

Sección 1: Preliminares

La necesidad de optimizar es consecuencia directa de la necesidad de organizar. Optimizar consiste en identificar una configuración óptima o un óptimo en un sistema en el sentido más amplio del término.

Definición (Óptimo). (En latín *optimun*, lo mejor). La condición o ventajosa, especialmente bajo un conjunto particular de circunstancias.

Como parte de un enfoque científico, esta definición requiere algunos detalles.

¿Cómo podemos juzgar que la condición es ventajosa y cómo podemos describir formalmente el conjunto de circunstancias?

Las variables de decisión son los componentes del sistema que describen su estado y que el analista desea determinar. O bien, representan configuraciones del sistema que es posible modificar para mejorar su rendimiento. En general, si estas variables son n en número, se representan por un vector (columna) de \mathbb{R}^n , a menudo denotado por $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)^T$, es decir,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En la práctica, este paso es probablemente el más complicado y más importante. El más complicado porque solo la experiencia en modelado y un buen conocimiento del problema específico pueden guiar la selección. El más importante porque el resto del proceso depende de ello. Una selección inapropiada de las variables de decisión puede generar un problema de optimización demasiado complicado e imposible de resolver.

Dada un conjunto de variables de decisión, en este curso asumimos que la persona que realiza el modelado es capaz de identificar una fórmula, una función, que proporciona una medida del estado del sistema, un valor que ella quiere hacer lo más pequeño o grande posible. Esta función, llamada función objetivo, se denota por f y la medida mencionada obtenida para las variables de decisión \mathbf{x} es un número real denotado por $f(\mathbf{x})$.

- Un modelo es una representación conceptual, física o matemática que busca emular o simular aspectos de la realidad con el propósito de comprender, explicar, predecir o controlar fenómenos del mundo real. Los modelos actúan como mediadores entre nuestras teorías abstractas y el complejo entramado de la realidad, permitiéndonos simplificar, esquematizar y organizar nuestros conocimientos sobre determinados aspectos del mundo.

- Un modelo es una representación conceptual, física o matemática que busca emular o simular aspectos de la realidad con el propósito de comprender, explicar, predecir o controlar fenómenos del mundo real. Los modelos actúan como mediadores entre nuestras teorías abstractas y el complejo entramado de la realidad, permitiéndonos simplificar, esquematizar y organizar nuestros conocimientos sobre determinados aspectos del mundo.
- Desde una perspectiva epistemológica, los modelos desempeñan un papel crucial en la ciencia y la filosofía de la ciencia, ya que nos permiten formular hipótesis y teorías, realizar experimentos mentales y físicos, y extraer conclusiones sobre la naturaleza de la realidad. Los modelos no son reproducciones exactas de la realidad, sino construcciones ideales que se enfocan en ciertos aspectos de un fenómeno mientras omiten otros, dependiendo de los objetivos del modelado y de las preguntas que se buscan responder.

- La construcción y utilización de modelos se basa en un proceso de abstracción y idealización. La abstracción implica extraer los elementos esenciales de un fenómeno, ignorando los detalles que se consideran irrelevantes para el propósito del modelo. La idealización, por otro lado, implica la simplificación de esos elementos a formas más manejables o perfectas de lo que realmente son, con el fin de facilitar su análisis y comprensión.

- La construcción y utilización de modelos se basa en un proceso de abstracción y idealización. La abstracción implica extraer los elementos esenciales de un fenómeno, ignorando los detalles que se consideran irrelevantes para el propósito del modelo. La idealización, por otro lado, implica la simplificación de esos elementos a formas más manejables o perfectas de lo que realmente son, con el fin de facilitar su análisis y comprensión.
- Los modelos también pueden ser interpretados desde una perspectiva ontológica, lo que nos lleva a cuestionar la naturaleza de su existencia y su relación con la realidad. En este sentido, los modelos pueden ser vistos como entidades independientes que poseen su propia estructura y propiedades, que interactúan con las teorías científicas y los fenómenos reales de maneras complejas. Esta visión plantea preguntas sobre la capacidad de los modelos para representar fielmente la realidad y sobre los criterios que deberían usarse para evaluar su validez y eficacia.

Alrededor del año 300 a.C., el matemático griego Euclides se interesó en el siguiente problema de geometría: ¿cuál es el rectángulo de mayor área entre los rectángulos con un perímetro L dado? Esto se considera como uno de los primeros problemas de optimización conocidos en la historia. Lo describimos en tres pasos.

Alrededor del año 300 a.C., el matemático griego Euclides se interesó en el siguiente problema de geometría: ¿cuál es el rectángulo de mayor área entre los rectángulos con un perímetro L dado? Esto se considera como uno de los primeros problemas de optimización conocidos en la historia. Lo describimos en tres pasos.

(1) Las **variables de decisión** son la longitud x_1 y la altura x_2 del rectángulo, expresadas en cualquier unidad arbitraria.

Alrededor del año 300 a.C., el matemático griego Euclides se interesó en el siguiente problema de geometría: ¿cuál es el rectángulo de mayor área entre los rectángulos con un perímetro L dado? Esto se considera como uno de los primeros problemas de optimización conocidos en la historia. Lo describimos en tres pasos.

- (1) Las **variables de decisión** son la longitud x_1 y la altura x_2 del rectángulo, expresadas en cualquier unidad arbitraria.
- (2) Buscamos el rectángulo con el área máxima. Por lo tanto, la **función objetivo** es simplemente igual a $x_1 x_2$.

Alrededor del año 300 a.C., el matemático griego Euclides se interesó en el siguiente problema de geometría: ¿cuál es el rectángulo de mayor área entre los rectángulos con un perímetro L dado? Esto se considera como uno de los primeros problemas de optimización conocidos en la historia. Lo describimos en tres pasos.

(1) Las **variables de decisión** son la longitud x_1 y la altura x_2 del rectángulo, expresadas en cualquier unidad arbitraria.

(2) Buscamos el rectángulo con el área máxima. Por lo tanto, la **función objetivo** es simplemente igual a $x_1 x_2$.

(3) La longitud total de los bordes del rectángulo debe ser igual a L , es decir,

$$2x_1 + 2x_2 = L.$$

Además, las dimensiones x_1 y x_2 deben ser no negativas:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x_2 \geq 0.$$

Combinando todo, obtenemos el siguiente problema de optimización:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + 2x_2 = L$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Sección 2: Lagrange