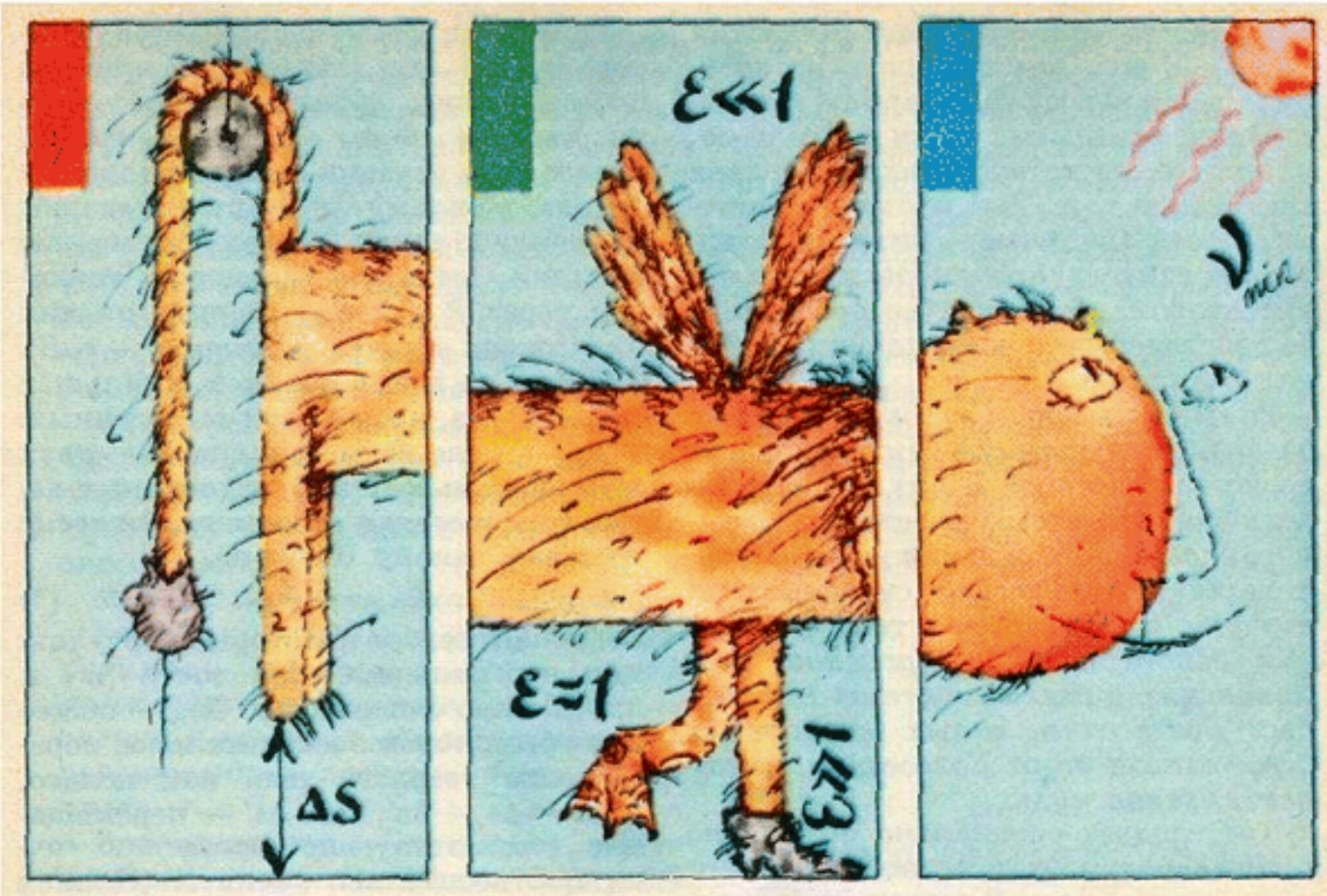
Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики



Лектор: Генерал теории Меры, Александр Иванович Тюленев

Для вас техали: *Потапов Станислав*,
Сысоева Александра,
Цеденов Артем,
Бадоля Пётр,
Баронов Михаил,
Шуминов Эзра
Петракова Анастасия
Наседкин Эрнест
Габидулин Андрей
Некрылов Леонид
Обухов Леонид
Тюленев Александр

Содержание

1 Введение

1.1 Полнота пространств L_p

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — пространство с мерой.

$p \in [1, +\infty]$

$\widetilde{L}_p(\mu)$ — полунормированное линейное пространство. Лишь *полу*нормированное потому, что равенство 0 интеграла в p-ой степени от функции не означает равенство 0 этой функции, а лишь равенство этой функции нулю почти всюду.

$L_p(\mu)$ — нормированное линейное пространство.

Это всё было в прошлом семестре, теперь же мы докажем полноту пространства L_p.

Напоминание. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если выполнено *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, \forall m \geqslant N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

1. Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, но не каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу из своего пространства.

2. Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, называется полным.

3. *Числовая* последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Определение 1.1. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированое пространсвто (л.н.п.) Оно называется *полным*, если

$\forall$ фундаментальная (по норме $\|\cdot\|$) последовательность $\{x^n\}$ пространства E сходится по норме пространства E к некоторому элементу $x \in E$.

Определение 1.2. Дано $E = (E, \|\cdot\|)$ — л.н.п. Пара последовательностей $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S^k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S^k := \sum_{n=1}^{k} x^n,$$

называется формальным рядом в E. При этом $\{S^k\}_{k=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм ряда, а $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ — членами ряда. Часто пишут просто

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \ — \text{ формальный ряд.}$$

Примечание. В определении выше ряд мы называем *формальным* потому, что ещё не было ничего сказано про его сходимость.

Определение 1.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ называется сходящимся в л.н.п. E, если

$$\exists x \in E : \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x^k \right\| \to 0, n \to \infty$$

Определение 1.4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ называется абсолютно сходящимся в л.н.п. E, если:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\| \ — \text{ сходится}$$

Теорема 1.1. *(Критерий полноты) E — л.н.п. полно $\Longleftrightarrow$ $\forall$абсолютно сходящийся в E ряд является сходящимся.*

Доказательство.
($\Longrightarrow$)

Пусть E полно и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится абсолютно $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$ — сходящийся числовой ряд, а значит последовательность частичных сумм фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n,m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \sum_{k=n}^{m} \|x^k\| < \varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника: $\left\| \sum\limits_{k=n}^{m} x^k \right\| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} \|x^k\| < \varepsilon.$
Тогда $\{S^n\}_{n=1}^{\infty}$ — поседовательность частичных сумм исходной последовательности фундаментальна в E.
Но E — полно $\Longrightarrow$ $\exists x \in E : \|x - S^n\| \to 0, n \to \infty$ $\Longrightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ — сходится в E
($\Longleftarrow$)
Пусть $\{x^n\}$ — фундаментальная последовательноть в E. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Берём $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_k = 2^{-k}$.
$\exists \{N_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geqslant N_k \hookrightarrow \|x^n - x^m\| \leqslant 2^{-k}.$$

Рассмотрим $\{x^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность последовательности $\{x^n\}$.
Возьмём $y_k := x^{N_{k+1}} - x^{N_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Положим $y_0 := x^{N_1}$.
Рассмотрим формальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$. В силу выбора подпоследовательности, если в качестве n выбрать N_k, а в качестве m выбрать N_{k+1}, то неравенство $\|x^n - x^m\| \leqslant 2^{-k}$ будет выполнено $\Longrightarrow$ $\|y_k\| \leqslant 2^{-k}$ $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ абсолютно сходится в E.
Но по условию доказываемого утверждения, любой *абсолютно сходящийся в E* ряд *сходится* в E, значит
ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ сходится $\Longrightarrow$ $\exists x \in E : \left\| x - \sum\limits_{k=0}^{l} y_k \right\| \to 0, l \to \infty.$
При этом

$$\sum_{k=0}^{l} y_k = y_0 + y_1 + \cdots + y_l = x^{N_1} + x^{N_2} - x^{N_1} + \cdots + x^{N_{l+1}} - x^{N_l} = x^{N_{l+1}}.$$

Объединив два последних результата, получим

$$\exists x \in E : \left\| x - x^{N_l} \right\| \to 0, l \to \infty.$$

В итоге доказали существование элемента $x \in E$ т.ч. к нему сходится подпоследовательности $\{x^{N_l}\}_{l=1}^{\infty}$.
Теперь остаётся воспользоваться условием фундаментальности и получить сходимость всей последовательности.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists L \in \mathbb{N} : \forall l \geqslant L \hookrightarrow \|x - x^{N_l}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}:\forall n,m\geqslant M\hookrightarrow\|x^n-x^m\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:=\max\{L,M\}\in\mathbb{N}:\forall n\geqslant N\hookrightarrow\|x-x^n\|\leqslant\|x-x^{N_M}\|+\|x^{N_M}-x^n\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

Теорема 1.2. *Пусть $p\in[1,+\infty]$. Тогда $L_p(\mu)$ полно.*

Доказательство. Разберём случай $p\in[1,+\infty)$. В силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что любой абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$ сходится в $L_p(\mu)$.
Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ — абсолютно сходящийся ряд в $L_p(\mu)$. То есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p$ сходится как числовой ряд.
Определим $F_n:=\left(\sum\limits_{k=1}^{N}|f_k|\right)^p$. Используя неравенство Минковского, покажем, что F_n интегрируема:

$$\forall N\in\mathbb{N}\hookrightarrow\left(\int\limits_X F_n(x)d\mu(x)\right)^{1/p}=\left(\int\limits_X\left(\sum_{k=1}^{N}|f_k|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p}\leqslant\sum_{k=1}^{N}\|f_k\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p<+\infty.$$

Тогда $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ — монотонная (неубывающая) функциональная последовательность.

Напоминание. Монотонность функциональной последовательности — это монотонность последовательность по n при каждом фиксированом x.

Тогда по теореме Леви

$$\exists\lim_{N\to\infty}\left(\int\limits_X F_n(x)d\mu(x)\right)^{1/p}=\left(\int\limits_X\lim_{N\to\infty}F_n(x)d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$\Longrightarrow\left(\int\limits_X\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p<+\infty.$$

$$\Longrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|\text{ конечна при }\mu\text{-п.в. }x\in X.$$

При фиксированном x имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ — обычный числовой ряд, а для него из абсолютной сходимости следует сходимость.

$$\Longrightarrow\ \text{при }\mu\text{-п.в.}x\in X\quad\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\text{ конечна.}$$

Положим $F(x):=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$, эта функция корректно определена μ-п.в. При этом μ — полная мера (меру считаем полной, если не было оговорено обратного).

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f_k(x),\ \text{этот предел существует для }\mu\text{-п.в. }x\in X.$$

Остаётся доказать, что $\left\|F - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right\|_p \to 0, n \to \infty$. Обозначим n-ый член этой последовательности как J_n.

$$J_n = \left(\int\limits_X \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \circledleq$$

Рассмотрим сумму ряда, как предел:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)|.$$

Вспомним лемму Фату:

$$\text{При } g_k \geqslant 0 \text{ верно} \int\limits_X \varliminf_{k\to\infty} g_k(x)d\mu(x) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_X g_k(x)d\mu(x).$$

Тогда по лемме Фату:

$$\left(\int\limits_X \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \circledleq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\int\limits_X |f_k(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \to 0, n \to \infty.$$

Итого $J_n \to 0, n \to \infty$. □

1.2 Неполнота RL_p

Определение 1.5. Пусть $RL_p([a, b])$ — линейное пространство функций, p-ая степень модуля которых интегрируема по Риману.

Замечание. С таким определением это не является нормированным пространством. Чтобы сделать его нормированным, нужно аккуратно ввести класс эквивалентности.

Теорема 1.3. *Пространство $RL_p([a, b])$ неполно.*

Доказательство.
Без ограничения общности, $[a, b] = [0, 1]$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Перенумеруем рациональные точки отрезка $[0, 1]$: $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_k\}$.

$$G_n := \bigcup_{k=1}^{n} \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \cap [0, 1].$$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Тогда χ_{G_n} интегрируема по Риману по критерию Лебега, потому что как характеристическая функция объединения конечного набора интервалов, пересечённых с отрезком, она обладает конечным числом разрывов. Таким образом

$$\{\chi_{G_n}\} \subset RL_p([0, 1]). \tag{1}$$

Докажем, что χ_G имеет множество точек разрыва положительной меры Лебега. Для этого рассмотрим $F = [0, 1] \setminus G$. Тогда $\chi_G(F) = 0$, но в то же время $\chi_G(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$, а так как $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, во всех точках F функция χ_G разрывна. При этом по счётной полуаддитивности меры Лебега $\mathcal{L}^n(G) \leqslant \frac{1}{2}$, а значит $\mathcal{L}^n(F) \geqslant \frac{1}{2} > 0$. Итак, χ_G разрывна на множестве F положительной меры, итого

$$\chi_G \notin RL_p([0,1]). \tag{2}$$

Введём обозначения

$$E_k := \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \cap [0,1].$$

$$G_m^n := \bigcup_{k=n}^{m} E_k.$$

(в новых обозначениях $G_n = G_n^1$) и покажем фундаментальность последовательности $\{\chi_{G_n}\}$:

$$\int_0^1 |\chi_{G_m}(x) - \chi_{G_n}(x)|dx = \text{так как } G_n \subseteq G_m = \int_0^1 \chi_{G_m \setminus G_n}(x)dx \leqslant \int_0^1 \chi_{G_m^n}(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_0^1 \chi_{E_k}(x)dx = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} \to 0, \text{ при } n, m \to \infty.$$

Итого, последовательность $\{\chi_{G_n}\}$ фундаментальна в $RL_p([0,1])$. (3)

Как известно, RL_p — подпространство L_p. Тогда, если у последовательности из RL_p есть предел в RL_p, то он такой же и при рассмотрении её как последовательности в L_p с пределом в L_p. В нашем случае, если бы у $\{\chi_{G_n}\}$ был предел в $RL_p([0,1])$, то у неё был бы такой же предел в $L_p([0,1])$. Но мы знаем, что её предел в $L_p([0,1])$ это χ_G, которая не лежит в $RL_p([0,1])$. Значит, у $\{\chi_{G_n}\}$ нет предела в $RL_p([0,1])$, однако это фундаментальная в $RL_p([0,1])$ последовательность. Значит пространство $RL_p([0,1])$ не полно. □

1.3 Функции ограниченной вариации

Определение 1.6. Пусть T — разбиение отрезка $[a,b]$, т.е.

$$T = \{x_i\}_{i=0}^{N_T}, \quad N_T \in \mathbb{N}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_T} = b.$$

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $V_T(f)$ — вариация функции f по разбиению T

$$V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T - 1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

$$V_a^b(f) := \sup_{T \text{ - разбиение } [a,b]} V_T(f)$$

Определение 1.7. f называется функцией ограниченной вариации на $[a,b]$, если

$$V_a^b(f) < +\infty.$$

Обозначается $f \in BV([a,b])$. От английского Bounded Variation.

Теорема 1.4. $BV([a,b])$ — *линейное пространство.*

Доказательство.
Покажем, что $f_1, f_2 \in BV([a,b]) \implies \alpha f_1 + \beta f_2 \in BV([a,b])$. Пусть T — произвольное разбиение $[a,b]$. Тогда по неравенству треугольника

$$V_T(\alpha f_1 + \beta f_2) \leqslant |\alpha| V_T(f_1) + |\beta| V_T(f_2).$$

Взяв супремум по всем разбиениям [a, b] получим желаемое. □

Лемма 1.1. *Если* $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *монотонна на* $[a,b]$, *то* $f \in BV([a,b])$ *и её* $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

Доказательство. Все $V_T(f) := \sum_{k=0}^{N_T - 1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ одного знака, то есть модуль раскрывается одинаково, а тогда соседние слагаемые друг друга уничтожают. □

Лемма 1.2. *Пусть* $-\infty < a < c < b < +\infty$. *Тогда*

$$f \in BV([a,b]) \iff \begin{cases} f \in BV([a,c]) \\ f \in BV([c,b]) \end{cases}.$$

В случае, если $f \in BV([a,b])$, *тогда*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Доказательство.
Шаг 1. ($\Longrightarrow$) и $\geqslant$

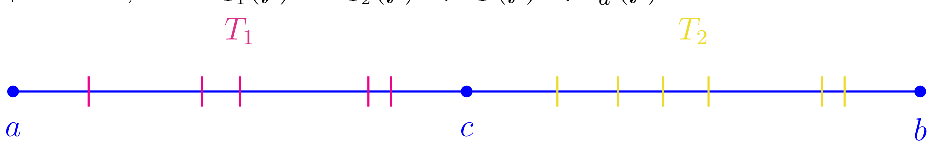
Пусть $f \in BV([a,b])$. Обозначим:

▷ T_1 — произвольное разбиение $[a,c]$,

▷ T_2 — произвольное разбиение $[c,b]$.

▷ $T = T_1 \cup T_2$ — разбиение отрезка $[a,b]$.

Тогда имеем, что $V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_T(f) \leqslant V_a^b(f)$.



Взяв sup сначала по T_1, а потом по T_2, получим $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leqslant V_a^b(f)$.

Шаг 2. ($\Longleftarrow$) и $\leqslant$

Пусть $\begin{cases} f \in BV([a,c]) \\ f \in BV([c,b]) \end{cases}$.

Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^N$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$.

Если $c = x_{i^*}$ при некотором i^*, то это простой случай, так как тогда можно $\{x_j\}_{j=0}^{i^*}$ выбрать в качестве T_1, а $\{x_j\}_{j=i^*}^N$ выбрать в качестве T_2. И тогда очевидным образом $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$, а взяв sup по всем T получим $V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$.

Теперь рассмотрим более интересный случай, когда ни при каком i x_i не равно c. Тогда $c \in (x_i, x_i + 1)$ при некотором i.

$$\begin{aligned} V_T(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{i-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_i) - f(c)| + |f(c) - f(x_{i+1})| + \sum_{k=i+1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \end{aligned}$$

Обозначим разбиения:

- $T_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, c\}$,
- $T_2 = \{c, x_{i+1}, \ldots, x_N\}$.

Тогда полученный ранее результат можно оценить как

$$\lesseqgtr V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Итого $V_T(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Взяв sup по всем T, получим:

$$\sup_T V_T(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

$$V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Если оба слагаемых в правой части конечны, то и V_a^b конечна. Итого из первого и второго пункта

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

□

Теперь воспользуемся этой леммой для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.5. *Пусть $f \in BV([a,b])$. Тогда функция $g(x) := V_a^x$ монотонно не убывает на $[a,b]$*

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда применим только что доказанную лемму, выбрав $a = a, c = x_1, b = x_2$.

$$V_a^{x_2}(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f)$$

$$V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f) \geqslant 0$$

$$g(x_2) - g(x_1) \geqslant 0$$

$$g(x_2) \geqslant g(x_1)$$

□

Теорема 1.6. *Пусть $f \in BV([a,b])$. Тогда $\exists f_1$ и f_2 монотонно неубывающие на $[a,b]$ такие, что $f = f_1 - f_2$.*

Доказательство. Определим $f_1(x) := V_a^x(f) \quad \forall x \in [a,b]$. По только что доказанной теореме это монотонно неубывающая функция.
Докажем, что функция $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ монотонно не убывает.

$$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b.$$

$$f_2(y) - f_2(x) = \Big[f_1(y) - f(y)\Big] - \Big[f_1(x) - f(x)\Big] = \Big[f_1(y) - f_1(x)\Big] - \Big[f(y) - f(x)\Big] \overset{(1)}{=} V_x^y(f) - [f(y) - f(x)].$$

(1) В силу аддитивности вариации по отрезкам
Заметим, что $V_x^y(f) = \sup\limits_T V_T(f) \geqslant V_{\{x,y\}}(f) = |f(y) - f(x)|$. Тогда предыдущее выражение не меньше 0, а значит f_2 не убывает. □

Следствие. $\forall f \in BV([a,b])$ имеет не более чем счётное множество точек разрыва, при том все они 1-го рода. (Из 1 семестра, помним что монотонная функция имеет не более чем счетное число точек разрыва, при том все они первого рода)

1.4 Абсолютно непрерывные функции

Определение 1.8. функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной на $[a,b]$, если

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \ \underline{\text{дизъюнктивной}} \text{ системы } \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum_{k=1}^N |a_k - b_k| < \delta(\varepsilon)$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

$AC([a, b])$ — множество всех абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций. От английского Absolutely Continuous.

Замечание. $f \in AC([a, b])$ является непрерывной на $[a, b]$. (Так как из абсолютной непрерывности следует равномерная непрерывность.) Обратное неверно

Контрпример.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \in C([0, 1])$, но $f \notin BV([0, 1])$, а значит по теореме, которая будет доказана ниже, $f \notin AC([0, 1])$.

Теорема 1.7. *Если* $f \in AC([a, b])$, *то* $f \in BV([a, b])$.

Доказательство. Запишем определение абсолютной непрерывности при $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta = \delta(1) > 0 : \forall$ конечного попарно непересекающегося набора интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N : \sum\limits_{k=1}^N |b_k - a_k| < \delta \hookrightarrow \sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < 1$.
Теперь разобъём отрезок $[a, b]$. Пусть $\mathbb{N} \ni M := \left[\frac{|b-a|}{\delta}\right] + 1$.

$$\begin{aligned} &x_0 = a \\ &x_1 = a + \frac{b-a}{M} \\ &\vdots \\ &x_M = a + b - a = b. \end{aligned}$$

То есть поделили отрезок $[a, b]$ на одинаковые куски.
Так как $x_{i+1} - x_i < \delta$ (специально для выполнение этого было взято достаточно большое M), то $\forall$ разбиение отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ образует естественным образом конечным набор дизъюнктных интервалов суммарной длины меньше δ, а значит по абсолютной непрерывности $V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < 1 \quad \forall i$
Тогда в силу аддитивности вариации

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{M-1} V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < \sum_{i=0}^{M-1} 1 = M < +\infty.$$

$\square$

2 Ряды Фурье

Идея представления функции тригонометрическим рядом являлась одной из центральных на рубеже 18-19 веков. Однако, строгая теория оформилась лишь к началу 20-века.

2.1 Неформальная идея

Прежде чем переходить к строгим формулировкам, поясним неформально корни идей, лежащих в основе теории рядов Фурье.

Если $V := (V, < \cdot,\cdot >)$ – конечномерное евклидово пространство, а $\{e_n\}_{n=1}^N$ – ортогональный базис в V, то любой вектор $x \in V$ имеет следующее разложение по базису $\{e_n\}_{n=1}^N$:

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{< x,e_n >}{< e_n,e_n >} e_n. \tag{2.1.1}$$

Естественно поставить вопрос, имеется ли аналог (2.1.1) для бесконечномерных евклидовх пространств?

Оказывается, в некоторых важных случаях ответ на этот вопрос положительный. Более точно, если $H := (H, < \cdot,\cdot >)$ – бесконечномерное гильбертово пространство (то есть евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением), а $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в нем, то для всякого $x \in H$ имеем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< x,e_n >}{< e_n,e_n >} e_n. \tag{2.1.2}$$

При этом числа

$$c_n(x) := \frac{< x,e_n >}{< e_n,e_n >}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.3}$$

называются *коэффициентами Фурье элемента* x *по системе* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, а ряд в правой части (2.1.2) – *рядом Фурье элемента* x *по системе* $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Частный случай гильбертова пространства – $L_2([-l,l])$, где $l > 0$ – фиксированное число. Действительно, скалярное произведение, порождающее L_2–норму, задается формулой (мы рассматриваем случай комплексного пространства, интеграл от комплекснозначной функции по определению это $\int\limits_E f d\mu := \int\limits_E Re(f) d\mu + i \int\limits_E Im(f) d\mu$)

$$< f,g > := \int_{-l}^{l} f(x)\overline{g}(x)\, dx.$$

Можно показать, что система функций

$$1, \sin(\frac{\pi x}{l}), \cos(\frac{\pi x}{l}), ..., \sin(\frac{\pi n x}{l}), \cos(\frac{\pi n x}{l}),... \tag{2.1.4}$$

является ортогональным базисом в пространстве $L_2([-l,l])$. Иными словами, для любой функции $f \in L_2([-l,l])$ ее ряд Фурье сходится к ней в смысле среднего квадратичного. Кроме того, ортогональным базисом является также система комплексных экспонент

$$\{e^{\frac{i\pi k x}{l}}\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{2.1.5}$$

Отметим, однако, что формально, при $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты

$$a_k(f) := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{\pi k x}{l})\, dx, \quad b_k(f) := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{\pi k x}{l})\, dx$$

имеют смысл для $f \in L_1([-l,l])$.

Примечание. Здесь и далее a_k, b_k это коффиценты перед косинусом и синусом соответсвенно, а c_k перед компелксной экспонентой.

2.2 Строгая теория

Без ограничения общности будем работать с элементами $f \in L_1([-\pi,\pi])$, так как гомотетией можно любую систему привести к такому виду. Данная система называется стандартной тригонометрической системой.

Определение 2.1. Гильбертово пространство — это вещественное линейное пространство H, на котором задано скалярное произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющее следующим аксиомам для всех $x, y, z \in H$ и $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (симметричность),
2. $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (линейность по первому аргументу),
3. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$, причём $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (положительная определённость).

При этом пространство H считается **полным** по норме, индуцированной скалярным произведением:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

То есть всякая фундаментальная последовательность в H сходится в H.

Определение 2.2. (Топологический базис или базис Шаудер Пусть у нас есть X - л.н.п, будем говорить что система ненулевых векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом Шаудера пространства X, если:

$$\forall x \in X \exists! \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \|x - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) e_k\| \to 0, N \to \infty$$

То есть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) e_k$. Из единственности в определнии следует линейная независимость системы векторов.

Утверждение 2.1. *Каждому такому элементу можно сопоставить формальный ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе. При том знак "$\sim$"обозначет сопостовление функции ее формального ряда Фурье(Мы можем вычислить коэффициенты, но не можем ничего утверждать про сходиомсть)*

$$f \sim a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx),$$

а также по системе комплексных экспонент

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}.$$

При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим оператор n-ой частичной суммы ряда Фурье $S_n : L_1([-\pi,\pi]) \to C([-\pi,\pi])$. При $f \in L_1([-\pi,\pi])$ положим

$$S_n[f](x) := a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

где D_n — ядро Дирихле:

$$D_n(x) := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{2.2.2}$$

Свойства ядра Дирихле:

2.3 Теорема Римана–Лебега об осцилляции

Докажем теперь важную теорему Римана–Лебега об осцилляции.

Примечание. (От редакторов) Эту теорему более наглядной делает ее более простая версия, без комплексных экспонент, а с тригонометрическими функциями, тогда мы понимаем что $y = \omega$ это "частота колебаний"нашего синуса:

Функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\omega x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,dx = 0.$$

Теорема 2.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$–измеримое по Лебегу множество и $f \in L_1(E)$. Тогда*

$$I(y) := \int\limits_E f(x)e^{i<x,y>}\,dx \to 0, \quad \|y\| \to +\infty. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Будем считать функцию f продолженной нулем вне множества E. При $y \neq 0$ рассмотрим вектор $h = h(y) := \frac{\pi y}{\|y\|^2}$. Тогда сделав замену переменной $x = x' - h$ имеем

$$I(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i<x,y>}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x'-h)e^{-i\pi}e^{i<x',y>}\,dx' = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{i<x,y>}\,dx.$$

Таким образом, поскольку $h(y) \to 0$, $\|y\| \to \infty$, получим

$$2|I(y)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(f(x) - f(x-h(y))\Big)e^{i<x,y>}\,dx\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x) - f(x-h(y))|\,dx \to 0, \quad \|y\| \to +\infty. \tag{2.3.2}$$

$\square$

Примечание. Здесь используется непрерывность интеграла по сдвигу. Идея доказательства простая. Мы можем функцию из L_1 приблизить простой. А для нее это верно, тк это верно для характерестической функции, а для нее верно, тк это верно для измеримого множества.

Следствие. Если $f \in L_1([-\pi,\pi])$, то

$$\lim_{k\to\infty} a_k(f) = \lim_{k\to\infty} b_k(f) = \lim_{k\to\infty} c_k(f) = 0.$$

Те мы получаем что коэффициенты Фурье стремятся к нулю, а значит выполнено необходимое условие сходимости ряда, то есть существуют условия при которых ряд Фурье будет сходится.

Примечание. Есть некотрая серия теорем которые дают понимание про ряды фурье, но доказательство которых выходит за рамки курса

1. Пример Колмогорова. $\exists f \in L_1[-\pi,\pi]$ такая что ее ряд Фурье расходится почти всюду.
2. Потом Колмогоров доказал более сильное утверждение. $\exists f \in L_1[-\pi,\pi]$ такая что ее ряд Фурье расходится в каждой точке.
3. Есть также теорема (Lennart Carlesson), что $\forall f \in L_2[-\pi,\pi]$ ряд Фурье сходится к f п.в на $[-\pi,\pi]$.
4. Теорема (Hunt) $\forall f \in L_p[-\pi,\pi], p \in (1,+\infty)$ ряд Фурье сходится к f п.в на $[-\pi,\pi]$.

2.4 Компактная форма записи

Определение 2.3. Пусть X и Y — два линейных пространства. Отображение

$$T\colon X \to Y$$

называется оператором из X в Y.

Определение 2.4. $\forall f \in L_1\left([-\pi,\pi]\right)$ определим оператор частичной суммы ряда Фурье $S_n\colon L_1\left([-\pi,\pi]\right) \to C\left([-\pi,\pi]\right)$.

$$S_n[f](x) := a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx)$$

Также это назвают n-ая частичная сумма Фурье

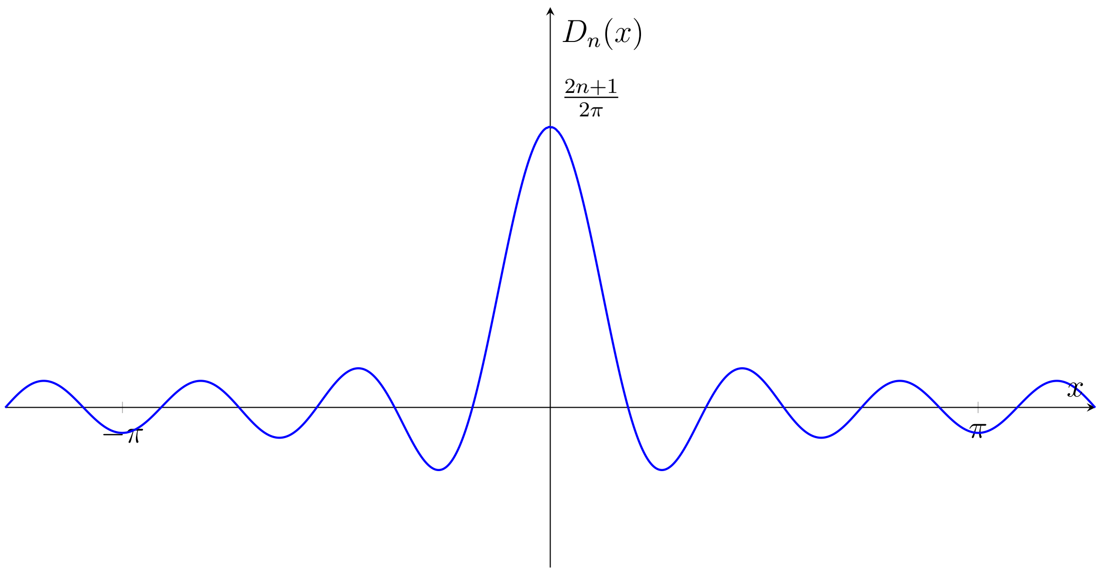
Заметим, что

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

где D_n — ядро Дирихле:

$$D_n(x) := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{2.4.2}$$

График ядра Дирихле при $n = 5$



Определение 2.5. Для $\mathcal{L}$-почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ корректно определена функция, которую мы называем свёрткой:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,dy.$$

Доказательство свойств свертки будет далее.

Примечание. Свойства ядра Дирихле:

1. D_n – четная 2π-периодическая функция;
2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$
3. Продлив функции вне $[-\pi, \pi]$нулем, имеем $S_n[f](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt, = D_n * f(x)$

2.5 Вторая теорема о среднем

В этом пункте мы докажем одно вспомогательное утверждение из теории интеграла Римана, которое будет очень важно при доказательстве достаточных условий сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 2.2. *Пусть $g \in R([a,b])$, а f нестрого монотонна на $[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int\limits_{\xi}^{b} g(x)\,dx. \tag{2.5.1}$$

Если, кроме того, f неотрицательна на $[a,b]$, то справедливы более простые формулы:
а) если f нестрого убывает, то при некотором $\xi \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)\,dx; \tag{2.5.2}$$

б) если f нестрого возрастает, то при некотором $\xi \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{2.5.3}$$

Доказательство. Отметим, что $fg \in R([a,b])$, что легко следует из критерия Лебега. Поэтому, левые части формул из определения теоремы (2.5.1)–(2.5.3) имеют смысл.

Мы докажем лишь формулу (2.5.2), поскольку (2.5.3) доказывается аналогично, а равенство (2.5.1) легко вытекает из (2.5.2) и (2.5.3).

Step 1. Итак, пусть f неотрицательна и нестрого убывает на $[a,b]$. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. То есть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогда, очевидно, в силу линейности интеграла Римана имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx + \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-f(x_i))g(x)\,dx =: \Sigma_1(T) + \Sigma_2(T).
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Step 2. Поскольку $g \in R([a,b])$, она ограничена на $[a,b]$. Следовательно, $\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| < +\infty$. Легко видеть, что

$$\Big|\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-f(x_i))g(x)\,dx\Big| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)|x_i - x_{i+1}|,$$

где $\omega_i := \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$ – колебание функции f на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$. Таким образом, в силу критерия интегрируемости, имеем (здесь и далее через $l(T)$ обозначена мелкость разбиения T)

$$\Sigma_1(T) \to 0, \quad l(T) \to 0. \tag{2.5.5}$$

Step 3. Рассмотрим функцию $G(x) := \int\limits_a^x g(t)\,dt$. Очевидно, что G непрерывна на $[a,b]$. Используя преобразование Абеля, имеем (здесь использовано, что $G(x_0) = G(a) = 0$)

$$\begin{aligned}
&\Sigma_2(T) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i)) \\
&= f(x_{n-1})G(b) + \sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i))G(x_i).
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

В силу непрерывности G на $[a,b]$ найдутся константы m,M, для которых $m \leqslant G(x) \leqslant M$ при всех $x \in [a,b]$. Ключевое наблюдение состоит в том, что в силу невозрастания f, имеем $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geqslant 0$ при всех i. Суммируя сделанные наблюдения, имеем

$$\begin{aligned}
&mf(a) = m\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + mf(x_{n-1}) \\
&\leqslant \Sigma_2(T) \leqslant M\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + Mf(x_{n-1}) = Mf(a).
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Из (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.7) следует, что $\exists \lim_{l(T)\to 0} \Sigma_1(T) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ и, кроме того,

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mf(a). \tag{2.5.8}$$

Step 4. Если $f(a) = 0$, то в силу (2.5.8) в качестве ξ можно взять любую точку отрезка $[a,b]$. Если $f(a) \neq 0$, то в силу теоремы о промежуточном значении, примененной к непрерывной функции G, из (2.5.8) выводим, что найдется точка $\xi \in [a,b]$, для которой

$$G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2.5.9}$$

Теорема полностью доказана.

3 Сходимость ряда Фурье в точке.

Мы начнём с формулировки общего критерия сходимости, не требующего знания конкретных свойств регулярности функций. Поэтому мы называем его “абстрактным”. Он бесполезен с практической точки зрения, поскольку по сути является переформулировкой определения. С другой стороны, такая формулировка окажется полезной при доказательстве конкретных признаков сходимости рядов Фурье.

3.1 Абстрактный критерий сходимости.

Комбинируя (2.4.1), (2.4.2), и пользуясь четностью ядра Дирихле, при $f \in L_1([-\pi,\pi])$ получим

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &:= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac12)(t-x)}{\sin(\frac{(t-x)}{2})} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac12)u}{\sin(\frac{u}{2})} f(x-u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac12)u}{\sin(\frac{u}{2})} f(x+u)\,du. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Лемма 3.1. *При $n \in \mathbb{N}$ и $\forall u \in (-\pi,\pi)$ справедливо равенство*

$$D_n(u) = \frac{\sin(nu)}{\pi u} + \frac{1}{2\pi}(\cos(nu) + g(u)\sin(nu)), \tag{3.1.2}$$

где функция $g : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ не зависит от n и ограничена на интервале $(-\pi,\pi)$.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы, получим

$$D_n(u) = \frac{\sin(nu)\cos(\frac{u}{2})}{2\pi\sin(\frac{u}{2})} + \frac{\cos(nu)}{2\pi} = \frac{\sin(nu)}{\pi u} + \frac{1}{2\pi}(\cos(nu) + g(u)\sin(nu)), \tag{3.1.3}$$

где мы положили $g(0) = 0$ и

$$g(u) := \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{u}{2})} - \frac{2}{u}, \quad u \in (-\pi,\pi) \setminus \{0\}.$$

Нетрудно видеть, что g – нечетная на $(-\pi,\pi)$ и монотонно убывает. Поэтому, $|g(u)| \leqslant 2/\pi$ при всех $u \in (-\pi,\pi)$. □

Теорема 3.1 (“абстрактный” критерий сходимости ряда Фурье в точке)**.** *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *является* 2π*-периодичной, и* $f \in L_1([-\pi,\pi])$*. Ряд Фурье* f *сходится в точке* $x \in \mathbb{R}$ *к числу* $S \in \mathbb{R}$ *в том и только том случае, если существует* $\delta \in (0,\pi]$ *такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\delta \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big]\frac{\sin(nu)}{u}\,du = 0. \tag{3.1.4}$$

Доказательство. Нам будет удобно сделать несколько шагов.

Шаг 1. В силу леммы 3.1 мы можем переписать (3.1.1) в виде

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} f(x+u)\,du + \varepsilon_n[f](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u} f(x-u)\,du + \varepsilon_n[f](x) \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{f(x-u)+f(x+u)}{2}\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du + \varepsilon_n[f](x), \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

где мы положили (равенство справедливо в силу четности косинуса и в силу четности произведения $g(u)\sin(nu)$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_n[f](x) &:= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)(\cos(nu) + g(u)\sin(nu))\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)(\cos(nu) + g(u)\sin(nu))\,du. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

По теореме Римана–Лебега 2.3.1 имеем $\varepsilon_n[f](x) \to 0$, $n \to \infty$.

Шаг 2. Используя рассуждения предыдущего шага для $f \equiv 1$, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du = 1 + o(1), \quad n \to \infty. \tag{3.1.7}$$

Шаг 3. Комбинируя (3.1.4) и (3.1.7), имеем

$$|S - S_n[f](x)| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du + o(1), \quad n \to \infty. \tag{3.1.8}$$

Шаг 4. Функция $1/u$ ограничена на интервале (δ,π) (при любом фиксированном $\delta > 0$). Следовательно, по теореме Римана–Лебега получим

$$\int\limits_{\delta}^{\pi} \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du = o(1), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, учитывая четность функции $\sin(nu)/u$, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du &= 2\int\limits_{0}^{\delta}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du\\ &+2\int\limits_{\delta}^{\pi}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du\\ &=2\int\limits_{0}^{\delta}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\Big]\frac{\sin(nu)}{\pi u}\,du+o(1),\quad n\to\infty.\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Комбинируя (3.1.8) и (3.1.9), получим (3.1.4).

Теорема доказана. □

Следствие (Принцип локализации для рядов Фурье)**.** Пусть даны 2π-периодические функции $f, g \in L_1([-\pi,\pi])$. Тогда, если для некоторой точки x $\exists\delta>0$ такой, что для $f|_{(x-\delta,x+\delta)} \equiv g|_{(x-\delta,x+\delta)}$, то ряды Фурье этих функций в точке x сходятся и расходятся одновременно.

3.2 Признаки поточечной сходимости рядов Фурье.

Теорема 3.2 (Признак Дини)**.** *Пусть дана 2π-периодическая функция $f \in L_1([-\pi,\pi])$ и для некоторой точки x существуют $\delta\in(0,\pi)$ и $S\in\mathbb{R}$ такие, что*

$$\int_0^\delta |f(x+u)+f(x-u)-2S|\frac{du}{u} < +\infty.$$

то ряд Фурье функции f сходится в точке x к S.

Доказательство. В силу критерия сводимости ряда Фурье в точке, необходимо и достаточно показать

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\right)\frac{\sin nu}{u}du=0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\delta\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-S\right)\frac{\sin nu}{u}du\right| &\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{2}\int_0^\delta|f(x+u)+f(x-u)-2S|\frac{|\sin nu|}{u}du &\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{2}\int_0^\delta\frac{|f(x+u)+f(x-u)-2S|}{u}du&<+\infty.\end{aligned}$$

То если мы зафиксируем $\varepsilon>0$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдётся $\delta(\varepsilon)$ такой, что

$$\frac{1}{2}\int_0^\delta|f(x+u)+f(x-u)-2S|\frac{du}{u}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

А значит по теореме Римана-Лебега

$$\int_{\delta(\varepsilon)}^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)-2S}{u}\sin nu\cdot du\to 0, n\to+\infty.$$

Поскольку данные оценки верны для любого ε, то теорема доказана. □

Теорема 3.3 (Признак Дирихле–Жордана)**.** *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-периодична, и* $f \in BV((a,b)) \cap L_1([-\pi,\pi])$ *для некоторого интервала* (a,b)*, то её ряд Фурье сходится в каждой точке* $x \in (a,b)$*, причем*

$$S_n[f](x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В силу теоремы о представлении функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций, достаточно рассмотреть случай, когда f не убывает.

Шаг 1. Зафиксируем точку $x_0 \in (a,b)$. В силу теоремы 3.1 достаточно доказать, что при некотором $\delta > 0$

$$I_n := \int\limits_0^{\delta} \frac{\sin(nu)}{u} \Big[f(x_0+u) - f(x_0+0)\Big]\, du \to 0, \quad n \to \infty.$$

Шаг 2. По признаку Дирихле несобственный интеграл (понимаемый в смысле Римана или в смысле Лебега)

$$J := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

является сходящимся. Поэтому существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\sin(nu)}{u}\, du\Big| = \Big|\int\limits_{nt_1}^{nt_2} \frac{\sin(t)}{t}\, dt\Big| \leqslant C \quad \forall t_1 < t_2. \tag{3.2.1}$$

Шаг 3. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, что $U_\delta(x_0) \subset (a,b)$ и при этом $|f(x_0+0) - f(x_0+u)| < \frac{\varepsilon}{2C}$ при всех $u \in (0,\delta(\varepsilon))$. В силу второй теоремы о среднем имеем

$$I_n^1 := \int\limits_0^{\delta(\varepsilon)} \frac{\sin(nu)}{u} [f(x_0+u) - f(x_0+0)]\, du = [f(x_0+\delta) - f(x_0+0)] \int\limits_{\xi}^{\delta(\varepsilon)} \frac{\sin(nu)}{u}\, du.$$

Отсюда и из (3.2.1) имеем $|I_n^1| < \varepsilon/2$.

Шаг 4. В силу теоремы Римана–Лебега 2.3.1 имеем существование такого числа $N_\varepsilon := N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$, что при $n \geqslant N_\varepsilon$

$$|I_n^2| := \Big|\int\limits_{\delta(\varepsilon)}^{\delta} \frac{\sin(nu)}{u} [f(x_0+u) - f(x_0+0)]\, du\Big| < \varepsilon/2.$$

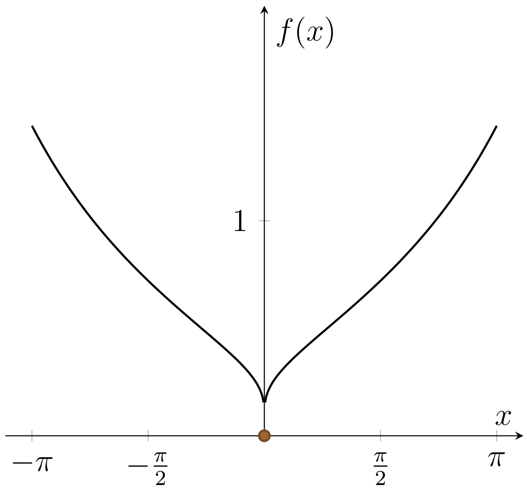
Шаг 5. Собирая вышеприведенные оценки, получаем, что $|I_n| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N_\varepsilon$.

Теорема полностью доказана.

Примечание. Признаки Дини и Дирихле Жордана не сравнимы.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left|\ln \frac{x}{2\pi}\right|}, & 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, & x = 0, \\ f(-x), & -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$



Понятно, что $f \in BV([-\pi,\pi]) \cap C([-\pi,\pi]) \quad \Rightarrow$ а значит работает признак Дирихле–Жордана. Но признак Дини не работает:

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt = 2\int_0^\delta \frac{f(t)}{t}\,dt = 2\int_0^\delta \frac{dt}{|\ln\left(\frac{t}{2\pi}\right)|} = +\infty$$

Пример.

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in (0,\pi], \\ 0, & x = 0, \\ \Psi(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

$\Psi \notin BV((-\delta,\delta)) \quad \forall \delta > 0 \quad \Rightarrow$ признак Дирихле–Жордана нельзя использовать.

$$\text{Проверим сходимость:} \quad 2\int_0^\delta \frac{|\Psi(t)|}{t}\,dt \leqslant 2\int_0^\delta \frac{dt}{\sqrt{t}} < +\infty$$

Признак Дини работает

Определение 3.1. Будем говорить, что точка x_0 функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является регулярной, если в ней $\exists f(x_0 \pm 0)$ и $\exists f'_\pm(x_0)$.

Следствие (Из признака Дини)**.** Пусть дана 2π-периодическая функция $f \in L_1([-\pi,\pi])$. Тогда если x_0 — регулярная точка функции f, то ряд Фурье f сходится в ней к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Для доказательства в силу признака Дини достаточно проверить, что $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\int_0^\delta \Big| f(x_0+u) - f(x_0+0) + f(x_0-u) - f(x_0-0) \Big| \frac{du}{u} < +\infty.$$

Поскольку

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u} \to f'_+(x_0), u \to +0 \quad \frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u} \to f'_-(x_0), u \to +0.$$

То есть существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\right| \in \left[\frac{|f'_+(x_0)|}{2}, 2|f'_+(x_0)|\right] \quad \left|\frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u}\right| \in \left[\frac{|f'_-(x_0)|}{2}, 2|f'_-(x_0)|\right] \forall u \in (0,\delta).$$

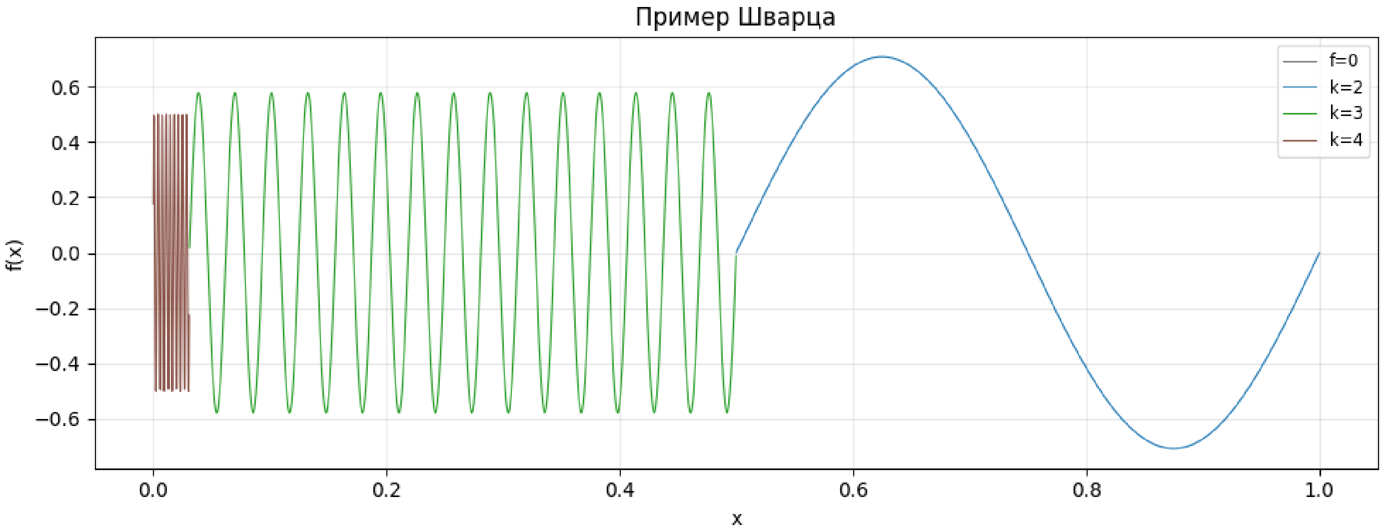
А значит выполнено условие Дини и ряд сходится к полусумме односторонних пределов. □

Факт. *Для любой непрерывной 2π периодической функции ее ряд Фурье сходится к ней почти всюду (следует из теоремы Карлесона)*

Пример (Шварц)**.** Существует непрерывная 2π-периодическая функция такая, что её ряд Фурье расходится в нуле.
Определим функцию f как

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sin n_k t, & t \in [t_k, t_{k-1}], k = 2, \dots \end{cases}$$

где $n_k = 2^{k!}$, $t_1 = \pi$ и $t_k = \frac{2\pi}{n_k}$, $k > 1$.



Определим $J_n[f]$ как

$$J_n[f](0) = \int_0^\pi \frac{\sin nt}{t} f(t) dt.$$

Исследуем поведение $J_n[f]$ на гармониках n_k:

$$J_{n_k}[f](0) = \int_0^\pi \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt = \int_0^{t_k} \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt + \int_{t_k}^{t_{k-1}} \frac{\sin^2 n_k t}{t\sqrt{k}} dt + \int_{t_{k-1}}^{\pi} \frac{\sin n_k t}{t} f(t) dt = F_k + J_k + H_k.$$

Рассмотрим для начала поведение интеграла J_k:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \sin^2 \tau \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \frac{1 - \cos 2\tau}{2\tau} d\tau.$$

где $A_k = 2\pi \frac{n_k}{n_{k-1}}$. Заметим, что

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos 2\tau}{\tau} d\tau.$$

сходится по признаку Дирихле, а значит

$$\exists C > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \int_{2\pi}^{A_k} \frac{\cos 2\tau}{2\tau} d\tau \right| < C.$$

С другой стороны,

$$\int_{2\pi}^{A_k} \frac{d\tau}{2\tau} = \ln \frac{A_k}{2\pi} = \frac{1}{2}(k! - (k-1)!) \ln 2 \geqslant \frac{k! \ln 2}{3}.$$

А значит
$$J_k \geqslant \frac{\ln 2}{3\sqrt{k}} k! + O(1).$$
Оценим H_k:
$$|H_k| \leqslant \ln \frac{\pi}{t_{k-1}} = \ln \frac{n_{k-1}}{2} \leqslant (k-1)! \ln 2.$$
И последний интеграл:
$$|F_k| \leqslant \int_0^{t_k} \left| \frac{\sin n_k t}{t} f(t) \right| dt \leqslant \int_0^{t_k} \frac{|\sin n_k t|}{t} |f(t)| dt \leqslant \int_0^{t_k} |n_k f(t)| dt \leqslant \frac{n_k t_k}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \to 0, k \to +\infty.$$
Таким образом, получается:
$$J_{n_k}[f](0) \geqslant \frac{\ln 2}{3\sqrt{k}} k! + O(1) - (k-1)! \ln 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \geqslant (k-1)! \ln 2 (\frac{\sqrt{k}}{3} - 1) + O(1) \to +\infty, k \to +\infty.$$
А значит $S_{n_k}[f](0) \to +\infty, k \to +\infty$ и ряд Фурье функции f расходится в нуле.

3.3 Суммы Фейера.

Неформальная идея. При рассмотрении обычных числовых рядов, возникала ситуация $1+(-1)+1+(-1)+1+\ldots$ это расходящийся ряд, так как нет предела частичных сумм. Но вот если мы рассмотрим $\Sigma_n = \frac{S_1+\dots+S_n}{n} \to \frac{1}{2}$. С рядами Фурье часто происходит также. Поэтому мы рассматриваем ряды Фейера, как аналог Σ_n.

Определение 3.2. Пусть дана 2π-периодическая $f \in L_1([-\pi, \pi])$. Суммой Фейера для f будем называть
$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_i[f].$$

Распишем подробнее сумму Фейера через выражение для ядер Дирихле:
$$\sigma_n[f](x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-u)}{\sin u/2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+1/2) u du.$$
В тоже время,
$$\frac{1}{\sin u/2} (\sin u/2 + \ldots + \sin(n-1/2)u) \sin u/2 = \frac{1}{2 \sin u/2} (1 - \cos nu).$$
Определение 3.3. Ядром Фейера будем называть
$$\Phi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k = \frac{\sin^2 nu/2}{2\pi n \sin^2 u/2}.$$

Тогда сумма Фейера для f может быть записана как свёртка ядра Фейера и функции f:
$$\sigma_n[f](x) = \Phi_n * f = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-u) f(u) du.$$
Ядро Фейера можно также записать в виде
$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(u) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|j|<k} e^{iku} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{iku}$$

Утверждение 3.1. *Нетрудно заметить некоторые свойства ядра Фейера:*

- $\triangleright$ $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \Phi_n \geqslant 0.$
- $\triangleright$ Φ_n — *2π-периодичная функция.*
- $\triangleright$ *Поскольку* $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)du = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1.$$

- $\triangleright$ *Для ядра Фейера справедливо т.н. «фокусирующее свойство»: при всяком* $\delta > 0$ *и* $\delta < |u| < \pi$ *верно*

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nu/2}{\sin u/2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2\pi n \sin^2 \delta/2} \leqslant \frac{\pi}{2n\delta^2} \to 0, n \to +\infty.$$

Таким образом,

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \sup_{\delta < |u| < \pi} \Phi_n(u) \to 0, n \to +\infty.$$

Определение 3.4. Будем говорить, что для $\alpha \in (0,1)$ функция лежит в $H^\alpha(\mathbb{R})$ (т.е. удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α) если

$$\exists C > 0 \forall x', x'' \in \mathbb{R} \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''|^\alpha.$$

При $\alpha = 1$ это условие Липшица.

Теорема 3.4. *Пусть дана 2π-периодическая $f \in H^\alpha(\mathbb{R}), \alpha \in (0,1)$. Тогда ряд Фурье f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Более того,*

$$\Big|S_n[f](x) - f(x)\Big| \leqslant CC_\alpha \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для начала рассмотрим отклонения от суммы Фейера:

$$\sigma_n[f](x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\Phi_n(t)dt.$$

То есть

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\Phi_n(t)dt \leqslant \frac{C}{2\pi n}\int_0^{\pi} t^\alpha \cdot \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2 t/2}dt \leqslant (*)$$

Но, поскольку $\sin t/2 \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}$, то

$$(*) \leqslant \frac{C\pi}{2n}\int_0^{\pi} t^{\alpha-2}\sin^2(nt/2)dt = (*)$$

Теперь сделаем замену $nt/2 = u$ и получим

$$(*) = \frac{C\pi}{2n}\int_0^{\pi n/2}\left(\frac{2u}{n}\right)^{\alpha-2} \cdot \sin^2 u \cdot \frac{2u}{n}du \leqslant \frac{2^{\alpha-2}C\pi}{n^\alpha}\int_0^{\pi n/2} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}du.$$

Но $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}} du$ сходится в несобственном смысле, а значит $\exists \widetilde{C} > 0$ такая, что

$$\left| \int_0^{\pi n/2} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}} du \right| \leqslant \widetilde{C}.$$

И отклонение суммы Фейера от функции оценивается как

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| \leqslant \frac{M}{n^\alpha}.$$

Пусть $\varphi_n = f - \sigma_n[f]$. Тогда

$$\left| S_n[f](x) - f(x) \right| = \left| S_n[\varphi_n](x) - \varphi_n(x) \right|,$$

поскольку

$$S_n[\sigma_n[f]] = \sigma_n[f].$$

А это верно из того, что сумма Фейера – это тригонометрический полином n-ой степени. Тогда

$$\left| S_n[f](x) - f(x) \right| \leqslant |S_n[\varphi_n](x)| + |\varphi_n(x)| = (*)$$

Оценка для φ_n уже есть выше. Для оператора частичной суммы некоторой 2π-периодической функции g мы можем дать следующую оценку:

$$S_n[g](x) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t)| \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} \right| dt \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{[-\pi,\pi]} |g| \cdot \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} \right| dt \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sup |g| \int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{|\sin v|}{v} dv \leqslant \widetilde{C} \sup |g| \ln n.$$

Таким образом

$$(*) \leqslant \widehat{C} \frac{M \ln n}{n^\alpha}.$$

Что доказывает равномерную сходимость и показывает требуемую оценку на отклонение частичной суммы. □

Замечание. Рассуждая аналогично, в случае $\alpha = 1$ можно получить более грубую оценку:

$$||S_n[f] - f||_{C([-\pi,\pi])} \leqslant \frac{C \ln^2 n}{n}.$$

Но на самом деле можно при условии $f \in LIP(\mathbb{R})$ справедлива более сильная оценка(б/д):

$$||S_n[f] - f||_C \leqslant \frac{C \ln n}{n}.$$

3.4 Теорема Фейера

Теорема 3.5. *Пусть $f \in C([-\pi,\pi])$ и f — 2π - периодична. Тогда $\sigma_n[f] \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f, \ n \to \infty$.*

Доказательство. В силу периодичности $\sigma_n[f]$ и f достаточно доказать, что $\sigma_n[f] \underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f,\ n \to \infty$. Поскольку $f \in C([-\pi,\pi]])$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна. Значит её модуль непрерывности стремится к нулю:

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x',x'' \in [-2\pi,2\pi] \\ |x'-x''|<\delta}} |f(x') - f(x'')| \to 0, \delta \to +0.$$

Формально, описанное выше выражение определено для $\delta \in (0, 4\pi)$. Запишем по определению сумму Фейера:

$$\sigma_n[f](x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Phi_n(x-t)dt \text{ , где } \Phi_n(t) \text{ — ядро Фейера.}$$

Тогда:

$$|\sigma_n[f](x) - f(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x)dt \right| \leqslant I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x-t)-f(t)|dt = I_1(\delta) + I_2(\delta).$$

$$I_1(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \leqslant \omega_\delta[f] \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \leqslant \omega_\delta[f].$$

В этой оценке мы ограничиваем сверху $|f(x-t) - f(t)|$ через модуль непрерывности, а $\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \leqslant 1$.

$$I_2(\delta) = \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \Phi_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt.$$

Так как f — непрерывна на $[-2\pi, 2\pi]$, то $\exists\ M > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant M\ \forall x \in [-2\pi, 2\pi]$. Тогда можем оценить $|f(x-t) - f(x)| \leqslant |f(x)| + |f(x-t)| \leqslant 2M$.
Из вышеприведенного утверждения и того, что $\forall \delta > 0 \sup\limits_{\delta<|u|<\pi} \Phi_n(u) \to 0, n \to \infty$ и ограничения, описанного выше, получаем:

$$I_2(\delta) \leqslant 2M \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \Phi_n(t)dt \leqslant 2M(2\pi - 2\delta) \sup_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) \to 0, n \to \infty.$$

$\forall \varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что $I_1(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем, при фиксированном $\delta(\varepsilon)$ выберем $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таким, что $\forall n > N(\varepsilon)\ I_2(\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Итого, получается, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\delta(\varepsilon)) = \tilde{N}(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > \tilde{N}(\varepsilon) \hookrightarrow I_n < \varepsilon$. □

Определение 3.5. Функция

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

называется тригонометрическим полиномом степени n, если $|a_n| + |b_n| \neq 0$.

Следствие (Первая теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $f \in C([-\pi,\pi]])$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ тригонометрический полином T_ε такой, что $||f - T_\varepsilon||_{C([-\pi,\pi])} \leqslant \varepsilon$.

Следствие (Теорема Вейерштрасса)**.** Пусть $-\infty < a < b < \infty$ и $f \in C([a,b])$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ полином $P_\varepsilon[f]$ такой, что $||f - P_\varepsilon[f]||_{C([a,b])} < \varepsilon$.

Доказательство. Для удобства доказательства перенесем отрезок $[a,b]$ в отрезок $[0,\pi]$. Пусть $x \in [a,b]$, а $t \in [0,\pi]$. Обозначим $\varphi(x)$ — взаимно однозначная функция, преобразующая точку из первого отрезка в точку из второго отрезка. Тогда $x(t) = \varphi^{-1}(t) = a + \frac{b-a}{\pi}t$.
Заметим, что $f \circ \varphi \in C([0,\pi])$. Продолжим f чётным образом. Получим функцию $\tilde{f} \in C([-\pi,\pi])$ и $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$.
Применим теорему Фейера к функции $\tilde{f}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \hookrightarrow \sigma_n[\tilde{f}] \text{ такая, что } ||\tilde{f} - \sigma_n[\tilde{f}]||_{C([-\pi,\pi])} < \varepsilon.$$

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k[\tilde{f}]\ \text{, где } S_k[\tilde{f}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j(\tilde{f})\cos(jx) + \sum_{j=1}^{k} b_j(\tilde{f})\sin(jx)$$

Вспомним, что $\cos(jx)$ и $\sin(jx)$ — аналитические $\forall j \in \mathbb{N}$. Следовательно, на любом отрезке $[-A,A] \subset \mathbb{R}$ к ним равномерно сходятся их ряды Тейлора. Тогда мы можем приблизить $\cos(jx)$ и $\sin(jx)$ полиномами Тейлора настолько, чтобы после сложения получилось что-то «небольшое».
Обозначим $P_j(x)$ — полином Тейлора для $\sin(jx)$, а $Q_j(x)$ — полином Тейлора для $\cos(jx)$.
Можно выбрать полиномы Тейлора так, чтобы существовали ε_j и $\tilde{\varepsilon_j}$ такие, что:

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |P_j(x) - \sin(jx)| < \varepsilon_j$$

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |Q_j(x) - \cos(jx)| < \tilde{\varepsilon_j}$$

И при этом выполнялось:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} |a_j|\varepsilon_j + |b_j|\tilde{\varepsilon_j}) < \varepsilon$$

Тогда, полагая

$$P_\varepsilon[\tilde{f}] := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j(\tilde{f})Q_j + b_j(\tilde{f})P_j)$$

$P_\varepsilon[f](t)$ «живет» на отрезке $[-\pi,\pi]$. Теперь мы хотим перенести его на $[0,1]$.
Положим $t(x) = \frac{x-a}{b-a}\pi$. Тогда $P_\varepsilon[f] = P_\varepsilon[\tilde{f}](t(x))$ — искомый полином, так как $\tilde{f}(t(x)) = f(x)$.
Тогда заметим, что $\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(t) - P_\varepsilon[\tilde{f}](t)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P_\varepsilon[f](x)| < \varepsilon$. □

3.5 Скорость убывания коэффициентов Фурье

Общая концепция: чем более гладкая функция, тем быстрее убывают коэффициенты Фурье.

Лемма 3.2 (Основная)**.** *Пусть* $f \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$*. Тогда* $c_f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy} = O(\frac{1}{n}), y \to \infty$.

Доказательство. Так как $f \in BV(\mathbb{R})$, то $f(x) = u(x) + v(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где $u(x)$ — нестрого возрастающая функция на $\mathbb{R}$, а $v(x)$ — нестрого убывающая функция на $\mathbb{R}$.
Тогда можно записать $\forall a, b : -\infty < a < b < \infty$:

$$c_{[a,b]}(y) = \int_a^b f(x)e^{-ixy}dx = \int_a^b u(x)e^{-ixy}dx + \int_a^b v(x)e^{-ixy}dx \Rightarrow$$

$$\exists\, \xi \in [a,b], \zeta \in [a,b] : c_{[a,b]}(y) = u(a+0)\int\limits_a^{\xi} e^{-ixy}dx + u(b-0)\int\limits_{\xi}^{b} e^{-ixy}dx +$$

$$+v(a+0)\int\limits_a^{\zeta} e^{-ixy}dx + v(b-0)\int\limits_{\zeta}^{b} e^{-ixy}dx.$$

Ключевое наблюдение: если $f \in BV(\mathbb{R})$ и интрегрируема, то $f(x) \to 0, x \to \infty$.
Пусть $f \nrightarrow 0$. Тогда $\exists C > 0$ такой, что $\forall \delta > 0\ \exists\ x : |f(x)| > C$. Но при этом, $f \in L_1(\mathbb{R})$, так как интегрируема. Тогда, $\exists\ \tilde{x} : |\tilde{x}| > \delta\ |f(\tilde{x})| < \frac{C}{2}$. Получаем противоречие, так как можно получить бесконечный набор точек $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$, которые мы набираем по описанному выше условию.
Ограничим:

$$\left|\int\limits_a^{\xi} e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|} \qquad \left|\int\limits_{\xi}^{b} e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|}$$

$$\left|\int\limits_a^{\zeta} e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|} \qquad \left|\int\limits_{\zeta}^{b} e^{-ixy}dx\right| < \frac{2}{|y|}$$

$$u(a+0) \leqslant V_{\mathbb{R}}(f) \qquad u(b-0) \leqslant V_{\mathbb{R}}(f)$$

$$v(a+0) \leqslant V_{\mathbb{R}}(f) \qquad v(b-0) \leqslant V_{\mathbb{R}}(f)$$

Получаем: $|c_{[a,b]}(y)| \leqslant \frac{8V_{\mathbb{R}}(f)}{|y|}$ — оценка не зависит от выбора интервала $[a,b]$. Устремляя $a \to -\infty,\ b \to +\infty$, получаем требуемое. □

Теорема 3.6 (б/д)**.** *Пусть $F \in AC([a,b])$. Тогда F почти всюду имеет классическую производную и, более того, восстанавливается через свою производную по формуле Ньютона - Лейбница.*

Теорема 3.7 (Интегрирование по частям, б/д)**.** *Пусть $F \in AC([a,b]), g \in L_1([a,b])$. Тогда верна формула интегрирования по частям: $\int\limits_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b F'(x)G(x)dx$,*

где $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$

Следствие. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая, такая, что $f^{(k-1)} \in AC([-\pi,\pi])$. Пусть $f^{(k)}$ почти всюду существует и может быть изменена на множестве меры нуль таким образом, что $f^{(k)} \in BV([-\pi,\pi])$. Тогда $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

Доказательство.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{inx}dx = f(x)e^{-inx}\big|_{-\pi}^{\pi} + in\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Проделаем эту операцию k раз. Так как f — 2π-периодична и $f^{(k)} \in AC([-\pi,\pi])$ — тоже 2π-периодична:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}e^{-inx}dx = (in)^k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Но $f^{(k)}$ можно считать $BV([-\pi,\pi])$.

Рассмотрим функцию $F = \begin{cases} f^{(k)}(x), x \in [-\pi,\pi] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $F \in BV([-\pi,\pi])$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx =$

$\int\limits_{\mathbb{R}} F(x)e^{-inx}dx = O\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty$ в силу леммы. С учетом того, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{(in)^k} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{inx}dx$ получаем требуемое.

□

4 Введение в теорию евклидовых пространств.

Определение 4.1. Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система из ненулевых векторов в нём. Тогда $\forall f \in E$ будем называть

$$\alpha_k(f) = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}, k \in \mathbb{N}.$$

коэффициентом Фурье элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Теорема 4.1 (минимальное свойство коэффициентов Фурье)**.** *Пусть* $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *— евклидово пространство. Тогда* $\forall f \in E \hookrightarrow$

$$\inf_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\| = \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f) e_k \Big\|.$$

Доказательство. Пусть $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k(f) - \beta_k) e_k$, где β_i — произвольные вещественные коэффициенты. Под $S_n[f]$, как обычно, понимается n-ая сумма ряда Фурье, то есть $S_n[f] = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f) e_k$. Тогда

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|^2 = \Big\| f - S_n[f] + S_n[f] - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|^2 =$$
$$= \langle f - S_n + d_n, f - S_n + d_n\rangle = \langle f - S_n, f - S_n\rangle + 2\langle d_n, f - S_n\rangle + \langle d_n, d_n\rangle.$$

Заметим, что $\forall k \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow$

$$\langle e_k, f - S_n[f]\rangle = \langle e_k, f\rangle - \langle e_k, S_n[f]\rangle = \langle e_k, f\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle e_k, \alpha_j(f) e_j\rangle = \langle e_k, f\rangle - \langle e_k, \alpha_k(f) e_k\rangle = 0.$$

Значит, так как d_n — линейная комбинация e_k, то $2\langle d_n, f - S_n\rangle = 0$, и квадрат отклонения выражается как

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \|d_n\|^2, \qquad \|d_n\| \geqslant 0.$$

Значит $\forall \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R} \hookrightarrow$

$$\big\| f - S_n[f] \big\| \leqslant \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|.$$

Откуда

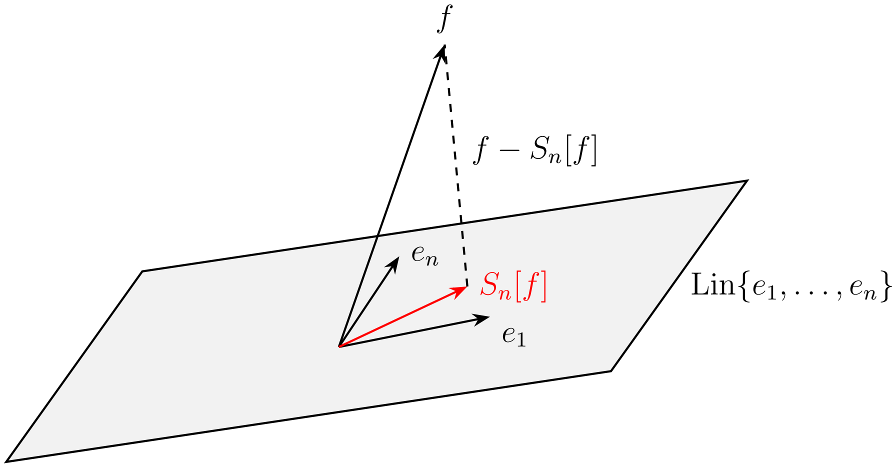
$$\big\| f - S_n[f] \big\| \leqslant \inf_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|.$$

А поскольку $S_n[f] = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f) e_k$, то

$$\big\| f - S_n[f] \big\| = \inf_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\| = \min_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \Big\|.$$

$\square$

Примечание (Геометрическая интерпретация теоремы)**.** Рассмотрим линейную оболочку базисных векторов $\mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$. И тогда для произвольного вектора f среди всех возможных комбинаций наилучшее приближение дает именно сумма Фурье. То есть $S_n[f]$ — это просто ортогональная проекция f на линейную оболочку.
Это является ортогональной проекцией в силу того, что $\langle e_k, f - S_n[f]\rangle = 0 \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}$.



Теорема 4.2 (О единственности)**.** *Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство и $f \in E$. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в E и $f = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$, где сходимость ряда понимается в смысле нормы. Тогда $\alpha_k = \alpha_k(f) \ \forall k \in \mathbb{N}$.*

Замечание. То есть никаких других, кроме коэффициентов Фурье, быть не может (это похоже на теорему о единственности для ряда Тейлора).

Доказательство. Пусть $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ (это пока не сумма Фурье, а просто «какая-то»).
Тогда по линейности и КБШ:

$$|\langle f, e_k\rangle - \langle S_n, e_k\rangle| = |\langle f - S_n, e_k\rangle| \leqslant \|f - S_n\|\|e_k\| \to 0, n \to +\infty.$$

А это значит $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} \langle S_n, e_k\rangle = \langle f, e_k\rangle$. Но так как система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ортогональна, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \langle S_n, e_k\rangle = \alpha_k\langle e_k, e_k\rangle$. Откуда, приравнивая, получаем $\langle f, e_k\rangle = \alpha_k\langle e_k, e_k\rangle$.
В итоге:

$$\alpha_k = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} = \alpha_k(f).$$

□

Лемма 4.1. *Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Тогда $\forall f \in E \hookrightarrow$*

$$\|f\|^2 = \|f - S_n[f]\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2(f)\langle e_k, e_k\rangle,$$

где $S_n[f]$ — n-ая частичная сумма ряда Фурье по системе $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство минимальности, то есть рассмотрим

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \langle f - S_n[f] + S_n[f], f - S_n[f] + S_n[f]\rangle =$$
$$= \langle f - S_n[f], f - S_n[f]\rangle + 2\langle f - S_n[f], S_n[f]\rangle + \langle S_n[f], S_n[f]\rangle.$$

Отметим, что $2\langle f - S_n[f], S_n[f]\rangle = 0$, так как $\langle e_k, f - S_n[f]\rangle = 0\ \forall k$.
А в свою очередь

$$\langle S_n[f], S_n[f]\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f)e_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(f)e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k(f)\alpha_j(f)\langle e_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k(f))^2 \langle e_k, e_k\rangle.$$

Итого получили, что хотели. ☐

Следствие (Неравенство Бесселя)**.** Пусть $E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Тогда $\forall f \in E \hookrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k(f))^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы и неотрицательности нормы $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2(f)\|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Взятие супремума по $n \in \mathbb{N}$ завершает доказательство. ☐

Теорема 4.3 (Рисс, Фишер)**.** *Пусть $H = (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гильбертово пространство. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ сходится к некоторому элементу $f \in H$ в смысле евклидовой нормы.*
2. *Для некоторого $f \in H \hookrightarrow \alpha_k = \alpha_k(f)\ \forall k \in \mathbb{N}$.*
3. *Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2\|e_k\|^2$ сходится.*

Доказательство. Будем идти по очереди:

- Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует в силу теоремы о единственности, то есть если $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, то $\alpha_k = \alpha_k(f)\ \forall k \in \mathbb{N}$ (этот некоторый элемент и будет разложенный f).
- Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) следует в силу неравенства Бесселя;
- Осталась импликация 3) $\Rightarrow$ 1). Именно тут и нужна будет Гильбертовость (то есть полнота). Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и $m > n$. Рассмотрим

  $$\left\langle \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k, \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k \right\rangle = \left\| \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k \right\|^2.$$

  Раскроем скалярное произведение. В силу ортогональности системы и Критерия Коши сходимости числового ряда получаем:

  $$\sum_{k=n}^{m} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 \to 0, \quad n, m \to +\infty.$$

  Тогда последовательность $\{S_n\} = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\}_{n=1}^{+\infty}$ — фундаментальна в H, а H полно $\Longrightarrow$ $\exists f \in H$: $f = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, то есть ряд сходится к некоторому элементу.

□

Определение 4.2. Пусть $E = (E, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Система ненулевых векторов $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется полной в E, если $\forall f \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$: $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon$.

Замечание. Коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ идут после квантора всеобщности, то есть формально зависят и от f, и от ε.

Примечание. Всякий базис Шаудера является полной системой.
Обратное неверно: контрпримером является $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ в $C([-1,1])$. Она полна по теореме Вейерштрасса, но не является базисом.
Предположим противное. Тогда для

$$f(x) = |x| \exists! \{c_k\}_{k=0}^{+\infty} : |x| = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k.$$

причём равенство понимается в равномерном смысле. Но тогда по теореме о дифференцируемости степенного ряда мы получаем дифференцируемость f в нуле – противоречие.

Определение 4.3. Пусть $E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — евклидово пространство. Ортогональная система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется замкнутой, если из ортогональности f каждому e_k следует то, что $f = 0$.

Теорема 4.4 («Основная» теорема.)**.** *Пусть $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — гильбертово пространство. Пусть $\{e_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — ортогональная система в нём. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — полна.*
2. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — базис.*
3. *$\forall f \in H$ ряд Фурье по системе $\{e_k\}$ сходится к f.*
4. *Справедливо равенство Парсеваля:*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2.$$

5. *Система $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — замкнута.*

Доказательство. Покажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).
Пусть $\Delta_n = \inf\limits_{\beta_1, \ldots, \beta_n} \left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|, n \in \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что $\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n \forall n \in \mathbb{N}$, поскольку занулением лишнего коэффициента сводится к предыдущей дельте. Тогда из монотонности последовательности и неотрицательности каждого из её членов следует существование предела равного инфимуму:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \Delta_n = \inf_n \Delta_n.$$

Поскольку по определению полноты $\forall f \in H\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

то $\inf\limits_n \Delta_n = 0$. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье $\Delta_n = \|f - S_n[f]\|$. А значит $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — базис (из существования предела Δ_n и теоремы о единственности).

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) верна по теореме о единственности – эти коэффициенты в единственном разложении по базису и будут коэффициентами ряда Фурье.
Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) следует из ранее доказанной леммы:

$$\|f\|^2 = \|f - S_n[f]\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(f)e_k|\langle e_k, e_k\rangle.$$

При устремлении n в бесконечность получаем равенство Парсеваля.
Заметим, что та же самая лемма даёт нам из выполнения равенства Парсеваля базисность системы, а значит 4) $\Rightarrow$ 2. Ранее было замечено, что из базисности системы векторов следует её полнота, то есть 2) $\Rightarrow$ 1). При этом, в вышеприведённых рассуждениях полнота нигде не использовалась, а значит $1), 2), 3), 4)$ эквивалентны и при условии отсутствия полноты.
Покажем 4) $\Rightarrow$ 5). Пусть существует $f \in H$ такой, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow f \perp e_k$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \alpha_k(f) = 0$ и $\|f\|^2 = 0$ по равенству Парсеваля. По определению нормы $f = 0$ и система замкнута.
Покажем 5) $\Rightarrow$ 1). Зафиксируем $f \in H$. Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k(f)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 < +\infty.$$

По теореме Рисса-Фишера ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(f)e_k$ сходится к некоторому элементу $S \in H$. Заметим, что $\langle S, e_k\rangle = \alpha_k(f)\langle e_k, e_k\rangle$ — по теореме о единственности. Тогда $\langle S, e_k\rangle = \langle f, e_k\rangle \forall k \in \mathbb{N}$. Из замкнутости системы $\{e_k\}$ следует что $S - f = 0 \Rightarrow S = f$ и теорема доказана. $\square$

Примечание. В неполных евклидовых пространствах система может быть замкнута, но не полна.
Введём обозначение $e_k = (0, \ldots, 1, 0, \ldots,)$ (где 1 стоит на k-ом месте).
И пусть $e = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$. Рассмотрим тогда подпространство l_2, которое обозначим за E и определим как

$$E = Lin(e, e_2, e_3, \ldots).$$

с индуцированным скалярным произведением. Очевидно, что E — неполно:

$$\left\| \left(e - \sum_{k=2}^{n} \frac{e_k}{k} \right) - e_1 \right\| \to 0, n \to +\infty.$$

но $e_1 \notin E$.
В E система $\{e_2, e_3, \ldots\}$ — замкнута (вектор $(c, 0, \ldots) \notin E$, а значит если вектор ортогонален всем e_k, то он равен 0), но не полна (e не выражается через e_k).

5 Аппроксимация функций

5.1 Аппроксимация в пространствах L_p

Для наших целей понадобится приближать наши функции другими, более понятными.

Определение 5.1. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если она является линейной комбинацией индикаторов ячеек.

Теперь докажем, что такое функции приближают по норме L_p.

Теорема 5.1. *Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо, $f \in L_p(E)$, где $p \in [1, +\infty)$. Тогда верно следующее:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ ступенчатая функция } h_\varepsilon : ||f - h_\varepsilon||_{L_p(E)} < \varepsilon.$$

Идея доказательства: как обычно мы доказываем это сначала для простых функций, а позже для всех, сводя к уже доказанному с помощью приближений.

Доказательство. Разобьем доказательство на шаги:

1. Пусть $f = \chi_G$, где множество G имеет конечную меру. Тогда из определения верхней меры следует:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{P_k\}_{k=1}^{\infty} : \ \mathcal{L}^n(G) + \varepsilon \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(P_k).$$
Теперь из сходимости ряда мер ячеек следует, что можно взять такой большой номер N :
$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \mathcal{L}^n(P_k) < \varepsilon.$$
По теореме о дизъюнктном представлении в полукольце существует набор непересекающихся $\{Q_l\}_{l=1}^m : \ P_1 \cup \ldots \cup P_N = \bigsqcup_{l=1}^m Q_l$. Обозначим за $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_k$, $B = P_1 \cup \ldots \cup P_N$. Тогда
$$\chi_B = \sum_{l=1}^m \chi_{Q_l}.$$
Возьмем в качестве приближающей ступенчатой функции χ_B. Осталось доказать, что она приближает с точностью до ε по норме.
$$||f-h||_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_G(x) - \chi_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_G(x) - \chi_A(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A(x) - \chi_B(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= (\mathcal{L}^n(A \setminus G))^{\frac{1}{p}} + (\mathcal{L}^n(A \setminus B))^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

2. Если f – простая, то есть линейная комбинация индикаторов множеств конечной меры, явно сводится к пункту 1 с помощью неравенства треугольника.

3. $f \in L_p(E)$ произвольная, тогда из определения интеграла Лебега можно ее приблизить простой с точностью до $\varepsilon/2$,а простые мы уже умеем приближать ступенчатыми с точностью до $\varepsilon/2$. Осталось применить неравенство треугольника и требуемое будет доказано.

□

Теперь мы можем показать непрерывность интеграла Лебега по сдвигу.

Теорема 5.2 (Непрерывность по сдвигу)**.** *Пусть* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *где* $p \in [1, +\infty)$. *Тогда верно следующее:*
$$||f(x) - f(x-h)||_{L_p} \to 0, h \to 0$$

Идея доказательства: Обозначим за $f_h(x) = (x-h)$, заметим, что в силу неравенства треугольника:
$$||f - f_h|| \leqslant ||f-g|| + ||g-g_h|| + ||f_h - g_h|| \ \forall g \in L_p(\mathbb{R}^n)$$
Ясно, что можно g можно подобрать, чтобы 1 и 3 слагаемые были маленькими, проблема лишь в том, чтобы уменьшить второе слагаемое.

Доказательство. Заметим, что для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$||f_h - g_h|| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - g(x-h)|dx = \{\text{выполним замену переменной } t = x - h\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)|dt = ||f - g||$$

Тогда в качестве g возьмем ступенчатую функцию, которая приближает f. Осталось теперь доказать, что g можно приблизить g_h. Из теоремы о дизъюнктном представлении следует, что g можно представить в виде:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{Q_k}(x),\ Q_k - \text{ячейка}$$

$$||g - g_h||_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot ||\chi_{Q_k} - \chi_{Q_k+h}||$$

Что стремится к нулю при $h \longrightarrow 0$. □

5.2 Свёртка функций

Лемма 5.1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ измеримая функция, тогда отображения*

$$(x, y) \mapsto f(x - y)$$

$$(x, y) \mapsto f(x + y)$$

измеримы как отображения $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Обозначим за $E_c = \{x |\ f(x) > c\}$, оно является измеримым из условия леммы. Теперь рассмотрим следующее линейное отображение:

$$T : (x, y) \longrightarrow (x - y, y).$$

Оно обратимо, так как определено обратное отображение $T^{-1}((x, y)) = (x + y, y)$. Осталось лишь заметить, что верно:

$$\{(x, y)|x - y \in E_c\} = T^{-1}(E_C \times \mathbb{R}^n) = \{(x, y)|\ f(x - y) > c\}.$$

Отсюда следует требуемое. □

Теперь мы готовы к определению свертки функций и к доказательству корректности этого определения.

Теорема 5.3. *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

1. *Для $\mathcal{L}-$почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ корректно определена функция (будет называть ее сверткой) $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$.*

2. *$f * g$ измерима в широком смысле.*

3. *$f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$*

4. *$||f * g||_{L_1} \leqslant ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_1}$*

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$H(x,y) = |f(x-y)| \cdot |g(y)|.$$

Ясно, что это неотрицательная, измеримая функция, тогда по теореме Тонелли:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} H(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx\right)dy.$$

Подробнее остановимся на втором интеграле, внутренний интеграл преобразуется так:

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\cdot|g(y)|dx = |g(y)|\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx = |g(y)|\cdot ||f||_{L_1}$$

Тогда весь интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} H(x,y)dx\right)dy = ||f||_{L_1}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)dy = ||f||_{L_1}\cdot||g||_{L_1} < +\infty$$

Теперь применим теорему Фубини для $F(x,y) = f(x-y)g(y)$, так как выше мы показали, что $F(x,y) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда пункты $1, 2$ из нее сразу следуют. Покажем оставшиеся:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f*g|(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\cdot|g(y)|dy\right)dx = ||f||_{L_1}\cdot||g||_{L_1}$$

□

Сформулируем еще одну теорему

Теорема 5.4. *Пусть* $p \in [1,+\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, *где* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. *Тогда:*

1. $f*g(x)$ *корректно определена для всех* $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $f*g(x)$ *равномерно непрерывна на* R^n.

Доказательство. Докажем последовательно

1. По неравенству Гельдера получаем:

$$|f*g(x)| \leqslant \int_{R^n}|f(x-y)|\cdot|g(y)|dy \leqslant ||f||_{L_p}\cdot||g||_{L_{p'}} < +\infty$$

2. Обозначим за $(f*g)_h(x) = f*g(x-h), f_h(x) = f(x-h)$. Верно равенство:

$$(f*g)_h(x) - f*g(x) = \int_{R^n} f(x-y-h)g(y)dy - f*g(x) = f_h*g(x) - f*g(x)$$

Теперь оценим отклонение свертки при сдвиге:

$$|(f*g)_h(x) - f*g(x)| = |f_h*g(x) - f*g(x)| \leqslant ||f_h - f|*g(x)| \leqslant ||f-f_h||_{L_p}\cdot||g||_{L_p'}$$

Теперь по уже доказанному утверждению, получаем, что правая часть стремится к 0 и при этом оценка не зависит от x. Таким образом, требуемое доказано.

3. Осталось рассмотреть случаи, когда одно из p, p' равно $+\infty$. А именно рассмотрим случай, когда $p=\infty, p'=1$. Для этого случая достаточно лишь заметить, что совершенно аналогично доказывается неравенство:

$$|f*g(x)| \leqslant ||f||_{L_1}\cdot||g||_{L_\infty}$$

□

5.3 Аппроксимативная единица

Определение 5.2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Носителем функции будем называть множество $\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$

Определение 5.3. Семейство функций $\{\omega_t\}_{t\in(0,+\infty)}$ называется аппроксимативной единицей, если $\forall t > 0$ выполнено следующее:

1. $\omega_t(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_t(x)dx = 1$.
3. Выполнено фокусирующее свойство:

$$\forall \delta > 0 \ \exists \lim_{t\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(0)} \omega_t(x)dx = 0.$$

Примечание. В нашем курсе мы предъявляем дополнительные требования к аппроксимативной единице:

▷ $\forall t \in (0, +\infty) \hookrightarrow w_t$ – непрерывны и имеют компактный носитель

Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 5.5. *Если $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и w_t – аппроксимативная единица (произвольная в смысле нашего определения), то их свёртка является корректно определённой непрерывной функцией.*

Доказательство. Если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то утверждение является частным случаем теоремы о свёртке функций из L_p и $L_{p'}$: и действительно, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, а всякая непрерывная функция с компактным носителем ограничена и, как следствие, лежит в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f * w_t$ – корректно всюду определённая равномерно непрерывная функция.
Пусть теперь $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\operatorname{supp} w_t \subset B(r)$, где $B(r)$ – некоторый замкнутый шар радиуса r с центром в 0. Положим $H(x) = |f(x-y)||w_t(y)|$. Заметим, что на всяком шаре $B(R) \subset \mathbb{R}^m$ функция H интегрируема:

$$\int_{B(R)} H(x)dx = \int_{B(R)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||w_t(y)|dy \right) dx =$$
$$= \int_{B(r)} |g(y)| \left(\int_{B(R)} |f(x-y)|dx \right) dy \leqslant \int_{B(r)} |w_t(y)|dy \int_{B(R+r)} |f(z)|dz < +\infty.$$

Таким образом $H(x)$ конечна почти всюду на всяком замкнутом шаре, а следовательно почти всюду конечна и на всём пространстве и свёртка определена корректно.
Заметим, что $f * w_t$ и $f\chi_{B(R+r)} * w_t$ совпадают в шаре $B(R)$, поскольку если $x \in B(R+r), y \in B(r)$ то $\|x\| \leqslant R$ и $\|y\| \leqslant r$, то $\|x-y\| \leqslant R+r$ и следовательно

$$f * w_t(x) = \int_{B(r)} f(x-y)w_t(y)dy = \int_{B(r)} f(x-y)\chi_{B(R+r)}(x-y)w_t(y)dy = f\chi_{B(R+r)} * w_t.$$

Поскольку на непрерывность функции $f * w_t$ в точке влияет её поведение только в некоторой окрестности, то мы можем рассмотреть $f\chi_{B(R+r)}$ – уже интегрируемую функцию – и её свёртка с w_t будет непрерывной, а следовательно, в силу совпадения свёрток в $B(R)$, то и для всякой точки оттуда $f * w_t$ – непрерывна. Поскольку R было выбрано произвольно, то $f * w_t$ непрерывна на всём пространстве. □

Пример (Соболевская аппроксимативная единица)**.** Соболевской «шапкой» будем называть функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right), & \|x\| < 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и её носитель – замкнутый единичный шар.
Обозначим $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = C \neq 0$ — некоторая константа.
Обозначим за $\omega = \psi/C$. Тогда ω – неотрицательная, бесконечно гладкая функция с компактным носителем и единичным интегралом по всему пространству.
Положим по определению $\omega_\varepsilon(x) = \omega(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$. Семейство функций $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,+\infty)}$ является аппроксимативной единицей.

Следствие. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Усреднением f по Соболеву будем называть функцию $f_\varepsilon = f * \omega_\varepsilon$. По предыдущей теореме, f_ε – всюду корректно определённая непрерывная функция.

Примечание. Далее в курсе будет доказано, что $f_\varepsilon \in C^\infty$.

Теорема 5.6. *Пусть $p \in [1, +\infty)$ и $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \|f - h\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из свойств интеграла Лебега следует, что $\exists R > 0$ такое, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} |f|^p dx\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Это в точности означает что для функции $g = \chi_{B_R(0)} f$ выполняется

$$\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Докажем техническую лемму, которая будет использована в дальнейшем доказательстве.

Лемма 5.2. *Пусть $\{w_t\}_{t\in(0,+\infty)}$ – аппроксимативная единица и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – измеримая ограниченная функция такая, что $g(x) \to 0, x \to 0$. Тогда верно следующее:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) w_t(x) dx \to 0, t \to +0.$$

Доказательство. Для всякого $\delta > 0$ выполняется следующее:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g w_t dx = \int_{\|x\|\geqslant\delta} g w_t dx + \int_{\|x\|<\delta} g w_t dx = I_1(\delta) + I_2(\delta).$$

Поскольку g – ограниченная функция, существует $M > 0$ такое, что $|g| \leqslant M$. Поэтому

$$|I_1(\delta)| \leqslant M \int_{\|x\|\geqslant\delta} w_t dx.$$

Из определения аппроксимативной единицы следует

$$M \int_{\|x\|\geqslant\delta} w_t dx \to 0, t \to +0.$$

Тогда и $|I_1(\delta)| \to 0, t \to +0$. Теперь оценим второй интеграл:

$$|I_2(\delta)| = \left|\int_{\|x\|<\delta} g w_t dx\right| \leqslant \int_{\|x\|<\delta} |g| w_t dx \leqslant \sup_{\|x\|<\delta} g \int_{\|x\|<\delta} w_t dx \leqslant \sup_{\|x\|<\delta} g.$$

(где последний переход сделан из тех соображений, что $\int_{\mathbb{R}^n} w_t dx = 1$) Поскольку g – непрерывна в нуле, то $I_2(\delta)$ может быть сделан сколь угодно малым и, следовательно, утверждение леммы показано. $\square$

Пусть теперь w_t – соболевская аппроксимативная единица. Поскольку g – локально интегрируемая функция то $g * w_t$ определена корректно и, так как $w_t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то и $g * w_t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что для доказательства теоремы достаточно показать что $\|g - g * w_t\|_p \to 0, t \to +0$. Распишем подробнее вид $|g - g * w_t|$:

$$|g - g * w_t|(x) = \left| g(x) - \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) w_t(y) dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x) w_t(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) w_t(y) dy \right| =$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (g(x) - g(x-y)) w_t \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - g(x-y)| w_t(y) dy.$$

В тоже время, мы можем расписать $|g(x) - g(x-y)|w_t$ как

$$|g(x) - g(x-y)|w_t = (|g(x) - g(x-y)| w_t^{1/p}(x)) \cdot w_t^{1/p'}(x).$$

и применить неравенство Гёльдера:

$$\||g(x) - g(x-y)|w_t\|_1 \leqslant \||g(x) - g(x-y)|w_t^{1/p}\|_p \cdot \|w_t^{1/p'}\|_{p'} = \||g(x) - g(x-y)|w_t^{1/p}|\|_p.$$

И тогда

$$|g - g * w_t|(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - g(x-y)|^p w_t(y) dy \right)^{1/p}.$$

Возведём $|g - g * w_t|(x)$ в p-ую степень и проинтегрируем по всему пространству. В силу ранее полученной оценки мы получим:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g - g * w_t|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - g(x-y)|^p w_t dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} w_t(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - g(x-y)|^p dx \right) dy.$$

(где мы поменяли пределы интегрирования в силу теоремы Фубини). Обозначим за $s(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - g(x-y)|^p dx$. Из непрерывности по сдвигу для p-й нормы $s(y) \to 0, y \to 0$ – а следовательно мы можем применить ранее доказанную лемму к $\int_{\mathbb{R}^n} w_t(y) s(y) dy$ и получить нужное утверждение:

$$\|g - g * w_t\|_p \to 0, t \to +0.$$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon$ такое, что $\|g - g * w_{t_\varepsilon}\|_p < \varepsilon$. Таким образом $h = g * w_{t_\varepsilon}$ – искомое:

$$\|f - h\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - h\|_p < 2\varepsilon.$$

□

6 Интегралы зависящие от параметра

Интегралы, зависящие от параметра, бывают собственные и несобственные. Для начала рассмотрим собственные и дадим некоторые неформальные комментарии.

6.1 Собственные интегралы зависящие от параметра

Определение 6.1. Пусть $X = (X, \mathfrak{M}, \mu)$ - пространство с мерой, Y - параметрическое множество, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ функция, такая что $\forall y \in Y$ она будет интегрируемой, то есть $f \in L_1(X)$, тогда введём функцию $J(y) := \int\limits_X f(x, y) d\mu(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ - собственный интеграл Лебега, зависящий от параметра.

Нас будут интересовать следующие вопросы:

- ▷ Когда можно интегрировать по параметру?
- ▷ Когда можно переходить к пределу по параметру?
- ▷ Когда можно дифференцировать по параметру?

Мы будем исследовать правила, при которых можно менять порядок интеграла и операции примененной к функции. Начнем с интегрирования.

6.1.1 Когда можно интегрировать по параметру?

Ответом на этот вопрос фактически является Теорема Фубини.

Теорема 6.1. *Пусть дополнительно известно, что $Y = (Y, \mathfrak{N}, \nu)$ — пространство с мерой, а также $f \in L_1[(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mu \otimes \nu)]$. Тогда J интегрируема на Y и справедлива формула:*

$$\int\limits_Y J(y)d\nu(y) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y) = \iint\limits_{X\times Y} f(x,y)d\mu \otimes \nu(x,y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

6.1.2 Когда можно переходить к пределу по параметру?

Теорема 6.2. *Рассмотрим собственный интеграл, зависящий от параметра (опр. 6.1), и пусть дополнительно известно, что $Y = (Y, d)$ — метрическое пространство. y_0 - предельная точка в Y, а также пусть $\exists \widetilde{X} \subset X$, т.ч. $\mu(X \backslash \widetilde{X}) = 0$, а также:*

1. $\forall x \in \widetilde{X} \quad \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \text{⨍}(x)$
2. *$\exists g(x) \in L_1(X)$ т.ч. при некотором $\delta > 0 \quad |f(x,y)| \leqslant g(x) \quad \forall x \in \widetilde{X}$ и $\forall y \in \mathring{B}_\delta(y_0)$. Будем называть это условием локальной мажорируемости и обозначать как (L)*

Тогда $\text{⨍} \in L_1(X)$ и можно переставлять местами предел и интеграл.

Доказательство. Т.к. определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны в метрических пространствах, нам достаточно показать, что $\forall \{y_n\} \subset Y \backslash y_0$ такой, что $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, выполнено

$$\exists \lim_{n\to\infty} J(y_n) = \int\limits_X \text{⨍}(x) d\mu(x). \tag{*}$$

Итак, пусть $\{y_n\}$ сходится к y_0. Тогда $\exists N \in \mathbb{N}$, т.ч. $y_n \in \mathring{B}_\delta(y_0) \quad \forall n \geqslant N$.

Определим последовательность функций $g_k(x) := f(x, y_{k+N})$, тогда по 2 условию из формулировки теоремы верно

$$|g_k(x)| \leqslant g(x) \quad \forall x \in \widetilde{X}.$$

Также по условию 1 выполнено

$$\exists \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \text{⨍}(x) \quad \forall x \in \widetilde{X}.$$

Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получим (*), но так как последовательность была выбрана произвольно, значит доказано для любой. □

6.1.3 Когда можно дифференцировать по параметру?

Теорема 6.3. *Рассмотрим собственный интеграл, зависящий от параметра (опр. 6.1), и пусть дополнительно известно, что* $Y = \lceil c,\, d \rfloor$ *— промежуток, точка* $y_0 \in \lceil c,\, d\rfloor$*, а также пусть* $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *т.ч.* $\exists \widetilde{X} \subset X : \mu(X \backslash \widetilde{X}) = 0$ *и* $\exists f'_y(x, y) \quad \forall x \in \widetilde{X} \quad \forall y \in Y$*. Пусть* f'_y *удовлетворяет условию локальной мажрорируемости* (L) *в окрестности точки* y_0*. Тогда функция* J *дифференцируема в точке* y_0 *и справедлива формула:*

$$\frac{dJ}{dy}(y_0) = \frac{d}{dy}\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)\Bigg|_{y=y_0} = \int\limits_X f'_y(x, y_0)d\mu(x).$$

Доказательство. Фиксируем $h \in \mathbb{R}$ такой, что $y_0 + h \in \lceil c,\, d\rfloor$. Тогда распишем производную по определению

$$\frac{J(y_0+h) - J(y_0)}{h} = \int\limits_X \frac{f(x, y_0+h) - f(x,y_0)}{h} d\mu(x) := \int\limits_X F(x,h)d\mu(x)$$

Заметим, что $\exists \lim\limits_{h\to 0} F(x,h) \Leftrightarrow \exists f'_y(x, y_0)$. В свою очередь условие (L) для f'_y означает, что $\exists \delta > 0$ т.ч. $\forall y \in U_\delta(y_0) \cap \lceil c,\, d\rfloor$ выполняется $\left|f'_y\right| \leqslant g(x)$, где $g \in L_1(X)$. Теперь мы хотим свести нашу задачу к предыдущей теореме. Чтобы переставить предел и интеграл, нам надо проверить условие локальной интегрируемости функции $F(x,h)$ в окрестности нуля. Для этого нужно найти мажоранту. При каждом $x \in \widetilde{X}$ применим к функции $f(x, \cdot)$ теорему Лагранжа о среднем:

$$F(x,h) = f'_y(x, \xi(x,h)) \qquad \xi(x,h) \in (y_0,\, y_0+h)$$

Также верно, что $\xi(x,h) \in \mathring{U}_\delta(y_0) \cap \lceil c,\, d\rfloor$

Так как f'_y удовлетворяет условию (L), если $|h| < \delta$ и $y_0 + h \in \lceil c,\, d\rfloor$, то

$$|F(x,h)| = |f'_y(x,\xi)| \leqslant g(x)$$

Таким образом, получим, что условие (L) выполнено для функции F в нуле. Значит, применяя предыдущую теорему, получим

$$\exists \lim_{h\to 0}\frac{J(y_0+h) - J(y_0)}{h} = \int\limits_X \lim_{h\to 0} F(x,h)d\mu(x) = \int\limits_X f'_y(x,y)d\mu(x)$$

□

6.2 Несобственные интегралы зависящие от параметра

Определение 6.2. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in L_1([a,\, b']) \quad \forall b' < b$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{b'\to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)dx \in \mathbb{R}$, то говорят, что несобственный интеграл Лебега от f на $[a,\, b)$ сходится и обозначают $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$

Замечание. Типичный пример несобственного интеграла Лебега

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Этот интеграл не будет сходится в смысле обычного лебеговского интеграла, но существует несобственный интеграл Лебега, и его значение совпадает с римановским.

Определение 6.3. Пусть Y - параметрическое множество, $f : [a, b) \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ функция, такая что $\forall y \in Y \quad \exists \int\limits_a^{\to b} f(t, y)dt$, тогда отображение $J(y) = \int\limits_a^{\to b} f(t, y)dt$ - несобственный интеграл Лебега , зависящий от параметра.

Нас, в целом, будут интересовать те же вопросы, но ситуация осложняется особенностью на конце.

6.2.1 Когда можно переходить к пределу по параметру?

Определение 6.4. Будем говорить, что $\int\limits_a^{\to b} f(t, y)dt$ сходится равномерно по $y \in Y$, если $\forall y \in Y$ он сходится и при этом $\sup\limits_{y \in Y} \left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(t, y)dt \right| \to 0, \ b' \to b - 0$

Теорема 6.4. *Пусть дополнительно известно, что Y — полное метрическое пространство, а $y_0 \in Y$ - предельная точка. Пусть $f : Y \times [a, b) \to \overline{\mathbb{R}}$, т.ч. почти всюду на $[a, b) \quad \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(t, y) =: \not{f}(t)$. Пусть также выполнены следующие условия:*

1. $\forall b' \in (a, b) \quad \not{f} \in L_1([a, b'])$
2. $\forall b' \in (a, b) \quad \exists \lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^{b'} f(t, y)dt = \int\limits_a^{b'} \not{f}(t)dt$
3. *Пусть* $\int\limits_a^{\to b} f(t, y)dt$ *сходится равномерно по параметру* y.

Тогда $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^{\to b} f(t, y)dt = \int\limits_a^{\to b} \not{f}(t)dt$ *(*).*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, тогда из условия 2 $\Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0$ т.ч. $\forall y \in \mathring{B}_\delta(y_0)$ выполняется

$$(\vee) \qquad \left| \int\limits_a^{b'} f(t, y)dt - \int\limits_a^{b'} \not{f}(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Заметим, что из условия 3 $\Rightarrow \forall \varepsilon \quad \exists b(\varepsilon) \in (a, b)$, т.ч. $\forall y \in Y$ выполнено

$$\left| \int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t, y)dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Покажем, что $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^{\to b} f(t, y)dt$. Для этого проверим условие Коши: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, b(\varepsilon)) \Rightarrow \forall y', y'' \in \mathring{B}_\delta(y_0)$ выполнено

$$\left| \int\limits_a^{\to b} f(t, y')dt - \int\limits_a^{\to b} f(t, y'')dt \right| \leqslant \left| \int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t, y')dt \right| + \left| \int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t, y'')dt \right| + \left| \int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t, y')dt - \int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t, y'')dt \right|$$

Учитывая результаты полученные выше

$$\left| \int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t, y')dt \right| + \left| \int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t, y'')dt \right| + \left| \int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t, y')dt - \int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t, y'')dt \right| < \varepsilon$$

Условие Коши выполнено, значит предел существует.
Теперь покажем справедливость (*)
$(\vee) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0$ выполняется

$$\left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t)dt - \lim_{y\to y_0} J(y)\right| \leqslant \left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t)dt - \int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt\right| + \left|\int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt - \lim_{y\to y_0} J(y)\right| \qquad \forall y \in B_\delta(y_0)$$

Из показанного выше известна оценка $\left|\int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt - \lim\limits_{y\to y_0} J(y)\right| < \varepsilon$. Для первого слагаемого оценка получается следующим образом

$$\left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t)dt - \int\limits_a^{\to b} f(t,y)dt\right| \leqslant \left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t,y)dt - \int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t)dt\right| + \left|\int\limits_{b(\varepsilon)}^{\to b} f(t,y)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит в результате получим

$$\left|\int\limits_a^{b(\varepsilon)} f(t)dt - \lim_{y\to y_0} J(y)\right| < 2\varepsilon$$

Что доказывает требуемое равенство. $\square$

6.2.2 Интегрирование несобственного интеграла по параметру.

Теорема 6.5. *Пусть $Y = (Y, \mathfrak{N}, \nu)$ – пространство конечной меры и задана*

$$f : [a,b) \times Y \to \overline{\mathbb{R}}.$$

такая, что $\forall y \in Y$ интеграл $\int_a^{\to b} f(t,y)dt = J(y)$ – сходится, $\int_a^{\to b} f(t,y)dt$ сходится равномерно по параметру и $\forall b' \in (a,b) \hookrightarrow f \in L_1(\mathcal{L}^1 \otimes \nu)$. Тогда $J(y) \in L_1(Y)$ и верно следующее утверждение:

$$\int_Y J(y)d\nu = \int_a^{\to b}\int_Y f(t,y)d\nu(y)dt.$$

Доказательство. По определению

$$J(y) = \lim_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(t,y)dt = \lim_{b'\to b-0} F(b',y).$$

По теореме Фубини при фиксированном b' мы можем проинтегрировать $F(b',y)$, то есть $\exists \int_Y F(b',y)d\nu(y)$
С другой стороны, J – равномерный предел семейства функций $\{F(b',\cdot)\}_{b'\in(a,b)}$, а следовательно $\exists b^*$ такой, что

$$\forall b' \in (b^*,b) \hookrightarrow |J(y) - \int_a^{b'} f(t,y)dt| < 1.$$

Поскольку мера пространства конечна, то

$$\int_Y |J(y)|d\nu(y) \leqslant \int_Y \left|J(y) - \int_a^{b'} f(t,y)dt\right| d\nu(y) + \int_Y \left|\int_a^{b'} f(t,y)dt\right| d\nu(y) < +\infty.$$

А значит $J(y) \in L_1(Y)$.
Покажем теперь справедливость равенства. Введём обозначение $I(t) = \int_Y f(t,y)d\nu(y)$.
По теореме Фубини $\forall t \in (a,b) \hookrightarrow$

$$\int_a^t I(x)dx = \int_Y \int_a^t f(x,y)dxd\nu(y) = \int_Y \left(J(y) - \int_t^{\to b} f(x,y)dx \right) d\nu(y).$$

Но, тогда,

$$\left| \int_a^t I(x)dx - \int_Y J(y)d\nu(y) \right| \leqslant \left| \int_Y \int_t^{\to b} f(x,y)dxd\nu(y) \right| \to 0, t \to b-0.$$

(Последняя сходимость получается из равномерной сходимости интеграла, то есть $\sup\limits_{y\in Y} |\int_t^b f(x,y)dx| \to 0, t \to b-0$).
Что и показывает необходимое нам равенство. □

6.2.3 Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.

Теорема 6.6. *Пусть $f \in C([a,b) \times \lceil c,d \rfloor)$ и $\forall (x,y) \in [a,b) \times \lceil c,d \rfloor$ существует $f'_y(x,y)$ и, более того, $f'_y \in C([a,b) \times \lceil c,d \rfloor)$. Пусть $\int_a^{\to b} f'_y(x,y)dx$ равномерно сходится на $\lceil c,d \rfloor$, а $\int_a^{\to b} f(x,y)dx$ сходится всюду поточечно.*
Тогда $J(y) = \int_a^{\to b} f(x,y)dx$ – непрерывно дифференцируемая на $\lceil c,d \rfloor$ и справедливо равенство

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^{\to b} f'_y(x,y)dx.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные точки $s, s_o \in \lceil c,d \rfloor$ ($s > s_0$ – без ограничения общности).
Пусть $I(y) = \int_a^{\to b} f'_y(x,y)dx$. По теореме об интегрировании по параметру (мы можем её применять к I так как $[s_0, s]$ – пространство конечной меры, интеграл I сходится равномерно по условию и f'_y – непрерывна, а следовательно – интегрируема на любом подотрезке)

$$\int_{s_0}^s I(y)dy = \int_a^{\to b} \left(\int_{s_0}^s f'_y(x,y)dy \right) = \int_a^{\to b} f(x,s) - f(x,s_0)dx = J(s) - J(s_0).$$

Осталось только заметить, что I – непрерывная функция от y (вытекает из теоремы о предельном переходе по параметру в интеграле Лебега). Тогда

$$\frac{J(s) - J(s_0)}{s - s_0} = \fint_{s_0}^s I(y)dy.$$

И, поскольку для непрерывных функций на отрезках интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана, то

$$\exists \frac{dJ}{dy}(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{J(s) - J(s_0)}{s - s_0} = I(s_0).$$

То есть показана справедливость утверждения теоремы на $\lceil c,d \rfloor$ (в силу произвольного выбора s_0). □

Напоминание. Тут должно быть напоминание про аппроксимативные единицы.

Следствие. Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и $\{w_t\}_{t\in(0,+\infty)}$ – аппроксимативная единица. Тогда $\forall t > 0 \hookrightarrow f * w_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t > 0$. Пусть $\operatorname{supp} w_t \subset B_r(0)$. (Здесь и далее в доказательстве индекс «t» у w_t будет опускаться – оно фиксировано). По определению

$$(f * w)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)w(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} w(x-y)f(y)dy.$$

Зафиксируем некоторое $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Верно, что $\forall x \in B_1(x_0) \hookrightarrow$

$$(f * w)(x) = \int_{B_{r+1}(x_0)} w(x-y)f(y)dy.$$

Покажем, что $\forall x \in B_1(x_0) \forall k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\exists \frac{\partial (f * w)}{\partial x_k}(x_0) = \int_{B_{r+1}(x_0)} \frac{\partial w}{\partial x_k}(x-y)f(y)dy.$$

Но по сути, это всё – собственные интегралы с параметром x. И для того, чтобы мы могли продифференцировать всё это, нам нужна локальная мажоранта:

$$\left| \frac{\partial w}{\partial x_k}(x-y)f(y) \right| \leqslant M_k |f(y)|.$$

Где $M_k = \max\limits_{t \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial w}{\partial x_k} \right|(t)$ и тогда выполнено условие (L) для дифференцирования собственного интеграла Лебега и приведённое выше равенство корректно. Также, нетрудно заметить, что так как $\frac{\partial w}{\partial x_k} \in C(\mathbb{R}^n)$, то используя теорему о пределе интеграла Лебега по параметру получим

$$\frac{\partial (w * f)}{\partial x_k} \in C(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку $w * f$ – остаётся L_1^{loc}-функцией, то дальнейшее рассуждение можно продолжить по индукции и получить существование частных производных всех порядков, поскольку мы показали

$$\frac{\partial (w * f)}{\partial x_k} = f * \frac{\partial w}{\partial x_k}.$$

(просто мы просто перекидываем производные к w, а она – $C_0^{+\infty}$). $\square$

Следствие. $\forall p \in [1, +\infty] \hookrightarrow C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_p(\mathbb{R}^n)$ по p-норме.

Примечание. Эти два следствия уже возникали ранее, второе – доказано в секции про аппроксимативные единицы.

6.2.4 Равномерная сходимость интегралов по параметру.

Теорема 6.7 (Признак Дирихле.)**.** *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, Y — *параметрическое множество. Пусть функции* $f, g \colon [a, b) \times Y \to \mathbb{R}$*:*

1. $\forall y \in Y \hookrightarrow f(\cdot, y) \in C([a, b))$ *и* $g(\cdot, Y) \in C^1([a, b))$;
2. $g(x, y) \underset{Y}{\rightrightarrows} 0$, $x \to b - 0$.
3. $\exists x_0 \in (a, b) : g'_x(x, y) \leqslant 0$ $\forall x > x_0$ *и* $\forall y \in Y$.
4. *Равномерная ограниченность первообразной:* $M = \sup\limits_{y \in Y} \sup\limits_{b' \in (a,b)} \left| \int_a^{b'} f(x, y)dx \right| < +\infty$.

Тогда
$$\int_a^{\to b} f(x,y)g(x,y)dx.$$
равномерно сходится на множестве Y.

Доказательство. При каждом фиксированном $\underline{y} \in Y$
$$\int_a^{\to b} f(x,\underline{y})g(x,\underline{y})dx.$$
сходится по обычному признаку Дирихле (в данном случае несобственный интеграл Лебега и Римана совпадают). Поскольку $\forall b' \in (a,b) \forall y \in Y$ выполняется
$$\int_{b'}^{\to b} f(x,y)g(x.y)dx = F(x,y)g(x,y)\Big|_{b'}^{\to b} - \int_{b'}^{\to b} F(x,y)g'_x(x,y)dx = (*)$$
Поскольку первообразная $F(x,y)$ – равномерно ограничена, то
$$\forall y \in Y \hookrightarrow F(x,y)g(x,y) \to 0, x \to b-0.$$
И, продолжая равенство, получаем
$$(*) = -F(b',y)g(b',y) + \int_{b'}^{\to b} F(x,y)(-g'_x(x,y))dx.$$
Навесим модуль и получим:
$$\left|\int_{b'}^{\to b} f(x,y)g(x,y)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |F(b',y)|g(b',y) + \int_{b'}^{\to b} |F(x,y)|(-g'_x(x,y))dx \leqslant M(g(b',y) + (-g(x,y))|_{b'}^{\to b}) =$$
$$= 2Mg(b',y) \underset{Y}{\rightrightarrows} 0, b' \to b-0.$$
Что и даёт нам равномерную сходимость интеграла. $\square$

Теорема 6.8 (Признак Вейерштрасса). *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, Y *— абстрактное параметрическое множество. Пусть*

- $f\colon [a,b) \times Y \to \mathbb{R}$: $\forall y \in Y \hookrightarrow f(\cdot,y) \in L_1([a,b'])\ \forall b' \in (a,b)$;
- $\exists g \in L_1([a,b))$, $g \geqslant 0$ *почти всюду на* $[a,b)$: $|f(x,y)| \leqslant g(x)\ \forall y \in Y$ *при почти всех* $x \in [a,b)$.

Тогда
$$\int_a^{\to b} f(x,y)dx.$$
равномерно сходится на множестве Y.

Доказательство. Из условия существования мажоранты и абсолютной непрерывности интеграла Лебега:
$$\sup_{y\in Y}\left|\int_{b'}^{\to b} f(x,y)dx\right| \leqslant \int_{b'}^{b} g(x)dx \to 0, b' \to b-0.$$
И таким образом мы и получаем равномерную сходимость интеграла. $\square$

Теорема 6.9 (Критерий Коши)**.** *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, Y *— абстрактное параметрическое множество. Пусть* $\forall y \in Y\ \forall b' \in (a, b) \hookrightarrow f(\cdot, y) \in L_1([a, b'])$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- $J(y) = \displaystyle\int_a^{\to b} f(x, y)dx$ *равномерно сходится на* Y*;*
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists b(\varepsilon) \in (a, b)\ \forall b', b'' \in (b(\varepsilon), b)\ \forall y \in Y \hookrightarrow$

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть есть равномерная сходимость интеграла.
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists b(\varepsilon/2) \in (a, b)$:

$$\forall b' > b(\varepsilon) \forall y \in Y \hookrightarrow \left| \int_{b'}^{\to b} f(x, y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А значит, по неравенству треугольника мы и получаем необходимое утверждение.
Докажем теперь в обратную сторону.
Тогда при каждом фиксированном y выполнено условие Коши сходимости несобственного интеграла Лебега. И, следовательно, $\forall y \in Y \exists \int_a^{\to b} f(x, y)dx \in \mathbb{R}$. При каждом фиксированном y перейдём к пределу в условии Коши и получим $\forall \varepsilon > 0 \exists b(\varepsilon) \in (a, b)$ такое, что $\forall b' > b(\varepsilon)$ и $\forall y \in Y \hookrightarrow$

$$\left| \int_{b'}^{\to b} f(x, y)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Из чего и следует равномерная сходимость интеграла. □

6.3 Интеграл Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ — интеграл Дирихле}$$

Примечание. Понимаем как несобственный интеграл Лебега

Теорема 6.10.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство. Сделаем регуляризацию, то есть добавим множитель, чтобы из несобственного интеграла получить собственный.
Рассмотрим функцию:

$$F(x, y) := \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy},\ x, y \in [0, +\infty)$$

$$F(x, 0) = \frac{\sin x}{x},$$

Заметим, что F — непрерывная как функция двух переменных. Доопределим в нуле:

$$F(0, 0) = 1,$$

Тогда функция непрерывна на $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Рассмотрим интеграл (зависящий от параметра):

$$D(y) := \int\limits_0^{+\infty} F(x, y)\, dx$$

Формально продифференцируем по параметру

$$D'(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d}{dy}\left(e^{-xy}\right) \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \cdot \sin x\, dx$$

Из формулы Эйлера $e^{ix} = i \sin x + \cos x$:

$$D'(y) = -\mathrm{Im} \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \cdot e^{ix}\, dx = -\mathrm{Im} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x(i-y)}\, dx = -\mathrm{Im}\left(\frac{e^{-x(i-y)}}{i-y} \Bigg|_0^{+\infty} \right) = -\mathrm{Im}\left(0 - \frac{1}{i-y}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-y}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-i-y}{1+y^2}\right) = \frac{-1}{y^2+1}$$

Итого:

$$D'(y) = \frac{-1}{y^2+1}, y > 0$$

$$\forall\, y_1, y_2 > 0 \text{ при } y_2 > y_1 \quad D(y_2) - D(y_1) = \int\limits_{y_1}^{y_2} D'(y)\, dy = -\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y_1 - \arctan y_2$$

При $y_2 \to +\infty$:

$$D(y_2) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy_2}\, dx$$

Возьмем под модуль:

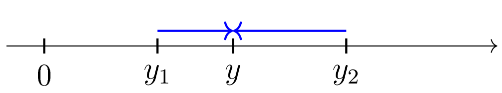
$$|D(y_2)| = \left| \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy_2}\, dx \right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy_2}\, dx = \frac{1}{y_2} \longrightarrow +0,\ y_2 \to +\infty$$

Перейдем к пределу при $y_2 \to +\infty, y_1 \to +0$:

$$-\lim_{y_1 \to +0} D(y_1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{y_1 \to +0} D(y_1) = \frac{\pi}{2}$$

Примечание. Если доказать, что $D(y)$ непрерывен в нуле справа, т.е. что $\lim_{y \to +0} D(y) = D(0)$, то получим искомое

Покажем, что $D(y)$ — непрерывна и существует $D'(y)$, $\forall y > 0$.
Зафиксируем произвольные y_1, y_2, такие что $0 < y_1 < y < y_2$



Примечание. Чтобы можно было дифференцировать по y, достаточно проверить, что интеграл $D(y)$ сходится $\forall y > 0$ и что $-\int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy}\, dx$ сходится равномероно по y.

Очевидно, что $\sin x \cdot e^{-xy}$ непрерывна на $[y_1, y_2] \times [0, +\infty)$.
$\frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}$, доопределенная в нуле тоже непрерывна на $[y_1, y_2] \times [0, +\infty)$.

$$\left|\frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}\right| \leqslant e^{-xy}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy} \in L_1([0, +\infty)) \quad (\text{принадлежит } L_1 \text{ как функция от } x) \ \ \forall y > 0$$

$$\Rightarrow D(x)\, \text{сходится}\, \forall y > 0$$

Назовем $J(y) = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx$. (от 1 потому что так будет проще применить признак Дирихле)
Покажем, что $J(y)$ сходится равномерно по y на $[y_1, y_2]$
Воспользуемся признаком Дирихле:

1. $$\sup_{y>0} \sup_{A} \left| \int_1^A \sin x\, dx \right| \leqslant 2$$

2. $$\frac{e^{-x \cdot y}}{x} \downarrow 0, \quad x \to +\infty \quad \forall y > 0$$

3. $$0 \leqslant \frac{e^{-xy}}{x} \leqslant \frac{e^{-x \cdot y_1}}{x} \to 0, x \to +\infty\, \forall y \in [0, y_2], \forall x > 1 \Rightarrow$$

$$\sup_{y \in [0, y_2]} \ e^{-xy} \to 0, \ x \to +\infty.$$

$\Rightarrow$ В силу признака Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}\, dx$ сходится равномерно по y

В силу признака Вейерштрасса $\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-xy}\, dx$ сходится равномерно по $y \in [y_1, y_2]$

$$|\sin x\, e^{-xy}| \leqslant e^{-x \cdot y_1}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x \cdot y_1}\, dx \quad - \text{сход.}$$

Это доказывает, что можно дифференцировать интеграл по параметру при любом $y > 0$
$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}\, dx$ сходится равномерно по y
$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx$ сходится равномерно по $y \in [0, y_2]$ $\forall y_2 > 0$.

Примечание. Мы доказали от 1 до $+\infty$. Но интеграл от 0 до $+\infty$ отличается минимально:

На $[0, 1] \times [0, y_2]$ функция $F(x, y) = \dfrac{\sin x}{x} e^{-xy}$ непрерывна по совокупности переменных.

Тогда, следующие условия эквивалентны:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}\, dx$ сходится равномерно по y на множестве $[0, y_2]$.

2. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}\, dx$ сходится равномерно по y на множестве $[0, y_2]$.

Равномерную сходимость мы требуем, чтобы обосновать непрерывность в нуле.
Запишем условия для перехода к пределу по параметру.

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}\, dx$ сход. равномерно по y на $[0, y_2]$ $\forall y_2 > 0$.

2. $\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{y\to+0} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$.

3. В силу непрерывности:

$$F : e^{-xy}\frac{\sin x}{x} \underset{[0,t]}{\rightrightarrows} \frac{\sin x}{x}\ \forall t > 0 \Rightarrow \int\limits_0^t e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx \to \int\limits_0^t \frac{\sin x}{x}dx\ \forall t > 0.$$

Все эти условия выполнены. Тогда существует предел:

$$\int\limits_0^t e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\, dx \longrightarrow .\int\limits_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx \quad \forall\, t > 0.$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{y\to+0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

А это и означает непрерывность функции D в нуле справа.
Тогда все переходы в настоящем доказательстве обоснованы и интеграл Дирихле полностью посчитан.

□

7 Преобразование Фурье

Определение 7.1. Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Тогда $\mathcal{F}[f](x) := \mathrm{V.P.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\, f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}$.

Примечание. V.P. (от фран. *Valeur Principale*) — интеграл в смысле главного значения.

$$\mathrm{V.P.} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\, f(y)\, dy := \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(y)\, e^{-ixy}\, dy.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f\right](x) := \mathrm{V.P.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(y)\, dy$$

Примечание.

$$\text{Если } f \in L_1(\mathbb{R}), \text{ то } \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \mathrm{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$$

Ключевое отличие от несобственного интеграла Лебега: Пределы интегрирования берутся симметрично.

В обычном несобсвтенном интеграле имеем незавсимые друг от друга пределы A_1 и A_2:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy}\, dy = \lim_{\substack{A_1 \to +\infty \\ A_2 \to -\infty}} \int_{A_2}^{A_1} f(y)\, e^{-ixy}\, dy$$

Пример. Пусть g - произвольная нечетная функция на $\mathbb{R}$. $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$

$$\text{V. P.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, dy = 0.$$

(а интеграл Лебега, и даже несобственный интеграл Лебега может не существовать)

Вопрос.

$$\textit{Когда } \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[f\right]\right] = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[f\right]\right] = f\,?$$

На первый взгляд кажется, что всегда. Однако не все так просто.

$$\text{Пусть } I_A[f](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \mathcal{F}[f](y)\, e^{ixy}\, dy, \quad \forall A > 0.$$

Лемма 7.1 (Ключевая)**.** *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $x \in \mathbb{R}$*. Тогда* $\forall A > 0$ *справедливо равенство:*

$$I_A\left[f\right](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(At)}{\pi t}\, dt.$$

Доказательство. Заметим, что $F(y,u) = f(u)e^{i(x-u)y}$ интегрируема на множестве $(-A, A) \times \mathbb{R}$ при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$. По y значения меняются от $-A$ до A, а по u - по всей числовой прямой. $|F(y,u)| \leqslant |f(u)|$, а она интегрируема в полосе, потому что полоса — это конечный промежуток

$\Rightarrow$ по теореме Фубини:

$$I_A\big[f\big](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-A}^{A} f(u)\, e^{i\,(x-u)\,y}\, dy \right) du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left[\int_{-A}^{A} \cos(x-u)\, y\, dy \right] du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \frac{2 \sin A(x-u)}{x-u}\, du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \frac{\sin A(x-u)}{\pi\,(x-u)}\, du = \{x - u = t\} = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin(At)}{\pi t}\, dt$$

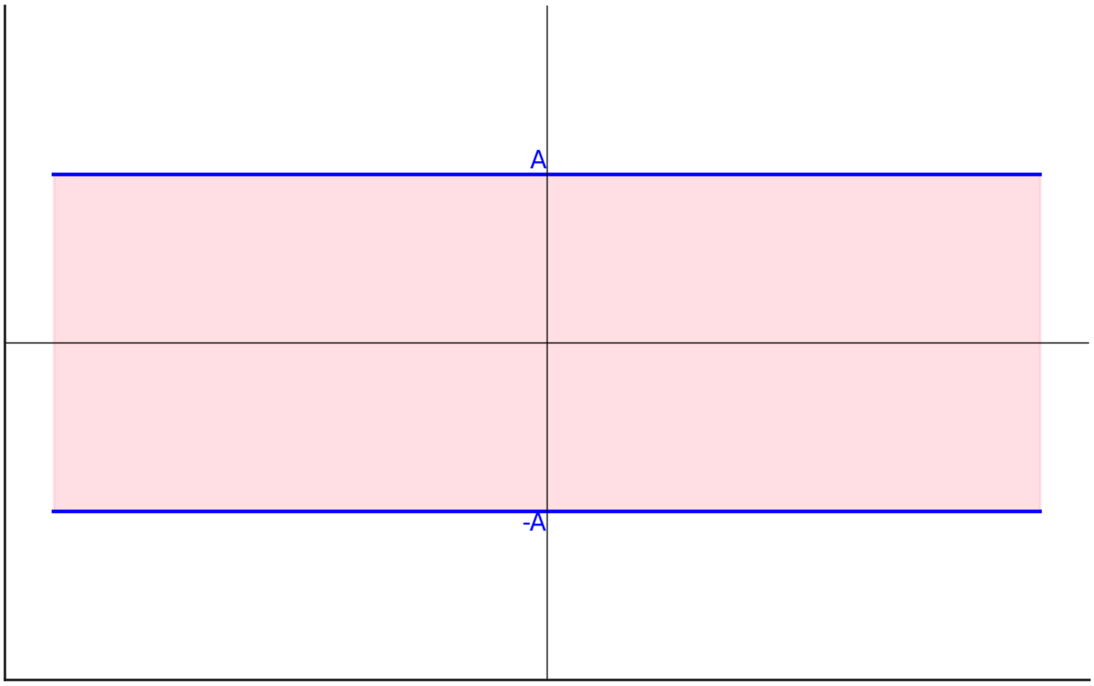
$\square$

7.1 Интеграл Фурье

Определение 7.2. Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

$$\text{Если } \exists \lim_{A \to +\infty} I_A[f](x) \text{ при } x \in \mathbb{R}, \text{ то говорят, что } \exists \text{ интеграл Фурье функции } f$$

По сути интеграл Фурье совпадает с $F^{-1}[F[f]]$.



Теорема 7.1. *Пусть $\tilde{f} \in L_1(-\pi, \pi)$ и 2π-периодична.*

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и совпадает с $\widetilde{f}$ в некоторой окрестности точки $\underline{x} \in \mathbb{R}$. Тогда интеграл Фурье в точке $\underline{x}$ сходится к $\widetilde{f}$ в этой точке. $\Leftrightarrow$ ряд Фурье функции $\widetilde{f}$ сходится в точке $\underline{x}$.

Более того, в случае сходимости справедливо равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{V.\,P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](y)\, e^{ix\,y}\, dy \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\big(\widetilde{f}\big)\, e^{inx}$$

Доказательство. Докажем, что

$$I_A\big[f\big](\underline{x}) - S_{[A]}\big[\widetilde{f}\big](\underline{x}) \longrightarrow 0, \quad A \to +\infty, \text{ где } [A] \text{ - целая часть числа } A$$

Из ключевой леммы (7.1) следует, что $I_A[f](\underline{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\underline{x} - t)\frac{\sin(At)}{\pi t}\, dt$

Предположим, что $f \equiv \widetilde{f}$ в $U_\delta(\underline{x})$

$$I_A\,[f]\,(\underline{x}) = \int\limits_{-S}^{0} f(\underline{x} - t) \cdot \frac{\sin(At)}{\pi t}\, dt + O(1), \quad A \to +\infty$$

Это следует из теоремы Риммана об осцилляции
С другой имеем формулу:

$$S_n\left[\widetilde{f}\right](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\underline{x} - t)\frac{\sin(nt)}{\pi t}\, dt + \varepsilon_n\left[\widetilde{f}\right](\underline{x})$$

По теореме Риммана об осцилляции:

$$S_n\left[\widetilde{f}\right](x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\underline{x} - t)\frac{\sin(nt)}{\pi t}\, dt + \varepsilon_n\left[\widetilde{f}\right](\underline{x}) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \widetilde{f}(\underline{x} - t)\frac{\sin(nt)}{\pi t}\, dt + O(1), \quad n \to +\infty$$

Если $A = n$, то $I_A\big[f\big](\underline{x}) - S_{[A]}\big[\widetilde{f}\big](\underline{x}) \longrightarrow 0$ очевидно доказано

В общем случае, окгда A — нецелое, можем посмотреть на целую часть A (вспомним, что I_A — это интеграл от преобразования Фурье).

$$\left|I_A\left[f\right]\left(\underline{x}\right) - I_{[A]}\left[f\right]\left(\underline{x}\right)\right| \leqslant \int\limits_{A-1}^{A} \left|\mathcal{F}[f](y)\right| dy + \int\limits_{A}^{A+1} \left|\mathcal{F}[f](y)\right| dy$$

$$\leqslant 2 \sup_{|y|\geqslant A-1} \left|\mathcal{F}[f](y)\right| \longrightarrow 0, \quad A \to +\infty$$

Действительно, по теореме Риммана обосцилляции

$$\mathcal{F}\left[f\right](y) \longrightarrow 0, \quad y \to +\infty,$$

$$\mathcal{F}\left[f\right](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-ixy}\, dy \longrightarrow 0, y \longrightarrow \infty$$

Так как $f \in L_1(\mathbb{R})$ по усл, имеем право брать обычный Лебеговский интеграл

В итоге по неравенству треугольника:

$$\begin{aligned}\left|I_A[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})\right| \leqslant &\left|I_A[f](\underline{x}) - I_{[A]}[f](\underline{x})\right| \\ &+ \left|I_{[A]}[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})\right|.\end{aligned}$$

Первое слогаемое $\left|I_A[f](\underline{x}) - I_{[A]}[f](\underline{x})\right| \to 0, A \to +\infty$ так как мы только что доказали следующее:

$$\leqslant 2 \sup_{|y|\geqslant A-1} \left|\mathcal{F}[f](y)\right| \longrightarrow 0, \quad A \to +\infty$$

Вторoе слогаемое тоже $\left|I_{[A]}[f](\underline{x}) - S_{[A]}[f](\underline{x})\right| \to 0, A \to +\infty$, так как при целых A $I_A[f](\underline{x}) = S_n[\widetilde{f}(x)]$ с точностью до $o(1)$, потому что $f = \widetilde{f}$ в δ-окрестности $\underline{x}$

□

Следствие. Все признаки поточечной сходимости рядов Фурье переносятся и на интеграл Фурье (т е от функции требуются такие же условия локального поведения)

Пример. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f \in BV(U_\delta(\underline{x}))$ при $\delta > 0$. Тогда $F^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right](\underline{x}) = f(\underline{x})$.
Аналогично для условия Дини и условия Гёльдера.

Следствие. Все признаки которые были для рядов Фурье, для них есть аналоги:

1. Пусть $f \in \mathbb{L}_1^{loc}(\mathbb{R})$ в некоторой $U_\delta(\underline{x})$ и имеет ограниченную вариацию, тогда:
$$f(\underline{x}) = F^{-1}[F[f]](\underline{x})$$
2. Пусть $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Гёльдера с степенью $\alpha \in (0;1]$ в некоторой $U_\delta(\underline{x})$. Тогда:
$$f(\underline{x}) = F^{-1}[F[f]](\underline{x})$$
3. (Условие Дини) Пусть $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ и $\exists \delta > 0$ и $\exists c > 0$ такие что:
$$\int_0^\delta |\frac{f(\underline{x}-u) + f(\underline{x}-u)}{2} - C|\frac{du}{u} < +\infty$$
Тогда $F^{-1}[F[f]](\underline{x}) = C$

7.2 Преобразование Фурье свёртки

Напоминание. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Свёрткой называют $f * g = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$. $f * g$ корректно определенная измеримая функция. Она является интегрируемой, если f и g интегрируемы. Свертка обладает свойствами:

- ▷ Коммутативность. $f * g = g * f$
- ▷ Ассоциативность. $(f * g) * h = f(g * h)$

Теорема 7.2. *Пусть* $f{,}g \in L^1(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$F[f * g](x) \;=\; \sqrt{2\pi}\, F[f](x)\, F[g](x),$$

где

$$F[h](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} h(y)\, dy.$$

Доказательство. По определению

$$F[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \big(f * g\big)(y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(y-t)\, g(t)\, dt\Big) dy.$$

Меняем порядок интегрирования и расписываем $e^{-ixy} = e^{-ix(y-t+t)} = e^{-ixt}e^{-ix(y-t)}$:

$$\begin{aligned} F[f * g](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} e^{-ix(y-t)} f(y-t)\, g(t)\, dy\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-ixt} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(y-t)} f(y-t)\, dy\Big) dt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл по y при замене переменной $u = y - t$ даёт

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(y-t)} f(y-t)\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} f(u)\, du = \sqrt{2\pi}\, F[f](x).$$

Следовательно

$$F[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\sqrt{2\pi}\, F[f](x)\Big) \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-ixt}\, dt = \sqrt{2\pi}\, F[f](x)\, F[g](x).$$

□

Примечание. Интеграл двойного интегрирования можно менять местами по теореме Фубини (а для неотрицательных функций по теореме Тонелли), поскольку

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \big|f(y-t)\big|\, \big|g(t)\big|\, dy\, dt = \int_{\mathbb{R}} \big|g(t)\big| \Big(\int_{\mathbb{R}} \big|f(y-t)\big|\, dy\Big) dt = \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Таким образом все переходы с перестановкой интегралов обоснованы.

Теорема 7.3 (преобразование Фурье производной)**.** *Пусть*

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}), \quad f' \in L^1(\mathbb{R}),$$

и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f'](y) = iy\, \mathcal{F}[f](y),$$

Доказательство. **Шаг 1.** Сначала докажем, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Так как $f' \in L^1(\mathbb{R})$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt =: A$$

существует. Предположим $A \neq 0$. Тогда найдётся X_A такое, что при $x > X_A$ есть

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2} \quad\Longrightarrow\quad \int_{X_A}^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty,$$

что противоречит условию $f \in L^1(\mathbb{R})$. Аналогичным рассуждением получаем и $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Шаг 2. Интегрируем преобразование Фурье f' по частям:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f'](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[f(x)e^{-ixy}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(-iy\big)e^{-ixy}\,dx \\
&= iy\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = iy\,\mathcal{F}[f](y).
\end{aligned}$$

Поскольку $f(x)e^{-ixy}\Big|_{x\to\pm\infty} = 0$, граничные слагаемые равны нулю. □

Следствие. Пусть $k \in \mathbb{N}$,

$$f,\, f',\, \ldots,\, f^{(k-1)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ и кусочно непрерывна на } \mathbb{R}.$$

Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\big[f^{(k)}\big](y) = (iy)^k\,\mathcal{F}[f](y),$$

и при $|y| \to \infty$ выполняется

$$\mathcal{F}[f](y) = o\big(|y|^{-k}\big).$$

Доказательство. Докажем по индукции по k.

База $(k = 1)$ — это теорема о преобразовании Фурье производной:

$$\mathcal{F}[f'](y) = iy\,\mathcal{F}[f](y).$$

Шаг индукции. Предположим, что для $k-1$ уже доказано

$$\mathcal{F}\big[f^{(k-1)}\big](y) = (iy)^{k-1}\,\mathcal{F}[f](y).$$

Поскольку $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(k-1)}(x) = 0$ (аналогично первому доказательству), применяем к $f^{(k-1)}$ тот же приём интегрирования по частям:

$$\mathcal{F}\big[f^{(k)}\big](y) = iy\,\mathcal{F}\big[f^{(k-1)}\big](y) = iy\,(iy)^{k-1}\,\mathcal{F}[f](y) = (iy)^k\,\mathcal{F}[f](y).$$

Асимптотика. Из формулы

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](y) = (iy)^k\,\mathcal{F}[f](y)$$

получаем

$$\mathcal{F}[f](y) = (iy)^{-k}\,\mathcal{F}[f^{(k)}](y).$$

Но $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, и по лемме Римана–Лебега $\mathcal{F}[f^{(k)}](y) \to 0$ при $|y| \to \infty$. Значит

$$\mathcal{F}[f](y) = o\big(|y|^{-k}\big), \quad |y| \to \infty.$$

□

Теорема 7.4 (Дифференцирование преобразования Фурье)**.** *Пусть*

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad x\, f(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Тогда функция

$$\mathcal{F}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\, f(x)\, dx$$

непрерывна и имеет непрерывную первую производную по параметру y:

$$\frac{d}{dy}\, \mathcal{F}[f](y) = \mathcal{F}\big[-\, ix\, f(x)\big](y).$$

Доказательство. Зафиксируем конечный отрезок $[y_1,y_2] \subset \mathbb{R}$ и положим

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ixy}\, f(x).$$

Тогда

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, dx.$$

Вычислим частную производную по y:

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \big(-ix\big) e^{-ixy}\, f(x).$$

По условию $x\, f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, поэтому

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \right| = \frac{|x\, f(x)|}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{— интегрируемая функция (независимо от } y).$$

Следовательно, по теореме о дифференцировании параметрического интеграла под знаком интеграла можно переставить дифференцирование и интегрирование:

$$\frac{d}{dy}\, \mathcal{F}[f](y) = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)\, dx = \mathcal{F}\big[-\, ix\, f(x)\big](y).$$

При этом та же теорема гарантирует непрерывность производной по y, а из непрерывности $g(x,y)$ по y и теоремы о переходе к пределу под интегралом следует непрерывность $\mathcal{F}[f](y)$. □

8 Обобщенные функции

На самом деле «обобщённые функции» — это не очень удачный перевод: правильнее было бы называть их *распределениями*. Рассмотрим неформальную идею:

Существует базовая лемма Дю Буа–Реймона из вариационного исчисления, которая по сути говорит следующее: знать функцию «поточечно» — то же самое, что знать её действие на распределённые в пространстве объекты.

Почему термин «распределение»? Потому что мы обычно интегрируем f, рассматривая её как плотность какой-то физической величины (скажем, плотность заряда или массы), а φ моделирует измерительный прибор. И любой реальный прибор не умеет «снимать» значение в точке — он измеряет величину в некотором объёме: например, мы не определяем температуру в математической точке, а получаем среднее по окружающему пространству.

Таким образом, мы пытаемся описать физический процесс поточечно, но лемма Дю Буа–Реймона показывает: это вовсе не обязательно — можно «тестировать» функцию любыми приборами произвольного размера, то есть рассматривать её действие на любые «распределённые» тест-функции.

Лемма 8.1 (Дю Буа—Реймона)**.** *Пусть* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *и для любой* $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *- те непрерывна и имеет компактный носитель*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Тогда $f = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. **Шаг 1.** По теореме Лебега о дифференцировании интеграла почти всюду

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy \tag{$*$}$$

Пусть $E = \{x : f(x) \neq 0\}$ имеет положительную меру.

Шаг 2. Для $x \in E$ и $\varepsilon > 0$ по $(*)$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Big|\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy - f(x)\Big| < \varepsilon/2 \quad \forall\, 0 < r < \delta.$$

Возьмём тест-функцию

$$\psi_r(y) = \frac{1}{|B_r(x)|}\,\psi\Big(\frac{y-x}{r}\Big),$$

где $\psi \in C_0^\infty$, $\psi \geqslant 0$, $\int \psi = 1$, $\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)$. Тогда $\psi_r \in C_0^\infty$, $\int \psi_r = 1$, $\operatorname{supp}\psi_r \subset B_r(x)$, и

$$\Big|\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy - \int f(y)\,\psi_r(y)\,dy\Big| \leqslant \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)\setminus B_r(x)} |f(y)|\,dy < \varepsilon/2.$$

Шаг 3. По условию $\int f\,\psi_r = 0$, поэтому

$$|f(x)| \leqslant \Big|\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f - \int f\,\psi_r\Big| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольна, получаем $f(x) = 0$ для почти всех x. □

8.1 Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$

Определение 8.1 (Пространство пробных функций)**.** Пространством $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ назовем $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ со введенной сходимостью:

Последовательность $\{\varphi_m\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то есть $\varphi_m \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]{} \varphi$, если

1. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \hookrightarrow D^\alpha \varphi_m \underset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi$, $m \to \infty$;
2. $\exists C > 0$: $\operatorname{supp}\varphi_m \subset B_c(0)$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Здесь

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Определение 8.2. Назовем $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Функционал

$$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

и удовлетворяет двум условиям:

1. (*Линейность*) $T\big(\alpha\,\varphi_1 + \beta\,\varphi_2\big) = \alpha\,T(\varphi_1) + \beta\,T(\varphi_2), \quad \forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall\,\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
2. (*Непрерывность*) $\forall \{\varphi_m\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\varphi_m \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]{} \varphi \;\hookrightarrow\; T(\varphi_m) \;\longrightarrow\; T(\varphi),\; m \to \infty$.

Замечание. Далее «действие» функционала будем обозначать не как $T(\varphi)$, а как $\langle T, \varphi\rangle$.

Определение 8.3. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что φ является *регулярным* обобщённым функционалом (или регулярной обобщённой функцией), если

$$\exists\, f_\varphi \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \text{такое, что} \quad \langle \varphi,\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\varphi(x)\,\psi(x)\,dx, \quad \forall\,\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

В противном случае φ называют *сингулярным* распределением.

Замечание. Несмотря на то, что пространства $D(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\mathbb{R}^n)$ определялось для функций в $\mathbb{R}$, в дальнейшем будем считать что функции имеют областью значений $\mathbb{C}$, а в $D'(\mathbb{R}^n)$, соответственно, линейные функционалы в $\mathbb{C}$. И это – линейные пространства над полем $\mathbb{C}$.

Лемма 8.2. *Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда функционал λ_f, определяемый формулой*

$$\langle \lambda_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Является элементом пространства $D'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Действие λ_f на φ имеет смысл в силу компактности носителя φ и ее непрерывности, а значит, как следствие, ограниченности, а также локальной интегрируемости f (то есть она интегрируема на носителе φ). Значит, такой интеграл вообще корректен. Далее

- В силу линейности интеграла Лебега функционал λ_f – линейный функционал;
- Осталось проверить непрерывность λ_f относительно D-сходимости:
  Пусть $\{\varphi_m\} \subset D(\mathbb{R}^n)$: $\varphi_m \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]{} \varphi$, $m \to +\infty$.
  Из определения сходимости носители «не расползаются», то есть

$$\exists R > 0\colon B_R(0)\colon \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow \operatorname{supp}\varphi_m \subset B_R(0) \text{ и } \operatorname{supp}\varphi \subset B_R(0).$$

В частности, также, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_m(x) - \varphi(x)| \to 0, m \to +\infty$ (по определению сходимости в D). Тогда

$$|\langle\lambda_f, \varphi_m - \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi_m(x) - \varphi(x))dx\right| \leqslant \int_{B_R(0)} |f(x)|\,|\varphi_m(x) - \varphi(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_m(x) - \varphi(x)| \int_{B_R(0)} |f(x)|dx \to 0, m \to +\infty.$$

А значит λ_f – действительно непрерывный линейный функционал $\Rightarrow \lambda_f \in D'(\mathbb{R}^n)$.

□

Замечание. Последний переход корректен, как так результат интеграла будет каким-то числом, то есть $< +\infty$, в силу того, что $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Примечание. Эта лемма показывает, что можно воспринимать $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ как подпространство $D'(\mathbb{R}^n)$.
Вложение строгое, это будет продемонстрировано ниже.

Замечание. Иногда мы будем рассматривать функцию, необязательно принадлежащую $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, а как функционал, определяемый формулой.

Определение 8.4. Определим дельта-функцию Дирака как $\langle\delta, \varphi\rangle := \varphi(0) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание. Это пример сингулярного функционала.

Теорема 8.1. $\delta \in D'(\mathbb{R}^n) \setminus L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\delta \in D'(\mathbb{R}^n)$:

- Линейность:

$$\forall\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow$$
$$\langle\delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle = (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(0) = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha\langle\delta, \varphi_1\rangle + \beta\langle\delta, \varphi_2\rangle.$$

- Непрерывность: из равномерной сходимости следует поточечная сходимость.

Теперь покажем, что $\delta \notin L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Будем делать от противного:
Предположим, что $\exists f_\delta \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$: $\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow$

$$\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x)\varphi(x)dx.$$

Вспомним о соболевской аппроксимативной единице:

$$w(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\|x\|}{1 - \|x\|^2}\right), x \in \mathcal{B}_1(0); \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим $w_\varepsilon = w(x/\varepsilon)$.
По предположению:

$$1 = w_\varepsilon(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x)w_\varepsilon(x)dx = \int_{B_\varepsilon(0)} f_\delta(x)w_\varepsilon(x)dx.$$

Так как $\forall x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow w(x) \leqslant 1$, то

$$1 = \left| \int_{B_\varepsilon(0)} f_\delta(x) w_\varepsilon(x) dx \right| \leqslant \int_{B_\varepsilon(0)} |f_\delta(x)| dx \to 0, \varepsilon \to +0,$$

поскольку f_δ локально интегрируема и мера ε-шара стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$.
В неравенстве противоречие $1 \to 0$, а значит $f_\delta \notin L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. □

Определение 8.5. Пусть $\{\lambda_m\} \subset D'(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить что $\lambda_m \xrightarrow[D'(\mathbb{R}^n)]{} \lambda, m \to +\infty$, если

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \langle \lambda_m, \varphi \rangle \to \langle \lambda, \varphi \rangle, m \to +\infty.$$

Определение 8.6. Если λ — сингулярное распределение и $\exists \{f_m\} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$: $f_m \xrightarrow[D'(\mathbb{R}^n)]{} \lambda$, $m \to +\infty$, то $\{f_m\}$ называется регуляризацией λ.

Пример. Рассмотрим следующую последовательность функционалов:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) = \begin{cases} n, x \in \left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Тогда $f_n \xrightarrow[D'(\mathbb{R})]{} \delta, n \to +\infty$. Покажем это.
Пусть $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Рассмотрим

$$|\langle f_n, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle| = \left| \int_{-1/2n}^{1/2n} n\varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{-1/2n}^{1/2n} n\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)\, dx \right|. \qquad (*)$$

По теореме Лагранжа о среднем:

$$\exists \varepsilon \in (0, x)\colon \varphi(x) - \varphi(0) = x \cdot \varphi'(\varepsilon) \leqslant x \cdot \left(\max_{-\frac{1}{2n} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{2n}} \varphi'(\varepsilon) \right) \leqslant x \cdot \max \varphi'(\varepsilon).$$

Тогда $(*)$ можно продолжить как:

$$|\langle f_n, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle| \leqslant n \int_{-1/2n}^{1/2n} |x \max \varphi'(\varepsilon)|\, dx =$$

$$= n|\max \varphi'(\varepsilon)| \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{|\max \varphi'(\varepsilon)|}{4n} \to 0, n \to +\infty.$$

Что нам и хотелось показать.

Замечание. Регуляризация, вообще говоря, может быть не единственной.

Теорема 8.2. *Пусть задана последовательность $\{f_m\} \subset L_1^{loc}(\mathbb{R})$ такая, что:*

1. $\forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow \int_{\mathbb{R}} f_m(x) dx = 1$ *(интеграл, вообще говоря, несобственный Лебеговский);*
2. $\exists C > 0 : \left| \int_a^b f_m(x) dx \right| \leqslant C \ \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \ \forall m \in \mathbb{N}$;
3. $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} |f_m(t)| dt \to 0, m \to +\infty.$

Тогда она является регуляризацией δ ($f_m \xrightarrow[D'(\mathbb{R})]{} \delta,\ m \to +\infty$).

Замечание. От техающих: на лекции пункт 3 был без модуля, ($\star$) содержит пояснение, почему без какого-либо изменения изначальное доказательство не работает)

Примечание. Стоит заметить, что второе условие из первого не следует, в силу возможности «взаимного погашения» друг друга положительной и отрицательной частей при сколь угодно больших x.

Доказательство. Рассмотрим следующий интеграл с переменным верхним пределом:

$$F_m(x) := \int_{-\infty}^{x} f_m(t)dt.$$

Из второго условия следует, что $\exists C > 0$: $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \hookrightarrow F_m(x) \leqslant C$.
Кроме того, из первого условия:

$$F_m(x) \to 1, x \to +\infty, \quad F_m(x) \to 0, x \to -\infty.$$

Далее $\forall x > 0 \hookrightarrow [x, +\infty) \subset (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty) = \mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$. Следовательно,

$$|1 - F_m(x)| = \left|\int_{x}^{+\infty} f_m(t)dt\right| \leqslant \int_{x}^{+\infty} |f_m(t)|dt \leqslant \int_{\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)} |f_m(x)|dx \to 0, m \to +\infty,$$

где последний предельный переход берётся из третьего условия. (($\star$): в исходном утверждении без модуля ничего не обеспечивает отсутствие ситуации, когда $\int_x^{+\infty} f_m(t)dt > \int_{\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)} f_m(t)$: на $[\dfrac{x}{2}, x]$ и $\left[-x, -\dfrac{x}{2}\right]$ $f_m(x)$ будет нулём; на $[x, +\infty)$ будет затухать с положительным значением функции, а на $(-\infty, -x]$ будет затухать, но с отрицательным значением - это даст взаимную компенсацию для выполнения условия 3 и обеспечит условие 2; на $\left[-\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2}\right]$ будет колоколом, который даст 1 для условия 1).
Тогда $\forall x > 0$:

$$F_m(x) \to 1,\ m \to +\infty.$$

Аналогично $\forall x < 0 \hookrightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty) = \mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon = -\dfrac{x}{2}$. Следовательно,

$$|F_m(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x} f_m(t)dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{x} |f_m(t)|dt \leqslant \int_{\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)} |f_m(x)|dx \to 0, m \to +\infty.$$

Получается,

$$\forall x > 0 \hookrightarrow F_m(x) \to 1, m \to +\infty, \quad \forall x < 0 \hookrightarrow F_m(x) \to 0, m \to +\infty.$$

То есть $F_m \to \theta, m \to +\infty$ (поточечно), где θ — *функция Хевисайда*:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)\varphi(x)dx = F_m(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F_m(x)\varphi'(x)dx.$$

(интегрирование по частям здесь разрешено использовать без доказательства.) Из компактности носителя φ и ограниченности F_m следует, что первое слагаемое зануляется.
Так как

▷ у φ компактный носитель,

▷ $F_m \to \theta, m \to +\infty$,

▷ $\sup |F_m| \leqslant C$, где sup берётся по $x \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$,

то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости верно следующее (в допущении, что f_m интегрируема всё же в обычном смысле; но на самом деле эта теорема справедлива и при интегрировании несобственном смысле при условии, что несобственный интеграл должен быть равен Лебеговскому, то есть интегрируемость должна быть абсолютной):

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} F_m(x)\varphi'(x)dx \to -\int_{\mathbb{R}} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^{+\infty} = \varphi(0),$$

что доказывает нашу теорему. □

Определение 8.7. Пусть $g \in C^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$. Определим произведение $g \cdot \lambda$ как функционал, действующий на $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$\langle g \cdot \lambda, \varphi \rangle = \langle \lambda, g \cdot \varphi \rangle \tag{$*$}$$

Теорема 8.3. *Определение выше – корректно в том смысле, что $g\lambda$ действительно лежит в $D'(\mathbb{R}^n)$ и в случае регулярных распределений совпадает с обычным умножением.*

Доказательство. Функционал, определяемый $(*)$, является линейным и корректно определённым, поскольку

▷ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow g \cdot \varphi \in C^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$

▷ является непрерывным: $g \cdot \varphi_m \xrightarrow[D(\mathbb{R}^n)]{} g \cdot \varphi$, $m \to +\infty$, ибо

1. $\varphi_m \xrightarrow[D(\mathbb{R}^n)]{} \varphi$,
2. носитель не изменился,
3. все носители содержатся в $\mathcal{B}_R(0)$ и в нём g ограничена, как и её производные, но необязательно одной и той же константой.

Пусть λ — регулярное распределение. Тогда $\exists f_\lambda \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \langle \lambda, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)\varphi(x)dx.$$

Тогда в силу $(*)$:

$$\langle g \cdot \lambda, \varphi \rangle = \langle \lambda, g \cdot \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)g(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f_\lambda(x)g(x))\varphi(x)dx.$$

Так как $f_\lambda \cdot g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, то $\langle g \cdot \lambda, \varphi \rangle = \langle f_\lambda \cdot g, \varphi \rangle$, что и даёт нам утверждение теоремы. □

Пример. Пусть $g \in C^{+\infty}(\mathbb{R})$, δ — дельта-функция Дирака. Тогда $g\delta = g(0)\delta$.

Доказательство.

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \langle g\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, g\varphi \rangle = g(0)\varphi(0) = g(0)\langle \delta, \varphi \rangle = \langle g(0)\delta, \varphi \rangle$$

□

Определение 8.8. δ_x – сдвинутую дельта-функцию Дирака определим как

$$\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow (\delta_x, \varphi) = \varphi(x).$$

Замечание. Сергей Львович Соболев ввёл понятие обобщённой производной.

Примечание. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx,$$

ибо носитель φ принадлежит $(-\infty, \infty)$. Этим результатом мотивируется следующее определение.

Определение 8.9. Пусть $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$. Определим $D^\alpha\lambda$ — такой функционал, который на любую пробную функцию $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, действует по правилу:

$$\langle D^\alpha\lambda, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle\lambda, D^\alpha\varphi\rangle,$$

где

$$D^\alpha\varphi := \frac{\partial^{|\alpha|\varphi(x)}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Теорема 8.4. *Определение выше корректно и в случае регулярного распределения, порождённого непрерывно дифференцируемой функцией (столько раз, сколько нам надо) совпадает с классическим определением.*

Доказательство. Нужно проверить, что $D^\alpha\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$.
Линейность по φ очевидна: оператор производной – линеен.
Проверим непрерывность. Пусть $\{\varphi_m\} \subset D(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\varphi_m \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]{} \varphi, m \to +\infty$.

$$|(D^\alpha\lambda, \varphi_m) - (D^\alpha\lambda, \varphi)| = |(D^\alpha\lambda, \varphi_m - \varphi)| = |(\lambda, D^\alpha(\varphi_m - \varphi))|.$$

В силу определения сходимости в D, очевидно, что $D^\alpha\varphi_m \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]{} D^\alpha\varphi, m \to +\infty$. Тогда, поскольку $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$, то и $(\lambda, D^\alpha(\varphi_m - \varphi)) \to 0, m \to +\infty$.
Пусть λ – регулярный функционал, который порождён C^1-гладкой f_λ. Покажем, что обобщенная производная совпадает с классической. То есть обобщенной производной будет соответствовать регулярный функционал, который поточечно почти всюду совпадает с классической частной производной. Пусть D_j – частная производная по j-й координате в обобщённом смысле. Тогда

$$(D_j\lambda, \varphi) = -(\lambda, D_j\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx = (*)$$

Далее будем работать с сечениями и, воспользовавшись теоремой Фубини, так как f_λ - C^1-гладка, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ - бесконечно дифференцируема и финитна, получим

$$(*) = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\hat{x}_j \int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x_1, \dots, x_j, \dots x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j.$$

Где $\hat{x}_j$ - та у которой пропущена j-ая координата. При каждом фиксированном $\hat{x}_j$ проинтегрируем по частям по j-ой координате:

$$\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x_1, \dots)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j = f_\lambda(\dots)\varphi(\dots)|_{x_j=-c}^{x_j=c} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}\varphi(x_1, \dots)dx_j.$$

При каждой $\hat{x}_j$: $f_\lambda(\ldots)\varphi(\ldots)|_{x_j=-c}^{x_j=c} = 0$. То есть

$$(*) = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_\lambda(\ldots)\varphi(\ldots)|_{x_j=-c}^{x_j=c}) d\hat{x}_j + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\hat{x}_j \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}\varphi(x_1,\ldots)dx_j.$$

А это, с учётом внешнего интеграла и повторного применения теоремы Фубини, в точности равно $\left(\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}, \varphi\right)$ — что и требовалось показать.
Аналогично по индукции мы можем показать для производной произвольного порядка. $\square$

Примечание. Всяких $\lambda \in D'(\mathbb{R}^n)$ можно дифференцировать сколько угодно раз (в обобщённом смысле).

Лемма 8.3. *Если* $\lambda_m \xrightarrow[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]{} \lambda$, $m \to +\infty$, *то* $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ *выполняется*

$$D^\alpha \lambda_m \xrightarrow[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]{} D^\alpha \lambda,\ m \to +\infty.$$

Доказательство. По определению:

$$(D^\alpha \lambda_m, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\lambda_m, D^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|}(\lambda, D^\alpha\varphi) = (D^\alpha \lambda, \varphi).$$

$\square$

Теорема 8.5 (Правило Лейбница)**.** *Пусть* $\lambda \in D'(\mathbb{R})$, *а* $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$(g\lambda)' = g'\lambda + g\lambda',$$

где равенства и производные понимаются в смысле $D'(\mathbb{R})$.

Доказательство. По определению и ранее доказанным свойствам $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$((g\lambda)', \varphi) = -(g\lambda, \varphi') = -(\lambda, g\varphi') = -(\lambda, (g\varphi)' - g'\varphi) = \\ = -(\lambda, (g\varphi)') + (\lambda, g'\varphi) = (\lambda', g\varphi) + (g'\lambda, \varphi) = (g\lambda' + g'\lambda, \varphi).$$

В силу произвольности φ мы и получаем утверждение теоремы. $\square$

8.2 Пространства S и S'.

Определение 8.10. Определим пространство $S(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций φ, быстро убывающих на бесконечности, то есть:

$$\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \|\varphi\|_l \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left((1+|x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha\varphi|\right) < +\infty,$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.
С введенной в нем сходимостью: $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$, $m \to +\infty$. если $\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \|\varphi - \varphi_m\|_l \to 0$, $m \to +\infty$.

Примечание. $\forall l \in \mathbb{N}_0$ верно, что $\|\cdot\|_l$ — является нормой.

Примечание (Примечание техающего)**.** Было в качестве упражнения, попробовал доказать сам.

Доказательство. Проверим три аксиомы нормы.

1. Неотрицательность и однозначность нуля. По определению, $\|\varphi\|_l$ — супремум неотрицательной функции

$$x \mapsto (1+|x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} \big|D^\alpha\varphi(x)\big| \geqslant 0,$$

поэтому $\|\varphi\|_l \geqslant 0$. Если $\|\varphi\|_l = 0$, то

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^\alpha\varphi(x)| = 0 \implies \forall x, \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^\alpha\varphi(x)| = 0,$$

т. е. $D^\alpha\varphi(x) \equiv 0$ для всех $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$. При $\alpha = 0$ это даёт $\varphi \equiv 0$.

2. Однородность. Для любого $a \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|a\varphi\|_l = \sup_x(1+|x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}\big|D^\alpha(a\varphi)(x)\big| = \sup_x(1+|x|)^l \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}\big|a\,D^\alpha\varphi(x)\big| = |a|\,\|\varphi\|_l.$$

3. Неравенство треугольника. Пусть $\varphi,\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда для каждого x и каждого $|\alpha| \leqslant l$

$$|D^\alpha(\varphi+\psi)(x)| \leqslant |D^\alpha\varphi(x)| + |D^\alpha\psi(x)| \leqslant \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^\alpha\varphi(x)| + \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^\alpha\psi(x)|.$$

Умножая на $(1+|x|)^l$ и беря супремум по x, получаем

$$\|\varphi+\psi\|_l \leqslant \|\varphi\|_l + \|\psi\|_l.$$

Таким образом, $\|\cdot\|_l$ удовлетворяет всем трём аксиомам нормы, что и требовалось. □

Примечание. Таким образом $S(\mathbb{R}^n)$ – счётнонормированное пространство.

Теорема 8.6. $S(\mathbb{R}^n)$ — *метризуемое пространство, то есть существует метрика* d *такая, что*

$$d(\varphi_m,\varphi) \to 0 \iff \varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, m \to +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\varphi,\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Возьмём метрику

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{l=0}^{+\infty} 2^{-l}\frac{\|\varphi-\psi\|_l}{1+\|\varphi-\psi\|_l}.$$

Пусть $\varphi_m \xrightarrow{d} \varphi, m \to +\infty$. Но, тогда, в силу неотрицательности слагаемых:

$$\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \frac{\|\varphi_m-\varphi\|_l}{1+\|\varphi_m-\varphi\|_l} \to 0, m \to +\infty.$$

Рассмотрим $t \to \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ – возрастающая и непрерывная в нуле (и у неё есть обратная функция), тогда $\|\varphi_m-\varphi\|_l \to 0, m \to +\infty$.
Покажем теперь в обратную сторону. Пусть $\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \|\varphi-\varphi_m\|_l \to 0, m \to +\infty$ и надо показать сходимость в метрике. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём $l(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{l(\varepsilon)}^{+\infty} 2^{-l}\frac{\|\varphi_m-\varphi\|_l}{1+\|\varphi_m-\varphi_m\|} < \varepsilon/2.$$

Оно существует, поскольку каждое из слагаемых не больше 1. А теперь выберем $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таким большим, чтобы

$$\max_{1\leqslant l\leqslant l(\varepsilon)}\|\varphi-\varphi_m\|_l < \varepsilon/2 \forall m > M(\varepsilon).$$

Но, тогда, разобьём метрику на две части:

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \ldots = \sum_{1}^{l(\varepsilon)} \ldots + \sum_{l(\varepsilon)+1}^{+\infty} \ldots \leqslant \varepsilon/2 \cdot \sum_{l=1}^{l(\varepsilon)} 2^{-l} + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Что и требовалось показать. □

Примечание. Надо проверить, что d – действительно метрика.

Примечание (Примечание техающего)**.** Было в качестве упражнения, попробовал доказать сам.

Доказательство. Проверим три аксиомы метрики.

1. Неотрицательность и невырожденность. Каждое слагаемое

$$2^{-l} \frac{\|\varphi - \psi\|_l}{1 + \|\varphi - \psi\|_l}$$

неотрицательно, следовательно $d(\varphi,\psi) \geqslant 0$. Более того,

$$d(\varphi,\psi) = 0 \implies \forall l,\ \frac{\|\varphi - \psi\|_l}{1 + \|\varphi - \psi\|_l} = 0 \implies \forall l,\ \|\varphi - \psi\|_l = 0 \implies \varphi = \psi.$$

2. Симметричность. Поскольку $\|\varphi - \psi\|_l = \|\psi - \varphi\|_l$, очевидно

$$d(\varphi,\psi) = d(\psi,\varphi).$$

3. Неравенство треугольника. Обозначим для краткости

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Функция f возрастает и удовлетворяет неравенству

$$f(a+b) \ \leqslant \ f(a) + f(b), \quad a,b \geqslant 0.$$

Действительно, используя $\| \varphi - \psi\|_l \leqslant \|\varphi - \chi\|_l + \|\chi - \psi\|_l$ и возрастание f, получаем

$$f\big(\|\varphi - \psi\|_l\big) \ \leqslant \ f\big(\|\varphi - \chi\|_l + \|\chi - \psi\|_l\big) \ \leqslant \ f\big(\|\varphi - \chi\|_l\big) + f\big(\|\chi - \psi\|_l\big).$$

Домножая на 2^{-l} и суммируя по $l \geqslant 0$, заключаем

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} f\big(\|\varphi - \psi\|_l\big) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l}\Big[f\big(\|\varphi - \chi\|_l\big) + f\big(\|\chi - \psi\|_l\big)\Big] = d(\varphi,\chi) + d(\chi,\psi).$$

Таким образом, d удовлетворяет всем аксиомам метрики. □

Теорема 8.7. *Преобразование Фурье осуществляет линейный изоморфизм $S(\mathbb{R})$ на $S(\mathbb{R})$. Более того, $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ справедливы следующие равенства:*

$$F\left[\frac{d^m\varphi}{dx^m}\right](y) = (iy)^m F[\varphi](y), \quad \frac{d^n F[\varphi]}{dy^n}(y) = F[(-ix)^n\varphi](y).$$

Замечание. Для выполнения второй формулы необходимо $\forall k \in \{1, \ldots n\} \hookrightarrow (-ix)^k\varphi \in L_1(\mathbb{R})$; Для выполнения первой — $\forall k \in \{1, \ldots m\} \hookrightarrow \dfrac{d^k\varphi}{dx^k} \in C(\mathbb{R}),\ \dfrac{d^k\varphi}{dx^k} \in L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Тогда по определению:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}((1+|x|)^l \max_{0\leqslant k\leqslant l}|\varphi^{(k)}(x)|) = \|\varphi\|_l < +\infty\ \forall l \in \mathbb{N}_0.$$

В частности $\forall k \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|\varphi(x)| < +\infty$. Так как

$$|x|^k|\varphi(x)| \leqslant \frac{(1+|x|)^2}{(1+|x|)^2}|x|^k|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{1+|x|^2}\|\varphi\|_{k+2}.$$

То и $|x|^k\varphi \in L_1(\mathbb{R})\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0$, а значит $F[\varphi]$ – бесконечно-дифференцируемая функция и справедлива вторая формула в утверждении теоремы.
Так как $\forall m \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \varphi^{(m)} \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F\left[\frac{d^m\varphi}{dx^m}\right] \to 0, x \to \infty.$$

И тогда $\forall m \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow F[\varphi](y) = o\left(\frac{1}{|y|^m}\right), y \to +\infty$.
А значит

$$(iy)^m\frac{d^nF[\varphi]}{dy^n} = (iy)^mF[(-ix)^n\varphi] = F\left[\frac{d^m}{dx^m}((-ix)^n\varphi)\right].$$

Теперь осталось показать только

$$(*) = \frac{d^m}{dx^m}\left((-ix)^n\varphi\right) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Но это действительно правда, поскольку φ – быстро убывающая функция на бесконечности. По правилу Лейбница раскроем производную:

$$\left|\frac{d^m}{dx^m}((-ix)^n\varphi)\right| = \left|\sum_{k=1}^m\binom{m}{k}((-ix)^n)^{(k)}\varphi^{(m-k)}\right| \leqslant C(1+|x|)^{\max(n,m)}\max_{0\leqslant s\leqslant\max(n,m)}|\varphi^{(s)}| = C\|\varphi\|_{\max(n,m)}.$$

А $C\|\varphi\|_{\max(n,m)}$ - конечна. Теперь домножим и разделим на $(1+|x|)^2$

$$(*) = \frac{(1+|x|)^2}{(1+|x|)^2}\left|\sum_{k=1}^m\binom{m}{k}((-ix)^n)^{(k)}\varphi^{(m-k)}\right| \leqslant \frac{(1+|x|)^2}{(1+|x|)^2}\left(C(1+|x|)^{\max(n,m)}\max_{0\leqslant s\leqslant\max(n,m)}|\varphi^{(s)}|\right) \leqslant .$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|)^2}C\|\varphi\|_{\max(n,m)+2}.$$

Получили, что m-ая производная мажорируется $\frac{C}{(1+|x|)^2}$, тк $\varphi \in S$.
Значит $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \dfrac{d^m((-ix)^n\varphi)}{dx^m} \in L_1(\mathbb{R})$ и

$$(iy)^m\frac{d^nF[\varphi](y)}{dy^n} \to 0, y \to \infty.$$

И тогда $F[\varphi] \in S(\mathbb{R})$, а значит $F[\cdot]$ – действительно преобразование $S(\mathbb{R})$.
Покажем, что это изоморфизм. Поскольку φ – бесконечно-дифференцируема и интегрирума, то справедлива формула обращения:

$$F^{-1}\left[F[\varphi](x)\right] = F[F^{-1}[\varphi]](x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

А значит, если $F[\varphi] = 0$, то $\varphi \equiv 0$ и F – инъективное линейное отображение из $S(\mathbb{R})$ в $S(\mathbb{R})$.
Вышеприведённые рассуждание верны и для обратного преобразования Фурье, а значит обратное преобразование тоже инъективное линейное отображение, а следовательно F – изоморфизм. □

Примечание. Эту теоремку бы тоже слегка дописать. Или даже не слегка...

Теорема 8.8. *Преобразование Фурье сохраняет сходимость в $S(\mathbb{R})$, то есть если*

$$\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, m \to +\infty.$$

То и

$$F[\varphi_m] \xrightarrow{S} F[\varphi], m \to +\infty.$$

Доказательство. Зафиксируем $l \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим l-ую норму $F[\varphi_m - \varphi]$:

$$\|F[\varphi_m]-F[\varphi]\|_l = \|F[\varphi_m-\varphi]\|_l = \sup_x (1+|x|)^l \max_{0\leqslant k\leqslant l} \frac{d^k}{dy^k}(F[\varphi_m-\varphi]) = \sup((1+|x|)^l \max_{0\leqslant k\leqslant l} F[(-ix)^k(\varphi_m-\varphi)]).$$

□

Примечание. Доказательство на 14-й лекции будет.

Определение 8.11. Определеним $S'(\mathbb{R})$ как пространство всех непрерывных (по отношению к сходимости в S) линейных функционалов.

Примечание. Под непрерывностью $\lambda \in S'(\mathbb{R})$ имеется в виду

$$\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, \ \ m \to \infty \quad => \quad (\lambda, \varphi_m) \to (\lambda, \varphi), \ \ m \to \infty$$

Примечание. Заметим, что $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ и $S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$.

Определение 8.12. Пусть $\lambda \in S'(\mathbb{R})$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall \varphi \in S$ определим $(\lambda^k, \varphi) = (-1)^k(\lambda, \varphi^{(k)})$. Доказательство корректности аналогично доказательству для D.

Примечание. Возникает вопрос, а что здесь считать регулярным распределением? Оказывается, не любую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как регулярное распределение в S'. Здесь проблема в том, что нельзя сильно расти на бесконечности.

Пример. Рассмотрим следующую $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$: $f = e^{2x^2}$.
Тогда для $\varphi(x) = e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$ выполняется $\int_{\mathbb{R}} f\varphi dx = +\infty$. А значит не любую локально-интегрируемую функцию можно считать элементом $S'(\mathbb{R})$.

Лемма 8.4. *Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$: $\exists C > 0$ и $\exists l \in \mathbb{N}_0$ такие, что*

$$|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^l.$$

Тогда обобщённая функция λ_f, порождённая f следующим образом:

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n): \ (\lambda_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx.$$

является элементом $S'(\mathbb{R}^n)$.

Следствие. Всякий полином можно считать элементом $S'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Заметим, что $\forall \varphi \in S$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)||\varphi(x)| \leqslant \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}}(1+|x|)^l|\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|)^{n+1}}\|\varphi\|_{l+n+1}.$$

А поскольку $\varphi \in S$, $\|\varphi\|_{l+n+1}$ - конечна. А значит $f \cdot \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и интеграл имеет смысл.
Линейность порождённого функционала очевидным образом следует из линейности интеграла.
Проверим непрерывность. Пусть $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, m \to +\infty$. Тогда

$$|(\lambda_f, \varphi_m - \varphi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f||\varphi_m - \varphi|dx \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^{n+1})}\|\varphi - \varphi_m\|_{n+l+1} \to 0, m \to +\infty.(*)$$

Что и завершает доказательство непрерывности. □

8.3 Умножение элементов из $S'(\mathbb{R})$ на гладкие функции

Лемма 8.5. *Пусть $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \exists m_n \in \mathbb{N}_0$ такая, что*

$$C_n(g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g^{(n)}(x)|}{(1+|x|)^{m_n}} < +\infty \quad (*).$$

Тогда $\forall\lambda \in S'(\mathbb{R})$ формула $(g\lambda, \varphi) = (\lambda, g\varphi)$ корретно определяет элемент $S'(\mathbb{R})$, обозначаемый $g\lambda$.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant n \leqslant l$.
Ключевое наблюдение: Если $\varphi \in S(\mathbb{R})$ и g удовлетворяет $(*)$, то $g\varphi \in S(\mathbb{R})$, потому что:

$$|((1+|x|)^l (g\varphi)^{(n)})| \leqslant \sum_{s=0}^{n} (1+|x|)^l |g^{(s)}(x)||\varphi^{(n-s)}(x)| \binom{n}{s} \leqslant (**)$$

Поскольку $\forall s \in \{0, \ldots, n\}$:

$$|g^{(s)}| \leqslant C_s(g)(1+|x|)^{m_s},$$

То после подстановки:

$$(1+|x|)^l |g^{(s)}||\varphi^{(n-s)}| \leqslant C_s(g)(1+|x|)^{l+m_s}|\varphi^{(n-s)}|.$$

А значит после взятия супремума:

$$\sup_x (1+|x|)^l |g^{(s)}||\varphi^{(n-s)}| \leqslant C_s(g) \sup_x (1+|x|)^{l+m_s}|\varphi^{(n-s)}| \leqslant C_s(g)\|\varphi\|_{l+m_1+\ldots+m_l}.$$

И это верно для всех $x \in \mathbb{R}$. После подстановки в $(**)$:

$$(**) \leqslant \|\varphi\|_{l+m_1+\ldots+m_l} C.$$

Поскольку рассуждения работают для любого n, то можно взять супремум

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \max_{0\leqslant n\leqslant l} (1+|x|)^l |(g\varphi)^{(n)}(x)| < +\infty.$$

А значит, в силу выполнения этого для любого $l \in \mathbb{N}$, мы получаем, что $g\varphi \in S(\mathbb{R})$ и $(\lambda, g\varphi)$ – корректен.
Линейность функционала $g\lambda$ по φ очевидна из линейности интеграла.
Покажем непрерывность. Если $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi, \ m \to +\infty$, то аналогичные рассуждения нам покажут $|g\varphi_m - g\varphi| \xrightarrow{S} 0, \ m \to +\infty$:

$$\|g\varphi_m - g\varphi\|_l \leqslant C(g)\|\varphi_m - \varphi\|_{l+m_1+\ldots+m_l} \to 0, m \to +\infty.$$

Используем непрерывность λ на S и получаем

$$(g\lambda, \varphi_m) = (\lambda, g\varphi_m) \to (\lambda, g\varphi) = (g\lambda, \varphi).$$

□

Примечание. Следующие условия для последовательности $\{\varphi_m\} \subset S(\mathbb{R})$ эквивалентны:

1. $\varphi_m \xrightarrow{S} 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ и $\forall l \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow C_{l,n}(\varphi_m) = \sup_{x\in\mathbb{R}} x^l \varphi_m^{(n)}(x) \to 0, \ m \to \infty.$

Доказательство. Покажем это. Пусть $\varphi_m \xrightarrow{S} 0, m \to \infty$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^l \varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^l |\varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant \|\varphi_m\|_{n+l} \to 0,\ m \to \infty.$$

И в эту сторону доказано.
Теперь докажем в обратную сторону. Рассмотрим следующее выражение, зафиксировав $0 \leqslant n \leqslant l$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^l |\varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} (1+|x|)^l |\varphi_m^{(n)}(x)| + \sup_{|x|>1} (1+|x|)^l |\varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant 2^l \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_m^{(n)}(x)| + \sup_{x\ in\mathbb{R}} |2^l x^l \varphi_m^{(n)}(x)| \leqslant 2^l C_{0,n}(\varphi_m) + 2^l C_{l,m}(\varphi_m) \to 0, m \to +\infty.$$

А значит $\|\varphi_m\|_l \to 0,\ m \to \infty\quad \forall l \in \mathbb{N}_0$. Следовательно $\varphi_m \xrightarrow{S} 0,\ m \to \infty$. Что и завершает доказательство. □

Напоминание. Теперь докажем недоказанную теорему с прошлой лекции

Теорема 8.9 (Теорема X)**.** *Пусть $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi,\ m \to \infty$. Тогда $F[\varphi_m] \xrightarrow{S} F[\varphi],\ m \to \infty$.*

Доказательство. Нам достаточно проверить, в силу только сделанного замечания, следующее выражение $\forall l \in \mathbb{N}_0$ и $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |(iy)^l \frac{d^n F[\varphi_m - \varphi]}{dy^n}(y)| \to 0,\ m \to \infty.$$

Ранее было показано, что

$$(iy)^l \frac{d^n}{dy^n}(F[\varphi_m - \varphi]) = (iy)^l F[(-ix)^n(\varphi_m - \varphi)] = F\left[\frac{d^l}{dx^l}((-ix)^n(\varphi_m - \varphi))(x)\right](y).$$

Заметим, что

$$\sup_{\mathbb{R}} \left[\frac{d^l}{dx^l}((-ix)^n(\varphi_m - \varphi))(x)\right] \to 0,\ m \to \infty.$$

Для этого надо рассмотреть

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^2 \frac{d^l}{dx^l}((-ix)^n(\varphi_m - \varphi)(x)) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \psi_{l,n,m}(x) \to 0,\ m \to \infty.$$

Тогда

$$|\sup_{y\in\mathbb{R}} F[\ldots](y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{(1+|x|^2)} \psi_{l,m,n}(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_{l,m,n}(x)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^2}dx \to 0,\ m \to +\infty.$$

Что завершает доказательство. □

Определение 8.13. Пусть $\lambda \in S'(\mathbb{R})$. Определим преобразование Фурье как

$$(F[\lambda], \varphi) = (\lambda, F[\varphi]).$$

И обратное произведение Фурье:

$$(F^{-1}[\lambda], \varphi) = (\lambda, F^{-1}[\varphi]).$$

На всякой пробной функции.

Теорема 8.10. *Определение преобразования Фурье в S' – корректно, то есть $\forall \lambda \in S'(\mathbb{R})$ функционалы $F[\lambda]$ и $F^{-1}[\lambda]$ являются корректно определёнными линейными непрерывными функционалами в S'. Более того, если $\lambda \in S'(\mathbb{R})$ порождён $f \in L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье в обобщённом смысле совпадает с преобразованием Фурье в классическом смысле.*

Примечание. Когда мы сделаем преобразование Фурье в обобщенном смысле, мы получим какой-то функционал на S. Ему будет соответствовать некоторое регулярное распределение, которое и является классическим преобразованием Фурье f.

Доказательство. Линейность немедленно следует из линейности интеграла и преобразования Фурьеа на S.
Корректность следует из того, что $F[\cdot]$ – изоморфизм пространства Шварца на себя.
Непрерывность функционалов $F[\lambda]$ и $F^{-1}[\lambda]$ следует из теоремы X.
Пусть теперь $\lambda \in S'(\mathbb{R})$ порождена $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Для всякой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$(F[\lambda], \varphi) = (\lambda, F[\varphi]) = \int_{\mathbb{R}} f_\lambda(y) F[\varphi](y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_\lambda(y) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ixy} dx \right) dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f_\lambda(y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} F[f] \varphi dx = (F[f_\lambda], \varphi).$$

(Замена пределов интегрирования делается по теореме Фубини, которую мы можем применять вследствие теоремы Тонелли). Что и завершает доказательство. То есть действие на пробные функции обобщенного преобразования Фурье и классического совпадают.
Для обратного преобразования Фурье действуем полностью аналогично. □

8.4 Преобразование Фурье в L_2.

Примечание. Как определить преобразование Фурье на L_2?

Лемма 8.6 (Лемма Планшереля.). $\forall f, g \in S(\mathbb{R}) \hookrightarrow (f, g)_{L_2} = (F[f], F[g])_{L_2}$.

Примечание. $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{L_2}$ - скалярное произведение в L_2, $\hat{f}$ - прямое преобразование Фурье.

Доказательство.

$$(\hat{f}, \hat{g})_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \overline{\hat{g}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \left(\overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(x) dx} \right) dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f} e^{ixy} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(x) f(x) dx = (f, g)_{L_2}.$$

Предпоследний переход сделан в силу теоремы Фубини (её применимость обосновывается теоремой Тонелли), а последний – поскольку преобразование Фурье действует как автоморфизм на $S(\mathbb{R})$. □

Следствие. Если рассматривать $S(\mathbb{R})$ как подпространство $L_2(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье является эрмитовым автоморфизмом на $S(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. В частности он сохраняет L_2-норму (является изометрическим изоморфизмом).

Лемма 8.7. $S(\mathbb{R})$ *плотно в* $L_2(\mathbb{R})$ *по* L_2*-норме.*

Доказательство. Ранее было показано, что $C_0^{+\infty}(\mathbb{R})$ плотно в $L_p(\mathbb{R})$. Применение этой теоремы при $p = 2$ завершает доказательство, поскольку $C_0^{+\infty}(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$. □

Определение 8.14. Зафиксируем $f \in L_2(\mathbb{R})$. Пусть $\{\varphi_n\} \subset S(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|\varphi_n - f\|_{L_2} \to 0, n \to +\infty.$$

А значит $\{\varphi_n\}$ – фундаментальна по L_2-норме. Тогда и $\{F[\varphi_n]\}$ – фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$. В силу полноты L_2 мы определим

$$F[f] - = \lim_{n\to+\infty} F[\varphi_n].$$

ВЫЧИТАН БАЗОВЫЙ ТЕХ ДО СЮДА

Теорема 8.11. *Определение преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ корректно.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}$ и φ'_n последовательности в $L_2(\mathbb{R}) \cap S(\mathbb{R})$, сходящиеся к φ в $L_2(\mathbb{R})$. Определим ψ_k следующим образом:

$$\psi_k = \begin{cases} \varphi_n, k = 2n \\ \varphi'_n, k = 2n+1. \end{cases}$$

Поскольку $F[\psi_k]$ имеет предел в L_2, то в силу того, что все частичные пределы равны пределу мы получаем искомую корректность. □

Теорема 8.12 (Теорема順Планшереля.). *Преобразование Фурье осуществляет изометрический изоморфизм $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})$.*
Кроме того, справедливы следующие свойства:

1. $\forall f, g \in L_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow (f, g) = (F[f], F[g])$.
2. *Если* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\{f_n\} \subset L_2(\mathbb{R})$, *такая, что* $\|f_n - f\|_{L_2} \to 0, n \to \infty$, *то* $\|F[f_n] - F[f]\|_{L_2} \to 0, n \to \infty$.
3. $F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f$.

Доказательство. Докажем первый пункт.
Пусть $\{\psi_n\} \subset S(\mathbb{R})$ и $\{\varphi_n\} \subset S(\mathbb{R})$ такие, что $\varphi_n \xrightarrow{L_2} f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\psi_n \xrightarrow{L_2} g \in L_2$. Рассмотрим скалярные произведения. По лемме Планшереля скалярные произведения функций из S и их Фурье-образов равны:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_n \overline{\hat{\psi}_n} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \overline{\psi_n} dx.$$

Рассмотрим правую часть. Так как
... Тут я немного пропустил.
Докажем второй пункт.
Поскольку из первого пункта следует $\|\hat{f}\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$, то F – инъективно и изометрично. Тогда

$$\|f - f_n\|_{L_2} = \|F[f_n - f]\|_{L_2}.$$

Из чего немедленно следует второй пункт.
Докажем последний пункт. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Пусть $\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n$, где $\{\varphi_n\} \subset S(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Тогда, так как $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$, то $\tilde{\hat{f}}$ – предел в L_2 произвольной последовательности $\psi_n \xrightarrow{L_2} \hat{f}, n \to +\infty$. Возьмём $\psi_n = \hat{\varphi}_n$ и, тогда, в силу доказанной теоремы для пространства Шварца, мы получаем утверждение теоремы. □

2

9 Консультация к досрочному экзамену.

9.1 N-свойство Лузина

Определение 9.1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to R$. Будем говорить, что функция обладает N-свойством Лузина, если для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{L}^n(E) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}^1(f(E)) = 0$.

Теорема 9.1. *Пусть $f \in AC([a, b])$. Тогда она обладает N-свойством Лузина*

Доказательство. Пусть $E \in [a, b], \mathcal{L}^1(E) = 0$. В силу регулярности меры Лебега $\forall\delta > 0$ существует открытое множество $E_\delta \supset E$ и $\mathcal{L}^1(E_\delta) < \delta$.
Факт: любое открытое множество G на числовой прямой может быть представлено в виде не более, чем счётного объединения попарно непересекающихся интервалов.
Тогда $\forall\delta > 0$ $E_\delta = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k(\delta), b_k(\delta)) \supset E$. Получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|b_k(\delta) - a_k(\delta)| < \delta$.
Заметим, что $f([a_k(\delta), b_k(\delta)]) = [c_k(\delta), d_k(\delta)]$ — образ отрезка есть отрезок. Кроме того,

$$f(E) \subset f(E_\delta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f([a_k(\delta), b_k(\delta)]) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[c_k(\delta), d_k(\delta)].$$

Выберем $x_k(\delta) \in [a_k(\delta), b_k(\delta)]$ и $y_k(\delta) \in [a_k(\delta), b_k(\delta)]$ такие, что $f(x_k(\delta)) = c_k(\delta)$ и $f(y_k(\delta)) = d_k(\delta)$. Но тогда интервалы $(x_k(\delta), y_k(\delta))$ — попарно не пересекаются. Но так как $f \in AC([a, b])$, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta(\varepsilon)$ такой, что для любой системы из попарно непересекающися интервалов суммарная разница длин которых не более $\delta(\varepsilon)$ выполнено, что сумма модулей разности значений меньше ε.
$\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ дизъюнктный набор интервалов $\{(x_k(\delta(\varepsilon)), y_k(\delta(\varepsilon)))\}_{k=1}^{\infty}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k(\delta(\varepsilon)) - y_k(\delta(\varepsilon))| < \delta(\varepsilon)$.
Но в силу абсолютной непрерывности f:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(x_k(\delta(\varepsilon))) - f(y_k(\delta(\varepsilon)))| = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\delta(\varepsilon)) - d_k(\delta(\varepsilon))| < \varepsilon.$$

Получаем, что $\mathcal{L}^1_*(f(E)) < \varepsilon$ — внешняя мера. Но так как мера Лебега полна, а ε выбрано произвольно, то $f(E)$ — измеримо и $\mathcal{L}^1(f(E)) = 0$. □

9.2 Теорема Банаха - Зарецкого

Теорема 9.2 (Банаха - Зарецкого)**.**

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in BV([a, b]) \\ f \in C([a, b]) \\ f - \textit{обладает N-свойством Лузина} \end{cases}$$

В одну сторону доказательство понятно и было в курсе. В другую сторону доказательство менее тривиальное и в курсе считается не обязательным.
Приведем пример функции из $BV([a, b])$ и $C([a, b])$, но при этом не обладают N-свойством Лузина.

Пример (Канторова лестница)**.** Построим канторово множество. Будем строить итеративно: на каждой итерации будем брать один из отрезков, полученных на предыдущей итерации, делить его на три равных части и «выбрасывать» среднюю. На k-ом шаге у нас будет 2^k равных отрезков длины $\left(\frac{2}{4}\right)^k$. Обозначим объединение этих отрезков F_k. Тогда $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Мера этого множества равна 0, так как $(\frac{2}{3})^k \to 0, k \to \infty$.

Возникает вопрос: а не выкинем ли мы вообще все точки при таком построении множества? Очевидно нет, так как точно останутся точки 0 и 1. Все точки в множестве мы можем пронумеровать в виде двоичных чисел. На $k-$ шаге мы даем каждому отрезку номер — двоичное число длины k.
Теперь мы можем построить канторову лестницу. Подробное описание построения есть в книге «Действительный анализ в задачах». Функция также строится итеративно. На каждой итерации мы делим отрезок, полученный на предыдущей итерации на три части. Приведем пример, как строится первая итерация для объяснения алгоритма построения. На первой итерации отрезок $[0,1]$ делится на 3 части: $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Первому отрезку сопоставляем значение 0 (начала разбиваемого отрезка по y), второму отрезку сопоставляем значение $\frac{1}{2}$ — середина, третьему отрезку сопоставляем значение 1. Далее мы берем отрезки, полученные на предыдущей итерации и работаем с ними аналогичным образом, «сужая» отрезки и сопоставляемые им множества. Точки, задающие границы отрезки мы соединяем прямыми.
Таким образом, мы получаем последовательность функций $F_n(x)\to F(x)$. При этом, $F(1)-F(0)=1$, но $F'(x)=0$ п.в. Получаем, что канторова лестница непрерывна, ограниченной вариации, но не абсолютно непрерывна.

10 Консультацию к основному экзамену.

10.1 Интеграл Фруллани.

Лемма 10.1. *Пусть $f\in C([0,+\infty))$ и для любого $A>0\hookrightarrow$*

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$$

сходится в несобственном смысле. Тогда $\forall a,b>0$ справедлива формула Фруллани:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Доказательство. Поскольку

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0,E\to+\infty}\int_\varepsilon^E\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx.$$

Введём обозначение:

$$I(\varepsilon,E)=\int_\varepsilon^E\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx.$$

Поскольку

$$I(\varepsilon,E)=\int_\varepsilon^E\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\varepsilon^E\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{aE}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\varepsilon}^{bE}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{bE}^{aE}\frac{f(t)}{t}dt=J(\varepsilon)+K(E).$$

Ключевой момент заключается в том, что $K(E)\to0, E\to+\infty$ – это следует из критерия Коши сходимости в применении к несобственному интегралу, данному в условии. А $J(\varepsilon)$ оценивается как

$$J(\varepsilon)=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(t)-f(0)}{t}dt+\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(0)}{t}dt=f(0)\ln\frac{b}{a}+\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(t)-f(0)}{t}dt\to f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Второе слагаемое стремится к 0 из непрерывности f:

$$\left|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(0)}{t}dt\right|\leqslant\sup_{t\in[a\varepsilon,b\varepsilon]}|f(t)-f(0)|\ln\frac{b}{a}\to0,\varepsilon\to+0.$$

□

Пример. Рассмотрим интеграл $I = \int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x} dx$. Сделаем замену $x = e^{-t}$ и получим

$$I = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} e^{-t} dt = \ln \frac{a+1}{b+1}.$$

с использованием формулы Фруллани к функции $f(t) = e^{-t}$.

10.2 Почленное дифференциорвание рядов Фурье.

Напоминание. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно непрерывно-дифференцируемой на $[a, b]$, если существует конечный набор точек $\{x_i\}_{i=0}^N \subset [a, b]$ такой, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b.$$

И $\forall i \in \{0, \ldots N-1\}$ ограничение на (x_i, x_{i+1}) непрерывно-дифференцируемо и существуют односторонние пределы в точках x_i и x_{i+1} самой функции и её производной.

Примечание. Функции не обязательно вещественнозначные. С комплекснозначными работаем аналогичны образом, отдельно с мнимой и вещественной частью.

Лемма 10.2. *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрерывные 2π-периодические функции кусочно непрерывно-дифференцируемые на $[-\pi, \pi]$. Тогда*

$$\int_0^{2\pi} fg' dx = -\int_0^{2\pi} f' g dx.$$

Доказательство. Из конечности разбиений на интервалы у нас существует некоторое общее разбиение $\{x_j\}_{j=0}^m$ для f и g, где обе функции на интервалах будут гладкие. А значит на j-ом подотрезке мы можем проинтегрировать по частям:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} fg' dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f' g = fg|_{x_j}^{x_{j+1}}.$$

Просуммируем по всем подинтервалам и получим:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} fg' dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f' g dx = \sum_{j=0}^{m-1} fg|_{x_j}^{x_{j+1}} = f(x_m)g(x_m) - f(x_0)g(x_0) = 0.$$

(где последний переход получен из периодичности функций). □

Лемма 10.3. *Пусть f – непрерывная 2π-периодичная функция кусочно непрерывно-дифференцируемая на $[0, 2\pi]$. Тогда $\forall k \in \mathbb{Z} \hookrightarrow c_k(f') = ikc_k(f)$.*

Доказательство. Применим предыдущую лемму к функции $g(x) = e^{-ikx}$ и получим:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-ik) f(x) e^{-ikx} dx = ikc_k(f).$$

□

Следствие (Почленное дифференцирование рядов Фурье)**.** Пусть f – 2π-периодическая непрерывная кусочно непрерывно-дифференцируемая на $[0, 2\pi]$ функция. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}.$$

Тогда ряд Фурье функции f' будет выражаться как

$$f'(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} ikc_k e^{ikx}.$$

Теорема 10.1. *Пусть f – непрерывная 2π-периодическая кусочно непрерывно-дифференцируемая функция на $[0, 2\pi]$. Тогда её ряд Фурье сходится к ней равномерно.*

Доказательство. Из условий на f и f' следует интегрируемость f и f' в среднеквадратичном, то есть $f \in L_2([0, 2\pi])$ и $f' \in L_2([0, 2\pi])$ (поскольку f' – измеримая ограниченная функция). В силу неравенства Бесселя:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f')|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|dx < +\infty.$$

Поскольку при $k \neq 0$

$$|c_k(f)| = \frac{|c_k(f')|}{|k|} \leqslant \frac{1}{2}\left(|c_k(f')|^2 + \frac{1}{k^2}\right).$$

А значит $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|$ – сходится и по признаку Вейерштрасса

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}$$

сходится равномерно на $[0, 2\pi]$ (а следовательно и на всей числовой прямой). □

10.3 Почленное интегрирование рядов Фурье.

Теорема 10.2. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ является 2π-периодичной кусочно непрерывной функцией и ей сопоставлен ряд Фурье:*

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}.$$

Тогда $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\int_0^y f(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^y c_k e^{ikx}dx.$$

и ряд сходится равномерно на всей числовой прямой.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = \int_0^x (f(t) - c_0)dt$. Она является 2π-периодической непрерывной кусочно непрерывно-дифференцируемой функцией (в силу теорем для интеграла Римана с переменным верхним пределом). В силу предыдущих утверждений ряд Фурье к ней сходится равномерно на $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{k\in Z} c_k(F)e^{ikx}$$

Более того, поскольку $F'(x) = f(x)$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек то мы получаем следующее соотношение на коэффициенты рядов Фурье:

$$\forall k \neq 0 \hookrightarrow ikc_k(F) = c_k(f).$$

(здесь мы по сути воспользовались утверждением о почленном дифференцировании рядов Фурье). Поскольку $F(0) = 0$, то

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F) = 0.$$

Но тогда $c_0(F) = -\sum\limits_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} c_k(F)$. Следовательно

$$F(y) = c_0(F) + \sum_{k\neq 0} c_k(F)e^{iky} = \sum_{k\neq 0} c_k(F)(e^{iky} - 1)dx = \sum_{k\neq 0} \frac{c_k(F)}{ik}(e^{iky} - 1).$$

Причём это равенство верно $\forall y \in \mathbb{R}$. А теперь если мы подставим определение $F(y)$ и перенесём интеграл от c_0 в правую часть то мы получим искомое утверждение. □

Следствие (Теорема о единственности.)**.** Если f является 2π-периодической непрерывной функцией и все её коэффициенты Фурье равны нулю, то $f \equiv 0$.

Доказательство. Поскольку $c_0(f) = 0$, то $F(y) = \int_0^y f(x)dx$ является 2π-периодической непрерывно-дифференцируемой функцией. В тоже время $c_k(F) = \frac{c_k(f)}{ik}$ при $k \neq 0$, а следовательно $c_k(F) = 0$ для всех $k \neq 0$. Но F – непрерывно-дифференцируема и 2π-периодична, а её ряд Фурье к ней равномерно сходится. По определению $F(0) = 0$. Значит и $c_0(F) = 0$ и тогда $c_k(F) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ и $F \equiv 0$. Поэтому и $f = F' = 0$. □

10.4 Полнота тригонометрической системы.

Теорема 10.3. *Система тригонометрических полиномов* $\{1, \sin nx, \cos nx\}_{n=1}^{+\infty}$ *полна в пространстве* $L_2([-\pi, \pi])$.

Доказательство. Пусть $f \in L_2([-\pi, \pi])$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Известно, что пространство $C_0^\infty([-\pi, \pi])$ плотно в $L_p([-\pi, \pi])$ при $p \in [1, +\infty)$. Значит существует такая $h_\varepsilon \in C_0^\infty([-\pi, \pi])$, что выполнено следующее:

$$\|h_\varepsilon - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть есть некоторое $\delta \in (0, \pi)$ и функцию h_ε^δ, которая определяется как

$$h_\varepsilon^\delta(x) = \begin{cases} h_\varepsilon(x), & |x| < |\pi - \delta|, \\ \text{линейно убывает (или возрастает) от 0 в} -\pi \text{ до } h_\varepsilon(-\pi+\delta), & x \in [-\pi, -\pi+\delta] \\ \text{линейно убывает (или возрастает) от } h_\varepsilon(\pi-\delta) \text{ в } \pi-\delta \text{ до 0 при } x = \pi, & x \in [\pi-\delta, \pi]. \end{cases}$$

Такая функция лежит в пространстве $C^*([-\pi, \pi])$ – непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой. Пусть $M = \max\limits_{\mathbb{R}} |h_\varepsilon|$. Оценим разность норм h_ε и h_ε^δ:

$$\|h_\varepsilon - h_\varepsilon^\delta\|_2 \leqslant= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |h_\varepsilon - h_\varepsilon^\delta|^2 dx} \leqslant \sqrt{2\delta \cdot (2M)^2} = 2M\sqrt{2\delta}.$$

Нам необходимо показать существование такого δ, что $2M\sqrt{2\delta} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Нам подойдёт всякая δ такая, что

$$\delta < \frac{\varepsilon^2}{2(6M)^2}.$$

В то же время, по теореме Фейера, существует тригонометрический полином T такой, что

$$\|h_\varepsilon^\delta - T\|_C \leqslant \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Оценим 2-норму их разности:

$$\|h_\varepsilon^\delta - T\|_2 \leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sup |h_\varepsilon^\delta - T|)^2 dx} = \sqrt{2\pi}\|h_\varepsilon^\delta - T\|_C \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Применение неравенства треугольника даёт нам утверждение теоремы:

$$\|f - T\|_2 \leqslant \|f - h_\varepsilon\|_2 + \|h_\varepsilon - h_\varepsilon^\delta\|_2 + \|h_\varepsilon^\delta - T\|_2 < \varepsilon.$$

□

11 Анекдоты

1. Но для счастья этого мало, понимаете? В среднеквадратичном смысле это конечно хорошо, но это как средняя зарплата, у кого-то много, у кого-то мало, а в среднем ничего.

2. Все доказали. *Finita la comedia.*

3. У меня есть такая мысль, что если я буду в здравом уме и твердой памяти, то мы с вами проведем доп. лекцию где я вам эту теорему докажу (пример Колмогорова) (P.S.Лекции не было)

4. На сегодня всё. Большое спасибо за внимание. Как говорят в Италии: *Buona notte*

5. Мне, честно говоря, не понятно, почему я являюсь единственным лектором на физтехе который про это рассказывает (пример Шварца)