Sección 2: Lagrange

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$$

En este caso vamos a encontrar los puntos críticos

$$\nabla f(x, y) = (2(x + 1), 2y) \Rightarrow \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{array}{c} 2(x + 1) = 0 \\ 2y = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = -1 \\ y = 0 \end{array}$$

por lo tanto el único punto crítico es $(-1,0)$ para ver si es máximo o mínimo nos fijamos que en la función

$$f(x,y) = (x+1)^2 + y^2 \Rightarrow f(x,y) \geq 0$$

en este caso cuando evaluamos en el punto crítico $(-1,0)$ se tiene

$$f(-1,0) = (-1+1)^2 + 0^2 = 0$$

por lo que podemos decir que el punto $(-1,0)$ es un punto mínimo.

Puede encontrar un modelo 3D en este hipervínculo: https://www.desmos.com/3d/fb09d2ea7f

Considere ahora si la función alcanza un valor máximo, para ello debemos restringir el dominio de la función, en este caso al conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 2\right\}$$

¿Es posible resolver esto analíticamente?

Teorema

Multiplicadores de Lagrange

Dadas las funciones $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ambas de clase C^1, y un punto $x_0 \in U$ tal que $g(x_0) = c$ y $\nabla g(x_0) \neq 0$, si f restringida al conjunto de nivel $S = \{x \in U | g(x) = c\}$ tiene un extremo local en x_0, entonces existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

donde λ es conocido como el multiplicador de Lagrange.

Teorema

Multiplicadores de Lagrange

La esencia del Teorema de los Multiplicadores de Lagrange yace en la relación entre los gradientes de la función objetivo f y la función de restricción g en el punto de extremo local sujeto a la restricción. Cuando f está restringida a permanecer en el conjunto de nivel $S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = c\}$, los puntos extremos bajo esta restricción ocurren en donde el gradiente de f es paralelo al gradiente de g.

Teorema

Multiplicadores de Lagrange

La esencia del Teorema de los Multiplicadores de Lagrange yace en la relación entre los gradientes de la función objetivo f y la función de restricción g en el punto de extremo local sujeto a la restricción. Cuando f está restringida a permanecer en el conjunto de nivel $S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = c\}$, los puntos extremos bajo esta restricción ocurren en donde el gradiente de f es paralelo al gradiente de g.

El gradiente de una función en un punto dado indica la dirección de máximo incremento de la función. En un punto extremo de f sujeto a la restricción $g(x) = c$, no es posible "moverse" en la dirección de máximo incremento de f sin salirse del conjunto de nivel S de g. Esto significa que el gradiente de f debe ser "compensado" por el gradiente de g, y la única manera de que esto ocurra es que los dos gradientes sean paralelos en ese punto.

Teorema

Multiplicadores de Lagrange

Formalmente, esto se expresa como $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$, donde x_0 es el punto de extremo y λ es el multiplicador de Lagrange que escala el gradiente de g para que se "alinee" con el de f. Este principio permite encontrar puntos extremos de f bajo la restricción $g(x) = c$ al resolver este sistema de ecuaciones para x y λ.

Use el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los valores extremos de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

sobre la restricción

$$x^2 + y^2 = 4$$

En este caso la restricción la vemos como el conjunto de nivel cero de la función

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$

y tenemos entonces que

$$\left(\begin{array}{c} \nabla f = (2,3) \\ \nabla g = (2x, 2y) \end{array} \right) \Rightarrow (2,3) = \lambda(2x, 2y)$$

Así, tenemos el sistema

$$\left(\begin{array}{c} 2 = 2\lambda x \\ 3 = \lambda 2y \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \lambda = \frac{1}{x} \\ \lambda = \frac{3}{2}y \end{array}\right) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{2}y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

dicho valor se sustituye en la restricción

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 4 \Rightarrow \frac{13}{4}x^2 = 4 \Rightarrow 13x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{13} \Rightarrow |x| = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} y = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{13}}\right) & = \frac{6}{\sqrt{13}} \\ y = -\frac{3}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{13}}\right) & = -\frac{6}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

evaluando en nuestra función

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right) = \frac{8}{\sqrt{13}} + \frac{18}{\sqrt{13}} = \frac{268}{\sqrt{13}} \approx 7,21$$

$$f\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{8}{\sqrt{13}} - \frac{18}{\sqrt{13}} = -\frac{26}{\sqrt{13}} \approx -7,21$$

por tanto el valor máximo es 7,21 y se alcanza en $\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right)$
y el valor mínimo es $-7,21$ y se alcanza en $\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$

El método de los multiplicadores de Lagrange se extiende a problemas de optimización con múltiples restricciones.

- La función objetivo es $w = f(x, y, z)$.
- Sujeta a las restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$.

Con dos restricciones, introducimos dos multiplicadores, λ_1 y λ_2, y formulamos el sistema de ecuaciones como sigue:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

donde:

- $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es el gradiente de la función objetivo en el punto (x_0, y_0, z_0).
- $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ son los gradientes de las restricciones.

El sistema de ecuaciones a resolver se convierte en:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x_0, y_0, z_0) &= \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0) \\
g(x_0, y_0, z_0) &= 0 \\
h(x_0, y_0, z_0) &= 0
\end{aligned}
$$

Este sistema nos permite encontrar los puntos críticos sujetos a las restricciones.