Soit $e(t)$ un signal physique, $f(t)$ une transformation appliquée à ce signal et $s(t)$ le signal résultant de cette transformation. Soit e_k (respectivement f_k et s_k) le signal numérique associé à $e(t)$ (respectivement $f(t)$ et $s(t)$). On a alors :

$$s(t) = (f * e)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e(t-u)du$$

et

$$s_k = (f * e)_k$$

Soit $S(z)$ (respectivement $F(z)$ et $E(z)$) la transformée en z de s_k (respectivement f_k et s_k), on a alors :

$$S(z) = F(z)E(z)$$

Pour un filtre de Butterworth on a (cf énoncé TP) :

$$F(z) = \frac{\alpha^3 \left(z^{-3} + 3z^{-2} + 3z^{-1} + 1\right)}{A(\alpha) + z^{-1}B(\alpha) + z^{-2}C(\alpha) + z^{-3}D(\alpha)}$$

D'où :

$$S(z)\left[A(\alpha) + z^{-1}B(\alpha) + z^{-2}C(\alpha) + z^{-3}D(\alpha)\right] = E(z)\alpha^3 \left(z^{-3} + 3z^{-2} + 3z^{-1} + 1\right)$$

Et :

$$A(\alpha)S(z) + B(\alpha)S(z)z^{-1} + C(\alpha)S(z)z^{-2} + D(\alpha)S(z)z^{-3} = \alpha^3 \left(E(z)z^{-3} + 3E(z)z^{-2} + 3E(z)z^{-1} + E(z)\right)$$

Or $S(z)$ est la transformée en z de s_k, c'est à dire $S(z) = \mathcal{Z}\{s_k\}$. De plus le théorème du retard nous donne $\mathcal{Z}\{s_{k-n}\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{s_k\}$

Par conséquent :

$$A(\alpha)\mathcal{Z}\{s_k\} + B(\alpha)\mathcal{Z}\{s_{k-1}\} + C(\alpha)\mathcal{Z}\{s_{k-2}\} + D(\alpha)\mathcal{Z}\{s_{k-3}\} = \alpha^3 \left(\mathcal{Z}\{e_{k-3}\} + 3\mathcal{Z}\{e_{k-2}\} + 3\mathcal{Z}\{e_{k-1}\} + \mathcal{Z}\{e_k\}\right)$$

Comme la transformé en z est linéaire, c'est-a-dire que $\mathcal{Z}\{x_k + y_k\} = \mathcal{Z}\{x_k\} + \mathcal{Z}\{y_k\}$ et $\mathcal{Z}\{\lambda s_k\} = \lambda \mathcal{Z}\{s_k\}$, alors :

$$\mathcal{Z}\{A(\alpha)s_k + B(\alpha)s_{k-1} + C(\alpha)s_{k-2} + D(\alpha)s_{k-3}\} = \mathcal{Z}\{\alpha^3 \left(e_{k-3} + 3e_{k-2} + 3e_{k-1} + e_k\right)\}$$

On en déduit que :

$$A(\alpha)s_k + B(\alpha)s_{k-1} + C(\alpha)s_{k-2} + D(\alpha)s_{k-3} = \alpha^3 \left(e_{k-3} + 3e_{k-2} + 3e_{k-1} + e_k\right)$$

En réorganisant les termes, on obtient :

$$A(\alpha)s_k = \alpha^3 \left(e_{k-3} + 3e_{k-2} + 3e_{k-1} + e_k\right) - B(\alpha)s_{k-1} - C(\alpha)s_{k-2} - D(\alpha)s_{k-3}$$

Finalement, l'expression récursive du filtre de Butterworth d'ordre 3 prend la forme :

$$s_k = a \cdot e_{k-3} + b \cdot e_{k-2} + c \cdot e_{k-1} + d \cdot e_k + e \cdot s_{k-1} + f \cdot s_{k-2} + g \cdot s_{k-3}$$

avec $a = \frac{\alpha^3}{A(\alpha)}$, $b = \frac{3\alpha^3}{A(\alpha)}$, $c = \frac{3\alpha^3}{A(\alpha)}$, $d = \frac{\alpha^3}{A(\alpha)}$, $e = -\frac{B(\alpha)}{A(\alpha)}$, $f = -\frac{C(\alpha)}{A(\alpha)}$ et $g = -\frac{D(\alpha)}{A(\alpha)}$

Les coefficients $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ et $D(\alpha)$ sont donnés dans le TP.