

# Optimización Monte Carlo

# ¿Qué es la Integración de Monte Carlo?

Imagina enfrentarte a una integral tan complicada que los métodos tradicionales, como la regla del trapecio o Simpson, se vuelven inútiles. Aquí entra en juego **Monte Carlo**, un enfoque probabilístico que utiliza números aleatorios para aproximar integrales.

La idea central es simple: si podemos muestrear puntos al azar dentro de un dominio, podemos estimar el valor promedio de una función en ese dominio y usarlo para aproximar la integral.

Formalmente, si queremos calcular:

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

podemos reescribirlo como:

$$I = (b - a) \cdot \mathbb{E}[f(X)],$$

donde  $X$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en  $[a, b]$ .

# Integral de Gauss

Consideremos la integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Esta integral no tiene solución analítica en términos de funciones elementales, pero sabemos que su valor exacto es  $\sqrt{\pi}$ .

Para aplicar Monte Carlo, primero truncamos el dominio a un intervalo finito, digamos  $[-10, 10]$ , ya que  $e^{-x^2}$  decae rápidamente.

# Integral de Gauss

Luego:

1. Generamos  $N$  puntos aleatorios  $x_1, x_2, \dots, x_N$  distribuidos uniformemente en  $[-10, 10]$ .
2. Evaluamos  $f(x) = e^{-x^2}$  en cada punto, obteniendo  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$ .
3. Calculamos el promedio de estos valores:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

4. Multiplicamos este promedio por la longitud del intervalo  $(b - a) = 20$ :

$$I \approx 20 \cdot \bar{f} = 20 \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-x_i^2}.$$

# Integrales Múltiples

Ahora, enfrentémonos a un problema más complejo. Consideremos la integral doble:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin(x+y)}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

Este tipo de integral es difícil de resolver analíticamente debido a la interacción entre las variables  $x$  y  $y$ .

# Integrales múltiples

1. Generamos  $N$  pares  $(x_i, y_i)$  distribuidos uniformemente en  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
2. Evaluamos la función:

$$f(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{1 + x^2 + y^2},$$

obteniendo  $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_N, y_N)$ .

3. Calculamos el promedio de estos valores:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i).$$

4. Multiplicamos este promedio por el área del dominio (en este caso,  $1 \times 1 = 1$ ):

$$I \approx 1 \cdot \bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin(x_i + y_i)}{1 + x_i^2 + y_i^2}.$$

# Definición

Estimar:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

con  $x_i \sim \mathcal{U}(a, b)$ :

$$\hat{I}_n = (b - a) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

$$\int_0^1 x^2 dx$$

```
set.seed(1)
n <- 10000
x <- runif(n)
fx <- x^2
mean(fx)
```



$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

No tiene primitiva elemental.

```
x <- runif(n)
fx <- exp(-x^2)
mean(fx)
```

# Integral doble

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy = \frac{1}{4}$$

```
x <- runif(n)
y <- runif(n)
fx <- x * y
mean(fx)
```

# Optimización determinista vs estocástica

- ▶ Métodos deterministas: gradiente descendente, Newton-Raphson.
- ▶ Métodos estocásticos: simulación de Monte Carlo, algoritmos genéticos, recocido simulado.