Содержание

1 Введение **2**
1.1 Полнота пространств L_p . . . 2
1.2 Неполнота $\mathbb{R}\mathrm{L}_p$ . . . 5
1.3 Функции ограниченной вариации . . . 5
1.4 Абсолютно непрерывные функции . . . 8

2 Ряды Фурье **9**
2.1 Неформальная идея . . . 9
2.2 Строгая теория . . . 10
2.3 Компактная форма записи . . . 10
2.4 Теорема Римана–Лебега . . . 10
2.5 Вторая теорема о среднем . . . 11

3 Лекции 3 - 6 **12**

4 Аппроксимация функций **13**
4.1 Аппроксимативная едининца . . . 16

1 Введение

1.1 Полнота пространств L_p

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — п-во с мерой.

$p \in [1, +\infty]$

$\widetilde{L}_p(\mu)$ — полунормированное линейное пространство. Лишь *полу*нормированное потому, что равенство 0 интеграла в p-ой степени от функции не означает равенство 0 этой функции, а лишь равенство этой функции нулю почти всюду.

$L_p(\mu)$ — нормированное линейное пространство.

Это всё было в прошлом семестре, теперь же мы докажем полноту пространства L_p.

Определение 1.1. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — л.н.п. Оно называется *полным*, если

$\forall$ фундаментальная (по норме $\|\cdot\|$) п-ть $\{x^n\}$ п-ва E сходится по норме пространства E к некоторому элементу $x \in E$.

Определение 1.2. Дано $E = (E, \|\cdot\|)$ — л.н.п. Пара последовательностей $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S^k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S^k := \sum_{n=1}^{k} x^n,$$

называется формальным рядом в E. При этом $\{S^k\}_{k=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм ряда, а $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ — членами ряда. Часто пишут просто

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \text{ — формальный ряд.}$$

Примечание. В определении выше ряд мы называем *формальным* потому, что ещё не было ничего сказано про его сходимость.

Определение 1.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ называется сходящимся в л.н.п. E, если

$$\exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x^k \right\| \to 0, n \to \infty$$

Определение 1.4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ называется абсолютно сходящимся в л.н.п. E, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\| \text{ — сходится}$$

Теорема 1.1. *(Критерий полноты) E — л.н.п. полно $\iff$ $\forall$абсолютно сходящийся в E ряд является сходящимся.*

Доказательство.

$\triangleright$ $\Longrightarrow$

Пусть E полно.

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится абсолютно $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$ — сходится $\Longrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=n}^{m} \|x^k\| < \varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника: $\left\|\sum\limits_{k=n}^{m} x^k\right\| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} \|x^k\| < \varepsilon.$

$\implies \{S^n\}_{n=1}^{\infty}$ — посл. частичных сумм фундаментальна в E.

Но E — полно $\implies \exists x \in E : \|x - S^n\| \to 0, n \to \infty \implies$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится в E

▷ $\Longleftarrow$

Пусть $\{x^n\}$ — фунд. посл-ть в E. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Берём $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_k = 2^{-k}$.

$\exists \{N_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N_k \hookrightarrow \|x^n - x^m\| \leqslant 2^{-k}.$$

Рассмотрим $\{x^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность п-ти $\{x^n\}$.

Возьмём $y_k := x^{N_{k+1}} - x^{N_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Положим $y_0 := x^{N_1}$.

Рассмотрим формальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$. В силу выбора подпосл-ти, если в качестве n выбрать N_k, а в качестве m выбрать N_{k+1}, то неравенство $\|x^n - x^m\| \leqslant 2^{-k}$ будет выполнено $\implies$ $\|y_k\| \leqslant 2^{-k} \implies \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ абсолютно сходится в E.

Но по условию доказываемого утверждения, любой *абсолютно сходящийся в E* ряд *сходится* в E, значит

ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ сходится $\implies \exists x \in E : \left\|x - \sum\limits_{k=0}^{l} y_k\right\| \to 0, l \to \infty.$

При этом

$$\sum_{k=0}^{l} y_k = y_0 + y_1 + \dots + y_l = x^{N_1} + x^{N_2} - x^{N_1} + \dots + x^{N_{l+1}} - x^{N_l} = x^{N_l}.$$

Объединив два последних результата, получим

$$\exists x \in E : \left\|x - x^{N_l}\right\| \to 0, l \to \infty.$$

В итоге доказали существование эл-та $x \in E$ т.ч. к нему сходится подпосл-ть $\{x^{N_l}\}_{l=1}^{\infty}$. Теперь остаётся воспользоваться условием фундаментальности и получить сходимость всей последовательности.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists L \in \mathbb{N} : \forall l \geqslant L \hookrightarrow \|x - x^{N_l}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant M \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N := \max\{L, M\} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \hookrightarrow \|x - x^n\| \leqslant \|x - x^{N_m}\| + \|x^{N_m} - x^n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Теорема 1.2. *Пусть $p \in [1, +\infty]$. Тогда $L_p(\mu)$ полно.*

Доказательство. Разберём случай $p \in [1, +\infty)$. В силу предыдущей теоремы достаточно док-ть, что любой абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$ сходится в $L_p(\mu)$.

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ — абсолютно сход. ряд в $L_p(\mu)$. То есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ сходится.

$$\forall N \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

Определим $F_n := \left(\sum_{k=1}^N |f_k|\right)^p$. Тогда $\{F_N\}_{N=1}^\infty$ — монотонная (неубывающая) функциональная последовательность.

Напоминание. Монотонность функциональной последовательности — это монотонность по n при каждом x

Тогда по теореме Леви

$$\exists \lim_{N\to\infty} \left(\int\limits_X F_n(x)d\mu(x)\right)^{1/p} = \left(\int\limits_X \lim_{N\to\infty} F_n(x)d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$\Longrightarrow \left(\int\limits_X \left(\sum_{k=1}^\infty |f_k|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_p < +\infty.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^\infty |f_k(x)| \text{ конечна при } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

При фиксированном x $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k(x)$ — обычный числовой ряд, а для него из абсолютной сходимости следует сходимость.

$$\Longrightarrow \quad \text{при } \mu\text{-п.в.} x \in X \quad \sum_{k=1}^\infty f_k(x) \text{ конечна.}$$

Положим $F(x) := \sum\limits_{k=1}^\infty f_k(x)$, эта функция корректно определена μ-п.в. При этом μ — полная мера (меру считаем полной, если не было оговорено обратного).

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x), \text{ этот предел существует для } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

Остаётся доказать, что $\left\|F - \sum\limits_{k=1}^\infty f_k\right\|_p \to 0, n \to \infty$. Обозначим n-ый член этой последовательности как J_n.

$$J_n = \left(\int\limits_X \left|\sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X \left(\sum_{k=n+1}^\infty |f_k(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \circledcirc$$

Рассмотрим сумму ряда, как предел:

$$\sum_{k=n+1}^\infty |f_k(x)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)|.$$

Вспомним лемму Фату:

$$\text{При } g_k \geqslant 0 \text{ верно} \int\limits_X \varliminf_{k\to\infty} g_k(x)d\mu(x) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_X g_k(x)d\mu(x).$$

Тогда по лемме Фату:

$$\left(\int\limits_X \left(\sum_{k=n+1}^\infty |f_k(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \circledcirc \sum_{k=n+1}^\infty \left(\int\limits_X |f_k(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \to 0, n \to \infty.$$

Итого $J_n \to 0, n \to \infty$. □

1.2 Неполнота $\mathbb{RL}_p$

Определение 1.5. Пусть $\mathbb{RL}_p([a,b])$ — лин. пр-во ф-ий, p-ая степень модуля которых интегрируема по Риману.

Замечание. С таким определением это не является нормированным пространством. Чтобы сделать его нормированным, нужно аккуратно ввести класс эквивалентности.

Теорема 1.3. *Пространство* $\mathbb{RL}_p([a,b])$ *неполно.*

Доказательство.
Без ограничения общности, $[a,b]=[0,1]$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Перенумеруем рациональные точки отрезка $[0,1]$: $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{r_k\}$.

$$G_n := \bigcup_{k=1}^{n}\left(r_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right)\cap[0,1].$$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Тогда χ_{G_n} интегрируема по Риману по критерию Лебега, потому что как характеристическая ф-ия объединения конечного набора интервалов, пересечённых с отрезком, она обладает конечным числом разрывов.

Докажем, что χ_G имеет мн-во точек разрыва положительной меры Лебега. Для этого рассмотрим $F=[0,1]\setminus G$. Тогда $\chi_G(F)=0$, но так как $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, во всех точках F ф-ия χ_G разрывна. При этом по счётной полуаддитивности меры Лебега $\mathcal{L}^n(G)\leqslant\frac{1}{2}$, а значит $\mathcal{L}^n(F)\geqslant\frac{1}{2}>0$.

Введём обозначения

$$E_k := \left(r_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right)\cap[0,1]$$

$$G_m^n := \bigcup_{k=n}^{m} E_k$$

(в новых обозначениях $G_n=G_n^1$) и покажем фундаментальность последовательности $\{\chi_{G_n}\}$:

$$\int_0^1 |\chi_{G_m}(x)-\chi_{G_n}(x)|dx = \text{так как } G_n\subseteq G_m = \int_0^1 \chi_{G_m\setminus G_n}(x)dx \leqslant \int_0^1 \chi_{G_m^n}(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m}\int_0^1 \chi_{E_k}(x)dx = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k}\to 0, \text{ при } n,m\to\infty.$$

Итого, последовательность $\{\chi_{G_n}\}\subset\mathbb{RL}_p([0,1])$ фундаментальна, но её предел χ_G не лежит в пространстве $\mathbb{RL}_p([0,1])$, значит это пространство не полно. □

1.3 Функции ограниченной вариации

Определение 1.6. Пусть T — разбиение отрезка $[a,b]$, т.е.

$$T=\{x_i\}_{i=0}^{N_T}, \quad N_T\in\mathbb{N}$$

$$a=x_0<x_1<\dots<x_{N_T}=b.$$

Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

$V_T(f)$ — вариация ф-ии f по разбиению T

$$V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

$$V_a^b(f) := \sup_{T\text{ - разб. }[a,b]} V_T(f)$$

Определение 1.7. f называется ф-ией ограниченной вариации на $[a, b]$, если

$$V_a^b(f) < +\infty.$$

Обозначается $f \in BV([a, b])$

Теорема 1.4. $BV([a,b])$ — *линейное пространство.*

Доказательство.
Покажем, что $f_1, f_2 \in BV([a, b]) \implies \alpha f_1 + \beta f_2 \in BV([a, b])$.

Пусть T — произвольное разбиение $[a, b]$. Тогда по неравенству треугольника

$$V_T(\alpha f_1 + \beta f_2) \leqslant |\alpha| V_T(f_1) + |\beta| V_T(f_2).$$

□

Лемма 1.1. *Если* $\forall f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *монотонна на* $[a, b]$, *то* $f \in BV([a, b])$ *и её* $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 1.2. *Пусть* $-\infty < a < c < b < +\infty$. *Тогда*

$$f \in BV([a, b]) \iff \begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}.$$

В случае, если $f \in BV([a, b])$, *тогда*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Доказательство.

1. $\implies$ и $\geqslant$

   Пусть $f \in BV([a, b])$, T_1 — произв. разб. $[a, c]$, T_2 — произв. разб. $[c, b]$.
   $T = T_1 \cup T_2$ — разб. о-ка $[a, b]$.
   $V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_T(f) \leqslant V_a^b(f)$.

   Взяв sup сначала по T_1, а потом по T_2, получим $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leqslant V_a^b(f)$.

2. $\impliedby$ и $\leqslant$

   Пусть $\begin{cases} f \in BV([a, c]) \\ f \in BV([c, b]) \end{cases}$.

   Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^N$ — произв. разб. отрезка $[a, b]$.

Если $c = x_i$ при некотором i, то это простой случай, так как тогда можно $\{x_j\}_{j=0}^{i}$ выбрать в качестве T_1, а $\{x_j\}_{j=i}^{N}$ выбрать в качестве T_2. И тогда очевидным образом $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$, а взяв sup по всем T получим $V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$.

Теперь рассмотрим более интересный случай, когда ни при каком i x_i не равно c. Тогда $c \in (x_i, x_i + 1)$ при некотором i.

$$
\begin{aligned}
V_T(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(c)| + |f(c) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant
\end{aligned}
$$

Обозначим разбиения:
$T_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_i, c\}$,
$T_2 = \{c, x_{i+1}, \dots, x_N\}$.
Тогда полученный ранее результат можно оценить как

$$\leqslant V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Итого $V_T(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Взяв sup по всем T, получим:

$$\sup_T V_T(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

$$V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Если оба слагаемых в правой части конечны, то и V_a^b конечна.

Итого из первого и второго пункта

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

□

Теперь воспользуемся этой леммой для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.5. *Пусть $f \in BV([a, b])$. Тогда ф-ия $g(x) := V_a^x$ монотонно не убывает на $[a, b]$*

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда применим только что доказанную лемму, выбрав $a = a, c = x_1, b = x_2$.

$$V_a^{x_2}(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f)$$

$$V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f) \geqslant 0$$

$$g(x_2) - g(x_1) \geqslant 0$$

$$g(x_2) \geqslant g(x_1)$$

□

Теорема 1.6. *Пусть $f \in BV([a, b])$. Тогда $\exists f_1$ и f_2 монотонно неубывающие на $[a, b]$ такие, что $f = f_1 - f_2$.*

Доказательство. Определим $f_1(x) := V_a^x(f) \quad \forall x \in [a,b]$. По только что доказанной теореме это монотонно неубывающая функция.
Докажем, что ф-ия $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ монотонно не убывает.

$$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b.$$

$f_2(y) - f_2(x) = [f_1(y) - f(y)] - [f_1(x) - f(x)] = [f_1(y) - f_1(x)] - [f(y) - f(x)] \overset{(1)}{=} V_x^y(f) - [f(y) - f(x)]$.
(1) В силу аддитивности вариации по отрезкам
Заметим, что $V_x^y(f) = \sup\limits_T V_T(f) \geqslant V_{\{x,y\}}(f) = |f(y) - f(x)|$. Тогда предыдущее выражение не меньше 0, а значит f_2 не убывает. □

Следствие. $\forall f \in BV([a,b])$ имеет не более чем счётное множество т. разрыва 1-го рода.

1.4 Абсолютно непрерывные функции

Определение 1.8. Ф-ия $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной на $[a,b]$, если

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \text{ дизъюнктивной системы } \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |a_k - b_k| < \delta(\varepsilon) \\ \hookrightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{1.4.1}$$

$AC([a,b])$ — мн-во всех абсолютно непрерывных на $[a,b]$ ф-ий.

Замечание. $f \in AC([a,b])$ является непрерывной на $[a,b]$. Обратное неверно

Контрпример.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \in C([0,1])$, но $f \notin BV([0,1])$, а значит по теореме, которая будет доказана ниже, $f \notin AC([0,1])$.

Теорема 1.7. *Если* $f \in AC([a,b])$, *то* $f \in BV([a,b])$.

Доказательство. Запишем (1.4.1) при $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta = \delta(1) > 0 : \forall$ конечного попарно непересекающегося набора интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum\limits_{k=1}^N |b_k - a_k| < \delta \hookrightarrow \sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < 1$. Теперь разобъём отрезок $[a,b]$. Пусть $\mathbb{N} \ni M := \left[\frac{|b-a|}{\delta}\right] + 1$.

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= a + \frac{b-a}{M} \\ &\vdots \\ x_M &= a + b - a = b. \end{aligned}$$

То есть поделили отрезок $[a,b]$ на одинаковые куски.
Так как $x_{i+1} - x_i < \delta$ (специально для выполнение этого было взято достаточно большое M), то $\forall$ разб. о-ка $[x_i, x_{i+1}]$ образует естественным образом конечным набор дизъюнктных интервалов суммарной длины меньше δ, а значит по абсолютной непрерывности $V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < 1 \quad \forall i$
Тогда в силу аддитивности вариации

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{M-1} V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < \sum_{i=0}^{M-1} 1 = M < +\infty.$$

□

2 Ряды Фурье

Идея представления функции тригонометрическим рядом являлась одной из центральных на рубеже 18-19 веков. Однако, строгая теория оформилась лишь к началу 20-века.

2.1 Неформальная идея

Прежде чем переходить к строгим формулировкам, поясним неформально корни идей, лежащих в основе теории рядов Фурье.

Если $V := (V, < \cdot,\cdot >)$ – конечномерное евклидово пространство, а $\{e_n\}_{n=1}^N$ – ортогональный базис в V, то любой вектор $x \in V$ имеет следующее разложение по базису $\{e_n\}_{n=1}^N$:

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{< x,e_n >}{< e_n,e_n >} e_n. \tag{2.1.1}$$

Естественно поставить вопрос, имеется ли аналог (2.1.1) для бесконечномерных евклидовых пространств?

Оказывается, в некоторых важных случаях ответ на этот вопрос положительный. Более точно, если $H := (H, < \cdot,\cdot >)$ – бесконечномерное гильбертово пространство (то есть евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением), а $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в нем, то для всякого $x \in H$ имеем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< x,e_n >}{< e_n,e_n >} e_n. \tag{2.1.2}$$

При этом числа

$$c_n(x) := \frac{< x,e_n >}{< e_n,e_n >}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.3}$$

называются *коэффициентами Фурье элемента x по системе* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, а ряд в правой части (2.1.2) – *рядом Фурье элемента x по системе* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Частный случай гильбертова пространства – $L_2([-l,l])$, где $l > 0$ – фиксированное число. Действительно, скалярное произведение, порождающее L_2–норму, задается формулой (мы рассматриваем случай комплексного пространства)

$$< f,g >:= \int_{-l}^{l} f(x)\overline{g}(x)\,dx.$$

Можно показать, что система функций

$$1, \sin(\frac{\pi x}{l}), \cos(\frac{\pi x}{l}), ..., \sin(\frac{\pi n x}{l}), \cos(\frac{\pi n x}{l}),... \tag{2.1.4}$$

является ортогональным базисом в пространстве $L_2([-l,l])$. Иными словами, для любой функции $f \in L_2([-l,l])$ ее ряд Фурье сходится к ней в смысле среднего квадратичного. Кроме того, ортогональным базисом является также система комплексных экспонент

$$\{e^{\frac{i\pi kx}{l}}\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{2.1.5}$$

Отметим, однако, что формально, при $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты

$$a_k(f) := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{\pi kx}{l})\,dx, \quad b_k(f) := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{\pi kx}{l})\,dx$$

имеют смысл для $f \in L_1([-l,l])$.

2.2 Строгая теория

Без ограничения общности будем работать с элементами $f \in L_1([-\pi,\pi])$. Каждому такому элементу можно сопоставить формальный ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе

$$f \sim a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx),$$

а также по системе комплексных экспонент

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}.$$

При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим оператор n-ой частичной суммы ряда Фурье $S_n : L_1([-\pi,\pi]) \to C([-\pi,\pi])$. При $f \in L_1([-\pi,\pi])$ положим

$$S_n[f](x) := a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx).$$

2.3 Компактная форма записи

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x)))\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где D_n – ядро Дирихле, то есть

$$\begin{aligned} D_n(x) &:= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\Big[\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) + \sum_{k=1}^{n}\sin\Big(k(x+\frac{1}{2})\Big) - \sin\Big(k(x-\frac{1}{2})\Big)\Big] \\ &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\pi\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Свойства ядра Дирихле:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$;

2) D_n – четная 2π-периодическая функция.

2.4 Теорема Римана–Лебега

Докажем теперь важную теорему Римана–Лебега об осцилляции.

Теорема 2.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$–измеримое по Лебегу множество и $f \in L_1(E)$. Тогда*

$$I(y) := \int_E f(x)e^{i<x,y>}\,dx \to 0, \quad \|y\| \to +\infty. \tag{2.4.1}$$

Доказательство. Будем считать функцию f продолженной нулем вне множества E. При $y \neq 0$ рассмотрим вектор $h = h(y) := \frac{\pi y}{\|y\|^2}$. Тогда сделав замену переменной $x = x' - h$ имеем

$$I(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i<x,y>}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x'-h)e^{-i\pi}e^{i<x',y>}\,dx' = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{i<x,y>}\,dx.$$

Таким образом, поскольку $h(y) \to 0$, $\|y\| \to \infty$, получим

$$2|I(y)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-h(y)))e^{i<x,y>}\,dx\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-h(y))|\,dx \to 0, \quad \|y\| \to +\infty. \tag{2.4.2}$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f \in L_1([-\pi,\pi])$, то

$$\lim_{k\to\infty} a_k(f) = \lim_{k\to\infty} b_k(f) = \lim_{k\to\infty} c_k(f) = 0.$$

2.5 Вторая теорема о среднем

В этом пункте мы докажем одно вспомогательное утверждение из теории интеграла Римана, которое будет очень важно при доказательстве достаточных условий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 2.2. *Пусть $g \in R([a,b])$, а f нестрого монотонна на $[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{2.5.1}$$

Если, кроме того, f неотрицательна на $[a,b]$, то справедливы более простые формулы:
а) если f нестрого убывает, то при некотором $\xi \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx; \tag{2.5.2}$$

б) если f нестрого возрастает, то при некотором $\xi \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{2.5.3}$$

Доказательство. Отметим, что $fg \in R([a,b])$, что легко следует из критерия Лебега. Поэтому, левые части формул (2.5.1)–(2.5.3) имеют смысл.

Мы докажем лишь формулу (2.5.2), поскольку (2.5.3) доказывается аналогично, а равенство (2.5.1) легко вытекает из (2.5.2) и (2.5.3).

Step 1. Итак, пусть f неотрицательна и нестрого убывает на $[a,b]$. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. То есть $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Тогда, очевидно, в силу линейности интеграла Римана имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx + \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-f(x_i))g(x)\,dx =: \Sigma_1(T) + \Sigma_2(T).\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Step 2. Поскольку $g \in R([a,b])$, она ограничена на $[a,b]$. Следовательно, $\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| < +\infty$. Легко видеть, что

$$\Big|\sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x)\,dx\Big| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)|x_i - x_{i+1}|,$$

где $\omega_i := \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$ – колебание функции f на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$. Таким образом, в силу критерия интегрируемости, имеем (здесь и далее через $l(T)$ обозначена мелкость разбиения T)

$$\Sigma_1(T) \to 0, \quad l(T) \to 0. \tag{2.5.5}$$

Step 3. Рассмотрим функцию $G(x) := \int\limits_a^x g(t)\,dt$. Очевидно, что G непрерывна на $[a,b]$. Используя преобразование Абеля, имеем (здесь использовано, что $G(x_0) = G(a) = 0$)

$$\begin{aligned} \Sigma_2(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i)) \\ &= f(x_{n-1})G(b) + \sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i))G(x_i). \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

В силу непрерывности G на $[a,b]$ найдутся константы m,M, для которых $m \leqslant G(x) \leqslant M$ при всех $x \in [a,b]$. Ключевое наблюдение состоит в том, что в силу невозрастания f, имеем $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geqslant 0$ при всех i. Суммируя сделанные наблюдения, имеем

$$\begin{aligned} mf(a) &= m\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + mf(x_{n-1}) \\ &\leqslant \Sigma_2(T) \leqslant M\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + Mf(x_{n-1}) = Mf(a). \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Из (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.7) следует, что $\exists \lim_{l(T)\to 0} \Sigma_1(T) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ и, кроме того,

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mf(a). \tag{2.5.8}$$

Step 4. Если $f(a) = 0$, то в силу (2.5.8) в качестве ξ можно взять любую точку отрезка $[a,b]$. Если $f(a) \neq 0$, то в силу теоремы о промежуточном значении, примененной к непрерывной функции G, из (2.5.8) выводим, что найдется точка $\xi \in [a,b]$, для которой

$$G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2.5.9}$$

Теорема полностью доказана.

3 Лекции 3 - 6

В светлом будущем

4 Аппроксимация функций

Для наших целей понадобится приближать наши функции другими, более понятными.

Определение 4.1. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если она является линейной комбинацией индикаторов ячеек.

Теперь докажем, что такое функции приближают по норме L_p.

Теорема 4.1. *Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо, $f \in L_p(E)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ ступенчатая функция } h_\varepsilon : ||f - h_\varepsilon||_{L_p(E)} < \varepsilon.$$

Идея доказательства: как обычно мы доказываем это сначала для простых функций, а позже для всех, сводя к уже доказанному с помощью приближений.

Доказательство. Разобьем доказательство на шаги

1. Пусть $f = I_G$, где множество G имеет конечную меру. Тогда из определения верхней меры следует:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{P_k\}_{k=1}^\infty : \ \lambda^n(G) + \varepsilon \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k).$$
Теперь из сходимости ряда мер ячеек следует, что можно взять такой большой номер N :
$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^n(P_k) < \varepsilon.$$
По теореме о дизъюнктном представлении в полукольце существует набор непересекающихся $\{Q_l\}_{l=1}^m : \ P_1 \cup \ldots \cup P_N = \bigsqcup_{l=1}^m Q_l$. Обозначим за $A = \bigcup_{i=1}^\infty P_k, B = P_1 \cup \ldots \cup P_N$. Тогда
$$I_B = \sum_{l=1}^{m} I_{Q_l}.$$
Возьмем в качестве приближающей ступенчатой функции I_B. Осталось доказать, что она приближает с точностью до ε по норме.
$$||f - h||_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_A(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_A(x) - I_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= (\lambda^n(A \setminus G))^{\frac{1}{p}} + (\lambda^n(A \setminus B))^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

2. Если f – простая, то есть линейная комбинация индикаторов множеств конечной меры, явно сводится к пункту 1 с помощью неравенства треугольника.

3. $f \in L_p(E)$ произвольная, тогда из определения интеграла Лебега можно ее приблизить простой с точностью до $\varepsilon/2$,а простые мы уже умеем приближать ступенчатыми с точностью до $\varepsilon/2$. Осталось применить неравенство треугольника и требуемое будет доказано

□

Теперь, благодаря доказанной технике можем доказать следующую теорему:

Теорема 4.2. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:*

$$||f(x) - f(x-h)||_{L_p} \to 0, h \to 0$$

Идея доказательства: Обозначим за $f_h(x) = (x-h)$, заметим, что в силу неравенства треугольника:

$$||f - f_h|| \leqslant ||f - g|| + ||g - g_h|| + ||f_h - g_h|| \ \forall g \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

Ясно, что можно g можно подобрать, чтобы 1 и 3 слагаемые были маленькими, проблема лишь в том, чтобы уменьшить второе слагаемое.

Доказательство. Заметим, что для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$||f_h - g_h|| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - g(x-h)|dx = \{\text{выполним замену переменной } t = x - h\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)|dt = ||f - g||$$

Тогда в качестве g возьмем ступенчатую функцию, которая приближает f. Осталось теперь доказать, что g можно приблизить g_h. Из теоремы о дизъюнктном представлении следует, что g можно представить в виде:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{Q_k}(x), \ Q_k - \text{ячейка}$$

$$||g - g_h||_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot ||I_{Q_k} - I_{Q_k+h}||$$

Что стремится к нулю при $h \longrightarrow 0$. □

Лемма 4.1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ измеримая функция, тогда отображения*

$$(x, y) \to f(x - y)$$

$$(x, y) \to f(x + y)$$

измеримы.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Обозначим за $E_c = \{x| \ f(x) > c\}$, оно является измеримым из условия леммы. Теперь рассмотрим следующее линейное отображение:

$$T : (x, y) \longrightarrow (x - y, y).$$

Оно обратимо, так как определено обратное отображение $T^{-1}((x, y)) = (x + y, y)$. Осталось лишь заметить, что верно:

$$\{(x, y)|x - y \in E_c\} = T^{-1}(E_C \times \mathbb{R}^n) = \{(x, y)| \ f(x - y) > c\}.$$

Отсюда следует требуемое. □

Теперь мы готовы к определению свертки функций и к доказательству корректности этого определения.

Теорема 4.3. *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1. *Для $\lambda-$почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ корректно определена функция (будет называть ее сверткой) $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$.*

2. *$f * g$ измерима в широком смысле.*

3. *$f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$*

4. *$||f * g||_{L_1} \leqslant ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1}$*

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$H(x, y) = |f(x - y)| \cdot |g(y)|.$$

Ясно, что это неотрицательная, измеримая функция, тогда по теореме Тонелли:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} H(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx \right) dy.$$

Подробнее остановимся на втором интеграле, внутренний интеграл преобразуется так:

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| dx = |g(y)| \cdot ||f||_{L_1}$$

Тогда весь интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x, y) dx \right) dy = ||f||_{L_1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(y) dy = ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1} < +\infty$$

Теперь применим теорему Фубини для $F(x, y) = f(x - y)g(y)$, так как выше мы показали, что $F(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда пункты $1, 2$ из нее сразу следуют. Покажем оставшиеся:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x) dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dy \right) dx = ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1}$$

□

Сформулируем еще одну теорему

Теорема 4.4. *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда:*

1. *$f * g(x)$ корректно определена для всех $x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *$f * g(x)$ равномерно непрерывна на R^n.*

Доказательство. Докажем последовательно

1. По неравенству Гельдера получаем:

$$|f * g(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dy \leqslant ||f||_{L_p} \cdot ||g||_{L_{p'}} < +\infty$$

2. Обозначим за $(f * g)_h(x) = f * g(x - h), f_h(x) = f(x - h)$. Верно равенство:

$$(f * g)_h(x) - f * g(x) = \int_{R^n} f(x - y - h) g(y) dy - f * g(x) = f_h * g(x) - f * g(x)$$

Теперь оценим отклонение свертки при сдвиге:

$$|(f * g)_h(x) - f * g(x)| = |f_h * g(x) - f * g(x)| \leqslant ||f_h - f| * g(x)| \leqslant ||f - f_h||_{L_p} \cdot ||g||_{L'_p}$$

Теперь по уже доказанному утверждению, получаем, что правая часть стремится к 0 и при этом оценка не зависит от x. Таким образом, требуемое доказано.

3. Осталось рассмотреть случаи, когда одно из p, p' равно $+\infty$. А именно рассмотрим случай, когда $p = \infty, p' = 1$. Для этого случая достаточно лишь заметить, что совершенно аналогично доказывается неравенство:

$$|f * g(x)| \leqslant ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_\infty}$$

□

4.1 Аппроксимативная едининца

Определение 4.2. Назовем семейство функций $\{w_t(x)\}_{t\in(0,+\infty)}$ аппроксимативной единицей, если $\forall t > 0$:

1. $$w_t(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2. $$\int_{\mathbb{R}^n} w_t(x)dx = 1$$

3. $$\forall \delta > 0 \lim_{t\to+0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} w_t(x)dx = 0$$

Пример. Соболевской шапкой назовем следующую функцию:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-||x||^2}},\ x \in (-1, 1) \\ 0,\ x \notin (-1, 1) \end{cases}$$