Ejercicio 1. Estime la integral
$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
mediante muestreo uniforme con $N = 10^5$ muestras. Calcule un intervalo de confianza del 95% utilizando el Teorema Central del Límite.

Ejercicio 2. Considere $f(x) = e^{-x^2}$ en $[0,1]$. Estime la integral mediante Monte Carlo estándar y luego utilizando muestreo estratificado con dos subintervalos de igual tamaño. Compare varianzas.

Ejercicio 3. Use muestreo por importancia para estimar
$$\int_2^4 x^2 e^{-x}\,dx$$
usando como densidad propuesta una distribución gamma Gamma$(3,1)$. Estime la varianza del estimador.

Ejercicio 4. Genere una simulación que estime $P(X > 2.5)$ donde $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, primero por muestreo directo, luego usando muestreo por importancia con $X \sim \mathcal{N}(3,1)$. Compare varianzas.

Ejercicio 5. Implemente el método de muestreo por rechazo para simular de una distribución con densidad proporcional a $f(x) = x^2(1-x)$ en $[0,1]$. Use una propuesta uniforme y grafique la función de aceptación.

Ejercicio 6. Estime el valor esperado
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X^2}\right]$$
donde $X \sim \text{Uniform}(-5,5)$ mediante $N = 10^4$ muestras. Use antitéticos para reducir la varianza y compare con el estimador estándar.

Ejercicio 7. Simule la suma de n variables $X_i \sim \text{Exp}(1)$ para $n = 20$ y estime $P\left(\sum X_i > 25\right)$. Use muestreo por importancia con tasa $\lambda = 0.8$.

Ejercicio 8. Divida el intervalo $[0,1]$ en $L = 4$ estratos y estime $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ usando muestreo estratificado con $n = 1000$ muestras. Compare con el valor exacto.

Ejercicio 9. Simule $N = 10^4$ valores de $X \sim \text{Beta}(2,5)$ y use los resultados para comprobar empíricamente la ley fuerte de los grandes números al estimar $\mathbb{E}[X]$. Grafique la convergencia de $\hat{\mu}_N$.

Ejercicio 10. Para $h(x) = x^3$ y $X \sim \text{Uniform}(0,1)$, estime $\mu = \mathbb{E}[h(X)]$ para $N = 10^2, 10^3, 10^4$. Grafique los intervalos de confianza del 95% y discuta cómo mejora la precisión.

Ejercicio 11. Utilice el algoritmo de Metropolis-Hastings para generar muestras de una distribución objetivo proporcional a $f(x) = \exp(-x^4 + 3x^2)$ sobre $\mathbb{R}$. Use una propuesta normal centrada en el punto anterior y discuta la eficiencia del muestreo (aceptación, autocorrelación, varianza).

Ejercicio 12. Aplique la técnica de control variado para reducir la varianza en la estimación de

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

usando como función de control $g(x) = \ln(1+x)$. Compare la varianza del estimador con y sin el control.

Ejercicio 13. Simule un proceso de muestreo estratificado con $L = 5$ estratos desiguales sobre $[0, 1]$ usando asignación óptima (proporcional a la desviación estándar local). Estime la integral de $f(x) = \cos(3\pi x)e^{-x}$ y compare con muestreo uniforme.

Ejercicio 14. Implemente una comparación empírica entre Monte Carlo simple, muestreo por importancia y muestreo estratificado para estimar

$$\int_1^5 \frac{x}{1+x^4}\, dx$$

usando $N = 10000$. Analice los errores y varianzas para los tres métodos.

Ejercicio 15. Considere la integral multidimensional

$$I = \int_{[0,1]^3} \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Estime I usando Monte Carlo simple y compare con cuadratura de malla regular (regla del punto medio). Comente sobre la maldición de la dimensionalidad.