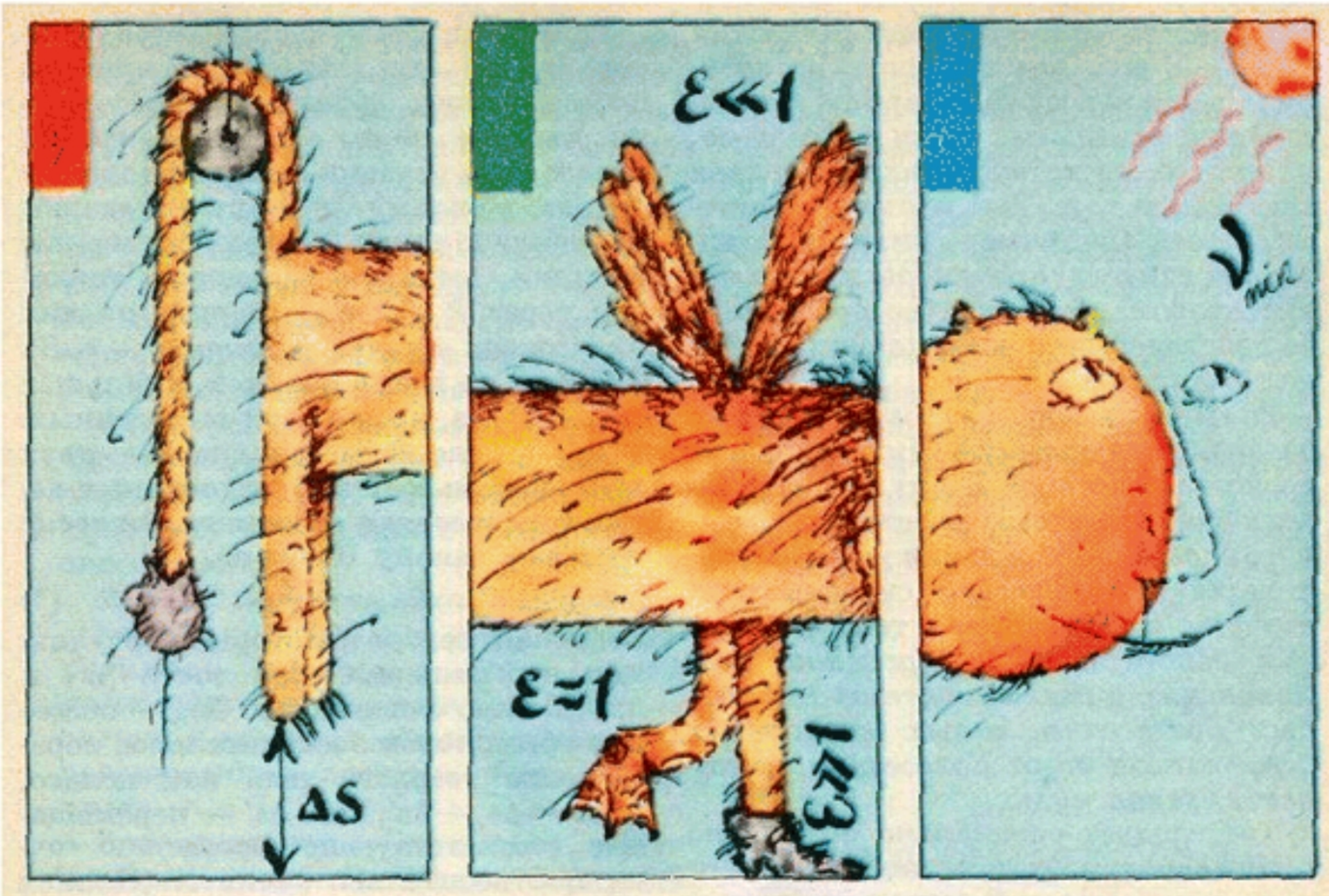
Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики



Лектор: Генерал теории Меры, Александр Иванович Тюленев

Для вас техали: *Потапов Станислав*,
Сысоева Александра,
Цеденов Артем,
Бадоля Пётр,
Баронов Михаил,
Шуминов Эзра
Петракова Анастасия

Содержание

1 Введение

1.1 Полнота пространств L_p

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — пространство с мерой.

$p \in [1, +\infty]$

$\widetilde{L}_p(\mu)$ — полунормированное линейное пространство. Лишь *полу*нормированное потому, что равенство 0 интеграла в p-ой степени от функции не означает равенство 0 этой функции, а лишь равенство этой функции нулю почти всюду.

$L_p(\mu)$ — нормированное линейное пространство.

Это всё было в прошлом семестре, теперь же мы докажем полноту пространства L_p.

Определение 1.1. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированое пространсвто (л.н.п.) Оно называется *полным*, если

$\forall$ фундаментальная (по норме $\|\cdot\|$) последовательность $\{x^n\}$ пространства E сходится по норме пространства E к некоторому элементу $x \in E$.

Определение 1.2. Дано $E = (E, \|\cdot\|)$ — л.н.п. Пара последовательностей $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S^k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S^k := \sum_{n=1}^{k} x^n,$$

называется формальным рядом в E. При этом $\{S^k\}_{k=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм ряда, а $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ — членами ряда. Часто пишут просто

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \text{ — формальный ряд.}$$

Примечание. В определении выше ряд мы называем *формальным* потому, что ещё не было ничего сказано про его сходимость.

Определение 1.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ называется сходящимся в л.н.п. E, если

$$\exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x^k \right\| \to 0, n \to \infty$$

Определение 1.4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ называется абсолютно сходящимся в л.н.п. E, если:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\| \text{ — сходится}$$

Напоминание. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, \forall m \geqslant N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

1. Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, но не каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу из своего пространства.

2. Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, называется полным.

3. *Числовая* последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Теорема 1.1. *(Критерий полноты) E — л.н.п. полно $\iff$ $\forall$абсолютно сходящийся в E ряд является сходящимся.*

Доказательство.
($\Longrightarrow$)

Пусть E полно и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится абсолютно $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$ — сходящийся числовой ряд, а значит последовательность частичных сумм фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n{,}m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=n}^{m} \|x^k\| < \varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника: $\left\|\sum\limits_{k=n}^{m} x^k\right\| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} \|x^k\| < \varepsilon.$
Тогда $\{S^n\}_{n=1}^{\infty}$ — поседовательность частичных сумм исходной последовательности фундаментальна в E.
Но E — полно $\Longrightarrow$ $\exists x \in E : \|x - S^n\| \to 0, n \to \infty$ $\Longrightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится в E
($\Longleftarrow$)
Пусть $\{x^n\}$ — фундаментальная последовательнота в E. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Берём $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_k = 2^{-k}$.
$\exists \{N_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N_k \hookrightarrow \|x^n - x^m\| \leqslant 2^{-k}.$$

Рассмотрим $\{x^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность п-ти $\{x^n\}$.
Возьмём $y_k := x^{N_{k+1}} - x^{N_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Положим $y_0 := x^{N_1}$.
Рассмотрим формальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$. В силу выбора подпоследовательности, если в качестве n выбрать N_k, а в качестве m выбрать N_{k+1}, то неравенство $\|x^n - x^m\| \leqslant 2^{-k}$ будет выполнено $\Longrightarrow$ $\|y_k\| \leqslant 2^{-k}$ $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ абсолютно сходится в E.
Но по условию доказываемого утверждения, любой *абсолютно сходящийся в* E ряд *сходится* в E, значит
ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ сходится $\Longrightarrow$ $\exists x \in E : \left\|x - \sum\limits_{k=0}^{l} y_k\right\| \to 0, l \to \infty.$
При этом

$$\sum_{k=0}^{l} y_k = y_0 + y_1 + \cdots + y_l = x^{N_1} + x^{N_2} - x^{N_1} + \cdots + x^{N_{l+1}} - x^{N_l} = x^{N_l}.$$

Объединив два последних результата, получим

$$\exists x \in E : \left\|x - x^{N_l}\right\| \to 0, l \to \infty.$$

В итоге доказали существование элемента $x \in E$ т.ч. к нему сходится подпоследовательности $\{x^{N_l}\}_{l=1}^{\infty}$.
Теперь остаётся воспользоваться условием фундаментальности и получить сходимость всей последовательности.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists L \in \mathbb{N} : \forall l \geqslant L \hookrightarrow \|x - x^{N_l}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant M \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N := \max\{L, M\} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \hookrightarrow \|x - x^n\| \leqslant \|x - x^{N_m}\| + \|x^{N_m} - x^n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Теорема 1.2. *Пусть $p \in [1, +\infty]$. Тогда $L_p(\mu)$ полно.*

Доказательство. Разберём случай $p \in [1, +\infty)$. В силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что любой абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$ сходится в $L_p(\mu)$.
Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ — абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$. То есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p$ сходится как числовой ряд.
Используем неравенство Минковского:

$$\forall N \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

Определим $F_n := \left(\sum\limits_{k=1}^{N} |f_k|\right)^p$. Тогда $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ — монотонная (неубывающая) функциональная последовательность.

Напоминание. Монотонность функциональной последовательности — это монотонность последовательность по n при каждом фиксированом x.

Тогда по теореме Леви

$$\exists \lim_{N\to\infty} \left(\int\limits_X F_n(x) d\mu(x)\right)^{1/p} = \left(\int\limits_X \lim_{N\to\infty} F_n(x) d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$\Longrightarrow \left(\int\limits_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \text{ конечна при } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

При фиксированном x имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ — обычный числовой ряд, а для него из абсолютной сходимости следует сходимость.

$$\Longrightarrow \text{ при } \mu\text{-п.в.} x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ конечна.}$$

Положим $F(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, эта функция корректно определена μ-п.в. При этом μ — полная мера (меру считаем полной, если не было оговорено обратного).

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \text{ этот предел существует для } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

Остаётся доказать, что $\left\|F - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\right\|_p \to 0, n \to \infty$. Обозначим n-ый член этой последовательности как J_n.

$$J_n = \left(\int\limits_X \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \textcircled{$\leqslant$}$$

Рассмотрим сумму ряда, как предел:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)|.$$

Вспомним лемму Фату:

$$\text{При } g_k \geqslant 0 \text{ верно} \int\limits_X \lim_{k\to\infty} g_k(x) d\mu(x) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_X g_k(x) d\mu(x).$$

Тогда по лемме Фату:

$$\left(\int\limits_X \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \textcircled{$\leqslant$} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\int\limits_X |f_k(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \to 0, n \to \infty.$$

Итого $J_n \to 0, n \to \infty$. $\square$

1.2 Неполнота $\mathbb{R}\mathrm{L}_p$

Определение 1.5. Пусть $\mathbb{R}\mathrm{L}_p([a, b])$ — лин. пространство функций, p-ая степень модуля которых интегрируема по Риману.

Замечание. С таким определением это не является нормированным пространством. Чтобы сделать его нормированным, нужно аккуратно ввести класс эквивалентности.

Теорема 1.3. *Пространство* $\mathbb{R}\mathrm{L}_p([a, b])$ *неполно.*

Доказательство.
Без ограничения общности, $[a, b] = [0, 1]$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Перенумеруем рациональные точки отрезка $[0, 1]$: $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_k\}$.

$$G_n := \bigcup_{k=1}^{n} \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \cap [0, 1].$$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Тогда χ_{G_n} интегрируема по Риману по критерию Лебега, потому что как характеристическая ф-ия объединения конечного набора интервалов, пересечённых с отрезком, она обладает конечным числом разрывов.

Докажем, что χ_G имеет мн-во точек разрыва положительной меры Лебега. Для этого рассмотрим $F = [0, 1] \setminus G$. Тогда $\chi_G(F) = 0$, но так как $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, во всех точках F ф-ия χ_G разрывна. При этом по счётной полуаддитивности меры Лебега $\mathcal{L}^n(G) \leqslant \frac{1}{2}$, а значит $\mathcal{L}^n(F) \geqslant \frac{1}{2} > 0$.

Введём обозначения

$$E_k := \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \cap [0,1]$$

$$G_m^n := \bigcup_{k=n}^{m} E_k$$

(в новых обозначениях $G_n = G_n^1$) и покажем фундаментальность последовательности $\{\chi_{G_n}\}$:

$$\int_0^1 |\chi_{G_m}(x) - \chi_{G_n}(x)|dx = \text{так как } G_n \subseteq G_m = \int_0^1 \chi_{G_m \setminus G_n}(x)dx \leqslant \int_0^1 \chi_{G_m^n}(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_0^1 \chi_{E_k}(x)dx = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} \to 0, \text{ при } n, m \to \infty.$$

Итого, последовательность $\{\chi_{G_n}\} \subset \mathbb{R}\mathrm{L}_p([0,1])$ фундаментальна, но её предел χ_G не лежит в пространстве $\mathbb{R}\mathrm{L}_p([0,1])$, значит это пространство не полно. □

1.3 Функции ограниченной вариации

Определение 1.6. Пусть T — разбиение отрезка $[a,b]$, т.е.

$$T = \{x_i\}_{i=0}^{N_T}, \quad N_T \in \mathbb{N}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_T} = b.$$

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

$V_T(f)$ — вариация ф-ии f по разбиению T

$$V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T - 1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

$$V_a^b(f) := \sup_{T \text{ - разб. } [a,b]} V_T(f)$$

Определение 1.7. f называется ф-ией ограниченной вариации на $[a,b]$, если

$$V_a^b(f) < +\infty.$$

Обозначается $f \in BV([a,b])$

Теорема 1.4. $BV([a,b])$ — *линейное пространство.*

Доказательство.
Покажем, что $f_1, f_2 \in BV([a,b]) \implies \alpha f_1 + \beta f_2 \in BV([a,b])$.

Пусть T — произвольное разбиение $[a,b]$. Тогда по неравенству треугольника

$$V_T(\alpha f_1 + \beta f_2) \leqslant |\alpha| V_T(f_1) + |\beta| V_T(f_2).$$

□

Лемма 1.1. *Если* $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *монотонна на* $[a,b]$, *то* $f \in BV([a,b])$ *и её* $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 1.2. *Пусть* $-\infty < a < c < b < +\infty$. *Тогда*

$$f \in BV([a,b]) \iff \begin{cases} f \in BV([a,c]) \\ f \in BV([c,b]) \end{cases}.$$

В случае, если $f \in BV([a,b])$, *тогда*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Доказательство.

1. $\implies$ и $\geqslant$

   Пусть $f \in BV([a,b])$, T_1 — произв. разб. $[a,c]$, T_2 — произв. разб. $[c,b]$.
   $T = T_1 \cup T_2$ — разб. о-ка $[a,b]$.
   $V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_T(f) \leqslant V_a^b(f)$.

   Взяв sup сначала по T_1, а потом по T_2, получим $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leqslant V_a^b(f)$.

2. $\impliedby$ и $\leqslant$

   Пусть $\begin{cases} f \in BV([a,c]) \\ f \in BV([c,b]) \end{cases}$.

   Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^N$ — произв. разб. отрезка $[a,b]$.

   Если $c = x_i$ при некотором i, то это простой случай, так как тогда можно $\{x_j\}_{j=0}^i$ выбрать в качестве T_1, а $\{x_j\}_{j=i}^N$ выбрать в качестве T_2. И тогда очевидным образом $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$, а взяв sup по всем T получим $V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$.

   Теперь рассмотрим более интересный случай, когда ни при каком i x_i не равно c. Тогда $c \in (x_i, x_i + 1)$ при некотором i.

   $$\begin{aligned} V_T(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(c)| + |f(c) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \end{aligned}$$

   Обозначим разбиения:
   $T_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, c\}$,
   $T_2 = \{c, x_{i+1}, \ldots, x_N\}$.
   Тогда полученный ранее результат можно оценить как

   $$\leqslant V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

   Итого $V_T(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Взяв sup по всем T, получим:

   $$\sup_T V_T(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

   $$V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

   Если оба слагаемых в правой части конечны, то и V_a^b конечна.

Итого из первого и второго пункта

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

□

Теперь воспользуемся этой леммой для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.5. *Пусть $f \in BV([a,b])$. Тогда ф-ия $g(x) := V_a^x$ монотонно не убывает на $[a,b]$*

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда применим только что доказанную лемму, выбрав $a = a, c = x_1, b = x_2$.

$$V_a^{x_2}(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f)$$

$$V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f) \geqslant 0$$

$$g(x_2) - g(x_1) \geqslant 0$$

$$g(x_2) \geqslant g(x_1)$$

□

Теорема 1.6. *Пусть $f \in BV([a,b])$. Тогда $\exists f_1$ и f_2 монотонно неубывающие на $[a,b]$ такие, что $f = f_1 - f_2$.*

Доказательство. Определим $f_1(x) := V_a^x(f) \quad \forall x \in [a{,}b]$. По только что доказанной теореме это монотонно неубывающая функция.
Докажем, что ф-ия $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ монотонно не убывает.

$$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b.$$

$f_2(y) - f_2(x) = [f_1(y) - f(y)] - [f_1(x) - f(x)] = [f_1(y) - f_1(x)] - [f(y) - f(x)] \overset{(1)}{=} V_x^y(f) - [f(y) - f(x)]$.
(1) В силу аддитивности вариации по отрезкам
Заметим, что $V_x^y(f) = \sup\limits_T V_T(f) \geqslant V_{\{x,y\}}(f) = |f(y) - f(x)|$. Тогда предыдущее выражение не меньше 0, а значит f_2 не убывает. □

Следствие. $\forall f \in BV([a,b])$ имеет не более чем счётное множество т. разрыва 1-го рода.

1.4 Абсолютно непрерывные функции

Определение 1.8. Ф-ия $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной на $[a{,}b]$, если

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \text{ дизъюнктивной системы } \{(a_k,b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |a_k - b_k| < \delta(\varepsilon) \\ \hookrightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{1.4.1}$$

$AC([a,b])$ — мн-во всех абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций.

Замечание. $f \in AC([a,b])$ является непрерывной на $[a,b]$. Обратное неверно

Контрпример.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \in C([0,1])$, но $f \notin BV([0,1])$, а значит по теореме, которая будет доказана ниже, $f \notin AC([0,1])$.

Теорема 1.7. *Если* $f \in AC([a,b])$, *то* $f \in BV([a,b])$.

Доказательство. Запишем (1.4.1) при $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta = \delta(1) > 0 : \forall$ конечного попарно непересекающегося набора интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum\limits_{k=1}^{N} |b_k - a_k| < \delta \hookrightarrow \sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < 1$. Теперь разобъём отрезок $[a,b]$. Пусть $\mathbb{N} \ni M := \left[\frac{|b-a|}{\delta}\right] + 1$.

$$
\begin{aligned}
&x_0 = a \\
&x_1 = a + \frac{b-a}{M} \\
&\vdots \\
&x_M = a + b - a = b.
\end{aligned}
$$

То есть поделили отрезок $[a,b]$ на одинаковые куски.
Так как $x_{i+1} - x_i < \delta$ (специально для выполнение этого было взято достаточно большое M), то $\forall$ разб. о-ка $[x_i, x_{i+1}]$ образует естественным образом конечным набор дизъюнктных интервалов суммарной длины меньше δ, а значит по абсолютной непрерывности $V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < 1 \quad \forall i$
Тогда в силу аддитивности вариации

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{M-1} V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < \sum_{i=0}^{M-1} 1 = M < +\infty.$$

□

2 Ряды Фурье

Идея представления функции тригонометрическим рядом являлась одной из центральных на рубеже 18-19 веков. Однако, строгая теория оформилась лишь к началу 20-века.

2.1 Неформальная идея

Прежде чем переходить к строгим формулировкам, поясним неформально корни идей, лежащих в основе теории рядов Фурье.

Если $V := (V, < \cdot,\cdot >)$ – конечномерное евклидово пространство, а $\{e_n\}_{n=1}^N$ – ортогональный базис в V, то любой вектор $x \in V$ имеет следующее разложение по базису $\{e_n\}_{n=1}^N$:

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{< x, e_n >}{< e_n, e_n >} e_n. \tag{2.1.1}$$

Естественно поставить вопрос, имеется ли аналог (2.1.1) для бесконечномерных евклидовх пространств?

Оказывается, в некоторых важных случаях ответ на этот вопрос положительный. Более точно, если $H := (H, < \cdot,\cdot >)$ – бесконечномерное гильбертово пространство (то есть евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением), а $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в нем, то для всякого $x \in H$ имеем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< x, e_n >}{< e_n, e_n >} e_n. \tag{2.1.2}$$

При этом числа

$$c_n(x) := \frac{< x,e_n >}{< e_n,e_n >}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.3}$$

называются *коэффициентами Фурье элемента x по системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, а ряд в правой части (2.1.2) – *рядом Фурье элемента x по системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Частный случай гильбертова пространства – $L_2([-l,l])$, где $l > 0$ – фиксированное число. Действительно, скалярное произведение, порождающее L_2–норму, задается формулой (мы рассматриваем случай комплексного пространства)

$$< f,g >:= \int\limits_{-l}^{l} f(x)\overline{g}(x)\,dx.$$

Можно показать, что система функций

$$1, \sin(\frac{\pi x}{l}), \cos(\frac{\pi x}{l}), ..., \sin(\frac{\pi n x}{l}), \cos(\frac{\pi n x}{l}),... \tag{2.1.4}$$

является ортогональным базисом в пространстве $L_2([-l,l])$. Иными словами, для любой функции $f \in L_2([-l,l])$ ее ряд Фурье сходится к ней в смысле среднего квадратичного. Кроме того, ортогональным базисом является также система комплексных экспонент

$$\{e^{\frac{i\pi kx}{l}}\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{2.1.5}$$

Отметим, однако, что формально, при $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты

$$a_k(f) := \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{\pi kx}{l})\,dx, \quad b_k(f) := \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{\pi kx}{l})\,dx$$

имеют смысл для $f \in L_1([-l,l])$.

2.2 Строгая теория

Без ограничения общности будем работать с элементами $f \in L_1([-\pi,\pi])$. Каждому такому элементу можно сопоставить формальный ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе

$$f \sim a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx),$$

а также по системе комплексных экспонент

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}.$$

При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим оператор n-ой частичной суммы ряда Фурье $S_n : L_1([-\pi,\pi]) \to C([-\pi,\pi])$. При $f \in L_1([-\pi,\pi])$ положим

$$S_n[f](x) := a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx).$$

2.3 Компактная форма записи

Заметим, что

$$\begin{aligned}
S_n[f](x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\Big)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt,
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где D_n – ядро Дирихле, то есть

$$\begin{aligned}
D_n(x) &:= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\Big[\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) + \sum_{k=1}^{n}\sin\Big(k(x+\frac{1}{2})\Big) - \sin\Big(k(x-\frac{1}{2})\Big)\Big] \\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\pi\sin(\frac{x}{2})}.
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Свойства ядра Дирихле:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$;

2) D_n – четная 2π-периодическая функция.

2.4 Теорема Римана–Лебега

Докажем теперь важную теорему Римана–Лебега об осцилляции.

Теорема 2.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$–измеримое по Лебегу множество и $f \in L_1(E)$. Тогда*

$$I(y) := \int\limits_{E} f(x)e^{i<x,y>}\,dx \to 0, \quad \|y\| \to +\infty. \tag{2.4.1}$$

Доказательство. Будем считать функцию f продолженной нулем вне множества E. При $y \neq 0$ рассмотрим вектор $h = h(y) := \frac{\pi y}{\|y\|^2}$. Тогда сделав замену переменной $x = x' - h$ имеем

$$I(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i<x,y>}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x'-h)e^{-i\pi}e^{i<x',y>}\,dx' = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{i<x,y>}\,dx.$$

Таким образом, поскольку $h(y) \to 0$, $\|y\| \to \infty$, получим

$$2|I(y)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x) - f(x-h(y)))e^{i<x,y>}\,dx\Big| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x) - f(x-h(y))|\,dx \to 0, \quad \|y\| \to +\infty. \tag{2.4.2}$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f \in L_1([-\pi,\pi])$, то

$$\lim_{k\to\infty} a_k(f) = \lim_{k\to\infty} b_k(f) = \lim_{k\to\infty} c_k(f) = 0.$$

2.5 Вторая теорема о среднем

В этом пункте мы докажем одно вспомогательное утверждение из теории интеграла Римана, которое будет очень важно при доказательстве достаточных условий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 2.2. *Пусть $g \in R([a,b])$, а f нестрого монотонна на $[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{2.5.1}$$

Если, кроме того, f неотрицательна на $[a,b]$, то справедливы более простые формулы:
а) если f нестрого убывает, то при некотором $\xi \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx; \tag{2.5.2}$$

б) если f нестрого возрастает, то при некотором $\xi \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{2.5.3}$$

Доказательство. Отметим, что $fg \in R([a,b])$, что легко следует из критерия Лебега. Поэтому, левые части формул (2.5.1)–(2.5.3) имеют смысл.

Мы докажем лишь формулу (2.5.2), поскольку (2.5.3) доказывается аналогично, а равенство (2.5.1) легко вытекает из (2.5.2) и (2.5.3).

Step 1. Итак, пусть f неотрицательна и нестрого убывает на $[a,b]$. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. То есть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогда, очевидно, в силу линейности интеграла Римана имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx + \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-f(x_i))g(x)\,dx =: \Sigma_1(T) + \Sigma_2(T). \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Step 2. Поскольку $g \in R([a,b])$, она ограничена на $[a,b]$. Следовательно, $\sup_{x\in[a,b]}|g(x)| < +\infty$. Легко видеть, что

$$\Big|\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-f(x_i))g(x)\,dx\Big| \leqslant \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)|x_i - x_{i+1}|,$$

где $\omega_i := \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x') - f(x'')|$ – колебание функции f на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$. Таким образом, в силу критерия интегрируемости, имеем (здесь и далее через $l(T)$ обозначена мелкость разбиения T)

$$\Sigma_1(T) \to 0, \quad l(T) \to 0. \tag{2.5.5}$$

Step 3. Рассмотрим функцию $G(x) := \int\limits_a^x g(t)\,dt$. Очевидно, что G непрерывна на $[a,b]$. Используя преобразование Абеля, имеем (здесь использовано, что $G(x_0) = G(a) = 0$)

$$\begin{aligned}\Sigma_2(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i)) \\ &= f(x_{n-1})G(b) + \sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i))G(x_i).\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

В силу непрерывности G на $[a,b]$ найдутся константы m,M, для которых $m \leqslant G(x) \leqslant M$ при всех $x \in [a,b]$. Ключевое наблюдение состоит в том, что в силу невозрастания f, имеем $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geqslant 0$ при всех i. Суммируя сделанные наблюдения, имеем

$$\begin{aligned}mf(a) &= m\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + mf(x_{n-1}) \\ &\leqslant \Sigma_2(T) \leqslant M\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + Mf(x_{n-1}) = Mf(a).\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Из (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.7) следует, что $\exists \lim_{l(T)\to 0} \Sigma_1(T) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ и, кроме того,

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mf(a). \tag{2.5.8}$$

Step 4. Если $f(a) = 0$, то в силу (2.5.8) в качестве ξ можно взять любую точку отрезка $[a,b]$. Если $f(a) \neq 0$, то в силу теоремы о промежуточном значении, примененной к непрерывной функции G, из (2.5.8) выводим, что найдется точка $\xi \in [a,b]$, для которой

$$G(\xi) = \frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2.5.9}$$

Теорема полностью доказана.

3 Сходимость ряда Фурье в точке.

Мы начнём с формулировки общего критерия сходимости, не требующего знания конкретных свойств регулярности функций. Поэтому мы называем его "абстрактным". Он бесполезен с практической точки зрения, поскольку по сути является переформулировкой определения. С другой стороны, такая формулировка окажется полезной при доказательстве конкретных признаков сходимости рядов Фурье.

Абстрактный критерий сходимости.

Комбинируя (**??**), (**??**), и пользуясь четностью ядра Дирихле, при $f \in L_1([-\pi,\pi])$ получим

$$\begin{aligned}S_n[f](x) &:= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin(\frac{(t-x)}{2})} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} f(x-u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} f(x+u)\,du.\end{aligned} \tag{3.0.1}$$

Лемма 3.1. *При $n \in \mathbb{N}$ и $u \in (-\pi,\pi)$ справедливо равенство*

$$D_n(u) = \frac{\sin(nu)}{\pi u} + \frac{1}{2\pi}(\cos(nu) + g(u)\sin(nu)), \tag{3.0.2}$$

где функция $g : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ не зависит от n и ограничена на интервале $(-\pi,\pi)$.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы, получим

$$D_n(u) = \frac{\sin(nu)\cos(\frac{u}{2})}{2\pi\sin(\frac{u}{2})} + \frac{\cos(nu)}{2\pi} = \frac{\sin(nu)}{\pi u} + \frac{1}{2\pi}(\cos(nu) + g(u)\sin(nu)), \tag{3.0.3}$$

где мы положили $g(0) = 0$ и

$$g(u) := \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{u}{2})} - \frac{2}{u}, \quad u \in (-\pi,\pi) \setminus \{0\}.$$

Нетрудно видеть, что g – нечетная на $(-\pi,\pi)$ и монотонно убывает. Поэтому, $|g(u)| \leqslant 2/\pi$ при всех $u \in (-\pi,\pi)$.

Лемма доказана.

Теперь мы готовы сформулировать “абстрактный” критерий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 3.1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является 2π-периодичной, и $f \in L_1([-\pi,\pi])$. Ряд Фурье f сходится в точке $x \in \mathbb{R}$ к числу $S \in \mathbb{R}$ в том и только том случае, если существует $\delta \in (0,\pi]$ такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\delta \Big[\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - S\Big]\frac{\sin(nu)}{u}\,du = 0. \tag{3.0.4}$$

Доказательство. Нам будет удобно сделать несколько шагов.

Шаг 1. В силу леммы 3.1 мы можем переписать (3.0.1) в виде

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} f(x+u)\,du + \varepsilon_n[f](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} f(x-u)\,du + \varepsilon_n[f](x) \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{f(x-u) + f(x+u)}{2}\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du + \varepsilon_n[f](x), \end{aligned} \tag{3.0.5}$$

где мы положили (равенство справедливо в силу четности косинуса и в силу четности произведения $g(u)\sin(nu)$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_n[f](x) &:= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)(\cos(nu) + g(u)\sin(nu))\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)(\cos(nu) + g(u)\sin(nu))\,du. \end{aligned} \tag{3.0.6}$$

По теореме Римана–Лебега **??** имеем $\varepsilon_n[f](x) \to 0$, $n \to \infty$.

Шаг 2. Используя рассуждения предыдущего шага для $f \equiv 1$, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du = 1 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{3.0.7}$$

Шаг 3. Комбинируя (3.0.4) и (3.0.7), имеем

$$|S - S_n[f](x)| = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\, du + o(1), \quad n \to \infty. \tag{3.0.8}$$

Шаг 4. Функция $1/u$ ограничена на интервале (δ,π) (при любом фиксированном $\delta > 0$). Следовательно, по теореме Римана–Лебега получим

$$\int_{\delta}^{\pi} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\, du = o(1), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, учитывая четность функции $\sin(nu)/u$, получим

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\, du &= 2\int_{0}^{\delta} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\, du \\ &+ 2\int_{\delta}^{\pi} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\, du \\ &= 2\int_{0}^{\delta} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big] \frac{\sin(nu)}{\pi u}\, du + o(1), \quad n \to \infty.\end{aligned} \tag{3.0.9}$$

Комбинируя (3.0.8) и (3.0.9), получим (3.0.4).

Теорема доказана.

Теперь установим признак Дирихле–Жордана.

Теорема 3.2. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-периодична, и $f \in BV((a,b)) \cap L_1([-\pi,\pi])$ для некоторого интервала (a,b), то её ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in (a,b)$, причем*

$$S_n[f](x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В силу теоремы о представлении функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций, достаточно рассмотреть случай, когда f не убывает.

Шаг 1. Зафиксируем точку $x_0 \in (a,b)$. В силу теоремы 3.1 достаточно доказать, что при некотором $\delta > 0$

$$I_n := \int_{0}^{\delta} \frac{\sin(nu)}{u} [f(x_0+u) - f(x+0)]\, du \to 0, \quad n \to \infty.$$

Шаг 2. По признаку Дирихле несобственный интеграл (понимаемый в смысле Римана или в смысле Лебега)

$$J := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

является сходящимся. Поэтому существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\Big|\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin(nu)}{u}\, du\Big| = \Big|\int_{nt_1}^{nt_2} \frac{\sin(t)}{t}\, dt\Big| \leqslant C \quad \forall t_1 < t_2. \tag{3.0.10}$$

Шаг 3. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, что $U_\delta(x_0) \subset (a,b)$ и при этом $|f(x_0+0) - f(x_0+u)| < \frac{\varepsilon}{2C}$ при всех $u \in (0,\delta(\varepsilon))$. В силу второй теоремы о среднем имеем

$$I_n^1 := \int\limits_0^{\delta(\varepsilon)} \frac{\sin(nu)}{u}[f(x_0+u) - f(x+0)]\,du = [f(x_0+\xi) - f(x+0)] \int\limits_\xi^{\delta(\varepsilon)} \frac{\sin(nu)}{u}\,du.$$

Отсюда и из (3.0.10) имеем $|I_n^1| < \varepsilon/2$.

Шаг 4. В силу теоремы Римана–Лебега **??** имеем существование такого числа $N_\varepsilon := N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$, что при $n \geqslant N_\varepsilon$

$$|I_n^2| := \Big|\int\limits_{\delta(\varepsilon)}^{\delta} \frac{\sin(nu)}{u}[f(x_0+u) - f(x+0)]\,du\Big| < \varepsilon/2.$$

Шаг 5. Собирая вышеприведенные оценки, получаем, что $|I_n| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N_\varepsilon$.

Теорема полностью доказана.

3.1 Признаки поточечной сходимости рядов Фурье (продолжение).

Определение 3.1. Будем говорить, что точка x_0 функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является регулярной, если в ней $\exists f(x_0 \pm 0)$ и $\exists f'_\pm(x_0)$.

Следствие (Из признака Дини)**.** Пусть дана 2π-периодическая функция $f \in L_1([-\pi,\pi])$. Тогда если x_0 — регулярная точка функции f, то ряд Фурье f сходится в ней к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Для доказательства в силу признака Дини достаточно проверить, что $\exists\delta > 0$ такое, что

$$\int_0^\delta |f(x_0+u) - f(x_0+0) + f(x_0-u) - f(x_0-0)|\frac{du}{u} < +\infty.$$

Поскольку

$$\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u} \to f'_+(x_0), u \to +0 \quad \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{u} \to f'_-(x_0), u \to +0.$$

То есть существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}\right| \in \left[\frac{|f'_+(x_0)|}{2}, 2|f'_+(x_0)|\right] \quad \left|\frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{u}\right| \in \left[\frac{|f'_-(x_0)|}{2}, 2|f'_-(x_0)|\right] \forall u \in (0,\delta).$$

А значит выполнено условие Дини и ряд сходится к полусумме односторонних пределов. □

Пример (Шварц)**.** Существует непрерывная 2π-периодическая функция такая, что её ряд Фурье расходится в нуле.

Определим функцию f как

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}\sin n_k t & t \in [t_k, t_{k-1}], k = 2, \dots. \end{cases}$$

где $n_k = 2^{k!}$, $t_1 = \pi$ и $t_k = \frac{2\pi}{n_k}$, $k > 1$. Определим $J_n[f]$ как

$$J_n[f](0) = \int_0^\pi \frac{\sin nt}{t} f(t)dt.$$

Исследуем поведение $J_n[f]$ на гармониках n_k:

$$J_{n_k}[f](0) = \int_0^{\pi} \frac{\sin n_k t}{t} f(t)dt = \int_0^{t_k} \frac{\sin n_k t}{t} f(t)dt + \int_{t_k}^{t_{k-1}} \frac{\sin^2 n_k t}{t\sqrt{k}}dt + \int_{t_{k-1}}^{\pi} \frac{\sin n_k t}{t} f(t)dt = F_k + J_k + H_k.$$

Рассмотрим для начала поведение интеграла J_k:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \sin^2\tau \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \frac{1-\cos 2\tau}{2\tau} d\tau.$$

где $A_k = 2\pi \frac{n_k}{n_{k-1}}$. Заметим, что

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos 2\tau}{\tau} d\tau.$$

сходится по признаку Дирихле, а значит

$$\exists C > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \int_{2\pi}^{A_k} \frac{\cos 2\tau}{2\tau} d\tau \right| < C.$$

С другой стороны,

$$\int_{2\pi}^{A_k} \frac{d\tau}{2\tau} = \ln \frac{A_k}{2\pi} = \frac{1}{2}(k! - (k-1)!) \ln 2 \geqslant \frac{k! \ln 2}{3}.$$

А значит

$$J_k \geqslant \frac{\ln 2}{3\sqrt{k}} k! + O(1).$$

Оценим H_k:

$$|H_k| \leqslant \int_{t_{k-1}}^{\pi} \ln \frac{\pi}{t_{k-1}} \ln \frac{n_{k-1}}{2} \leqslant (k-1)! \ln 2.$$

И последний интеграл:

$$|F_k| \leqslant \int_0^{t_k} \left| \frac{\sin n_k t}{t} f(t) \right| dt \leqslant \int_0^{t_k} \frac{|\sin n_k t|}{t} |f(t)| dt \leqslant \int_0^{t_k} |n_k f(t)| dt \leqslant \frac{n_k t_k}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \to 0, k \to +\infty.$$

Таким образом, получается:

$$J_{n_k}[f](0) \geqslant \frac{\ln 2}{3\sqrt{k}} k! + O(1) - (k-1)! \ln 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \geqslant (k-1)! \ln 2 (\frac{\sqrt{k}}{3} - 1) + O(1) \to +\infty, k \to +\infty.$$

А значит $S_{n_k}[f](0) \to +\infty, k \to +\infty$ и ряд Фурье функции f расходится в нуле.

3.2 Суммы Фейера.

Определение 3.2. Пусть дана 2π-периодическая $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Суммой Фейера для f будем называть

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_i[f].$$

Распишем подробнее сумму Фейера через выражение для ядер Дирихле:

$$\sigma_n[f](x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-u)}{\sin u/2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+1/2)u du.$$

В тоже время,

$$\frac{1}{\sin u/2} (\sin u/2 + \ldots + \sin(n-1/2)u) \sin u/2 = \frac{1}{2\sin u/2}(1 - \cos nu).$$

Определение 3.3. Ядром Фейера будем называть

$$\Phi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k = \frac{\sin^2 nu/2}{2\pi n \sin^2 u/2}.$$

Тогда сумма Фейера для f может быть записана как свёртка ядра Фейера и функции f:

$$\sigma_n[f](x) = \Phi_n * f = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-u)f(u)du.$$

Ядро Фейера можно также записать в виде

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(u) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|j|<k} e^{iku} = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|<n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{iku}$$

Утверждение 3.1. *Нетрудно заметить некоторые свойства ядра Фейера:*

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \Phi_n \geqslant 0.$
- ▷ Φ_n — *2π-периодичная функция.*
- ▷ *Поскольку* $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)du = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1.$$

- ▷ *Для ядра Фейера справедливо т.н. «фокусирующее свойство»: при всяком $\delta > 0$ и $\delta < |u| < \pi$ верно*

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nu/2}{\sin u/2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2\pi n \sin^2 \delta/2} \leqslant \frac{\pi}{2n\delta^2} \to 0, n \to +\infty.$$

Таким образом,

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \sup_{\delta<|u|<\pi} \Phi_n(u) \to 0, n \to +\infty.$$

Определение 3.4. Будем говорить, что для $\alpha \in (0,1)$ функция лежит в $H^\alpha(\mathbb{R})$ (т.е. удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α) если

$$\exists C > 0 \forall x', x'' \in \mathbb{R} \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''|^\alpha.$$

Теорема 3.3. *Пусть дана 2π-периодическая $f \in H^\alpha(\mathbb{R}), \alpha \in (0,1)$. Тогда ряд Фурье f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Более того,*

$$\left|S_n[f](x) - f(x)\right| \leqslant C \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для начала рассмотрим отклонения от суммы Фейера:

$$\sigma_n[f](x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\Phi_n(t)dt.$$

То есть

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\Phi_n(t)dt \leqslant \frac{C}{2\pi n}\int_0^{\pi} t^\alpha \cdot \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2 t/2}dt \leqslant (*)$$

Но, поскольку $\sin t/2 \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}$, то

$$(*) \leqslant \frac{C\pi}{2n} \int_0^\pi t^{\alpha-2} \sin^2(nt/2) dt = (*)$$

Теперь сделаем замену $nt/2 = u$ и получим

$$(*) = \frac{C\pi}{2n} \int_0^{\pi n/2} \left(\frac{2u}{n}\right)^{\alpha-2} \cdot \sin^2 u \cdot \frac{2u}{n} du \leqslant \frac{2^{\alpha-2} C\pi}{n^\alpha} \int_0^{\pi n/2} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}} du.$$

Но $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}} du$ сходится в несобственном смысле, а значит $\exists \widetilde{C} > 0$ такая, что

$$\left| \int_0^{\pi n/2} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}} du \right| \leqslant \widetilde{C}.$$

И отклонение суммы Фейера от функции оценивается как

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| \leqslant \frac{M}{n^\alpha}.$$

Пусть $\varphi_n = f - \sigma_n[f]$. Тогда

$$\Big| S_n[f](x) - f(x) \Big| = \Big| S_n[\varphi_n](x) - \varphi_n(x) \Big|,$$

поскольку

$$S_n[\sigma_n[f]] = \sigma_n[f].$$

А это верно из того, что сумма Фейера – это тригонометрический полином n-ой степени. Тогда

$$\Big| S_n[f](x) - f(x) \Big| \leqslant |S_n[\varphi_n](x)| + |\varphi_n(x)| = (*)$$

Оценка для φ_n уже есть выше. Для оператора частичной суммы некоторой 2π-периодической функции g мы можем дать следующую оценку:

$$\begin{aligned} S_n[g](x) &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t)| \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} \right| dt \leqslant \\ &\leqslant 2 \sup_{[-\pi,\pi]} |g| \cdot \int_0^\pi \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} \right| dt \leqslant \\ &\leqslant C_1 \sup |g| \int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{|\sin v|}{v} dv \leqslant \widetilde{C} \sup |g| \ln n. \end{aligned}$$

Таким образом

$$(*) \leqslant \widehat{C} \frac{M \ln n}{n^\alpha}.$$

Что доказывает равномерную сходимость и показывает требуемую оценку на отклонение частичной суммы. □

Замечание. Рассуждая аналогично, в случае $\alpha = 1$ можно получить более грубую оценку:

$$||S_n[f] - f||_{C([-\pi,\pi])} \leqslant \frac{C \ln^2 n}{n}.$$

Но на самом деле можно при условии $f \in LIP(\mathbb{R})$ справедлива более сильная оценка:

$$||S_n[f] - f||_C \leqslant \frac{C \ln n}{n}.$$

3.3 Теорема Фейера

Теорема 3.4. *Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$ и f — 2π - периодична. Тогда $\sigma_n[f] \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$.*

Доказательство. В силу периодичности $\sigma_n[f]$ и f достаточно доказать, что $\sigma_n[f] \underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$.
Поскольку $f \in C([-\pi,\pi]])$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна. Значит её модуль непрерывности стремится к нулю:

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x',x'' \in [-2\pi,2\pi] \\ |x'-x''|<\delta}} |f(x') - f(x'')| \to 0, \delta \to +0.$$

Формально, описанное выше выражение определено для $\delta \in (0, 4\pi)$. Запишем по определению сумму Фейера:

$$\sigma_n[f](x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Phi_n(x-t)dt \text{ , где } \Phi_n(t) \text{ — ядро Фейера.}$$

Тогда:

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x)dt\right| \leqslant I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x-t) - f(t)|dt = I_1(\delta) + I_2(\delta).$$

$$I_1(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \leqslant \omega_\delta[f] \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \leqslant \omega_\delta[f].$$

В этой оценке мы ограничиваем сверху $|f(x-t) - f(t)|$ через модуль непрерывности,
а $\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \leqslant 1$.

$$I_2(\delta) = \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \Phi_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt.$$

Так как f — непрерывна на $[-2\pi, 2\pi]$, то $\exists\ M > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant M\ \forall x \in [-2\pi, 2\pi]$. Тогда можем оценить $|f(x-t) - f(x)| \leqslant |f(x)| + |f(x-t)| \leqslant 2M$.
Из вышеприведенного утверждения и того, что $\forall \delta > 0 \sup\limits_{\delta < |u| < \pi} \Phi_n(u) \to 0, n \to \infty$ и ограничения, описанного выше, получаем:

$$I_2(\delta) \leqslant 2M \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \Phi_n(t)dt \leqslant 2M \sup_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) \to 0, n \to \infty.$$

$\forall \varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что $I_1(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем, при фиксированном $\delta(\varepsilon)$ выберем $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таким, что $\forall n > N(\varepsilon)\ I_2(\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Итого, получается, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\delta(\varepsilon)) = \tilde{N}(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow I_n < \varepsilon$. □

Определение 3.5. Функция $T_n(x) = c_0 + \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx)$ называется тригонометрическим полиномом степени n, если $|a_n| + |b_n| \neq 0$.

Следствие (Первая теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $f \in C([-\pi,\pi]])$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ тригонометрический полином T_ε такой, что $||f - T_\varepsilon||_{C([-\pi,\pi])} \leqslant \varepsilon$.

Следствие (Теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $-\infty < a < b < \infty$ и $f \in C([a,b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ полином $P_\varepsilon[f]$ такой, что $||f - P_\varepsilon[f]||_{C([a,b])} < \varepsilon$.

Доказательство. Для удобства доказательства перенесем отрезок $[a,b]$ в отрезок $[0,\pi]$. Пусть $x \in [a,b]$, а $t \in [0,\pi]$. Обозначим $\varphi(x)$ — взаимно однозначная функция, преобразующая точку из первого отрезка в точку из второго отрезка. Тогда $x(t) = \varphi^{-1}(t) = a + \frac{b-a}{\pi}t$.
Заметим, что $f \circ \varphi \in C([0,\pi])$. Продолжим f чётным образом. Получим функцию $\tilde{f} \in C([-\pi,\pi])$ и $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$.
Применим теорему Фейера к функции $\tilde{f}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \sigma_n[\tilde{f}] \text{ такая, что } ||\tilde{f} - \sigma_n[\tilde{f}]||_{C([-\pi,\pi])} < \varepsilon.$$

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k[\tilde{f}]\ , \text{ где } S_k[\tilde{f}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j(\tilde{f})\cos(jx) + \sum_{j=1}^{k} b_j(\tilde{f})\sin(jx)$$

Вспомним, что $\cos(jx)$ и $\sin(jx)$ — аналитические $\forall j \in \mathbb{N}$. Следовательно, на любом отрезке $[-A,A] \subset \mathbb{R}$ к ним равномерно сходятся их ряды Тейлора. Тогда мы можем приблизить $\cos(jx)$ и $\sin(jx)$ полиномами Тейлора настолько, чтобы после сложения получилось что-то «небольшое».
Обозначим $P_j(x)$ — полином Тейлора для $\sin(jx)$, а $Q_j(x)$ — полином Тейлора для $\cos(jx)$.
Можно выбрать полиномы Тейлора так, чтобы существовали ε_j и $\tilde{\varepsilon_j}$ такие, что:

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |P_j(x) - \sin(jx)| < \varepsilon_j$$

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |Q_j(x) - \cos(jx)| < \tilde{\varepsilon_j}$$

И при этом выполнялось:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} |a_j|\varepsilon_j + |b_j|\tilde{\varepsilon_j}) < \varepsilon$$

Тогда, полагая

$$P_\varepsilon[\tilde{f}] := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j(\tilde{f})Q_j + b_j(\tilde{f})P_j)$$

$P_\varepsilon[f](t)$ «живет» на отрезке $[-\pi,\pi]$. Теперь мы хотим перенести его на $[0,1]$.
Положим $t(x) = \frac{x-a}{b-a}\pi$. Тогда $P_\varepsilon[f] = P_\varepsilon[\tilde{f}](t(x))$ — искомый полином, так как $\tilde{f}(t(x)) = f(x)$.
Тогда заметим, что $\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(t) - P_\varepsilon[\tilde{f}](t)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P_\varepsilon[f](x)| < \varepsilon$. □

3.4 Скорость убывания коэффициентов Фурье

Общая концепция: чем более гладкая функция, тем быстрее убывают коэффициенты Фурье.

Лемма 3.2 (Основная)**.** *Пусть* $f \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. *Тогда* $c_f(y) = f(x)e^{-ixy} = O(\frac{1}{n}), y \to \infty$.

Доказательство. Так как $f \in BV(\mathbb{R})$, то $f(x) = u(x) + v(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где $u(x)$ — нестрого возрастающая функция на $\mathbb{R}$, а $v(x)$ — нестрого убывающая функция на $\mathbb{R}$.
Тогда можно записать $\forall a,b : -\infty < a < b < \infty$:

$$c_{[a,b]}(y) = \int_a^b f(x)e^{-ixy}dx = \int_a^b u(x)e^{-ixy}dx + \int_a^b v(x)e^{-ixy}dx \Rightarrow$$

$$\exists\ \xi \in [a,b], \zeta \in [a,b] : c_{[a,b]}(y) = u(a+0)\int\limits_a^\xi e^{-ixy}dx + u(b-0)\int\limits_\xi^b e^{-ixy}dx +$$

$$+v(a+0)\int\limits_a^\zeta e^{-ixy}dx + v(b-0)\int\limits_\zeta^b e^{-ixy}dx.$$

Ключевое наблюдение: если $f \in BV(\mathbb{R})$ и интрегрируема, то $f(x) \to 0, x \to \infty$.
Пусть $f \nrightarrow 0$. Тогда $\exists > 0$ такой, что $\forall \delta > 0\ \exists\ x : |f(x)| > C$. Но при этом, $f \in L_1(\mathbb{R})$, так как интегрируема. Тогда, $\exists\ \tilde{x} : |\tilde{x}| > \delta\ |f(\tilde{x})| < \frac{C}{2}$. Получаем противоречие, так как можно получить бесконечный набор точек $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$, которые мы набираем по описанному выше условию.
Ограничим:

$$\left|\int\limits_a^\xi e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|} \qquad \left|\int\limits_\xi^b e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|}$$

$$\left|\int\limits_a^\zeta e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|} \qquad \left|\int\limits_\zeta^b e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|}$$

$$u(a+0) \leqslant V_\mathbb{R}(f) \qquad u(b-0) \leqslant V_\mathbb{R}(f)$$

$$v(a+0) \leqslant V_\mathbb{R}(f) \qquad v(b-0) \leqslant V_\mathbb{R}(f)$$

Получаем: $|c_{[a,b]}(y)| \leqslant \frac{8V_\mathbb{R}(f)}{|y|}$ — оценка не зависит от выбора интервала $[a,b]$. Устремляя $a \to -\infty,\ b \to +\infty$, получаем требуемое. □

Теорема 3.5 (б/д)**.** *Пусть $F \in AC([a,b])$. Тогда F почти всюду имеет классическую производную и, более того, восстанавливается через свою производную по формуле Ньютона - Лейбница.*

Теорема 3.6 (Интегрирование по частям, б/д)**.** *Пусть $F \in AC([a,b]), g \in L_1([a,b])$. Тогда верна формула интегрирования по частям: $\int\limits_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b F'(x)G(x)dx$,*

где $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$

Следствие. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая, такая, что $f^{(k-1)} \in AC([-\pi,\pi])$. Пусть $f^{(k)}$ почти всюду может быть изменена на множестве меры ноль таким образом, что $f^(k) \in BV([-\pi,\pi])$. Тогда $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{inx}dx = f(x)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + in\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Проделаем эту операцию k раз. Так как f — 2π-периодична и $f^{(k)} \in AC([-\pi,\pi])$ — тоже 2π-периодична:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}e^{-inx}dx = (in)^k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Но $f^{(k)}$ можно считать $BV([-\pi,\pi])$.
Рассмотрим функцию $F = \begin{cases} f^{(k)}(x), x \in [-\pi,\pi] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $F \in BV([-\pi,\pi])$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx =$

$\int\limits_{\mathbb{R}} F(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty$ в силу леммы. С учетом того, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{(in)^k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{inx}dx$ получаем требуемое.

□

4 Введение в теорию евклидовых пространств.

Определение 4.1. Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система из ненулевых векторов в нём. Тогда $\forall f \in E$ будем называть

$$\alpha_k(f) = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}, k \in \mathbb{N}.$$

коэффициентом Фурье элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Теорема 4.1 (минимальное свойство коэффициентов Фурье)**.** *Пусть* $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *— евклидово пространство. Тогда* $\forall f \in E \hookrightarrow$

$$\inf_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k\Big\| = \Big\| f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(f)e_k\Big\|.$$

Доказательство. Пусть $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k(f) - \beta_k)e_k$, где β_i — произвольные вещественные коэффициенты. Тогда

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k\Big\|^2 = \Big\| f - S_n[f] + S_n[f] - \sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k\Big\|^2 =$$
$$= \langle f - S_n + d_n, f - S_n + d_n\rangle = \langle f - S_n, f - S_n\rangle + 2\langle d_n, f - S_n\rangle + \langle d_n, d_n\rangle,$$

Где под $S_n[f]$ понимается n-ая сумма ряда Фурье, то есть $S_n[f] = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f)e_k$. Заметим, что $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$ верно, что

$$\langle e_k, f - S_n[f]\rangle = \langle e_k, f\rangle - \langle e_k, S_n[f]\rangle = \langle e_k, f\rangle - \langle e_k, \alpha_k(f)e_k\rangle = 0.$$

Значит $2\langle d_n, f - S_n\rangle = 0$, и квадрат отклонения выражается как

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k\Big\|^2 = \langle f, f\rangle + \langle d_n, d_n\rangle \geqslant \langle f, f\rangle,$$

причём минимум достигается при $d_n = 0$. Но, тогда, из ортогональности системы и определения d_n, мы получаем что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\big\| f - S_n[f]\big\| \leqslant \Big\| f - \sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k\Big\|.$$

для всяких $\{\beta_i\}$. То есть

$$\big\| f - S_n[f]\big\| \leqslant \inf_{\beta_i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,k}} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k\Big\|.$$

Поскольку $S_n[f] = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f)e_k$, то утверждение теоремы доказано. □

Примечание (Геометрическая интерпретация теоремы.). По сути теорема говорит, о том что при проектировании вектора на подпространство, натянутое на первые n базисных векторов наименьшую «длину» (то есть норму) имеет ортогональная проекция на него.

Теорема 4.2 (О единственности). *Пусть* $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *— евклидово пространство и* $f \in E$. *Пусть* $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— ортогональная система в* E *и* $f = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ *(где сходимость ряда понимается в смысле нормы) Тогда* $\forall k \in \mathbb{N} \alpha_k$ *— коэффициент Фурье* f.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Тогда

$$|\langle f, e_k\rangle - \langle S_n, e_k\rangle| = |\langle f - S_n, e_k\rangle| \leqslant \|f - S_n\|\|e_k\| \to 0, n \to +\infty.$$

А значит $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} \langle S_n, e_k\rangle = \langle f, e_k\rangle$. В силу ортогональности системы мы получаем искомое утверждение. □

Лемма 4.1. *Пусть дано* $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *— евклидово пространство и* $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— ортогональная система в нём. Тогда* $\forall n \in \mathbb{N}$ *справедливо следующее:*

$$\|f\|^2 = \|f - S_n[f]\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2(f)\langle e_k, e_k\rangle$$

Доказательство. Доказательство очевидно в силу ортогональности системы и линейности скалярного произведения. □

Следствие (Неравенство Бесселя). В условиях предыдущей леммы $\forall f \in E$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы и неотрицательности нормы $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2(f)\|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Взятие супремума по $n \in \mathbb{N}$ завершает доказательство. □

Теорема 4.3 (Рисс, Фишер). *Пусть* $H = (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *— гильбертово пространство (то есть полное относительно нормы евклидово пространство). Пусть* $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— ортогональная система в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ *сходится к некоторому элементу* $f \in H$ *в смысле евклидовой нормы.*
2. *Для некоторой* $f \in H$ *выполняется* $\alpha_k = \alpha_k(f)$ *при всяком натуральном* k.
3. *Числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2\|e_k\|^2$ *— сходится.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна в силу теоремы о единственности: α_k будут просто коэффициентами Фурье своей суммы.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна в силу неравенства Бесселя.
Покажем что 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть, без ограничения общности, m и n — натуральные и $m > n$. Тогда

$$\Big\langle \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k, \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k \Big\rangle = \Big\| \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k \Big\|.$$

В силу ортогональности системы и Критерия Коши сходимости числового ряда

$$\sum_{k=n}^{m} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2 \to 0, n, m \to +\infty.$$

Тогда последовательность частичных сумм ряда фундаментальна и он сходится к $f \in H$, поскольку H — полно. Импликация доказана. $\square$

Определение 4.2. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Система векторов $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется полной в E, если $\forall f\ \forall \varepsilon > 0 \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ такая, что $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k\| < \varepsilon$.

Примечание. Всякий базис Шаудера является полной системой. Обратное неверно: контрпримером является $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ в $C([-1, 1])$. Она полна по теореме Вейерштрасса, но не является базисом. Предположим противное. Тогда для

$$f(x) = |x| \exists! \{c_k\}_{k=0}^{+\infty} : |x| = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k.$$

причём равенство понимается в равномерном смысле. Но тогда по теореме о дифференцируемости степенного ряда мы получаем дифференцируемость f в нуле – противоречие.

Определение 4.3. Пусть $E = (E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Ортоональная система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется замкнутой, если из ортогональности f каждому e_k следует то, что $f = 0$.

Теорема 4.4 («Основная» теорема.)**.** *Пусть $H = (H, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ — гильбертово пространство. Пусть $\{e_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — полна.*
2. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — базис.*
3. *$\forall f \in H$ ряд Фурье по системе $\{e_k\}$ сходится к f.*
4. *Справедливо равенство Парсеваля:*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2.$$

5. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — замкнута.*

Доказательство. Покажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).
Пусть $\Delta_n = \inf\limits_{\beta_1, \ldots, \beta_n} \Big\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|, n \in \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что $\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n \forall n \in \mathbb{N}$, поскольку занулением лишнего коэффициента сводится к предыдущей дельте. Тогда, из монотонности последовательности и неотрицательности каждого из её членов следует существование предела, равного инфинуму:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \Delta_n = \inf_n \Delta_n.$$

Поскольку по определению полноты $\forall f \in H \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$:

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\| < \varepsilon.$$

то $\inf\limits_n \Delta_n = 0$. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье $\Delta_n = \|f - S_n[f]\|$. А значит $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — базис (из существования предела Δ_n и теоремы о единственности).
Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) верна по теореме о единственности – эти коэффициенты в единственном разложении по базису и будут коэффициентами ряда Фурье.
Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) следует из ранее доказанной леммы:

$$\|f\|^2 = \|f - S_n[f]\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(f) e_k| \langle e_k, e_k \rangle.$$

При устремлении n в бесконечность получаем равенство Парсеваля.
Заметим, что та же самая лемма даёт нам из выполнения равенства Парсеваля базисность системы, а значит 4) $\Rightarrow$ 2. Ранее было замечено, что из базисности системы векторов следует её полнота, то есть 2) $\Rightarrow$ 1). При этом, в вышеприведённых рассуждениях полнота нигде не использовалась, а значит $1), 2), 3), 4)$ эквивалентны и при условии отсутствия полноты.
Покажем 4) $\Rightarrow$ 5). Пусть существует $f \in H$ такой, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow f \perp e_k$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \alpha_k(f) = 0$ и $\|f\|^2 = 0$ по равенству Парсеваля. По определению нормы $f = 0$ и система замкнута.
Покажем 5) $\Rightarrow$ 1). Зафиксируем $f \in H$. Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k(f)| \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 < +\infty.$$

По теореме Рисса-Фишера ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f) e_k$ сходится к некоторому элементу $S \in H$. Заметим, что $\langle S, e_k \rangle = \alpha_k(f) \langle e_k, e_k \rangle$ — по теореме о единственности. Тогда $\langle S, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle \forall k \in \mathbb{N}$. Из замкнутости системы $\{e_k\}$ следует что $S - f = 0 \Rightarrow S = f$ и теорема доказана. □

Примечание. В неполных евклидовых пространствах система может быть замкнута, но не полна.
Введём обозначение $e_k = (0, \ldots, 1, 0, \ldots,)$ (где 1 стоит на k-ом месте).
И пусть $e = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$. Рассмотрим тогда подпространство l_2, которое обозначим за E и определим как

$$E = Lin(e, e_2, e_3, \ldots).$$

с индуцированным скалярным произведением. Очевидно, что E — неполно:

$$\| \left(e - \sum_{k=2}^{n} \frac{e_k}{k} \right) - e_1 \| \to 0, n \to +\infty.$$

но $e_1 \notin E$.
В E система $\{e_2, e_3, \ldots\}$ — замкнута (вектор $(c, 0, \ldots) \notin E$, а значит если вектор ортогонален всем e_k, то он равен 0), но не полна (e не выражается через e_k).

5 Аппроксимация функций

Для наших целей понадобится приближать наши функции другими, более понятными.

Определение 5.1. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если она является линейной комбинацией индикаторов ячеек.

Теперь докажем, что такое функции приближают по норме L_p.

Теорема 5.1. *Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо, $f \in L_p(E)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \text{ ступенчатая функция } h_\varepsilon : ||f - h_\varepsilon||_{L_p(E)} < \varepsilon.$$

Идея доказательства: как обычно мы доказываем это сначала для простых функций, а позже для всех, сводя к уже доказанному с помощью приближений.

Доказательство. Разобьем доказательство на шаги

1. Пусть $f = I_G$, где множество G имеет конечную меру. Тогда из определения верхней меры следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \{P_k\}_{k=1}^\infty : \; \lambda^n(G) + \varepsilon \geqslant \sum_{k=1}^\infty \lambda(P_k).$$

   Теперь из сходимости ряда мер ячеек следует, что можно взять такой большой номер N :

$$\sum_{k=N+1}^\infty \lambda^n(P_k) < \varepsilon.$$

   По теореме о дизъюнктном представлении в полукольце существует набор непересекающихся $\{Q_l\}_{l=1}^m : \; P_1 \cup \ldots \cup P_N = \bigsqcup_{l=1}^m Q_l$. Обозначим за $A = \bigcup_{i=1}^\infty P_k, B = P_1 \cup \ldots \cup P_N$. Тогда

$$I_B = \sum_{l=1}^m I_{Q_l}.$$

   Возьмем в качестве приближающей ступенчатой функции I_B. Осталось доказать, что она приближает с точностью до ε по норме.

$$||f - h||_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_G(x) - I_A(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_A(x) - I_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= (\lambda^n(A \setminus G))^{\frac{1}{p}} + (\lambda^n(A \setminus B))^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

2. Если f – простая, то есть линейная комбинация индикаторов множеств конечной меры, явно сводится к пункту 1 с помощью неравенства треугольника.

3. $f \in L_p(E)$ произвольная, тогда из определения интеграла Лебега можно ее приблизить простой с точностью до $\varepsilon/2$,а простые мы уже умеем приближать ступенчатыми с точностью до $\varepsilon/2$. Осталось применить неравенство треугольника и требуемое будет доказано

□

Теперь, благодаря доказанной технике можем доказать следующую теорему:

Теорема 5.2. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:*

$$||f(x) - f(x - h)||_{L_p} \to 0, h \to 0$$

Идея доказательства: Обозначим за $f_h(x) = (x-h)$, заметим, что в силу неравенства треугольника:

$$||f - f_h|| \leqslant ||f - g|| + ||g - g_h|| + ||f_h - g_h|| \ \forall g \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

Ясно, что можно g можно подобрать, чтобы 1 и 3 слагаемые были маленькими, проблема лишь в том, чтобы уменьшить второе слагаемое.

Доказательство. Заметим, что для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$||f_h - g_h|| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - g(x-h)|dx = \{\text{выполним замену переменной } t = x - h\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)|dt = ||f - g||$$

Тогда в качестве g возьмем ступенчатую функцию, которая приближает f. Осталось теперь доказать, что g можно приблизить g_h. Из теоремы о дизъюнктном представлении следует, что g можно представить в виде:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{Q_k}(x), \ Q_k - \text{ячейка}$$

$$||g - g_h||_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot ||I_{Q_k} - I_{Q_k+h}||$$

Что стремится к нулю при $h \longrightarrow 0$. □

Лемма 5.1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ измеримая функция, тогда отображения*

$$(x, y) \to f(x - y)$$

$$(x, y) \to f(x + y)$$

измеримы.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Обозначим за $E_c = \{x| \ f(x) > c\}$, оно является измеримым из условия леммы. Теперь рассмотрим следующее линейное отображение:

$$T : (x, y) \longrightarrow (x - y, y).$$

Оно обратимо, так как определено обратное отображение $T^{-1}((x, y)) = (x + y, y)$. Осталось лишь заметить, что верно:

$$\{(x, y)|x - y \in E_c\} = T^{-1}(E_C \times \mathbb{R}^n) = \{(x, y)| \ f(x - y) > c\}.$$

Отсюда следует требуемое. □

Теперь мы готовы к определению свертки функций и к доказательству корректности этого определения.

Теорема 5.3. *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1. *Для $\lambda-$почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ корректно определена функция (будет называть ее сверткой) $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$.*
2. *$f * g$ измерима в широком смысле.*
3. *$f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$*

4. $||f * g||_{L_1} \leqslant ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1}$

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$H(x, y) = |f(x-y)| \cdot |g(y)|.$$

Ясно, что это неотрицательная, измеримая функция, тогда по теореме Тонелли:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} H(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx \right) dy.$$

Подробнее остановимся на втором интеграле, внутренний интеграл преобразуется так:

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx = |g(y)| \cdot ||f||_{L_1}$$

Тогда весь интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx \right) dy = ||f||_{L_1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)dy = ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1} < +\infty$$

Теперь применим теорему Фубини для $F(x, y) = f(x-y)g(y)$, так как выше мы показали, что $F(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда пункты $1, 2$ из нее сразу следуют. Покажем оставшиеся:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|dy \right) dx = ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1}$$

□

Сформулируем еще одну теорему

Теорема 5.4. *Пусть* $p \in [1, +\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, *где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Тогда:*

1. $f * g(x)$ *корректно определена для всех* $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $f * g(x)$ *равномерно непрерывна на* R^n.

Доказательство. Докажем последовательно

1. По неравенству Гельдера получаем:

$$|f * g(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|dy \leqslant ||f||_{L_p} \cdot ||g||_{L_{p'}} < +\infty$$

2. Обозначим за $(f * g)_h(x) = f * g(x-h), f_h(x) = f(x-h)$. Верно равенство:

$$(f * g)_h(x) - f * g(x) = \int_{R^n} f(x-y-h)g(y)dy - f * g(x) = f_h * g(x) - f * g(x)$$

Теперь оценим отклонение свертки при сдвиге:

$$|(f * g)_h(x) - f * g(x)| = |f_h * g(x) - f * g(x)| \leqslant ||f_h - f| * g(x)| \leqslant ||f - f_h||_{L_p} \cdot ||g||_{L_p'}$$

Теперь по уже доказанному утверждению, получаем, что правая часть стремится к 0 и при этом оценка не зависит от x. Таким образом, требуемое доказано.

3. Осталось рассмотреть случаи, когда одно из p, p' равно $+\infty$. А именно рассмотрим случай, когда $p = \infty, p' = 1$. Для этого случая достаточно лишь заметить, что совершенно аналогично доказывается неравенство:

$$|f * g(x)| \leqslant ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_\infty}$$

□

5.1 Аппроксимативная едининца

Определение 5.2. Назовем семейство функций $\{w_t(x)\}_{t\in(0,+\infty)}$ аппроксимативной единицей, если $\forall t > 0$:

1. $$w_t(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2. $$\int_{\mathbb{R}^n} w_t(x)dx = 1$$

3. $$\forall \delta > 0 \lim_{t\to+0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} w_t(x)dx = 0$$

Пример. Соболевской шапкой назовем следующую функцию:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-||x||^2}},\ x \in (-1,1) \\ 0,\ x \notin (-1,1) \end{cases}$$