

Métodos directos

Rodrigo Barrera

Introducción

Los métodos directos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales son procedimientos que, a través de un número finito de operaciones, permiten obtener una solución exacta (o casi exacta, considerando errores numéricos) al sistema.

Introducción

Eliminación Gaussiana

El método de eliminación de Gauss consiste en transformar el sistema original en un sistema triangular superior mediante una serie de operaciones elementales de fila (permutaciones de filas, multiplicación de una fila por un escalar no nulo, suma de un múltiplo de una fila a otra). Una vez obtenida la matriz triangular superior, se resuelve el sistema mediante sustitución regresiva.

Introducción

Método de factorización LU

Factorización LU:

- Descomponer la matriz A en el producto de dos matrices:
 - Una matriz triangular inferior L .
 - Una matriz triangular superior U .
- El sistema $Ax = b$ se resuelve en dos etapas:
 - 1 Resolver $Ly = b$ mediante sustitución progresiva.
 - 2 Resolver $Ux = y$ mediante sustitución regresiva.

Introducción

Método de factorización QR

Factorización QR:

- Descomponer la matriz A en el producto de una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R .
- Utilizado principalmente para resolver sistemas sobredeterminados.
- La resolución se realiza en dos etapas:
 - 1 Multiplicar ambos lados del sistema $Ax = b$ por la transpuesta de Q : $Rx = Q^T b$.
 - 2 Resolver el sistema triangular superior $Rx = Q^T b$ mediante sustitución regresiva.

Eliminación Gaussiana

Eliminación Gaussiana

Introducción

- La eliminación de Gauss es un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Transforma el sistema original en un sistema equivalente triangular superior.
- Consiste en dos fases: eliminación y sustitución hacia atrás.

Fase de eliminación

- Selección de un pivote.
- Eliminación de los elementos debajo del pivote.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

Eliminación de la primera columna

$$\text{Fila 2} = \text{Fila 2} - 2 \times \text{Fila 1}$$

$$\text{Fila 3} = \text{Fila 3} - \frac{3}{2} \times \text{Fila 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

Eliminación de la segunda columna

$$\text{Fila 3} = \text{Fila 3} - \frac{1}{2} \times \text{Fila 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \end{array} \right)$$

Fase de sustitución hacia atrás

- Resolver para z : $5z = 9 \implies z = \frac{9}{5}$
- Sustituir z en la segunda ecuación para encontrar y :

$$-5y - 4\left(\frac{9}{5}\right) = -4 \implies y = \frac{4}{5}$$

- Sustituir y y z en la primera ecuación para encontrar x :

$$2x + 3\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{9}{5} = 1 \implies x = -\frac{8}{5}$$

Solución

$$x = -\frac{8}{5}, \quad y = \frac{4}{5}, \quad z = \frac{9}{5}$$

Sistema de ecuaciones 4x4

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 10 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Eliminación de la primera columna

$$\text{Fila 2} = \text{Fila 2} - 2 \times \text{Fila 1}$$

$$\text{Fila 3} = \text{Fila 3} + \text{Fila 1}$$

$$\text{Fila 4} = \text{Fila 4} - \frac{3}{2} \times \text{Fila 1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3.5 & 5.5 & -3.5 & -1 \end{array} \right)$$

Eliminación de la segunda columna

$$\text{Fila 3} = \text{Fila 3} - 2 \times \text{Fila 2}$$

$$\text{Fila 4} = \text{Fila 4} + 3.5 \times \text{Fila 2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -17.5 & 6 \end{array} \right)$$

Eliminación de la tercera columna

$$\text{Fila 4} = \text{Fila 4} - \frac{9}{12} \times \text{Fila 3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -17.5 & 6 \end{array} \right)$$

Sustitución hacia atrás

• x_4 :

$$12x_4 = 0 \implies x_4 = 0$$

• x_3 :

$$9x_3 - 17.5 \times 0 = 6 \implies x_3 = \frac{6}{9} \implies x_3 = \frac{2}{3}$$

• x_2 :

$$x_2 + x_3 - 4 \times 0 = 2 \implies x_2 + \frac{2}{3} = 2 \implies x_2 = 2 - \frac{2}{3} \implies x_2 = \frac{4}{3}$$

• x_1 :

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3 \times 0 = 4 \implies 2x_1 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 4 \implies 2x_1 = 4 - \frac{2}{3} \implies x_1$$

Solución

$$x_1 = \frac{10}{3}, \quad x_2 = \frac{4}{3}, \quad x_3 = \frac{2}{3}, \quad x_4 = 0$$

División por cero

Problema

Durante el proceso de eliminación, puede encontrarse con un pivote que es cero, lo que hace que la eliminación de los elementos en la columna correspondiente sea imposible.

Solución

Intercambiar filas para que el pivote no sea cero. Esto se llama intercambio de filas o pivotación.

Ejemplo

Si la primera fila es $(0 \ 2 \ 3 \ 4)$ y queremos usar la primera columna como pivote, no podemos proceder hasta que intercambiamos esta fila con una fila que tenga un valor no cero en la primera columna.

Inestabilidad numérica

El método puede ser numéricamente inestable debido a errores de redondeo, especialmente en sistemas de ecuaciones mal condicionados (donde pequeñas variaciones en los datos pueden causar grandes cambios en las soluciones).

Solución

Usar métodos más estables como la eliminación de Gauss-Jordan o el método de factorización LU con pivotación parcial.

Presunción de sistemas consistentes

El método de eliminación de Gauss supone que el sistema tiene una solución. Si el sistema es inconsistente (es decir, no tiene ninguna solución) o tiene infinitas soluciones, el método puede producir resultados incorrectos o inconclusos.

Solución:

Verificar el sistema después de la eliminación. Si hay una fila de ceros en la matriz aumentada con un término independiente no cero (por ejemplo, $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 5)$), el sistema es inconsistente. Si la última fila es de la forma $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 0)$, puede ser necesario verificar el rango de la matriz para determinar si hay infinitas soluciones.

Complejidad computacional

La eliminación de Gauss tiene una complejidad computacional de $O(n^3)^1$, lo que puede ser ineficiente para sistemas de gran tamaño.

Para sistemas grandes, se pueden usar algoritmos más eficientes como el método de factorización LU con pivotación parcial o algoritmos especializados para matrices dispersas.²

¹ $O(n^3)$ indica que el tiempo de ejecución del algoritmo crece cúbicamente con el tamaño del sistema, volviéndose ineficiente para sistemas grandes.

² Una matriz dispersa es aquella en la que la mayoría de sus elementos son cero. Este tipo de matrices permiten utilizar algoritmos especializados que aprovechan su estructura para reducir el tiempo de cómputo y el uso de memoria.

Pivoteo parcial

Estrategias de pivoteo

Pivoteo parcial

Las estrategias de pivoteo son utilizadas para evitar que los resultados sean inexactos cuando aplicamos la eliminación de Gauss, esto se da en el caso de que el pivote es cero o es un número muy pequeño, es en estas ocasiones donde la idea de intercambiar ecuaciones (filas) en un sistema, nos resultará una buena estrategia. Así, si el pivote es cero, es decir $a_{kk}^{(k)} = 0$, entonces, podemos buscar un $a_{ik}^{(k)} \neq 0$ con $i > k$ (lo cual siempre es posible debido a que $\det(A) \neq 0$), intercambiar las filas k -ésima e i -ésima y continuar con el proceso. Este intercambio de filas se conoce como pivoteo.

Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pero es muy pequeño, el método de Gauss se puede aplicar, pero es inestable numéricamente, lo que significa que con unos pequeños errores en los datos se puede originar grandes cambios en la solución. Por lo que tendremos que pivotear.

Estrategias de pivoteo

Pivoteo parcial

- **Pivoteo parcial** Se toma como pivote el elemento de mayor módulo de entre los $n - k$ últimos elementos de la columna k -ésima, es decir, se elige $a_{ik}^{(k)}$ ($i = k, k + 1, \dots, n$) de forma que

$$|a_{ik}^{(k)}| = \max_{k \leq j \leq n} |a_{jk}^{(k)}|$$

Finalmente, intercambiamos las filas i -ésima y k -ésima.

Ejemplo de pivoteo parcial

Los candidatos para hacer el papel de pivote en la siguiente matriz ampliada, son los elementos que están marcados con negrita.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\mathbf{5} & 1 & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{4} & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -\mathbf{7} & -6 & -1 & -21 \end{array} \right)$$

¿Por qué esos elementos son candidatos a pivote?

- En esta etapa del método de eliminación, ya se utilizó el pivote en la primera columna (posición (1,1)) para hacer ceros debajo.
- Ahora se busca el **pivote en la columna 2**, específicamente entre las filas restantes (desde la fila 2 en adelante).
- Los elementos en negrita son los que están en la **subcolumna activa**:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ \mathbf{4} \\ -7 \end{bmatrix}$$

¿Por qué esos elementos son candidatos a pivote?

Son candidatos porque:

- Están en la columna actual (columna 2),
- y en las filas donde aún no se ha aplicado la eliminación.

En el **pivoteo parcial**, se elige el elemento con **mayor valor absoluto** para mejorar la estabilidad numérica:

$$|-5| = 5, \quad |4| = 4, \quad |-7| = 7$$

Se selecciona -7 como pivote y se intercambia la fila 4 con la fila 2.

Ejemplo de pivoteo parcial (Cont.)

Hay que elegir el máximo valor entre sus valores absolutos:

$$|a_{22}| = 5, \quad |a_{32}| = 4, \quad |a_{42}| = 7$$

Por lo tanto, el máximo es $|a_{42}| = 7$, por lo que se usará como pivote el elemento a_{42} . Esto significa que debemos intercambiar la segunda fila por la cuarta fila, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & -6 & -1 & -21 \\ 0 & 4 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

Luego, se aplicarán las operaciones elementales para anular los elementos a_{32} y a_{42} .

Pivoteo parcial

Ejemplo: paso 0.

En el problema a continuación, tenemos diferencias en el orden de magnitud entre los coeficientes en las diferentes filas.

$$\begin{array}{cccc|c} 0.02 & 0.01 & 0 & 0 & 0.02 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \end{array}$$

Paso 0a: encuentra la entrada en la columna izquierda con el valor absoluto más grande. Esta entrada se llama el pivote.

Paso 0b: realiza el intercambio de filas (si es necesario), para que el pivote esté en la primera fila.

Pivoteo parcial

Ejemplo: paso 1 (Eliminación Gaussiana).

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \end{array}$$

Después de realizar la eliminación gaussiana:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.03 & -0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \end{array}$$

Pivoteo parcial

Ejemplo: paso 2 (encontrar el nuevo pivote)

Identificar el siguiente pivote en la matriz resultante:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -0.03 & -0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \end{array}$$

Ejemplo: paso 3 (intercambio de filas (si es necesario))

Realizar el intercambio de filas si es necesario:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & -0.03 & -0.02 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 100 & 200 & 800
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\
 0 & -0.03 & -0.02 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 100 & 200 & 800
 \end{array}$$

Ejemplo: paso 4 eliminación gaussiana

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\
 -0.03 & -0.02 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 100 & 200 & 800
 \end{array}$$

Después de realizar la eliminación gaussiana:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\
 0 & 0.04 & 0.03 & 0 & 0.12 \\
 0 & 0 & 100 & 200 & 800
 \end{array}$$

Ejemplo paso 5: encontrar el nuevo pivote

Identificar el siguiente pivote en la matriz resultante:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \\ 0 & 0.04 & 0.03 & 0 & 0.12 \end{array}$$

Paso 6: intercambio de filas (si es necesario)

Realizar el intercambio de filas si es necesario:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \\
 0 & 0.04 & 0.03 & 0 & 0.12
 \end{array}$$

Después del intercambio de filas:

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \\
 0 & 0.04 & 0.03 & 0 & 0.12
 \end{array}$$

Paso 7: Eliminación Gaussiana

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \\ 0 & 0.04 & 0.03 & 0 & 0.12 \end{array}$$

Después de realizar la eliminación gaussiana:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 100 & 200 & 800 \\ 0 & 0 & -0.05 & 0 & -0.2 \end{array}$$

Paso 8: sustitución hacia atrás

$$-0.2x_4 = -0.05$$

$$\Rightarrow x_4 = 4$$

$$100x_3 + 200x_4 = 800$$

$$\Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

Definición

Selección del pivote

- Se toma como pivote el elemento de mayor módulo de la submatriz correspondiente de la matriz $A^{(k)}$.
- Es decir, se elige el elemento $a_{ij}^{(k)}$ (con $i, j = k, k + 1, \dots, n$) de forma que:

$$|a_{ij}^{(k)}| = \max_{k \leq r, s \leq n} |a_{rs}^{(k)}|$$

- Finalmente, intercambiamos las filas y columnas que correspondan.

Definición

Importancia

- En este pivoteo, si el pivote elegido no está en la columna k -ésima, habrá que intercambiar columnas.
- Por lo tanto, tendremos que reordenar el orden de las incógnitas.
- Es de gran importancia tener en cuenta lo anterior al momento de resolver un sistema lineal.

Descomposición de Cholesky

Descomposición de Cholesky

La descomposición de Cholesky es un algoritmo que factoriza una matriz simétrica y definida positiva A en el producto de una matriz triangular inferior L y su transpuesta L^T :

$$A = LL^T$$

Descomposición de Cholesky

Algoritmo de Cholesky

Algorithm 1 Descomposición de Cholesky

- 1: **Entrada:** Matriz simétrica y definida positiva A de tamaño $n \times n$.
 - 2: Inicializar una matriz L de ceros de tamaño $n \times n$.
 - 3: **for** $i = 1$ **to** n **do**
 - 4: Calcular $L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$.
 - 5: **for** $j = i + 1$ **to** n **do**
 - 6: Calcular $L_{ji} = \frac{1}{L_{ii}} \left(A_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} L_{ik} \right)$.
 - 7: **end for**
 - 8: **end for**
 - 9: **Salida:** Matriz triangular inferior L tal que $A = LL^T$.
-

Descomposición de Cholesky

Implementación en R

```
cholesky_decomposition <- function(A) {  
  n <- nrow(A)  
  L <- matrix(0, n, n)  
  
  for (i in 1:n) {  
    L[i, i] <- sqrt(A[i, i] - sum(L[i, 1:(i-1)]^2))  
    for (j in (i+1):n) {  
      L[j, i] <- (A[j, i] - sum(L[j, 1:(i-1)] * L[i, 1:(i-1)])) / L[i, i]  
    }  
  }  
  
  return(L)  
}
```

Ejemplo (1)

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}6x + 15y + 55z &= 76, \\15x + 55y + 225z &= 295, \\55x + 225y + 979z &= 1259,\end{aligned}$$

Podemos expresarlo en forma matricial como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 76 \\ 295 \\ 1259 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (1)

La matriz A se descompone como $A = LL^T$, donde L es una matriz triangular inferior. Los elementos de L se calculan como sigue:

$$L_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} \cdot L_{kj}}{L_{ii}}$$

$$L_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj}^2}$$

Dado que A es simétrica, calculamos L paso a paso:

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

$$L_{21} = \frac{a_{21}}{L_{11}} = \frac{15}{2.4495} = 6.1237$$

Ejemplo (1)

$$L_{22} = \sqrt{a_{22} - L_{21}^2} = \sqrt{55 - (6.1237)^2} = \sqrt{55 - 37.5} = 4.1833$$

$$L_{31} = \frac{a_{31}}{L_{11}} = \frac{55}{2.4495} = 22.4537$$

$$L_{32} = \frac{a_{32} - L_{31} \cdot L_{21}}{L_{22}} = \frac{225 - (22.4537) \cdot (6.1237)}{4.1833} = \frac{225 - 137.5}{4.1833} = 20.9165$$

$$L_{33} = \sqrt{a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} = \sqrt{979 - (22.4537)^2 - (20.9165)^2} = \sqrt{979 - 9.9999} = 9.9999$$

Ejemplo (1)

Entonces, la matriz L es:

$$L = \begin{pmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.4537 & 20.9165 & 6.1101 \end{pmatrix}$$

Verificamos que:

$$L \times L^T = \begin{pmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.4537 & 20.9165 & 6.1101 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2.4495 & 6.1237 & 22.4537 \\ 0 & 4.1833 & 20.9165 \\ 0 & 0 & 6.1101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \\ 55 & 225 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (1)

Ahora, dado que $A = LL^T$, tenemos:

$$LL^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Definimos $L^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces:

$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y resolvemos para \mathbf{y}

$$\begin{pmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.4537 & 20.9165 & 6.1101 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ 295 \\ 1259 \end{pmatrix}$$

Sustitución hacia adelante

1 Resolvemos para y_1 :

$$2.4495y_1 = 76$$

$$y_1 = \frac{76}{2.4495} = 31.0269$$

2 Resolvemos para y_2 :

$$6.1237y_1 + 4.1833y_2 = 295$$

$$6.1237 \times 31.0269 + 4.1833y_2 = 295$$

$$190 + 4.1833y_2 = 295$$

$$4.1833y_2 = 295 - 190 = 105$$

$$y_2 = \frac{105}{4.1833} = 25.0998$$

3 Resolvemos para y_3 :

$$22.4537y_1 + 20.9165y_2 + 6.1101y_3 = 1259$$

$$22.4537 \times 31.0269 + 20.9165 \times 25.0998 + 6.1101y_3 = 1259$$

$$1221.6667 + 6.1101y_3 = 1259$$

$$6.1101y_3 = 1259 - 1221.6667 = 37.3333$$

$$y_3 = \frac{37.3333}{6.1101} = 6.1101$$

Ahora resolvemos $L^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} 2.4495 & 6.1237 & 22.4537 \\ 0 & 4.1833 & 20.9165 \\ 0 & 0 & 6.1101 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.0269 \\ 25.0998 \\ 6.1101 \end{pmatrix}$$

Sustitución hacia atrás

Usamos sustitución hacia atrás:

$$1. \quad 6.1101z = 6.1101$$

$$z = \frac{6.1101}{6.1101} = 1$$

$$2. \quad 4.1833y + 20.9165z = 25.0998$$

$$4.1833y + 20.9165 \times 1 = 25.0998$$

$$4.1833y = 25.0998 - 20.9165 = 4.1833$$

$$y = \frac{4.1833}{4.1833} = 1$$

$$3. \quad 2.4495x + 6.1237y + 22.4537z = 31.0269$$

$$2.4495x + 6.1237 \times 1 + 22.4537 \times 1 = 31.0269$$

$$2.4495x + 28.5774 = 31.0269$$

$$2.4495x = 31.0269 - 28.5774 = 2.4495$$

$$x = \frac{2.4495}{2.4495} = 1$$

Solución

Por lo tanto, la solución utilizando el método de descomposición de Cholesky es:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$$

Ejercicio 1

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

Si $a^2 < b$, demuestra que A es definida positiva y encuentra la descomposición de Cholesky.

Una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es definida positiva si para cualquier vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple que:

$$x^T A x > 0$$

Ejercicio 2

Si A y B son matrices definidas positivas y $r > 0$, demuestra que $A + B$ y rA son definidas positivas.

Método del Gradiente Conjugado

Método del Gradiente Conjugado

El método del gradiente conjugado es un algoritmo iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz simétrica y definida positiva. Es especialmente útil para grandes sistemas dispersos, donde los métodos directos como la eliminación de Gauss serían ineficientes.

Método del Gradiente Conjugado

Algoritmo

Algorithm 2 Método del Gradiente Conjugado

- 1: **Entrada:** Matriz A , vector b , vector inicial x_0 , tolerancia ϵ , número máximo de iteraciones k_{\max} .
 - 2: Calcular $r_0 = b - Ax_0$, establecer $p_0 = r_0$.
 - 3: **for** $k = 0$ **to** k_{\max} **do**
 - 4: Calcular $\alpha_k = \frac{r_k^\top r_k}{p_k^\top A p_k}$.
 - 5: Actualizar $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.
 - 6: Calcular $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$.
 - 7: **if** $\|r_{k+1}\| < \epsilon$ **then**
 - 8: Terminar la iteración.
 - 9: **end if**
 - 10: Calcular $\beta_k = \frac{r_{k+1}^\top r_{k+1}}{r_k^\top r_k}$.
 - 11: Actualizar $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$.
 - 12: **end for**
 - 13: **Salida:** La solución aproximada x_k . =0
-

Método del Gradiente Conjugado

Implementación en R

```
conjugate_gradient <- function(A, b, x0, tol = 1e-10, max_iter = 1000) {  
  r <- b - A %*% x0  
  p <- r  
  x <- x0  
  rsold <- t(r) %*% r  
  
  for (i in 1:max_iter) {  
    Ap <- A %*% p  
    alpha <- rsold / (t(p) %*% Ap)  
    x <- x + alpha * p  
    r <- r - alpha * Ap  
    rsnew <- t(r) %*% r  
  
    if (sqrt(rsnew) < tol) {  
      break  
    }  
    beta <- rsnew / rsold  
    p <- r + beta * p  
    rsold <- rsnew  
  }  
  return(x)  
}
```

Métodos de relajación

Métodos de Relajación

Los métodos de relajación son técnicas iterativas utilizadas para resolver sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$. Son especialmente útiles para grandes sistemas dispersos, donde los métodos directos, como la eliminación de Gauss, pueden ser ineficientes.

- **Método de Jacobi**
- **Método de Gauss-Seidel**
- **Método de Sobrerrelajación Sucesiva (SOR)**

El método de Jacobi es un algoritmo iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada, x es el vector de variables a determinar y b es el vector de términos constantes. El método se basa en descomponer la matriz A como la suma de una matriz diagonal D y una matriz R tal que $A = D + R$. La fórmula iterativa de Jacobi es:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Rx^{(k)})$$

donde $x^{(k)}$ es el vector de la solución aproximada en la iteración k .

Método de Jacobi

El método de Jacobi es un método iterativo donde cada componente del vector x se actualiza utilizando exclusivamente los valores de la iteración anterior.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Fácil de implementar y paralelizar.
- Puede ser lento si la matriz A no tiene una diagonal dominante.

Método de Jacobi

Implementación en R

```
jacobi <- function(A, b, x0, tol = 1e-10, max_iter = 1000) {  
  D <- diag(A)  
  R <- A - diag(D)  
  x <- x0  
  for (k in 1:max_iter) {  
    x_new <- (b - R %*% x) / D  
    if (sqrt(sum((x_new - x)^2)) < tol) {  
      return(x_new)  
    }  
    x <- x_new  
  }  
  return(x)  
}
```

Ejemplo Jacobi

Sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Jacobi

En este caso, la matriz D es:

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

y $L + U$ es:

$$L + U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo Jacobi

Iteración de Jacobi:

- Descomponemos la matriz A en $D + (L + U)$, donde D es la matriz diagonal, L es la matriz estrictamente inferior y U es la matriz estrictamente superior.
- La fórmula iterativa de Jacobi es:

$$X^{(k+1)} = D^{-1} (B - (L + U)X^{(k)})$$

Cálculo de $X^{(1)}$:

$$x_1^{(1)} = \frac{-16 - (2 \times 0 + 4 \times 0)}{8} = -2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{4 - (3 \times 0 + 1 \times 0)}{5} = 0.8$$

$$x_3^{(1)} = \frac{-12 - (2 \times 0 + 1 \times 0)}{4} = -3$$

Ejemplo Jacobi

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $X^{(2)}$:

$$x_1^{(2)} = \frac{-16 - (2 \times 0.8 + 4 \times -3)}{8} = 0.7$$

$$x_2^{(2)} = \frac{4 - (3 \times -2 + 1 \times -3)}{5} = 2.6$$

$$x_3^{(2)} = \frac{-12 - (2 \times -2 + 1 \times 0.8)}{4} = -2.4$$

Ejemplo Jacobi

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 2.6 \\ -2.4 \end{bmatrix}$$

Iterar hasta la convergencia o el número deseado de iteraciones.

Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es una mejora del método de Jacobi. En lugar de usar solo los valores de la iteración anterior, se usan los valores más recientes disponibles.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} A_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Convergencia más rápida que Jacobi.
- Menos paralelizable debido a la dependencia de las actualizaciones más recientes.

Construcción de la matriz D (Diagonal)

Dada una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$, la matriz D se construye tomando solo los elementos de la diagonal principal de A :

$$D_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Construcción de la matriz L (Estríctamente Inferior)

La matriz L se construye tomando los elementos por debajo de la diagonal principal de A y colocando ceros en los demás elementos:

$$L_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j, \\ 0 & \text{si } i \leq j. \end{cases}$$

Construcción de la matriz U (Estríctamente Superior)

La matriz U se construye tomando los elementos por encima de la diagonal principal de A y colocando ceros en los demás elementos:

$$U_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j, \\ 0 & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

Implementación en R

```
gauss_seidel <- function(A, b, x0, tol = 1e-10, max_iter = 1000) {  
  n <- length(b)  
  x <- x0  
  for (k in 1:max_iter) {  
    x_new <- x  
    for (i in 1:n) {  
      # Ajuste para evitar errores de índice  
      sum1 <- if (i > 1) sum(A[i, 1:(i-1)] * x_new[1:(i-1)]) else 0  
      sum2 <- if (i < n) sum(A[i, (i+1):n] * x[(i+1):n]) else 0  
      x_new[i] <- (b[i] - sum1 - sum2) / A[i, i]  
    }  
    # Verificación de convergencia  
    if (sqrt(sum((x_new - x)^2)) < tol) {  
      return(x_new)  
    }  
    x <- x_new  
  }  
  return(x)  
}
```

Sistema de Ecuaciones

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x + y = 8$$

$$x + 2y = 1$$

Utilizaremos el método de Gauss-Seidel para encontrar la solución iterativa.

Fórmulas de Iteración

A partir de las ecuaciones dadas, las fórmulas de iteración son:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(8 - y_k)$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}(1 - x_{k+1})$$

Comenzamos con la estimación inicial: $(x, y) = (0, 0)$.

Primeras Aproximaciones

Primera aproximación

$$x_1 = \frac{1}{2} [8 - (0)] = 4$$

$$y_1 = \frac{1}{2} [1 - (4)] = -1.5$$

Segunda aproximación

$$x_2 = \frac{1}{2} [8 - (-1.5)] = 4.75$$

$$y_2 = \frac{1}{2} [1 - (4.75)] = -1.875$$

Siguientes aproximaciones

Tercera aproximación

$$x_3 = \frac{1}{2} [8 - (-1.875)] = 4.9375$$

$$y_3 = \frac{1}{2} [1 - (4.9375)] = -1.9688$$

Cuarta aproximación

$$x_4 = \frac{1}{2} [8 - (-1.9688)] = 4.9844$$

$$y_4 = \frac{1}{2} [1 - (4.9844)] = -1.9922$$

Iteraciones finales

Quinta aproximación

$$x_5 = \frac{1}{2} [8 - (-1.9922)] = 4.9961$$

$$y_5 = \frac{1}{2} [1 - (4.9961)] = -1.998$$

Sexta aproximación

$$x_6 = \frac{1}{2} [8 - (-1.998)] = 4.999$$

$$y_6 = \frac{1}{2} [1 - (4.999)] = -1.9995$$

Últimas iteraciones

Séptima aproximación

$$x_7 = \frac{1}{2} [8 - (-1.9995)] = 4.9998$$

$$y_7 = \frac{1}{2} [1 - (4.9998)] = -1.9999$$

Solución aproximada por el método de Gauss-Seidel:

$$x \approx 5, \quad y \approx -2$$

Tabla de Iteraciones

Iteración	x	y
1	4	-1.5
2	4.75	-1.875
3	4.9375	-1.9688
4	4.9844	-1.9922
5	4.9961	-1.998
6	4.999	-1.9995
7	4.9998	-1.9999

Table: Iteraciones del Método de Gauss-Seidel

Ejemplo 2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_{0_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iteración 1:

Calculamos las nuevas aproximaciones de las variables:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)})}{a_{11}} = \frac{0 - (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1)}{4} = 0$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(0)})}{a_{22}} = \frac{3 - (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1)}{5} = 0.2$$

$$x_3^{(1)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)})}{a_{33}} = \frac{4 - (1 \cdot 0 + 2 \cdot 0.2)}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2

Entonces,

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Iteración 2:

Utilizando $x^{(1)}$ para calcular $x^{(2)}$:

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)})}{a_{11}} = \frac{0 - (1 \cdot 0.6 + (-1) \cdot \frac{4}{3})}{4} = -\frac{1}{6}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(2)} + a_{23}x_3^{(1)})}{a_{22}} = \frac{3 - (2 \cdot (-\frac{1}{6}) + 2 \cdot \frac{4}{3})}{5} = \frac{3}{5}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(2)} + a_{32}x_2^{(2)})}{a_{33}} = \frac{4 - (1 \cdot (-\frac{1}{6}) + 2 \cdot \frac{3}{5})}{3} = \frac{22}{15}$$

Ejemplo 2

Entonces,

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ 3 \\ 5 \\ \frac{22}{15} \end{bmatrix}$$

Método de Sobrerrelajación Sucesiva (SOR)

El método SOR es una extensión del método de Gauss-Seidel que introduce un factor de relajación ω para acelerar la convergencia.

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} A_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

- Puede converger más rápidamente que Gauss-Seidel.
- La elección de ω es crítica; ω óptimo típicamente se encuentra en $1 < \omega < 2$.

Método SOR

```
sor <- function(A, b, x0, omega = 1.25, tol = 1e-10, max_iter = 1000) {  
  n <- length(b)  
  x <- x0  
  for (k in 1:max_iter) {  
    x_new <- x  
    for (i in 1:n) {  
      sigma <- sum(A[i, 1:(i-1)] * x_new[1:(i-1)]) +  
        sum(A[i, (i+1):n] * x[(i+1):n])  
      x_new[i] <- (1 - omega) * x[i] + (omega / A[i, i]) * (b[i] - sigma)  
    }  
    if (sqrt(sum((x_new - x)^2)) < tol) {  
      return(x_new)  
    }  
    x <- x_new  
  }  
  return(x)  
}
```

Método de Sobrerrelajación Sucesiva (SOR)

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}4x + 3y &= 24, \\3x + 4y - z &= 30, \\-y + 4z &= -24.\end{aligned}$$

Para matrices simétricas definidas positivas, el método SOR converge para valores del parámetro de relajación w en el intervalo $0 < w < 2$.

Sistema reformulado:

$$\begin{aligned}4x + 3y - 0z &= 24, \\3x + 4y - z &= 30, \\0x - y + 4z &= -24.\end{aligned}$$

Ecuaciones para el método de Gauss-Seidel

Reescribiendo las ecuaciones para el método de Gauss-Seidel:

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{4}(24 - 3y^{(k)}),$$

$$y^{(k+1)} = \frac{1}{4}(30 - 3x^{(k+1)} + z^{(k)}),$$

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{4}(-24 + y^{(k+1)}).$$

Multiplicamos el lado derecho por el parámetro de relajación w y añadimos el término del paso anterior multiplicado por $(1 - w)$:

$$x^{(k+1)} = (1 - w)x^{(k)} + w \left(\frac{1}{4}(24 - 3y^{(k)}) \right),$$

$$y^{(k+1)} = (1 - w)y^{(k)} + w \left(\frac{1}{4}(30 - 3x^{(k+1)} + z^{(k)}) \right),$$

$$z^{(k+1)} = (1 - w)z^{(k)} + w \left(\frac{1}{4}(-24 + y^{(k+1)}) \right).$$

Aproximaciones iniciales

Condiciones iniciales: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ y $w = 1.25$.

Primera Aproximación:

$$x^{(1)} = (1 - 1.25) \cdot 0 + 1.25 \cdot \frac{1}{4}[24 - 3(0)] = 0 + 7.5 = 7.5,$$

$$y^{(1)} = (1 - 1.25) \cdot 0 + 1.25 \cdot \frac{1}{4}[30 - 3(7.5)] = 0 + 2.34375 = 2.34375,$$

$$z^{(1)} = (1 - 1.25) \cdot 0 + 1.25 \cdot \frac{1}{4}[-24 + 2.34375] = 0 - 6.76758 = -6.76758$$

Segunda Aproximación

$$x^{(2)} = (1 - 1.25) \cdot 7.5 + 1.25 \cdot \frac{1}{4}[24 - 3(2.34375)] = -1.875 + 5.30273 = 3.427$$

$$y^{(2)} = (1 - 1.25) \cdot 2.34375 + 1.25 \cdot \frac{1}{4}[30 - 3(3.42773) - 6.76758] = -0.58594 -$$

$$z^{(2)} = (1 - 1.25) \cdot (-6.76758) + 1.25 \cdot \frac{1}{4}[-24 + 3.46069] = 1.69189 - 6.41853$$

Factorización LU

En este método, las operaciones con la matriz A se realizan sin utilizar, o cambiar, el vector b , que se utiliza solo en la parte de sustitución de la solución. Sea A una matriz cuadrada de orden m y supongamos que existen dos matrices convenientes L y U , triangular inferior y triangular superior, respectivamente, siendo $l_{kk} = 1$ (para todo k), es decir que todos los elementos de la diagonal principal de L son iguales a uno, tal que $A = LU$.

Si A es no singular (es decir, su determinante es distinto de cero), entonces también lo serán L y U , por lo tanto, sus elementos diagonales son distintos de cero.

Resolución del Sistema $Ax = b$

Para resolver el sistema $Ax = b$, se deben buscar las soluciones de los dos sistemas triangulares:

- Primero resolvemos el sistema $Lz = b$ para calcular el vector z mediante sustitución progresiva.
- Luego resolvemos el sistema $Ux = z$ para calcular el vector solución x mediante sustitución regresiva.

Ejemplo de Factorización LU

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales dado en su forma matricial por el método de factorización LU.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Descomposición $A = LU$

Utilizamos $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Igualando Coeficientes

Multiplicamos las matrices L y U y obtenemos las siguientes igualdades al comparar con A :

$$\begin{aligned} u_{11} &= -2, & u_{12} &= -1, & u_{13} &= -2, \\ l_{21} &= -3, & u_{22} &= -1, & u_{23} &= 2, \\ l_{31} &= 1, & l_{32} &= 2, & u_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Así, el sistema $A = LU$ queda:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo $Lz = b$

Resolvemos el sistema triangular inferior $Lz = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Obtenemos:

$$z_1 = -1,$$

$$z_2 = 5,$$

$$z_3 = 2$$

Por lo tanto, z es:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo $Ux = z$

Finalmente, resolvemos el sistema triangular superior $Ux = z$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos:

$$x_3 = 2,$$

$$x_2 = -1,$$

$$x_1 = -1$$

Por lo tanto, la solución final es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

No unicidad

Si una matriz tiene una descomposición LU, entonces no es única.

No unicidad

Supongamos que una matriz A de $K \times K$ tiene una descomposición LU:

$$A = LU.$$

Tomemos cualquier matriz diagonal D de $K \times K$ cuyos elementos en la diagonal sean todos diferentes de cero. Entonces, D es invertible, su inversa D^{-1} también es diagonal, y podemos escribir:

$$A = LU = L(I)U = L(DD^{-1})U = (LD)(D^{-1}U).$$

No unicidad

Una matriz diagonal D es triangular inferior, y el producto de dos matrices triangulares inferiores es triangular inferior. Por lo tanto, LD es triangular inferior. La inversa D^{-1} , siendo diagonal, es triangular superior. Dado que el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior, tenemos que $D^{-1}U$ es triangular superior.

Por lo tanto, cambiando la matriz D , podemos obtener infinitas factorizaciones de A en una matriz triangular inferior LD y una matriz triangular superior $D^{-1}U$.

Ejemplo (1)

Demuestra que la factorización

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = LU$$

es imposible, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior.

Ejemplo (1)

Demostremos que no es posible factorizar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como LU , donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior.

Supongamos que tal factorización es posible. Entonces, escribimos L y U de la siguiente manera:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

Ejemplo (1)

Multiplicando L y U , obtenemos:

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} \end{bmatrix}$$

Ahora, igualamos LU con A :

$$\begin{bmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (1)

De la igualdad de las matrices, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$l_{11}u_{11} = 0 \quad (\text{Ecuación 1})$$

$$l_{11}u_{12} = 1 \quad (\text{Ecuación 2})$$

$$l_{21}u_{11} = 1 \quad (\text{Ecuación 3})$$

$$l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} = 0 \quad (\text{Ecuación 4})$$

De la **Ecuación 1**, dado que $l_{11}u_{11} = 0$, y sabiendo que $l_{11} \neq 0$ (porque L es triangular inferior con diagonales no nulas), debemos tener $u_{11} = 0$.

Sustituyendo $u_{11} = 0$ en la **Ecuación 3**, obtenemos:

$$l_{21} \cdot 0 = 1 \implies 0 = 1$$

Esto es una contradicción, por lo tanto, no es posible que A se

factorice como LU donde L es triangular inferior y U es triangular superior.

Ejemplo (2)

Sean L y L_1 matrices triangulares inferiores e invertibles, y sean U y U_1 matrices triangulares superiores e invertibles. Demuestra que $LU = L_1 U_1$ si y solo si existe una matriz diagonal invertible D tal que $L_1 = LD$ y $U_1 = D^{-1}U$.

Ejemplo (2)

Para demostrar la equivalencia, comenzamos asumiendo que $LU = L_1 U_1$. Multiplicando ambos lados por L^{-1} desde la izquierda y por U_1^{-1} desde la derecha, obtenemos:

$$L^{-1}L_1 = UU_1^{-1}$$

Observamos que $L^{-1}L_1$ es una matriz triangular inferior (producto de matrices triangulares inferiores) y UU_1^{-1} es una matriz triangular superior (producto de matrices triangulares superiores).

La única matriz que es simultáneamente triangular inferior y triangular superior es una matriz diagonal. Denotemos esta matriz diagonal como D . Por lo tanto, tenemos:

$$L^{-1}L_1 = D \quad \text{y} \quad UU_1^{-1} = D$$

Ejemplo (2)

De estas ecuaciones, podemos despejar:

$$L_1 = LD \quad \text{y} \quad U_1 = D^{-1}U$$

Esto demuestra la existencia de una matriz diagonal D tal que $L_1 = LD$ y $U_1 = D^{-1}U$.

Ahora, debemos probar la implicación inversa. Supongamos que existe una matriz diagonal invertible D tal que $L_1 = LD$ y $U_1 = D^{-1}U$. Multiplicando estas ecuaciones, obtenemos:

$$L_1 U_1 = (LD)(D^{-1}U) = L(DD^{-1})U = LU$$

Por lo tanto, $LU = L_1 U_1$, lo que concluye la demostración.

Ejemplo (3)

Demuestra que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es semidefinida positiva, entonces $B^T A B$ es semidefinida positiva para cualquier $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Ejemplo (3)

Recordemos que una matriz A es semidefinida positiva si para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple que:

$$x^T A x \geq 0.$$

Queremos demostrar que $B^T A B$ también es semidefinida positiva. Para ello, consideremos un vector arbitrario $y \in \mathbb{R}^m$. Necesitamos mostrar que:

$$y^T (B^T A B) y \geq 0.$$

Ejemplo (3)

Procedemos reescribiendo esta expresión de la siguiente forma:

$$y^T(B^T AB)y = (By)^T A(By).$$

Definimos el vector $z = By$, donde $z \in \mathbb{R}^n$. Sustituyendo, obtenemos:

$$(By)^T A(By) = z^T Az.$$

Dado que A es semidefinida positiva por hipótesis, tenemos que $z^T Az \geq 0$ para cualquier vector z . En nuestro caso, $z = By$, lo cual implica:

$$y^T(B^T AB)y = z^T Az \geq 0.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $B^T AB$ es semidefinida positiva, ya que para cualquier $y \in \mathbb{R}^m$, se cumple que $y^T(B^T AB)y \geq 0$.

Relación entre la descomposición LU y los determinantes

Determinante de una matriz triangular:

- El determinante de una matriz triangular (inferior o superior) es igual al producto de los elementos en su diagonal.
- Si L es triangular inferior y U es triangular superior:

$$\det(L) = \prod_{i=1}^n l_{ii}, \quad y \quad \det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii}.$$

Determinante de A usando LU

Cálculo del determinante de A a través de la descomposición LU:

- Si $A = LU$, entonces:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U).$$

- Si L tiene unos en la diagonal ($\det(L) = 1$):

$$\det(A) = \det(U).$$

Matrices singulares:

- Si A es singular ($\det(A) = 0$), la descomposición LU no existe sin pivotación.
- Alguno de los elementos diagonales de U sería cero.

Ejercicio (1)

a) Uso de la descomposición LU para calcular el determinante

¿Cómo puede ser utilizado el resultado de la descomposición LU para calcular el determinante de una matriz A ?

b) Producto de los elementos diagonales de U

Explica por qué el determinante de A es igual al producto de los elementos diagonales de U en la descomposición $A = LU$.

Ejercicio (2)

a) Definición y necesidad del pivoteo parcial

Define el pivoteo parcial y explica por qué es necesario en algunos casos para la descomposición LU.

b) Proceso de descomposición $PA = LU$

Considera una matriz A que requiere pivoteo parcial para su descomposición LU. Explica cómo afecta esto a la matriz P y describe el proceso completo de descomposición $PA = LU$.

Descomposición LU por Bloques

Sea M una matriz cuadrada de bloques con bloques cuadrados X, Y, Z, W tal que X^{-1} existe. Entonces, M puede descomponerse mediante una descomposición LDU , donde D es diagonal por bloques, como sigue:

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ ZX^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & W - ZX^{-1}Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X^{-1}Y \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Matrices estrictamente dominantes por diagonal

Una matriz A se llama estrictamente dominante por diagonal por filas (resp. por columnas) si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{resp. } |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n).$$

Del teorema de Gershgorin, se sigue que las matrices estrictamente dominantes por diagonal son no singulares.

Ejemplo de Matriz Estrictamente Diagonalmente Dominante

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -8 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que cada fila satisface la desigualdad $|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$:

$$\text{Fila 1: } |6| > |-1| + |2| + |2|$$

$$\text{Fila 2: } |5| > |-1| + |-1| + |2|$$

$$\text{Fila 3: } |-8| > |1| + |1| + |5|$$

$$\text{Fila 4: } |3| > |-1| + |0| + |0|$$

Determinante de una matriz

El determinante de una matriz es una función matemática que asocia un número real o complejo a una matriz cuadrada. Formalmente, para una matriz A de dimensión $n \times n$, el determinante se denota como $\det(A)$ o $|A|$.

Para una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n , el determinante se define recursivamente como:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

donde A_{1j} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila 1 y la columna j , y $(-1)^{1+j}$ es el signo correspondiente al cofactor. Esta definición se conoce como la **expansión por cofactores**.

Determinante de una matriz

Propiedades importantes:

- $\det(A) = 0$ si y solo si A no es invertible.
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ para cualquier par de matrices cuadradas A y B .
- $\det(A^T) = \det(A)$.
- Cambiar dos filas (o columnas) de A cambia el signo del determinante.
- Multiplicar una fila (o columna) de A por un escalar k multiplica el determinante por k .
- La adición de un múltiplo de una fila (o columna) a otra no cambia el determinante.

Valores y Vectores Propios

Definición de Valores y Vectores Propios

- **Valor propio (λ):** Es un escalar que satisface la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para una matriz cuadrada A .
- **Vector propio (\mathbf{v}):** Es un vector no nulo que satisface la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para un valor propio λ .

Ecuación Característica

- La ecuación característica se obtiene de $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
- Se reescribe como $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$, donde I es la matriz identidad.
- Para que la ecuación tenga soluciones no triviales, el determinante debe ser cero:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Demostrar que si λ es un valor propio de la matriz A , entonces λ^2 es un valor propio de A^2 .

Demostrar que si λ es un valor propio de la matriz A , entonces λ^2 es un valor propio de A^2 .

Dado que λ es un valor propio de A , existe un vector propio $v \neq 0$ tal que:

$$Av = \lambda v$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por la matriz A :

$$A(Av) = A(\lambda v)$$

Esto se puede simplificar usando la propiedad de la multiplicación escalar:

$$A^2 v = \lambda(Av)$$

Sustituyendo nuevamente $Av = \lambda v$:

$$A^2 v = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$$

De esta forma, hemos mostrado que:

$$A^2 v = \lambda^2 v$$

Por lo tanto, λ^2 es un valor propio de A^2 .

Demostrar que la matriz A de tamaño $n \times n$ y su transpuesta A^T tienen los mismos valores propios.

Demostrar que la matriz A de tamaño $n \times n$ y su transpuesta A^T tienen los mismos valores propios.

Sea λ un valor propio de la matriz A con un vector propio asociado $v \neq 0$ tal que:

$$Av = \lambda v$$

Queremos mostrar que λ también es un valor propio de A^T .

Consideremos la ecuación $Av = \lambda v$. Si tomamos el producto escalar de ambos lados con un vector w , obtenemos:

$$w^T Av = \lambda w^T v$$

Ahora, utilizando la propiedad de la transpuesta, sabemos que:

$$w^T A = (A^T w)^T$$

Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$(A^T w)^T v = \lambda w^T v$$

Sea $u = A^T w$, entonces la ecuación se convierte en:

$$u^T v = \lambda w^T v$$

Esto muestra que λ está asociado a A^T en el mismo sentido, es decir, A^T tiene los mismos valores propios que A . Por lo tanto, A y A^T comparten los mismos valores propios.

Cálculo de Valores Propios

- Resolver $\det(A - \lambda I) = 0$ para encontrar los valores propios λ .
- Ejemplo: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- La ecuación característica es:

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

- Resolviendo el determinante, obtenemos:

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0$$

- Solucionamos la ecuación cuadrática resultante para λ .

Cálculo de Vectores Propios

- Para cada valor propio λ , resolvemos $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.
- Ejemplo: Para $\lambda_1 = 5$, resolvemos:

$$(A - 5I)\mathbf{v} = 0 \quad \text{donde} \quad A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- Encontramos el vector propio \mathbf{v}_1 resolviendo el sistema de ecuaciones lineales.

Propiedades de Valores y Vectores Propios

- Los valores propios pueden ser reales o complejos.
- Los vectores propios correspondientes a distintos valores propios son linealmente independientes.
- Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal.

Aplicaciones de Valores y Vectores Propios

- Análisis de estabilidad de sistemas dinámicos.
- Transformaciones lineales y cambios de base.
- Reducción de dimensionalidad en análisis de datos (PCA).
- Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Demostración

- Sea A una matriz triangular (superior o inferior) de tamaño $n \times n$.
- Queremos demostrar que los valores propios de A son los elementos de su diagonal principal.

Demostración

- Los valores propios de A satisfacen la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.
- $A - \lambda I$ es también una matriz triangular (superior o inferior) con elementos diagonales $a_{ii} - \lambda$.

Demostración

- La determinante de una matriz triangular es el producto de sus elementos diagonales:

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$$

- Para que $\det(A - \lambda I) = 0$, al menos uno de los factores debe ser cero.

Demostración

- Esto implica que:

$$a_{ii} - \lambda = 0 \quad \text{para algún } i$$

- Por lo tanto:

$$\lambda = a_{ii} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

- Los valores propios de A son los elementos de la diagonal principal: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Matrices diagonalizables

Definición. Se dice que una matriz $A_{m \times m}$ es diagonalizable si existe alguna matriz P no singular tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

Notemos que si

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_m \end{bmatrix}$$

Multiplicidad de un valor propio

Existen dos tipos de multiplicidad

Multiplicidad algebraica

La multiplicidad algebraica de un valor propio λ es el número de veces que λ aparece como raíz de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$.

Multiplicidad geométrica

La multiplicidad geométrica de un valor propio λ es el número de vectores propios linealmente independientes asociados a λ , es decir, la dimensión del espacio nulo de $A - \lambda I$.

Multiplicidad algebraica

- La multiplicidad algebraica de un valor propio λ es el número de veces que λ aparece como una raíz del polinomio característico de la matriz A .
- Ejemplo: Si el polinomio característico de una matriz A es:

$$(x - 2)^3(x - 5)^2 = 0$$

entonces el valor propio $\lambda = 2$ tiene una multiplicidad algebraica de 3, y el valor propio $\lambda = 5$ tiene una multiplicidad algebraica de 2.

Multiplicidad geométrica

- La multiplicidad geométrica de un valor propio λ es el número de vectores propios linealmente independientes asociados a λ .
- Formalmente, es la dimensión del espacio nulo de $(A - \lambda I)$.
- Ejemplo: Si para una matriz A , el valor propio $\lambda = 2$ tiene dos vectores propios linealmente independientes, entonces la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es 2.

Relación entre multiplicidad algebraica y geométrica

- La multiplicidad geométrica de un valor propio siempre es menor o igual que su multiplicidad algebraica.
- Si la multiplicidad geométrica de un valor propio es igual a su multiplicidad algebraica, se dice que la matriz es diagonalizable en relación a ese valor propio.

Ejemplo de relación

- Supongamos que tenemos una matriz A con el polinomio característico:

$$(x - 3)^4 = 0$$

Esto indica que el valor propio $\lambda = 3$ tiene una multiplicidad algebraica de 4.

- Si encontramos que hay exactamente dos vectores propios linealmente independientes asociados a $\lambda = 3$, entonces la multiplicidad geométrica de $\lambda = 3$ es 2.

R

```
# Definición de una matriz cuadrada
A <- matrix(c(4, 2, 2, 3), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Calcular los valores y vectores propios
eigen_result <- eigen(A)

# Imprimir los valores propios
print(eigen_result$values)

# Imprimir los vectores propios
print(eigen_result$vectors)
```