Eletromagnetismo III

Luciano Barosi

Monday 25th August, 2025

1 Content

1.1 Frontmatter

1.1.1 Sobre este Livro

Introdução

Ementa
Equações de Maxwell; Eletrostática e Magnetostática; Problemas de Condições de Contorno; Dielétricos; Ondas Eletromagnéticas Planas; Guias de Onda; Cavidades Ressonantes; Radiação e Antenas.

Bibliografia

- notas de aula de David Tong - DAMTP/Cambridge
  - Excelentes notas de aula disponíveis online. Usaremos alguns materiais de sua apresentação, em particular a parte sobre Eletromagnetismo e Relatividade.
- notas de aula de Richard Fitzpatrick - UT/Austin
  - Excelente texto para um curso clássico de eletromagnetismo. Esta será a abordagem seguida para eletrostática e magnetostática.
- J. David Jackson, "Classical Electrodynamics"
  - Excepcional e denso texto clássico, do qual usaremos alguns tópicos selecionados em radiação.
- A. Zangwill, "Modern Electrodynamics"
  - Referência com apresentação moderna e bom nível de rigor. Utilizaremos alguns tópicos específicos e todo material do curso pode ser seguido por aqui.
- Feynman, Leighton and Sands, "The Feynman Lectures on Physics, Volume II"
  - Apresentação muito bonita de conceitos físicos e aplicações interessantes. Material de referência.
- S. Cahn, B. Nadgorny, A Guide to Physics Problems - Part 1.
  - Diversos exercícios e soluções coletados de exames de qualificação pelo mundo.

Programma

1. Unidade: Preliminares Matemáticos
   (a) Geometria Diferencial
      i. Vetores e Tensores
      ii. Tensores isotrópicos
      iii. Coordenadas Ortogonais
      iv. Interlúdio: formas diferenciais
      v. Operadores Diferenciais
      vi. Operadores Diferenciais em 3 dimensões
      vii. Teorema de stokes para formas diferenciais
   (b) Análise Matemática
      i. Distribuições
      ii. Teorema de Helmholtz
      iii. Função de Green, Problema de Sturm Liouville e Transformadas Integrais.
      iv. Laplaciano em Coordenadas Esféricas
2. Unidade: A Estrutura do Eletromagnetismo
   (a) Introdução
      i. As equações clássicas de Maxwell
      ii. A equação de onda
      iii. Potenciais Eletromagnéticos
      iv. Equação de Conservação de Carga
      v. Escolhas de Gauge.
   (b) Simetrias
      i. Invariância de Lorentz e Relatividade
      ii. Formulação covariante
      iii. Invariância de Gauge
      iv. Princípio da Ação
      v. Acoplamento mínimo
      vi. Modelos sigma em 1 dimensão
      vii. Tensor momento-energia.
      viii. Momento Angular.
3. Eletrostática
4. Magnetostática
5. Campos Quase-Estáticos
6. Radiação

Estrutura do Curso

1.1.2 Links Úteis

Link	Descrição	Conceitos
VizieR	Coleções de Catálogos	

1.2 Aulas

1.3 Problemas

1.3.1 Problemas: Preliminares Matemáticas

Levi-Civita e Delta de Kroenecker

1.3.2 Variedades Diferenciais

Definition: Produto wegde
Uma base para as k-formas em uma variedade d dimensional é dada por:

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \mathrm{sgn}(i) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \tag{1}$$

Definition: Derivada Exterior
Seja ω uma k-formas em uma variedade d dimensional é dada por:

$$d\omega = \partial_\mu \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{2}$$

Definition: Dual de Hodge
Seja ω uma k-formas em uma variedade d dimensional é dada por:

$$\star\omega = \frac{\sqrt{g}}{(d-k)!} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_d} \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n} \tag{3}$$

Definition: Coderivada

$$d^\dagger = (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star \tag{4}$$

Definições

Problema: Dual de Hodge

- Mostre que:
$$\star \star \omega = (-1)^{(k(n-k))} \omega, \quad \forall \omega \in \Omega_k \tag{5}$$
- Mostre que:

$$d^\dagger = (-1)^k \star^{-1} d \star \tag{6}$$

Problema: levi civita

- Sejam x^μ e x'^ν dois sistemas de coordenadas. Mostre que:

$$\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_d}` = J \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_d}, \quad \text{onde} J = \det \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu} \tag{7}$$

- Mostre que:

$$g' = J^2 g \tag{8}$$

- Mostre que $\sqrt{|} g \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_d}$ é invariante.
- Mostre que:

$$\epsilon^{j_1 j_2 \cdots j_d} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{j_1 j_2 \cdots j_d} \tag{9}$$

Problema: Divergência

- Calcule $\star d \star omega$ em componentes, para uma 1-forma em 3 dimensões.
- A partir do resultado acima, escreva asequencia de operações necessárias para escrever o divergente de um vetor em três dimensões.
- Considerando um sistema de coordenadas ortogonais, escreva a expressão para o divergente de um vetor na base ortonormal.
- Considerando coordenadas cilíndricas, escreva a expressão para o divergente.
- Considerando coordenadas esféricas, escreva a expressão para o divergente.

Problema: Pull Back

Sejam M e N variedades diferenciais de dimensões m e n respectivamente. Suponha $g : M \mapsto N$ uma aplicação suave. A aplicação $g^\star : \Omega(N) \mapsto \Omega(M)$

que mapeia as formas de N nas formas de M é chamada de **pullback** de g e satisfaz:

1.Se $f : N \mapsto R$ é função sobre N:

$$g^\star f = f \circ g \tag{10}$$

2.Se $\eta, \omega \in \Omega_p(N)$:

$$g^\star(\eta \wedge \omega) = (g^\star \eta)(g^\star \omega) \tag{11}$$

3.Se $\omega \in \Omega_p(N)$:

$$g^\star(d\omega) = d(g^\star \omega) \tag{12}$$

- Procure se convencer de que a primeira propriedade define o pullback das 0-formas.
- Considerando coordenadas y^i em N e x^i em M, se convença de que:

$$g^\star(dy^i)(x) = d(y^i \circ g)(x) \Rightarrow g^\star \omega(x) = \omega(g(x))_{i_1 \cdots i_k} dg^{i_1} \wedge \cdots dg^{i_k} \tag{13}$$

1. Agora, demonstre que esta definição satisfaz a propriedade 2.
2. Demonstre que esta definição satisfaz a propriedade 3.
3. COnsidere o caso em que M e N são idênticos e considere o pullback atuando na forma de volume. Qual é o resultado?
4. Seja $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, $V = R^2 -$ eixo x não negativo. Use coordenadas (r, θ) para U e (x, y) para V. Considere a aplicação $g(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Considere $h = g^{-1}$. Finalmente, sobre V considere a forma $\omega = e^{x^2+y^2} dx \wedge dy$:
   (a) Calcule $g^\star(x), g^\star(y), g^\star(dx), g^\star(dy), g^\star(dx \wedge dy), g^\star \omega$.
   (b) Calcule $h^\star(r), h^\star(\theta), h^\star(dr), h^\star(d\theta)$.

Problemas

1.4 Backmatter