{G}}|\frac{\partial P}{\partial y}|\mathcal{L}^2(G\triangle G_h)\leqslant M\cdot 2h\cdot|c-d|\to 0,h\to+0$$

Теперь покажем, что $\int\limits_{\partial G_h^+}Pdx\to\int\limits_{\partial G^+}Pdx,h\to+0$. Для этого достаточно показать, что $\int\limits_{\Gamma_{i,h}}Pdx\to\int\limits_{\Gamma_i}Pdx,h\to+0$. Тогда

$$\Big|\int\limits_{\Gamma_{1,h}}Pdx-\int\limits_{\Gamma_1}Pdx\Big|=\int\limits_c^d|P(\varphi(y)+h,y)-P(\varphi(y),y)|\cdot|\varphi'(y)|dy\leqslant$$

$$\leqslant|c-d|\max_{[c,d]}|\varphi'(y)|\max_{[c,d]}|P(\varphi(y),y)-P(\varphi(y)+h,y)|\to 0,h\to 0$$

Таким образом этот шаг доказан.
Шаг 4. Предположим теперь что G — проста относительно Ox. Теперь не запрещается чтобы $\varphi(d)=\psi(d),\psi(c)=\varphi(c)$; напомним, что $\varphi<\psi$ на (c,d) и φ,ψ — непрерывные и кусочно непрерывно-дифференцируемые. Зафиксируем некоторое $\varepsilon>0$. Рассмотри $G_\varepsilon=\{(x,y)\mid c+\varepsilon<y<d-\varepsilon,x\in(\varphi(y),\psi(y))\}$. Так как $\psi\varphi\in C([c,d])$ и $\varphi-\varphi>0$ на отрезке $[c+\varepsilon;d-\varepsilon]$, непрерывная функия на отрезке достигает минимума и она положительна, а значит $\exists h_0>0:\psi-\varphi\geqslant 3h_0\forall y\in[c+\varepsilon;d-\varepsilon]$ Для G_ε утверждение доказано на предыдущем шаге. Тогда

$$\iint\limits_G\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\iint\limits_{G_\varepsilon}P'_ydxdy=-\int\limits_{\partial G_\varepsilon^+}Pdx$$

Устремим ε к 0:

$$\Big|\iint\limits_G P'_ydxdy-\iint\limits_{G_\varepsilon}P'_ydxdy\Big|=\Big|\iint\limits_{G\setminus G_\varepsilon}P'_ydxdy\Big|\leqslant\max_{\overline{G}}\Big|\frac{\partial P}{\partial y}\Big||\mathcal{L}^2(G\setminus G_\varepsilon)|\to 0,\varepsilon\to 0$$

Пусть Γ_3 и Γ_4 — это $G|_{y=c}$ и $G|_{y=d}$ соответственно, а $\Gamma_{3,\varepsilon}=G_\varepsilon|_{y=c+\varepsilon}$ и $\Gamma_{4,\varepsilon}=G_\varepsilon|_{y=d-\varepsilon}$. Очевидно, что к «боковым» кривым $\Gamma_1=\{(\psi(y),y)\mid y\in(c,d)\}$ и $\Gamma_2=\{(\varphi(y),y)\mid y\in(c,d)\}$ сходятся $\Gamma_{1,\varepsilon}=\{(\psi(y),y)\mid y\in(c+\varepsilon,d-\varepsilon)\}$ и $\Gamma_{2,\varepsilon}=\{(\varphi(y),y)\mid y\in(c+\varepsilon,d-\varepsilon)\}$ и соответственно сходятся интегралы по этим кривым. Если Γ_3 — точка, то очевидно, что $\int\limits_{\Gamma_{3,\varepsilon}}Pdx\to\int\limits_{\Gamma_3}Pdx,\varepsilon\to 0$. Иначе

$$\Big|\int\limits_{\Gamma_{3,\varepsilon}}P(x,c+\varepsilon)dx-\int\limits_{\Gamma_3}P(x,c)dx\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)}|P(x,c+\varepsilon)-P(x)|dx+\int\limits_{\Delta_1(\varepsilon)\cup\Delta_2(\varepsilon)}\max(|P(x,c+\varepsilon)|,|P(x,c)|)dx\to 0,\varepsilon\to 0.$$

<u>Шаг 5.</u> Применяя лемму о разбиении мы получаем конечное множество элементарных областей, удовлетворяющих условиям леммы $\{G_i\}_{i=1}^N$. Для каждого G_i мы можем применить уже доказанное и получить:

$$\iint\limits_{G_i} Q'_x - P'_y dxdy = \int\limits_{G_i^+} Pdx + Qdy.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^N \iint\limits_{G_i} Q'_x - P'_y dxdy = \iint\limits_{G} Q'_x - P'_y dxdy.$$

Для каждого $i \in 1, \{\dots, N\}$ определим внутреннюю границу $\partial^i G_i^+ = \partial G_i^+ \cap G$ и внешнюю границу $\partial^e G_i^+ = \partial G_i^+ \cap \partial G$. Ясно, что

$$\bigcup_{i=1}^N \partial^e G_i^+ = \partial G^+.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_{\partial^e G_i^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{\partial G^+} Pdx + Qdy.$$

Пусть $\partial^i G_i^+ \neq \varnothing$. Пусть существует такое j, что $\partial^i G_i^+ \cap \partial^i G_j^+ \neq \varnothing$ и пусть они пересекаются по промежутку (случай пересечения по точке тривиален). Тогда пересечение – это промежуток, наделённый двумя противоположными ориентациями. Но тогда

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_{\partial^i G_i^+} Pdx + Qdy = 0.$$

Из этого следует необходимое равенство и получается утверждение теоремы.

$\square$

9 Поверхностные интегралы

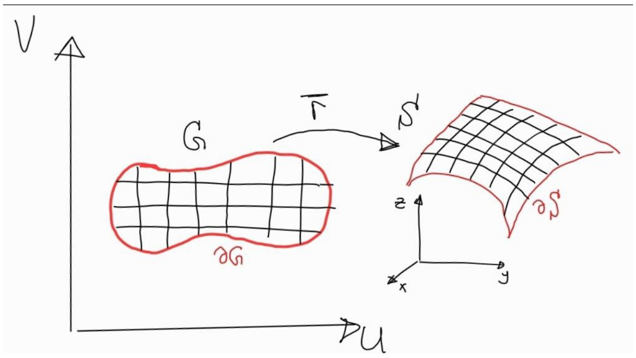
9.1 Поверхности

Примечание. (от редактора) В данном параграфе не следует путать топологическое определение границы множества $\partial S = \overline{S} \setminus \mathrm{int}(S)$ и понятие края (в смысле дифференциальной геометрии), которое определяется для поверхностей. Точка $p \in S$ принадлежит краю, если её окрестность в S (как в двумерной поверхности) "обрывается". К сожалению край обозначается также ∂S и понять где-что можно только из контекста. В этом параграфе будет только край. Рассмотрим разницу на примере, у сферы границей является вся сфера, а края нет, но вот у полусферы уже есть край — это ее экватор.

Напоминание. Будем говорить, что $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, является гомеоморфизмом, если $\exists F^{-1}$: $F(\Omega) \mapsto \Omega$, такое что $F^{-1} \in C(F(\Omega), \Omega)$.

Напоминание. Множество $G \in R^n$ называется областью, если:

- ▷ G является открытым множеством.
- ▷ G является связным множеством (любые две точки из G можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в G).



Определение 9.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ — область. Пусть $\overline{r} : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$, $\overline{r} \in C(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$ и $\overline{r}$ — гомеоморфизм на G. Тогда будем называть:

- $S := \overline{r}(\overline{G})$ — *поверхностью*;
- $\partial S := \overline{r}(\partial G)$ — *краем* этой поверхности.

Определение 9.2. Будем говорить, что $S = \overline{r}(\overline{G})$ — *простая гладкая поверхность*, если:

- G — область, граница которой является простым кусочно-гладким контуром (то есть замкнутая кривая без самопересечений кроме начала и конца, параметризация непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируема и не имеет не более чем конечное число особых точек);
- $\overline{r} : \overline{G} \to S$ — гомеоморфизм;
- $\overline{r} \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$;
- $[\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v] \neq 0$ всюду на $\overline{G}$ (частные производные продолжаются на границу по непрерывности).

Параметры u, v можно рассматривать как внутренние координаты точек поверхности. Фиксируя одну из координат, мы получаем два семейства координатных кривых, покрывающих поверхность координатной сеткой.

Примечание. Верхняя половина сферы является простой гладкой поверхностью, а вот вся сфера уже не является простой гладкой поверхностью. Для этого придумали кусочно гладкую поверхность, см. далее

Примечание. Будем называть касательной плоскостью к простой гладкой поверхности в точке (u^0, v^0) линейную оболочку векторов $\overline{r}'_u(u^0, v^0)$ и $\overline{r}'_v(u^0, v^0)$ — касательных векторов к координатным линиям. Вектором нормали в точке будем называть:

$$\overline{n}(\overline{r}(u_0, v_0)) := \frac{[\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v]}{|[\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v]|}.$$

Определение 9.3. Пусть $\overline{r} : \overline{G} \to S$ — отображение, удовлетворяющее условиям 1) – 4) предыдущего определения. Будем говорить что $\overline{\rho} : \overline{\Omega} \to S$ — допустимая параметризация, если $\exists \overline{F} : \overline{\Omega} \to \overline{G}$ ($\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2_{\alpha,\beta}$, а $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$) всюду невырожденное такое, причём $J_F > 0$, что $\overline{\rho} = \overline{r} \circ \overline{F}$.

Напоминание. (Дифференцируемость композиции функций) Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто и непусто, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — открыто и непусто. $F : G \to \Omega$ дифференцируемо в точке $x^0 \in G, H : \Omega \to \mathbb{R}^d$ дифференцируемо в точке $y^0 = F(x^0) \in \Omega$. Тогда для композиции $\varphi = H \circ F$, якобиан будет равен: $J_\varphi(x^0) = \mathcal{D}(H \circ F)(x^0) = \mathcal{D}H(F(x^0))\mathcal{D}F(x^0)$, а $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, i \in \{1, \ldots, d\}, j \in \{1, \ldots, n\}$

Лемма 9.1. *Касательная плоскость и вектор нормали не зависят от выбора допустимой параметризации.*

Доказательство. Пусть $\overline{\rho}$ и $\overline{r}$ — две допустимые параметризации. Тогда

$$\overline{\rho}(\alpha, \beta) = \overline{r}(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)).$$

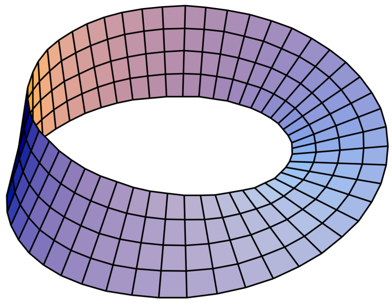
Тогда по теореме о дифференцировании композиции:

$$\begin{cases}\overline{\rho}'_\alpha = \overline{r}'_u u'_\alpha + \overline{r}'_v v'_\alpha \\ \overline{\rho}'_\beta = \overline{r}'_u u'_\beta + \overline{r}'_v v'_\beta\end{cases} \Bigg| \Rightarrow [\overline{\rho}'_\alpha \times \overline{\rho}'_\beta] = [\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v] \cdot J_F(\alpha, \beta)$$

Где $F = (u, v)^T$ — отображение репараметризации. Тогда вектора нормали коллинеарны и, следовательно, касательные плоскости совпадают. $\square$

Определение 9.4. Будем говорить что $S = \overline{r}(\overline{G})$ — поверхность — ориентируемая, если на ней существует непрерывное поле единичных нормалей, то есть существует $\overline{n} : S \to S_1^{\mathbb{R}^3}$: $\overline{n} \in C(S, S^2)$.

Примечание. Не всякая поверхность ориентируема, например лента Мёбиуса. Далее с неориентируемыми поверхностями мы работать не будем.

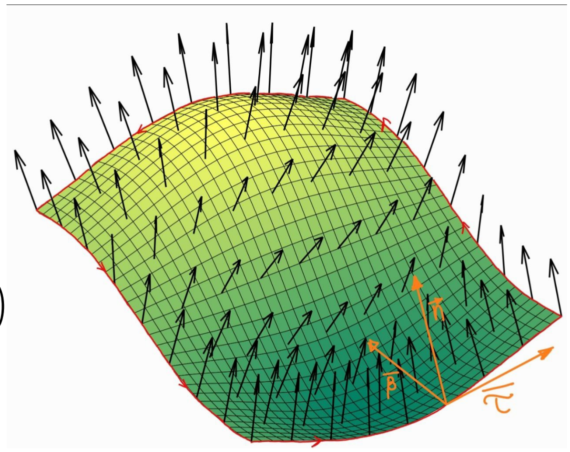


Примечание. Всякая простая гладкая поверхность ориентируема, причём она имеет ровно две ориентации, которые задаются как

$$\overline{n}_\pm = \pm\frac{[\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v]}{|[\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v]|}.$$

Следствие. Ориентация простой гладкой поверхности не зависит от выбора допустимой параметризации.

Определение 9.5 (Ориентация края)**.** Пусть есть простая гладкая (а значит ориентируемая) поверхность S с допустимой параметризацией $\overline{r} : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$. Пусть $\partial G = \{\rho(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$ — простой кусочно-гладкий контур; $\overline{v} = \overline{\rho}'(t) \neq 0$. По определению, $\partial S = \overline{r}(\partial G)$. Тогда касательный вектор $\overline{\tau}$ к краю ∂S:



$$\overline{\tau}(t_0) = \frac{d}{dt}\overline{r}(\overline{\rho(t)})|_{t=t_0} = \overline{r}'_u\Big(u(t_0), v(t_0)\Big)u'(t_0) + \overline{r}'_v\Big(u(t_0), v(t_0)\Big)$$

Пусть

$$\overline{\xi}(h) = \rho(t_0) + h\overline{n}(t_0),$$

где $\overline{n}$ — вектор внутренней нормали. Тогда введём вектор $\overline{\beta}$ как

$$\beta(t_0) = (\overline{r} \circ \overline{\xi})'_h|_{h=0} = \overline{r}'_u n_u + \overline{r}'_v n_v.$$

Определение 9.6. Будем говорить, что край ∂S простой гладкой поверхности ориентирован относительно неё положительно, если в любой точке гладкости края тройка векторов $(\overline{\tau}, \overline{\beta}, \overline{n})$ — правая. Неформально, у нас есть поле нормалей поверхностей, обходя край, область будет слева

Лемма 9.2 (Достаточное условие ориентируемости края поверхности)**.** *Пусть заданы правые базисы в $\mathbb{R}^2_{uv}$ и $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть ∂G положительно ориентирована относительно области G.*

1. *Пусть $S = \overline{r}(\overline{G})$ — простая гладкая поверхность;*

2. *∂S ориентирован согласованно с ориентацией ∂G;*

3. Пусть S ориентирована полем $\overline{n} = \frac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}$.

Тогда ∂S ориентирован положительно относительно S. (Если нарушить только условие 2 или 3, то будет отрицательно ориентирован, а если оба сразу, то положительно)

Доказательство. Из условия правости базиса на поверхности следует, что если $\rho(t_0)$ — точка гладкости границы G, то $\overline{v}, \overline{N}$ — правая двойка, то есть

$$\det \begin{pmatrix} u'(t_0) & N_u \\ v'(t_0) & N_v \end{pmatrix} > 0.$$

Касательный вектор к поверхности записывается как

$$\overline{\tau}(t_0) = \frac{d}{dt}\overline{r}(u(t), v(t))|_{t=t_0} = \overline{r}'_u\Big(u(t_0), v(t_0)\Big)u'(t_0) + \overline{r}'_v\Big(u(t_0), v(t_0)\Big)v'(t_0)$$

А вектор бинормали как

$$\overline{\beta}(t_0) = \frac{d}{dt}\overline{r}(t_0 + \overline{N}t)|_{t=0} = \overline{r}'_u\Big(u(t_0), v(t_0)\Big)N_u + \overline{r}'_v\Big(u(t_0), v(t_0)\Big)N_v$$

Тогда

$$[\overline{\tau}(t_0) \times \overline{\beta}(t_0)] = [\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v] \cdot \begin{vmatrix} u'(t_0) & N_u \\ v'(t_0) & N_v \end{vmatrix}$$

Значит $\overline{\tau} \times \overline{\beta}$ коллинеарен нормали и $\overline{\tau}, \overline{\beta}, \overline{n}$ — правая тройка. □

Определение 9.7. Будем говорить, что S — кусочно-гладкая поверхность, если:

- ▷ $S = \bigcup\limits_{i=1}^{N} S_i$, где каждая из S_i — простая гладкая поверхность
- ▷ $S_i \cap S_j = \partial S_i \cap \partial S_j$ для всяких двух i и j.
- ▷ $\partial S_i \cap \partial S_j$ — либо состоит из конечного числа точек, либо пусто, либо состоит из конечного числа простых кусочно-гладких кривых (и, быть может, конечного числа точек). Будем называть два куска соседними, если они пересекаются по кусочно-гладкой кривой.
- ▷ Для $\forall i, j, k : i \neq j, i \neq k, j \neq k$ выполнено, что $\partial S_i \cap \partial S_j \cap \partial S_k$ состоит из не более чем конечного числа точек.
- ▷ $\forall i \neq j$ существует конечный набор $S_i = S_{k_1}, \ldots, S_{k_s} = S_j$ т.ч. S_{k_r} и $S_{k_{r+1}}$ — соседние для всех r.

Пример. Это определение это естественное обобщение многогранников. Примеры кусочно гладких поверхностей: сфера, конус, пирамида. Пример не кусочно гладкой поверхности это два конуса, которые стоят вертикально, но касаются основаниями в одной точке

Определение 9.8. Пусть есть кусочно-гладкая поверхность $S = \bigcup\limits_{i=1}^{N} S_i$. Для каждого куска поверхности определим внешнюю часть границы следующим образом: $\partial^e S_i$ — все такие точки, т.ч. они лежат только на ∂S_i, то есть $\forall j \neq i \leftrightarrow \partial^e S_i \cap \partial S_j = \varnothing$, а внутреннюю – как все остальные точки границы. Пусть ориентация ∂S_j выбрана так, что если S_i и S_j — соседние, то $\partial S_i \cap \partial S_j$ — то положительная ориентация кривой относительно S_i соответствует отрицательной ориентации кривой относительно S_j, т.е. ориентации согласованы. Тогда будем говорить, что $\partial S = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \partial^e S_i \cup A$, где A — конечное множество точек ориентирован, и его ориентация соответствует ориентации $\partial^e S_i$.

Определение 9.9. Край кусочно-гладкой поверхности S называется ориентированным согласовано с ориентацией S, если $\forall i$ край S_i ориентирован согласованно с ориентацией S.

9.2 Поверхностные интегралы I рода

Физический смысл — это вычисление массы тела с распределением плотности $f(\overline{r})$.

Определение 9.10. Пусть $S = \overline{r}(\overline{G})$ — простая гладкая поверхность. Пусть $f\colon S \to \mathbb{R}$: $f \in C(S, \mathbb{R})$. Тогда *поверхностным интегралом первого рода* будем называть

$$\iint\limits_S f(\overline{r})ds := \iint\limits_G f(\overline{r}(u,v))|[\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v]|dudv.$$

Определение 9.11. *Площадью* простой гладкой поверхности будем по определению называть

$$\iint\limits_S 1ds = \iint\limits_G |[\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v]|dudv.$$

Лемма 9.3. *Пусть простая гладкая поверхность $S = \bigcup\limits_{i=1}^N S_i$ — объединение простых гладких поверхностей, пересекающихся только по краям, $f \in C(S, \mathbb{R})$. Тогда*

$$\iint\limits_S fds = \sum_{i=1}^N \iint\limits_{S_i} fds.$$

Доказательство. Очевидно следует из определения и аддитивности интеграла. □

Определение 9.12. Пусть $S = \overline{r}(\overline{G})$ — кусочно-гладкая поверхность. Пусть $f \in C(S, \mathbb{R})$. Тогда если $S = \bigcup\limits_{i=1}^N S_i$, то по определению

$$\iint\limits_S fds = \sum_{i=1}^N \iint\limits_{S_i} fds.$$

Факт (Доказательство оставлено в качестве упражнения)**.** *Определение корректно, и доказательство аналогично доказательству корректности интеграла Лебега от простых функций.*

Теорема 9.1. *ПИПР не зависит от параметризации поверхности.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай простой гладкой поверхности. Пусть $S = \overline{r}(\overline{G}) = \overline{r} \circ w(\overline{\Omega})$ где $\overline{\Omega} \overset{w}{\longleftrightarrow} \overline{G}$ и $J_w \neq 0$ в любой точке $\overline{\Omega}$. Пусть

$$w(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} u(\alpha, \beta) \\ v(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$$

Пусть $f \in C(S, \mathbb{R})$. Тогда

$$\iint\limits_S fds = \iint\limits_{\overline{G}} f(\overline{r}(u,v))|[\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v]|dudv = \iint\limits_{\overline{\Omega}} f(\overline{r} \circ w(\alpha,\beta))|[\overline{r}'_u(\alpha,\beta) \times \overline{r}'_v(\alpha,\beta)]||J_w|d\alpha d\beta =$$

$$= \iint\limits_{\overline{\Omega}} f(R(\alpha,\beta))|[\overline{R}'_\alpha(\alpha,\beta) \times \overline{R}'_\beta(\alpha,\beta)]|d\alpha d\beta$$

Где $\overline{R} = \overline{r} \circ w$. □

Лемма 9.4. *Пусть*

$$S = \left\{ \overline{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \overline{G} \right\}$$

Для некоторой $z \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R})$. *Тогда*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy.$$

Доказательство. Поскольку

$$\overline{r}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix}, \quad \overline{r}'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

Тогда $|[\overline{r}'_x \times \overline{r}'_y]| = \sqrt{|\overline{r}'_x|^2|\overline{r}'_y|^2 - (\overline{r}'_x \cdot \overline{r}'_y)^2} = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$. □

9.3 Поверхностный интеграл II рода

Физический смысл — это поток векторного поля через поверхность в направлении, задаваемой нормалью.

Определение 9.13. Пусть $S = \overline{r}(\overline{G})$ — кусочно-гладкая поверхность, ориентированная полем единичных нормалей $\overline{n}$. Пусть $\overline{F} \in C(S, \mathbb{R}^3)$ и

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Тогда определим интеграл второго рода как

$$\iint\limits_S (\overline{F}, \overline{ds}) = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy := \iint\limits_S (\overline{F}, \overline{n})ds.$$

Лемма 9.5. *Не зависит от параметризации поверхности (при сохранении ориентации поверхности те* $J_F > 0$*)*

Доказательство. Поскольку ПИПР не зависит от параметризации, и поле нормалей тоже не зависит от параметризации то интеграл не изменится. □

Лемма 9.6. *Пусть* $S = \overline{r}(\overline{G})$ *— простая ориентированная гладкая поверхность. Пусть* $\overline{F} \in C(S, \mathbb{R}^3), \overline{F} = (P\ Q\ R)^T$. *Тогда*

$$\iint\limits_S (\overline{F}, \overline{ds}) = \pm \iint\limits_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv$$

Определяется $\pm$ *по ориентации поверхности. Пусть* $\overline{r}_0 = \overline{r}(u_0, v_0) \in S$. *Если* $\overline{n}(\overline{r}_0)$ *и* $[\overline{r}'_u(u_0,v_0) \times \overline{r}'_v(u_0,v_0)]$ *сонаправлены, то «+», иначе – «-».*

Доказательство. Для производной простой гладкой поверхности поле нормалей выглядит как

$$\overline{n}(\overline{r}) = \pm\frac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}.$$

Знак выбирается в зависимости от изначальной ориентации поверхности. Тогда

$$\iint\limits_S (\overline{F}, \overline{ds}) = \iint\limits_S (\overline{F}, \overline{n})ds = \iint\limits_G (\overline{F}(\overline{r}(u,v)), \overline{n}(\overline{r}(u,v)))|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|dudv =$$

$$= \pm\iint\limits_G (\overline{F}(\overline{r}(u,v)), \overline{r}'_u(u,v) \times \overline{r}'_v(u,v))dudv = \pm\iint\limits_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv.$$

□

Теорема 9.2. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ *— область с границей, являющейся простым гладким кусочно гладким контуром и* $z \in C^1(\overline{G})$ *и* $S = \operatorname{graph} z$. *Пусть* S^+ *— поверхность* S, *ориентированная полем нормалей* $\overline{n} = (n_x\ n_y\ n_z)^T$ *таким, что* $n_z \geqslant 0$. *Тогда*

$$\iint\limits_{S^+} f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))dxdy.$$

Доказательство. Пусть

$$\overline{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{r}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix}, \quad \overline{r}'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

Тогда используя предыдущую лемму и то, что $\overline{F} = (0\ 0\ f)^T$, то мы получаем, что

$$\iint\limits_S fdxdy = \iint\limits_G \begin{vmatrix} 0 & 0 & f \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dxdy = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))dxdy.$$

□

9.4 Формула Остроградского-Гаусса

Определение 9.14. Будем называть наблой формальный дифференциальный оператор ∇:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Он действует следующим образом:

$$\nabla\left(\sum_i \alpha_i p_i\right) = \sum_i \alpha_i \nabla p_i$$

(Если α_i — константы)
Набла удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\nabla(pq) = \nabla(\overset{\downarrow}{p}, q) + \nabla(p, \overset{\downarrow}{q}) = (\nabla p, q) + (p, \nabla q)$$

Определение 9.15. Определим операцию взятия градиента как

$$\operatorname{grad} a = \nabla a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Определение 9.16. Определим дивергенцию векторного поля как

$$\operatorname{div} \overline{F} = \nabla \cdot \overline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Определение 9.17. Определим операцию взятия ротора как

$$\operatorname{rot} \overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Примечание. (от редактора)

- Геометрический смысл дивергенции заключается в том, что это предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую данную точку, к объёму, ограниченному этой поверхностью, когда она стягивается к точке. Вспомните теорему Гаусса, если взять заряд, то поток будет равен $4\pi q_{in}$.

- Геометрический смысл ротора заключается в том, что это циркуляция по малому контуру, то, насколько в конкретной точке поток поворачивается. Представьте закрепленный шарик в воде, за счет вязкости этот шарик будет вращаться в каком-то направлении, а угловая скорость вращения это удвоенное значение ротора

Определение 9.18. Область G называют сильно элементарной область в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, если она элементарна относительно каждой из осей.

Определение 9.19. Будем говорить, что обалсть G элементарна относительно Oz, т.е. $\exists E \in \mathbb{R}^2_{xy}$ такая, что $G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in E, z \in (\varphi(x, y), \psi(x, y))\}$ где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — гладкие в $\overline{E}$

Теорема 9.3. *Пусть G — сильно элементарная область в $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть ∂G — кусочно-гладкая поверхность, ориентированная полем внешних нормалей. Пусть $\overline{F} \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$. Тогда*

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \overline{F} dxdydz = \iint\limits_{\partial G^+} (\overline{F}, \overline{ds})$$

Доказательство. Пусть

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Тогда, необходимо доказать, что

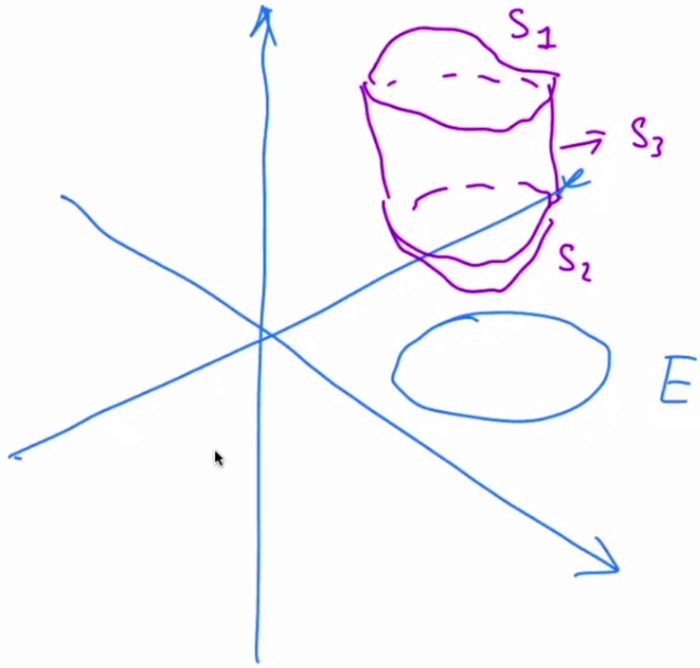
$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \overline{F} dxdydz = \iiint\limits_G P'_x + Q'_y + R'_z dxdydz = \iint\limits_{\partial G^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

В силу линейности интеграла мы можем доказать только для одной из компонент $\overline{F}$. Пусть это будет, без ограничения общности,

$$\overline{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$$

Тогда, необходимо доказать
$$\iiint\limits_G R'_z dxdydz = \iint\limits_{\partial G^+} Rdxdy$$
Поскольку G — элементарно относительно Oz, то существует $E \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ и $\psi, \varphi \in C^1(\overline{E}, \mathbb{R})$ т.ч. $\varphi < \psi$. Тогда
$$G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in E, \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}$$

Введём следующие обозначения:
$$S_1 = \{(x, y, \psi(x, y)) \mid (x, y) \in \overline{E}\}$$
$$S_2 = \{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in \overline{E}\}$$
$$S_3 = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial E, \varphi \leqslant z \leqslant \psi\}$$
Поскольку поле внешних нормалей к S_3 параллельно плоскости плоскости Oxy, а следовательно его z-компонента $n_z = 0$. Тогда
$$\iint\limits_{S_3} Rdxdy = \iint\limits_{S_3} R \cdot n_z ds = 0$$



В тоже время, по теореме о вычислении поверхностного интеграла в случае графика:
$$\iint\limits_{S_1} Rdxdy = \iint\limits_{E} R(x, y, \psi(x, y))dxdy$$
$$\iint\limits_{S_2} Rdxdxy = -\iint\limits_{E} R(x, y, \varphi(x, y))dxdy$$
Но, тогда
$$\iint\limits_{\partial G^+} Rdxdy = \iint\limits_{S_1} Rdxdy + \iint\limits_{S_2} Rdxdy + \iint\limits_{S_3} Rdxdy = \iint\limits_{E} R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))dxdy =$$
Тогда по формуле Ньютона-Лейбница (так как поле непрерывно дифференцируемо в замыкании), а в конце по принципу Кавальери:
$$= \iint\limits_{E} \Bigg(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} R'_z(x, y, t)dt \Bigg) dxdy = \iiint\limits_{G} R'_z dxdydz$$
Теорема доказана (для остальных компонент результат получается аналогично) $\square$

Теорема 9.4 (Остроградский, Гаусс)**.** *Пусть есть область G, т.ч. $G = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \cup E$ где G_i — элементарные области, а $E = \bigcup\limits_{j=1}^{N} S_j$, где S_j — кусочно-гладкие поверхности, лежащие на границах* *областей G_i. Пусть ∂G^+ — кусочно-гладкая поверхность, ориентированная полем внешних нормалей. И пусть задано $\overline{F} \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$. Тогда*

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \overline{F} dxdydz = \iint\limits_{\partial G^+} (\overline{F}, \overline{ds})$$

Доказательство. Для каждой из элементарных областей справедливо утверждение предыдущей теоремы:

$$\iiint\limits_{G_i} \operatorname{div} \overline{F} dxdydz = \iint\limits_{\partial G_i^+} (\overline{F}, \overline{ds})$$

Очевидно, что

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \overline{F} dxdydz = \sum_{i=1}^{N} \iiint\limits_{G_i} \operatorname{div} \overline{F} dxdydz$$

Поскольку $\mathcal{L}^3$ для кусочно-гладкой поверхности равна 0. С другой стороны, пусть S_{il} — общая часть границы G_i и G_l. Заметим, что если S_{il}^+ — внешне-ориентирована по отношению к G_i, то она же будет внутренне ориентирована по отношению к G_l. А значит, в сумме интегралов по всем ∂G_i^+ они все взаимно уничтожатся, и тогда справедливо

$$\sum_{i=1}^{N} (\overline{F}, \overline{ds}) = \iint\limits_{\partial G^+} (\overline{F}, \overline{ds})$$

Теорема доказана. □

9.5 Формула Кельвина-Стокса

Теорема 9.5 (Кельвин, Стокс)**.** *Пусть $S = \overline{r}(\overline{G})$ — поверхность. Пусть выполнены следующие условия:*

- ▷ *S — простая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$; $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$*
- ▷ $\overline{r} \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$
- ▷ *∂G — простой кусочно-гладкий контур*
- ▷ *S — ориентируема и ∂S^+ — положительно ориентирована относительно S.*
- ▷ *$\exists \Omega : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \supset S$, Ω — открытое и пусть $\overline{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$*

Тогда

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot} \overline{a}, \overline{ds}) = \int\limits_{\partial S^+} (\overline{a}, \overline{dr})$$

Доказательство. **Шаг 1.** Пусть

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Поскольку ротор линеен, мы можем доказать теорему только для

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ помня что } \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t) \\ y(u(t), v(t)) \\ z((u(t), v(t)) \end{pmatrix}$$

И показать

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\overline{a}_1, \overline{ds}) = \int\limits_{\partial S^+} (\overline{a}_1, \overline{dr})$$

Шаг 2. Поскольку S — простая гладкая поверхность, то у неё есть две ориентации:

$$\overline{n} = \pm\frac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}$$

Докажем для положительной ориентации, для другой доказательство аналогично. Рассмотрим ситуацию, где (u, v) — правая СК, и ∂G^+ — ориентирована положительно относительно G. Тогда

$$\int\limits_{\partial S^+} (\overline{a}_1, \overline{dr}) = \int\limits_{\partial S^+} Pdx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Px'_t dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x'_u u'_t + x'_v v'_t)dt = \int\limits_{\partial G^+} Px'_u du + Px'_v dv = (*)$$

Шаг 3. Теперь используем формулу Грина:

$$(*) = \iint\limits_G [(Px'_v)'_u - (Px'_u)'_v]\, dudv = \iint\limits_G (P'_u x'_v + Px''_{vu} - P'_v x'_u - Px''_{uv})dudv = \iint\limits_G (P'_u x'_v - P'_v x'_u dudv) = (*)$$

Именно здесь требуется условие $\overline{r} \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$. У нас сокращаются компоненты $Px''_{uv} = P''_{vu}$.
Шаг 4.Поскольку:

$$\begin{cases} P'_u = P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u \\ P'_v = P'_x x'_v + P'_y y'_z + P'_z z'_v \end{cases}$$

То

$$(*) = \iint\limits_G P'_y(y'_u x'_v - y'_v x'_u) + P'_z(z'_u x'_v - z' v x'_u)dudv = \iint\limits_G P'_z\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - P'_y\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Шаг 5. С другой стороны, поскольку

$$\operatorname{rot}\overline{a}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P'_z \\ -P'_y \end{pmatrix}$$

То

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\overline{a}_1, \overline{ds}) = \iint\limits_G \begin{vmatrix} 0 & P'_z & -P'_y \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv = \iint\limits_G P'_z\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - P'_y\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv$$

Но это в точности то что нам нужно, и таким образом получается что теорема доказана. □

Примечание. Теорема Кельвина-Стокса справедлива при более слабом условии: $\overline{r} \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$.

Теорема 9.6 (Кельвин-Стокс для кусочной-гладкой поверхности)**.** *Пусть $S \in \mathbb{R}^3$ — кусочно-гладкая поверхность. Пусть ∂S^+ — ориентированный положительно относительно S край, состоящий из конечного числа простых кусочно-гладких кривых. Пусть задано открытое $\Omega \supset S$ и в нём $\overline{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Тогда*

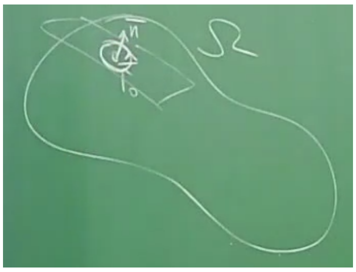
$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{ds}) = \int\limits_{\partial S^+} (\overline{a}, \overline{dr})$$

Доказательство. Используя замечание и предыдущую теорему для каждого куска мы получаем формулу Стокса. Далее, суммируя по всем кускам мы получим необходимое. Ключевой момент — при суммировании циркуляций для соседних кусков циркуляция по общему краю равна 0, в силу противоположных ориентаций. □

10 Элементы теории поля

10.1 Геометрическое определение ротации

Теорема 10.1. *Пусть в непустой области $\Omega \subset R^3$ задано гладкое поле $\overline{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Тогда $\forall \overline{r}_0 \in \Omega$ справедливо следующее равенство:*



$$(\overline{n}, \operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r}_0)) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{\partial S_\delta^+(\overline{r}_0)} (\overline{a}, \overline{dr}).$$

Где $\overline{n}$ — вектор, задающий положительную ориентацию, S_δ^+ — окружность радиуса $\delta > 0$ лежащая в плоскости, проходящая через $\overline{r}_0$ перпендикулярно вектору $\overline{n}$. Ориентация $\partial S_\delta^+(\overline{r}_0)$ согласована с $\overline{n}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\overline{r}_0 \in \Omega$.
Так как Ω открыто, $\exists \delta_0 > 0$: $B_{\delta_0}(\overline{r}_0) \subset \Omega$. $\forall \delta \in (0, \delta_0)$ рассмотрим сечение шара $B_\delta(\overline{r}_0)$ плоскостью, проходящей через $\overline{r}_0$ перпендикулярно $\overline{n}$. Применим теорему Стокса к получившемуся кругу и получим:

$$\frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{\partial S_\delta^+} (\overline{a}, \overline{dr}) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{S_\delta^+} (\operatorname{rot} \overline{a}, \overline{ds})$$

Рассмотрим

$$\left| (\overline{n}, \operatorname{rot} \overline{a})(\overline{r}_0) - \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{S_\delta^+} (\operatorname{rot} \overline{a}, \overline{n}) ds \right| = (*)$$

Покажем что $(*)$ стремится к 0, при $\delta \to +0$:

$$\frac{1}{\pi\delta^2} \left| \iint\limits_{S_\delta^+} (\overline{n}, \operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r}_0)) - (\overline{n}, \operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r})) \right| ds \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{S_\delta^+} \left| (\overline{n}, \operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r}) - \operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r}_0)) \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{S_\delta^+} \left| \Big(\overline{n}, \sup_{S_\delta^+} |\operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r}) - \operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r}_0)| \Big) \right| ds = \left| \Big(\overline{n}, \sup_{S_\delta^+} |\operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r}) - \operatorname{rot} \overline{a}(\overline{r}_0) \Big) | \right| \xrightarrow{\delta \to +0} 0$$

В силу непрерывности ротора, как функции от r □

10.2 Потенциальные поля

Определение 10.1. Пусть Ω — непустая область в $\mathbb{R}^n$ и $\overline{a} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Будем говорить что $\overline{a}$ — потенциально в Ω, если существует $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$: $\overline{a} = \operatorname{grad} \varphi$; φ будем называть *потенциалом.*

Теорема 10.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — непустая область, $\overline{a} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Следующие условия эквивалентны:*

- ▷ *Для всякого простого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset \Omega$ выполнено*

$$\oint\limits_{\Gamma} (\overline{a}, \overline{dr}) = 0$$

- ▷ *Для любых кусочно-гладких кривых Γ_1 и Γ_2 с общим началом и концом и больше нигде не пересекающихся справедливо*

$$\int\limits_{\Gamma_1} (\overline{a}, \overline{dr}) = \int\limits_{\Gamma_2} (\overline{a}, \overline{dr})$$

▷ *$\overline{a}$ потенциально в Ω*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна: пусть у нас есть такие Γ_1 и Γ_2. Тогда, если мы применим 1) к замкнутому контуру $\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$, то мы получим нужное.
Докажем 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\exists\varphi : \overline{a} = \operatorname{grad}\varphi$. Пусть $\Gamma = \{\overline{r}(t)|t \in [a,b]\}$ и $r(a) = r(b)$ — кусочно-гладкий контур. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma}(\overline{a}, \overline{dr}) = \int\limits_{\Gamma}(\nabla\varphi, \overline{dr}) = \int\limits_{a}^{b}(\nabla\varphi, \dot{\overline{r}}(t))dt = (*)$$

Заметим, что для $\varphi \circ \overline{r}$ верно следующее:

$$\frac{d}{dt}\varphi \circ \overline{r}(t) = \varphi'_x x'_t + \varphi'_y y'_t + \varphi'_z z'_t = (\nabla\varphi, \dot{\overline{r}}(t))$$

Т.е. для $(*)$ используя это и формулу Ньютона-Лейбница получим, что

$$(*) = \int\limits_{a}^{b}\frac{d}{dt}\varphi \circ \overline{r}dt = \varphi \circ \overline{r}(b) - \varphi \circ \overline{r}(a) = 0$$

Теперь докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Зафиксируем произвольную точку $\overline{r}_0 \in \Omega$. Положим $\varphi(\overline{r}) = \int\limits_{\Gamma}(\overline{a}, \overline{dr})$ где Γ — кусочно-гладкая кривая без самопересечений, соединяющая $\overline{r}_0$ и $\overline{r}$.

Примечание. На самом деле, не очевидно что существует такая кусочно-гладкая кривая; но поскольку область – линейно-связна, то существует непрерывная кривая Γ, соединяющая всякие две точки. Значит, поскольку Γ — компактна, и $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ — замкнуто, то $dist(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \Gamma) > 0$ и тогда Γ отделима от $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ некоторой «трубочкой». Значит при достаточно мелком разбиении у нас вписана ломаная в эту трубочку, а значит у нас есть кусочно-гладкая кривая, соединяющая две точки.

Заметим, что в силу условия 2) определение φ корректно. Теперь покажем что φ — действительно потенциал для $\overline{a}$ в Ω. Зафиксируем произвольную точку $\overline{r}_*$. Существует $\delta_0 > 0$ т.ч. $B_\delta(\overline{r}_*) \subset \Omega$. Тогда, если $\overline{l}$ — произвольный единичный вектор, то для $\delta \in (0, \delta_0)$:

$$\varphi(\overline{r}_* + t\overline{l}) - \varphi(\overline{r}_*) = \int\limits_{\Gamma_l}(\overline{a}, \overline{dr}) = \frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}(\overline{a}(\overline{r}(\xi)), \overline{l})d\xi \to (\overline{a}(\overline{r}_*), \overline{l}), t \to +0$$

Значит $\dfrac{d\varphi}{d\overline{l}}(\overline{r}_*) = (\overline{a}(\overline{r}_*), \overline{l})$ Из этого и гладкости φ мы получаем нужное утверждение. □

Определение 10.2. Поле $\overline{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ называется безвихревым в Ω если $\operatorname{rot}\overline{a} = 0$ в Ω.

Определение 10.3. Пусть дана область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Она называется поверхностно односвязной если для любого простого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset \Omega$ существует кусочно-гладкая поверхность $S \subset \Omega$ такая, что $\partial S = \Gamma$

Теорема 10.3. *Пусть задано гладкое поле $\overline{a}$ в некоторой области Ω пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда*

▷ *Если $\overline{a}$ — потенциально, то оно безвихревое*

▷ *Если $\overline{a}$ — безвихревое и Ω — поверхностно-односвязна, то $\overline{a}$ — потенциально*

Доказательство. Пусть $\overline{a}$ — потенциально. Тогда интеграл по любому замкнутому контуру равен 0. Тогда поле – безвихревое в силу теоремы о геометрическом смысле ротации.
Пусть $\operatorname{rot}\overline{a} = 0$ в Ω. Поскольку Ω поверхностно односвязная то для всякого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ существует поверхность $S \subset \Omega$ т.ч. $\partial S = \Gamma$. Значит применяя теорему Стокса-Кельвина мы получаем

$$\int\limits_{\Gamma} (\overline{a}, \overline{dr}) = \int\limits_{S} (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{ds}) = 0$$

И по предыдущей теореме поле $\overline{a}$ — потенциальное. □

Примечание. Если Ω — не поверхностно односвязно, то поле может быть безвихревым но не потенциальным. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus Oz$ и

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Его ротация очевидно равна 0. Но по такому контуру $\Gamma = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ циркуляция ненулевая.

10.3 Геометрический смысл дивергенции

Теорема 10.4. *Пусть дано гладкое поле $\overline{a} \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$, где G — непустое открытое множество. Тогда для произвольного $x \in G$ верно следующее:*

$$\operatorname{div}\overline{a}(x) = \lim_{r \to +0} \frac{1}{4/3\pi r^3} \iint\limits_{S_r(x)} (\overline{a}, \overline{ds})$$

Доказательство. При всех достаточно малых $r > 0$ шар $B_r(x) \subset G$. По теореме Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_{S_r(x)} (\overline{a}, \overline{ds}) = \iiint\limits_{B_r(x)} \operatorname{div}\overline{a}(y) dy$$

С другой стороны,

$$\operatorname{div}\overline{a}(x) = \frac{1}{4/3\pi r^3} \iint\limits_{B_r(x)} \operatorname{div}\overline{a}(x) dy$$

В силу непрерывности $\operatorname{div}\overline{a}$:

$$\left| \operatorname{div}\overline{a}(x) - \frac{1}{4/3\pi r^3} \iint\limits_{S_r(x)} (\overline{a}, \overline{ds}) \right| = \frac{1}{4/3\pi r^3} \left| \iiint\limits_{B_r(x)} \operatorname{div}\overline{a}(x) dy - \iiint\limits_{B_r(x)} \operatorname{div}\overline{a}(y) dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4/3\pi r^3} \iiint\limits_{B_r(x)} |\operatorname{div}\overline{a}(x) - \operatorname{div}\overline{a}(y)| dy \leqslant \sup_{y \in B_r(x)} |\operatorname{div}\overline{a}(x) - \operatorname{div}\overline{a}(y)| \to 0, r \to +0$$

□

Определение 10.4. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — непустая область. Поле $\overline{a} \in C(G, \mathbb{R}^3)$ называется *соленоидальным* в области G, если

$$\iint\limits_{\Sigma} (\overline{a}, \overline{ds}) = 0.$$

Для всякой замкнутой кусочно-гладкой Σ, лежащей в G, то есть такой поверхности, что существует $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область такая, что $\partial\Omega = \Sigma$

Вопрос. *Как связаны следующие утверждения?*

1. *Поле $\overline{a}$ имеет нулевую дивергенцию в G*
2. *Поле $\overline{a}$ соленоидально в G*

Лемма 10.1. *Очевидно, что из соленоидальности следует бездивергентность*

Доказательство. Используем теорему о геометрическом смысле дивергенции. □

Пример. Контрпримером для 1) ⇒ 2) служит кулоновское поле

$$\overline{a} = \frac{\overline{r}}{r^3}$$

Его дивергенция равна 0 в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, но при этом

$$\iint\limits_{S_r(0)} (\overline{a}, \overline{ds}) = 4\pi \neq 0$$

А значит поле несоленоидально.

Определение 10.5. Будем называть область $G \subset \mathbb{R}^3$ объёмно односвязной, если всякая замкнутая кусочно-гладкая поверхность $\Sigma \subset G$ ограничивает область Ω такую, что $\Sigma = \partial\Omega$ и $\Omega \subset G$.

Лемма 10.2. *Если есть гладкое поле, которое бездивергентно в объёмно-односвязной области, то это поле соленоидально*

Доказательство. Для поверхности Σ существует Ω, т.ч. $\partial\Omega = \Sigma$ и $\Omega \subset G$. Тогда, используя теорему Остроградского-Гаусса, мы получаем, что $\iint\limits_{\Sigma} (\overline{a}, \overline{ds}) = 0$. □

11 Анекдоты

1. Ну и тут возникает вопрос, как это(систему множеств) пощупать?
   Как говорил мой коллега в Италии: No Chance
   Потому что мы с вами не боги, а всего лишь люди

2. Как я возьму множество всех сигма алгебр содержащих $\mathcal{E}$ Ну это из разряда давайте прыгнем на Луну. Ну или из разряда, как в моем любимом фильме:
   - Видишь суслика?
   - Нет
   - И я нет
   - А он есть

3. Вот и всё. Понятно что произошло?
   Чет как-то вы подсдулись немножко...
   Ну нет, я понимаю что это сложно, для первого восприятия это правда сложно. Я сам когда читал в первый раз, я обалдевал, как очень все хитро получается. Кажется что здесь где-то подвох зашит. Но на самом деле нет

4. - Поняли что сказал? Нет?
   Ну кто не понял пересмотрите на видеозаписи и все станет понятно

5. Ну если кто сейчас не понял с первого раза. Потом замедленно это пересмотрите и убедитесь, что я говорю очень простые вещи

6. (Теорема Тонелли) смотрим, получаем удовольствие, да?)

7. Что-то народ стал убегать, отключаться... что вы отключаетесь то?

8. Все я уже зарапортовался... все разобрались

9. Такое множество называется множеством Витали, которое названо в честь Болонского математика Джузеппе Витали. При чем Витали - это не погоняло, это фамилия
   Сама Болония – прекрасный итальянский городок, генерал Тюленев любит туда летать. Эту часть сказали убрать из теха. Видимо не любил туда летать :(((

10. Хорошо, ну давайте переходим к поверхностным интегралам. Сейчас жизнь станет полегче, потому что я не буду давать общий интеграл по многообразию. ... Сейчас в конце будет спуск с горы)

11. (параметризуем сферу) .. этот корень будет иметь бесконечную производную, чтобы сделать параметризацию кусочно гладкой поднимем одну шляпку на уровень Италии, а вторую опустим н уровень Аргентины