WDWR: Projekt

2013.01.24

Prowadzący projekt:
dr inż. Bartosz Kozłowski
Zespół: 03

Grzegorz Barczyński
`grzesiek.net@gmail.com`

Krzysztof Zieliński
`krzysztofzielinski862@gmail.com`

1 Treść zadania

Rozważamy nastepujące uproszczone zagadnienie optymalnego rozdziału zadań produkcyjnych:

- Do produkcji pięciu elementów (A, B, C, D i E) przedsiębiorstwo musi wydzierżawić trzy maszyny.
- Każdy podzespół może być produkowany na każdej maszynie, maszyny różnią się jednak wydajnością przy produkcji poszczególnych elementów, co przedstawia tabela:

	Wydajność maszyn (szt/godz.) przy produkcji podzespołu				
Maszyna	A	B	C	D	E
M1	0.85	1.30	0.65	1.50	0.40
M2	0.65	0.80	0.55	1.50	0.70
M3	1.20	0.95	0.35	1.70	0.40

- Każdą z maszyn mozna wydzierżawić na co najmniej 180 godz. ciągu miesiąca. Koszt 1 godz. pracy maszyn (zł) reprezentuje zmienna losowa:

Prawdop.	M1	M2	M3
0.1	20	25	35
0.6	40	30	45
0.2	35	20	40
0.1	45	50	25

- Należy rozdzielić miesięczną produkcję elementów pomiędzy maszyny tak, aby wyprodukować co najmniej po 60 sz. elementów A, B, C oraz co najmniej 120 szt. elementów D i E.
- Przy dzierżawie dowolnej z maszyn na okres do 100 godz. koszt 1 godz. pracy maszyny maleje o 20%.

1. Zaproponować dwukryterialny model kosztu i ryzyka ze średnią jako miarą kosztu i odchyleniem maksymalnym jako miarą ryzyka.
2. Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–koszt
3. Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i minimalnego kosztu. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko-koszt?
4. Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i minimalnego kosztu. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko-koszt?
5. Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdź czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego i drugiego rzędu. Wyniki skomentować odnieść do ogólnego przypadku.

2 Model

Indeksy

- $e = 1, 2, \ldots, |E|$ - produkowane elementy
- $m = 1, 2, \ldots, |M|$ - maszyny
- $p = 1, 2, \ldots, |P|$ - prawdopodobieństwa
- $c = 1, 2$ - kryteria

Stałe

- wd_{me} - wydajności maszyn
- pr_p - prawdopodobieństwa kosztów użycia maszyny przez godzinę
- k_{pm} - koszt produkcji m-tego elementu przy prawdopodobieństwie p
- ek_m - koszt średni m-tej maszyny
$$ek[m] = \sum_p pr_p \cdot k_{pm} \tag{1}$$
- mp_e - minimalna produkcja e-tego elementu
- mo - maksymalny czas na jaki można wyporzyczyć dowolną maszynę
- pk_m - pesymistyczny koszt
$$pk_m = \max_p \{k_{pm}\} \tag{2}$$
- ε - mała liczba wykorzystywana w metodzie punktu odniesienia
- λ - współczynnik skalowania w metodzie punktu odniesienia
- β - współczynnik skoku w metodzie punktu odniesienia
- a_c - punkt aspiracji w metodzie punktu odniesienia

Zmienne

- $o'_{me} \geq 0$ - czas pracy m-tej maszyny nad e-tym elementem
- $o''_{me} \geq 0$ - czas pracy m-tej maszyny nad e-tym elementem, używany przy przekroczeniu 100 godz.
- $u_m \in \{0, 1\}$ - zmienna przyjmuje wartość 1 gdy przekroczony zostanie czas 100 godzin na m-tej maszynie
- $y_c \geq 0$ - zmienne przechowująca koszt dla $c = 1$ oraz ryzyko dla $c = 2$
- v - zmienna pomocnicza w metodzie punktu odniesienia
- z_c - zmienna pomocnicza w metodzi punktu odniesienia

Warunki

- **Ograniczenie określające minimalną produkcje elementów**
$$\forall e : \sum_m (o'_{me} + o''_{me}) \cdot wd_{me} \geq mp_e \tag{3}$$
- **Ograniczenie maksymalny czas użycia maszyny**
$$\forall m : \sum_e o'_{me} + o''_{me} \leq mo \tag{4}$$
- **Ograniczenie definiujące zmienną binarną** u_m
$$\forall m : \sum_e o''_{me} \leq mo \cdot u_m \tag{5}$$

- **Ograniczenie obciążenia o'_{me} do 100 godzin**

$$\forall m : \sum_e o'_{me} \leq 100 \tag{6}$$

- **Definicja kosztu**

$$y_1 = \sum_m \sum_e (0.8 \cdot o'_{me} \cdot ek_m + o''_{me} \cdot ek_m) + \sum_m 20 \cdot ek_m \cdot u_m \tag{7}$$

- **Definicja ryzyka**

$$y_2 = \sum_m \sum_e (0.8 \cdot o'_{me} \cdot pk_m + o''_{me} \cdot pk_m) + \sum_m 20 \cdot pk_m \cdot u_m - y_1 \tag{8}$$

- **Definicja zmiennej v**

$$\forall c : v \leq z_c \tag{9}$$

- **Definicje zmiennej z_c**

$$\forall c : \lambda \cdot \beta \cdot (-y_c + a_c) \geq z_c \tag{10}$$

$$\forall c : \lambda \cdot (-y_c + a_c) \geq z_c \tag{11}$$

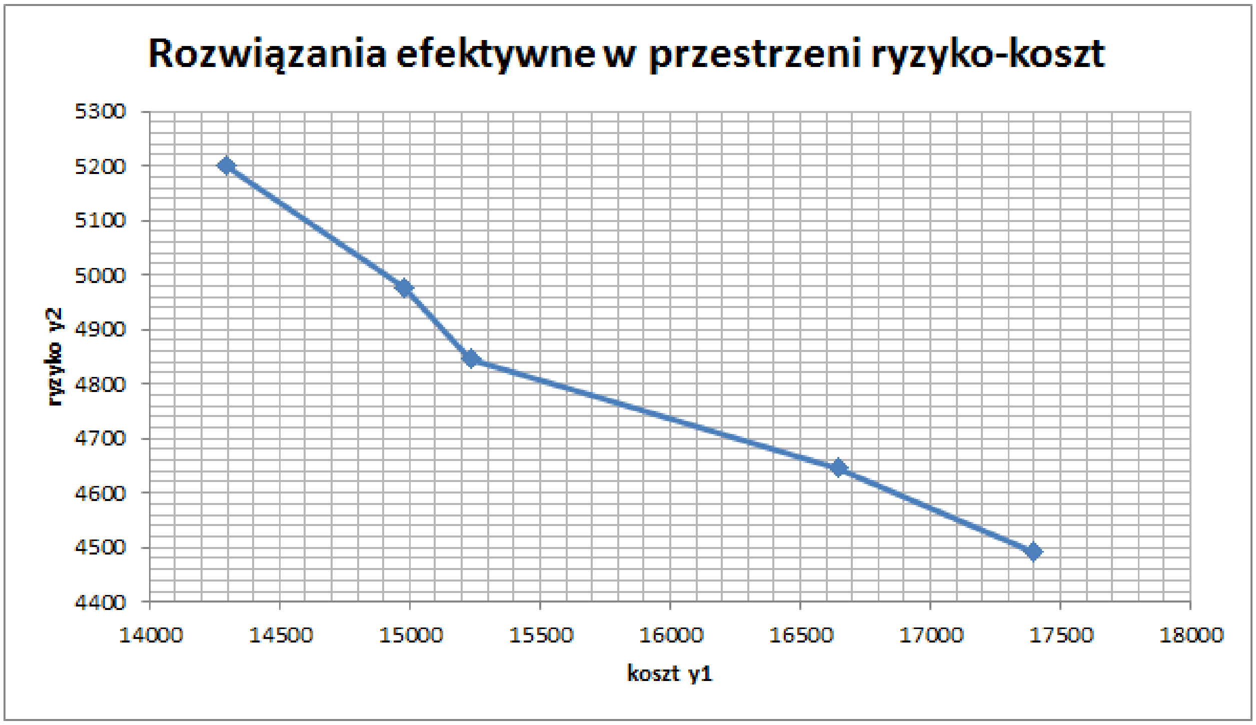
Funkcja celu

$$\max v + \varepsilon \cdot \sum_c (-y_c) \tag{12}$$

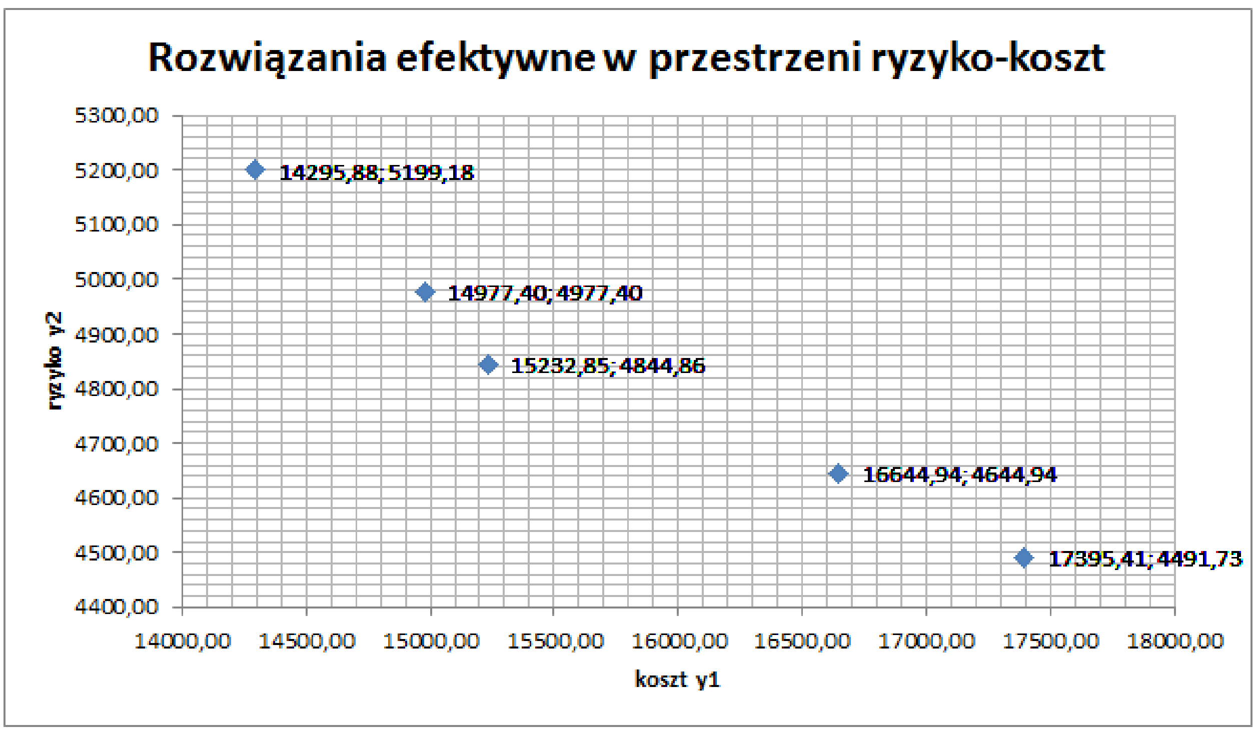
Komentarz do modelu
Zgodnie z wymaganiami zadania został przygotowany dwukryterialny model kosztu (7) i ryzyka (8) ze średnią jako miarą kosztu i odchyleniem maksymalnym jako miarą ryzyka. W pierwszej kolejności zostały wyliczone stałe na podstawie danych z treści zadania ek_m (1) oraz pk_m (2). Pierwsze dwa ograniczenia (3, 4) określają podstawowe wymagania zadania, na minimalną ilość elementów oraz maksymalny czas pracy maszyny. Zastosowanie zniżki 20%, gdy czas pracy maszyny nie przekracza 100h zostało rozwiązane przy pomocy rozbicia czasu pracy na o'_{me} (czas pracy do 100h) oraz o''_{me} (czas pracy powyżej 100h). Zmienna binarna u_m (warunek 5) wykorzystywana jest, gdy trzeba dodać 20 jednostek kosztu, po przekroczoniu 100h limitu czasu pracy maszyny. Ostatnie trzy warunki (9, 10, 11) wykorzytywane są przy metodzie punktu odniesienia. Stała a_c zawiera punkt aspiracji i jest zmieniana w skrypcie przygotowanym do projektu w celu wyznaczenia zbioru rozwiązań efektywnych przetrzeni ryzyko–koszt. W zależności od punktu startowego uzyskiwane są różne rozwiązania niezdominowane. Metoda punktu odniesienia wykorzytuje maksymilizacje po wszystkich ocenach. Zostało zastosowane odwrócenie znaku y_c w ograniczeniach na definicje zmiennej z_c (warunki 10, 11). W ten sposob mniejsze wartości y_c, będą większe dla dla $-y_c$. Wszystkie oceny są przeskalowane za pomocą mnożnika λ (przyjęto $\lambda = 1$) dla znormalizowania ich zakresów zmienności. Dalej, wartości wyrażające znormalizowane nadmiary wartości ocen podnad poziom aspiracji są pomniejszane przez czynnik β, rzędu 10^{-3}. W konsekwencji przyrost wartości oceny ponad poziomem apsiracji powoduje znacznie mniejszy przyrost wartości funkcji osiągnięcia niż w przypadku nieosiągania poziomu aspiracji.

3 Zbiór rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–koszt

Rysunek 1 oraz 2 przestawiajają zbiór rozwiązań efektywnych w przetrzeni ryzyko koszt. Został wyznaczony przy pomocy skryptu w programie AMPL.



Rysunek 1: Obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–koszt, w zł/zł



Rysunek 2: Obraz zbioru rozwiązan efektywnych w przetrzeni ryzyko–koszt, w zł/zł

4 Rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka

Rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka odpowiadają skrajnym/krańcowym rozwiązaniom w przetrzeni ryzyko–koszt (Rysunek 1 oraz 2).
Minimalny koszt
dla funkcji celu $min(y_1)$
$kosztu = 14295.90$
$ryzyko = 5199.18$

Maszyna	A	B	C	D	E
M1	0	7.69	92.31	0	0
M2	0	0	0	8.57	91.43
M3	50	0	0	50	0

(a) o'_{me}

Maszyna	A	B	C	D	E
M1	0	46.15	0	7.07	0
M2	0	0	0	0	80
M3	0	0	0	0	0

(b) o''_{me}

Tablica 1: Czas pracy m-tej maszyny nad e-tym elementem przy minimalizacji kosztu, w godz.

Minimalne ryzyko
dla funkcji celu $min(y_2)$
$koszt = 17395.40$
$ryzyko = 4491.73$

Maszyna	A	B	C	D	E
M1	0	0	58.46	0	41.54
M2	0	0	0	0	100
M3	50	0	0	0	50

(a) o'_{me}

Maszyna	A	B	C	D	E
M1	0	46.15	33.85	0	0
M2	0	0	0	0	13.74
M3	0	0	0	70.59	9.41

(b) o''_{me}

Tablica 2: Wynik pracy m-tej maszyny nad e-tym elementem przy minimalizacji ryzyka, w godz.

Podsumowanie

Maszyna	Minimalizacja kosztu	Minimalizacja ryzyka
M1	153.22	180
M2	180	113.74
M3	100	180

Tablica 3: Czas pracy maszyn $\forall m : t_m = \sum_e o'_{me} + o''_{me}$, w godz.

5 Trzy rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka

Tabela 4 przedstawia wybrane wyniki minimalnego ryzyka i minimalnego kosztu. Pierwsze dwa wyniki osiągają lepsze ryzyko, pogarszając jednocześnie koszt (w porównaniu do optymalnego). Trzeci wynik jest identyczny, jak przy optymalnym koszcie, niewielka liczba wynikowych rozwiązań efektywnych, powoduje, że trzeba wybrać jedno rozwiązanie krańcowe będące lepszym kryterium. W tym przypadku został wybrany koszt.

Nr	a_1	a_2	Koszt	Ryzyko
1	14000	4000	14977.40	4977.40
2	17000	6000	15232.85	4844.86
3	1000	2000	14295.88	5199.18

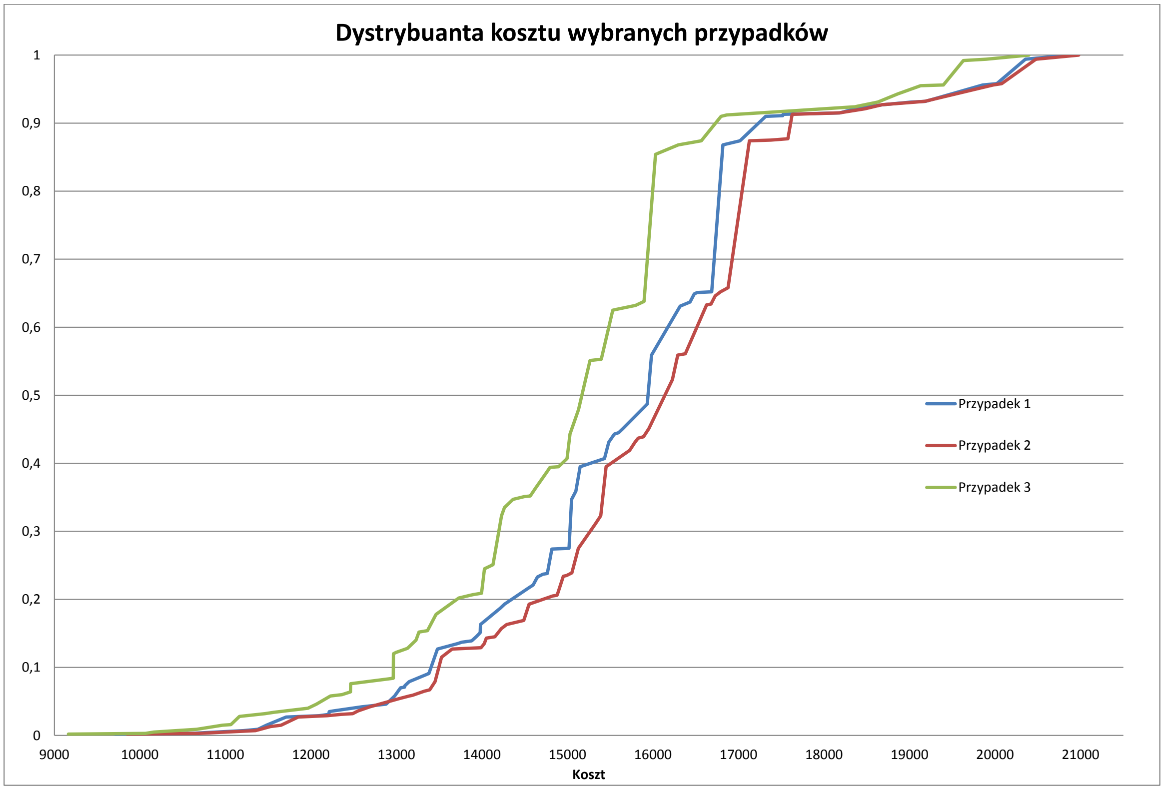
Tablica 4: Trzy rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka

Podsumowanie

Maszyna/Nr	1	2	3
M1	100	100	153.22
M2	176.90	167.55	180
M3	166.89	180	100

Tablica 5: Czas pracy maszyn $\forall m : t_m = \sum_e o'_{me} + o''_{me}$, w godz.

6 Relacje dominancji I i II rzędu



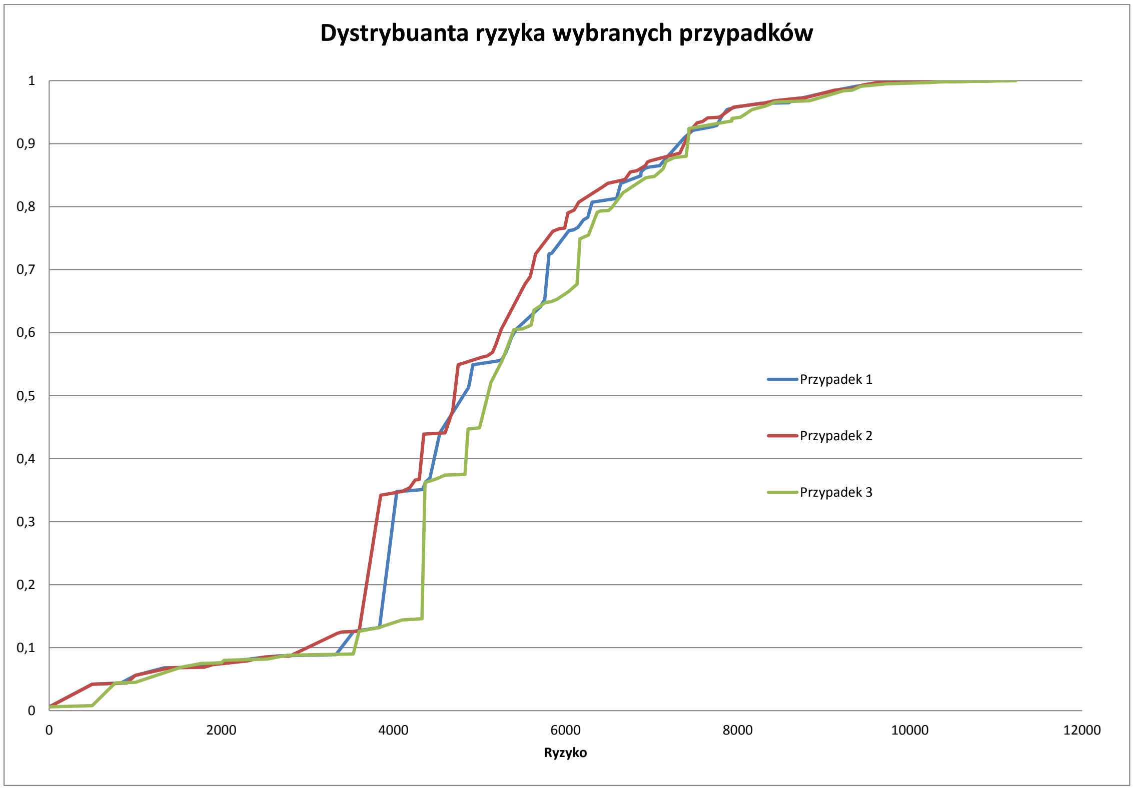
Rysunek 3: Obraz dystrybuanty koszty dla trzech wybranych wcześniej przypadków

Komentarz do dystrybuanty kosztu

Zgodnie z przyjętym modelem (w którym maszyny przyjmują koszty wedle danego rozkładu niezależnie), otrzymuje się 64 możliwości rozkładu kosztów (każdy z każdym, po 4 możliwości). Możliwości techniczne uniemożliwiły niestety poprowadzenie prawdziwych wykresów dystrybuant (przedstawione na rysunkach funkcje nie są schodkowe). Jednak z pewną granicą tolerancji można zauważyć parę zależności. Dystrybuanta kosztu wybranych przypadków (Rysunek 3) ukazuje dominowanie wartości kosztów przypadku nr 3 (skrajny przypadek o minimalnym koszcie średnim). Wykresy dystrybuant Przypadków nr 1 i 2 zawierają się w całości pod wykresem przypadku nr 3. Jednocześnie, wykresy nr 1 i 2 przecinają się, a więc między tymi przypadkami nie ma relacji dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. A więc ostatecznie jedynie Przypadek 3 dominuje nad przypadkami 1 i 2 na podstawie relacji stochastycznej pierwszego stopnia dla miary kosztu.

$Przypadek3 \succ_{FSD} Przypadek1$

$Przypadek3 \succ_{FSD} Przypadek2$



Rysunek 4: Obraz dystrybuanty ryzyka dla trzech wybranych wcześniej przypadków

Komentarz do dystrybuanty ryzyka
Analogicznie do dystrybuanty kosztu, dystrybuanta ryzyka (Rysunek 4) została poprowadzona dla każdego przypadku odejmując od ryzyka uzyskany w danym przypadku koszt. W obrębie przypadku wartość ryzyka była stała, gdyż był to przypadek pesymistyczny - wartość maksymalna kosztu. Z wykresu dystrybuant nie można zauważyć żadnych relacji dominacji. Wszystkie przypadki są niezdominowane, dla każdego z nich mogą istnieć decydencji, którzy go wybiorą.

7 Załączniki do projektu

- model wdwr.mod i plik danych wdwr.dat
- skrypt do generacji rozwiązan efektywnych script.run
- wyniki.xls - dane wygenerowane przez skrypt script.run
- dystrybuanty.xls - obliczenia dystrybuant