El *muestreo por importancia* es una técnica utilizada en simulación Monte Carlo para estimar el valor esperado de una función cuando las simulaciones directas son ineficientes debido a una alta varianza o a la baja probabilidad de los eventos relevantes bajo la distribución original.

Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x)$, y sea $h(x)$ una función tal que se desea estimar

$$\mu = \mathbb{E}_f[h(X)] = \int h(x)f(x)\,dx.$$

Si muestrear desde f es difícil o conduce a estimadores de alta varianza, se puede usar otra densidad $g(x)$, llamada *densidad de importancia*, desde la cual sí sea más conveniente simular, y tal que $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$.

Reescribiendo:

$$\mu = \int h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)\,dx = \mathbb{E}_g\left[h(X)\frac{f(X)}{g(X)}\right],$$

lo que permite estimar μ mediante simulaciones desde g:

$$\hat{\mu}_{\text{IS}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)}, \quad X_i \sim g.$$

Este estimador puede tener menor varianza que el estimador clásico si $g(x)$ se elige de modo que asigne mayor peso a las regiones donde $h(x)f(x)$ es grande.

Ejercicio 1. Estime el valor de la siguiente integral utilizando el método de Monte Carlo con al menos 10^5 repeticiones:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Compare su estimación con el valor exacto y analice la convergencia al aumentar el número de repeticiones. Calcule la varianza del estimador y proponga un método de reducción de varianza.

Ejercicio 2. Considere la función $f(x) = \exp(-x^2)$ definida en $[0,1]$. Estime $\int_0^1 f(x)\,dx$ usando:

- Muestreo uniforme
- Muestreo por importancia con densidad propuesta $g(x) = 2(1-x)$

Compare ambas estimaciones en términos de sesgo y varianza.

Ejercicio 3. Diseñe una simulación de Monte Carlo para estimar el valor de π utilizando el método del círculo inscrito. Repita el procedimiento 50 veces y construya un intervalo de confianza del 95% para el estimador. Comente sobre la estabilidad del resultado.

Ejercicio 4. Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Estime la probabilidad $P(X > 2.5)$ mediante simulación Monte Carlo y compare con el valor exacto obtenido de la tabla normal. Luego, proponga un cambio de variable (muestreo por importancia) que reduzca la varianza de su estimador y verifique su desempeño.

Ejercicio 5. Se desea estimar el valor esperado $E[Y]$ donde $Y = \frac{X^2+3X+2}{X+4}$ y $X \sim \mathrm{Exp}(1)$. Simule 10^5 valores y estime la media y la varianza de Y. Comente sobre la estabilidad del estimador y la distribución empírica de Y.

Ejercicio 6. Suponga que se desea estimar el valor de una expectativa condicional $E[X \mid X > 2]$, donde $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Proponga una estrategia de simulación para resolver este problema. Analice la eficiencia del método si $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ con $\mu = 3$.