La interpretación clásica de Laplace de la probabilidad define la probabilidad de un evento E como:

$$P(E) = \frac{\text{Número de casos favorables a } E}{\text{Número total de casos posibles}}$$

bajo la condición de que todos los casos son equiprobables.

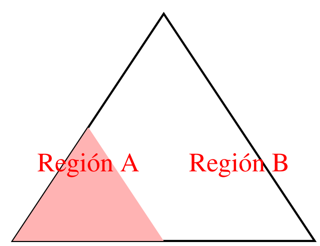
En un contexto geométrico o continuo, como el problema de la aguja de Buffon, esta definición enfrenta dificultades:

1. **Definición de un espacio de muestreo continuo**: el espacio de muestreo para la posición y orientación de la aguja es un espacio continuo, representado por un producto de intervalos en $\mathbb{R}^2$ y un intervalo en $[0, 2\pi)$ para la orientación.

2. **Medición de los casos favorables y totales**: en un espacio continuo, debemos medir el "tamaño" de los conjuntos de casos favorables y totales, lo que implica el uso de medidas en espacios continuos, específicamente la medida de Lebesgue.

3. **Desafíos con la equiprobabilidad**: definir la equiprobabilidad en un conjunto no finito es problemático sin una medida predefinida.

El argumento de los triángulos en contra de la interpretación clásica de la probabilidad de Laplace ilustra la dificultad de definir "casos igualmente probables" en situaciones continuas. Se considera el problema de elegir al azar un punto dentro de un triángulo y determinar la probabilidad de que este punto caiga dentro de una región específica del triángulo.



Problema de Bertrand y sus interpretaciones

El Problema de Bertrand se plantea de la siguiente manera: dado un círculo, se traza una cuerda al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de esta cuerda sea mayor que la longitud del lado de un triángulo equilátero inscrito en el círculo? Existen varias interpretaciones para "trazar una cuerda al azar": El Problema de Bertrand se plantea de la siguiente manera: Dado un círculo, se traza una cuerda al azar. ¿cuál es la probabilidad de que la longitud de esta cuerda sea mayor que la longitud del lado de un triángulo equilátero inscrito en el círculo?

Hay varias maneras de interpretar "trazar una cuerda al azar", y cada una conduce a una respuesta diferente:

1. *Triángulo equilátero inscrito*: imagine un triángulo equilátero inscrito en el círculo. Cada lado de este triángulo divide la circunferencia en dos arcos iguales, cada uno abarcando $\frac{1}{3}$ de la circunferencia total.

2. *Punto crítico en la circunferencia*: se refiere a un punto específico en la circunferencia de un círculo que determina la longitud de una cuerda trazada a través del círculo. Cuando se selecciona un punto fijo A en la circunferencia y luego se elige otro punto B al azar en la misma circunferencia para formar una cuerda, el punto

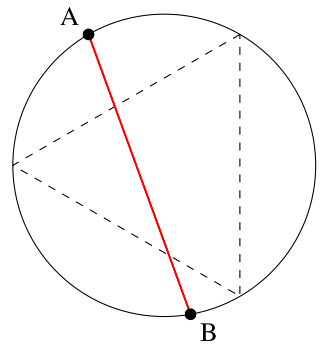


Figura 1: Cuerda AB seleccionada aleatoriamente

crítico es aquel que, si es seleccionado como B, hace que la longitud de la cuerda AB sea igual o mayor a la longitud de un lado de un triángulo equilátero inscrito en el círculo.

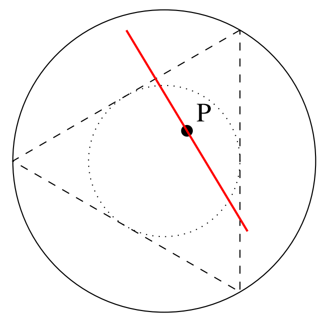


Figura 2: Cuerda con P como punto medio seleccionado aleatoriamente dentro del círculo inscrito

Consideremos un círculo de radio R y un triángulo equilátero inscrito en este círculo. El centro del círculo también es el centro del triángulo equilátero. Si trazamos un círculo más pequeño con radio $\frac{R}{2}$ centrado en el mismo punto, este círculo inscrito interceptará cada uno de los lados del triángulo equilátero exactamente en su punto medio.

Al seleccionar un punto aleatorio dentro del círculo más pequeño y trazar una cuerda de tal manera que este punto sea el punto medio de la cuerda, la longitud de esta cuerda será mayor que la de un lado del triángulo equilátero inscrito siempre que el punto seleccionado esté dentro del círculo más pequeño. Esto se debe a que cualquier cuerda cuyo punto medio se encuentra a una distancia del centro menor que $\frac{R}{2}$ será automáticamente más larga que el lado del triángulo equilátero.

Dado que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio, el área del círculo inscrito (radio $\frac{R}{2}$) es exactamente $\frac{1}{4}$ del área del círculo original. Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar un punto dentro del círculo más pequeño es $\frac{\text{área del círculo pequeño}}{\text{área del círculo grande}} = \frac{1}{4}$. Sin embargo, estamos interesados en la probabilidad de que el punto seleccionado caiga fuera de este círculo más pequeño, lo cual es $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Por lo tanto, bajo este método de selección, la probabilidad de que una cuerda seleccionada al azar sea más larga que un lado del triángulo equilátero inscrito es $\frac{3}{4}$.

3. *Selección aleatoria de B*: al seleccionar aleatoriamente el punto B en la circunferencia, la probabilidad de que B caiga dentro del arco crítico es $\frac{1}{3}$, ya que este arco es $\frac{1}{3}$ de la circunferencia total.

Por lo tanto, la probabilidad de que la cuerda AB sea más larga que un lado del triángulo equilátero es $\frac{1}{3}$. Este resultado es específico de la interpretación de “seleccionar aleatoriamente dos puntos en la circunferencia”, que es una de las varias interpretaciones posibles en el Problema de Bertrand.