© Rodrigo Iván Barrera Guajardo, 2020.

Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas Chile 3.0. Sus condiciones de uso pueden ser revisadas en: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Utilidad esperada

Esta sección tiene por objeto revisar si es el caso que la CS maximiza la precisión esperada (o, lo que es lo mismo, minimiza la imprecisión esperada). Para cumplir con dicho propósito se introducirán, muy brevemente: la teoría de la decisión, la noción de esperanza y la utilidad. Luego se explicitará el argumento de (Greaves & Wallace, 2006) y se diferenciará entre reglas observacionales y reglas consecuencialistas. ¿En qué radica la importancia de diferenciar entre estas reglas? Esta diferenciación es capital en la exposición de (Carr, 2017) pues es esta diferenciación la que permitiría poner en entredicho lo expuesto por Greaves & Wallace.

La teoría de la decisión busca los principios racionales para evaluar los actos disponibles de un agente en un momento dado. Según cómo los evalúa, o lo que es lo mismo, la utilidad que les asigna y cómo el agente ve el mundo —a través de los grados de creencia— la teoría de la decisión recomienda el acto más eficaz para el agente.

Para cuantificar la utilidad esperada se debe esclarecer una noción capital, a saber, la esperanza; también llamada valor esperado. Previo a indicar qué es la esperanza es propicio comentar qué no es. El valor esperado no es un valor que un agente anticipa. Piense por ejemplo que la esperanza de hijos por pareja en Chile es igual a 1.8. Por una parte, está el hecho innegable que nadie tiene en efecto 1.8 hijos. Habrá quien no tenga hijos, quien tenga 1 o 2 o 3 y así siguiendo. Luego se interpreta la esperanza de hijos por pareja en Chile tal que si se selecciona una pareja al azar se espera —de ahí el concepto de esperanza— que tengan 1.8 hijos. Así, la esperanza es una estimación del valor que tendrá una cantidad. Imagine que tiene la oportunidad de comprar acciones de una empresa justo antes del anuncio de las ganancias trimestrales. Si el anuncio es favorable, podrá vender las acciones a 100$ cada una, pero si el anuncio es negativo, se verá obligado a vender por 10$ cada acción. El valor que asigne a estas acciones depende de su confianza en un buen informe. Si tiene un 40% de confianza en un buen informe de ganancias, el valor esperado de cada acción es[1]:

$$46\$ = 100\$ \times 40\% + 10\$ \times 60\%.$$

Más generalmente sean $x_1, x_2, x_3, \ldots$ los posibles valores de X, y sea $f(x_i) = P(X = x_i)$, entonces la esperanza de $X = \sum_{\forall x_i \in X} x_i f(x_i)$.

[1] Ejemplo extraído de (Titelbaum, en preparación).

Para introducir el concepto de utilidad observe lo siguiente: en general las decisiones se toman en un contexto de incertidumbre. Un alumno que se plantea conseguir un grado en estadística desconoce si logrará o no conseguir dicho grado. Lo mismo ocurre con un inversionista que se plantea invertir en el mercado de valores. A pesar del esfuerzo que se hace por predecir los comportamientos del mercado, haciendo uso de índices, series de tiempo y otros instrumentos, no hay certeza sobre el comportamiento del mercado bursátil; entonces ¿cómo puede un agente determinar qué curso de acción seguir? Para ello se apela a la utilidad esperada (en adelante UE). Es posible interpretar la UE como una teoría normativa, es decir una teoría que señala cómo debieran los agentes racionales tomar decisiones. Adicionalmente, en economía clásica, la teoría de la UE se interpreta como una teoría descriptiva, es decir, una teoría de cómo las personas toman decisiones, o como una teoría predictiva, es decir, una teoría que, si bien puede no modelar con precisión los mecanismos psicológicos de toma de decisiones, predice correctamente las elecciones de las personas (véase (Briggs, 2019)).

Suponga que usted planea un largo paseo, y necesita decidir si llevará, o no, su paraguas. Naturalmente si el día está perfectamente soleado usted preferiría no llevar el paraguas, pero preferirá enfrentar un día lluvioso portándolo. Imagine ahora un día nublado, ¿qué curso de acción debe seguir? Más formalmente, se puede señalar que existen resultados; terminar seco y terminar mojado. Existen estados, que están fuera del control del agente, es decir no están bajo el control del responsable de la toma de decisiones. Hay además actos, es decir objetos de preferencia instrumentales del responsable de la toma de decisiones. En este caso llevar el paraguas o dejarlo en casa. Estados, actos y resultados son proposiciones. Hay un conjunto de posibilidades Ω, del cual cada estado, acto o resultado es un subconjunto. El conjunto de actos, el conjunto de estados y el conjunto de resultados son todos particiones de Ω. En otras palabras, los actos y los estados están individualizados de manera que cada posibilidad en Ω es una en la que se obtiene exactamente un estado, el agente realiza exactamente un acto y se obtiene exactamente un resultado. Además, los actos y los estados son independientes, por lo que ningún estado descarta la realización de cualquier acto (véase (Briggs, 2019)).

Es posible definir la UE de un acto como el peso esperado de la utilidad de cada uno de los posibles resultados como:

$$\mathrm{UE(A)} \sum_{\mathrm{o} \in \mathcal{O}} \mathrm{P_A\,(o) U(o)}$$

Donde $\mathrm{P_A(o)}$ representa la probabilidad del resultado o dado A, es decir, qué tan probable es que ocurra o, dado que el agente seleccionó el acto A. Ahora bien, ¿cuál es el significado de $\mathrm{P_A(o)}$? La respuesta dependerá de la teoría de la decisión seleccionada, siendo estas la teoría de la decisión evidencial (en adelante TDE) y la teoría de la decisión causal (en adelante TDC). Según la primera $P_A(o)$ corresponde a $P(o|A)$. Ésta se caracteriza por no distinguir entre aquellos casos donde los actos provocan ciertos resultados y casos donde los actos se correlacionan con esos resultados. Sin embargo (Spohn, 1977) y (Levi I. , 1991) señalan que el responsable de la toma de decisiones no debe asignar probabilidades a los propios actos que se están deliberando; al decidir libremente si realizar un acto A, no debe tener en cuenta sus creencias sobre si realizará el acto A. La crítica se basa en que si lo anterior no fuera el caso sería posible que $P(A) = 0$ y consecuentemente se indefine $P(o|A)$.

(Carr, 2017) utiliza la siguiente nomenclatura para definir la utilidad evidencialmente esperada (en adelante UEE):

$$UEE = \sum_i P(s_i|a)U(s_i \wedge a)$$

Así, $P(o|A) = P(s_i|a)$ y $U(o) = U(s_i \wedge a)$, donde cada s_i es un posible estado del mundo[2].

La segunda, la TDC, permite sobrepasar los problemas señalados por Spohn y Levi, pues no requiere —aunque permite—, asignar probabilidades a los actos. La TDC se ha visto motivada entre otras cosas por el Problema de Newcomb y algunas versiones del dilema del prisionero. Para una revisión detallada del Problema de Newcomb véase (Lewis D. , 1981) y (Weirich, 2020).

La utilidad causalmente esperada (en adelante UCE) de un acto es una medida del valor que se espera como resultado de tomar ese acto. (Lewis D. , 1981) propone una forma de calcular la utilidad causalmente esperada: se debe dividir el espacio de posibilidades en un conjunto de «hipótesis de dependencia». Una hipótesis de dependencia es una proposición específica sobre cómo los hechos del mundo dependen causalmente de los actos presentes del agente. Es posible que el agente no esté seguro de los efectos que pueden tener sus actos, por lo que puede haber muchas hipótesis de dependencia epistémicamente posibles. La UCE de un acto es el promedio ponderado del valor de cada posible resultado causal del acto, ponderado por la probabilidad de la hipótesis de dependencia donde el acto causa ese resultado.

(Hitchcock C. R., 1996, pág. 515) comenta que el valor de los actos según la UCE debe ser evaluado por el siguiente algoritmo:

$$UCE(A_j) = \sum_k \sum_l P\left(O_i \middle| A_j B_k\right) \times U(O_l) \times P(B_k)$$

Donde $\{B_1, B_2, \ldots\}$ es lo que (Lewis D. , 1981) llama hipótesis causales. Considere el siguiente ejemplo: Boris sufre periódicamente de una cierta deficiencia de vitaminas. Esta deficiencia tiene dos

[2] Se hace referencia a la terminología de (Carr, 2017) pues allí se intenta argumentar que (Greaves & Wallace, 2006) no logran su propósito; es decir, no demostrarían convincentemente que la CS es la única regla de actualización que maximiza la utilidad esperada.

efectos: le inclina a comer malvaviscos, cuestión que disfruta, y le da calambres musculares severos cuyo dolor supera con creces la simple alegría de comer malvaviscos. Como resultado de su origen común, la ingesta de malvaviscos de Boris y sus calambres musculares están estadísticamente correlacionados. Sea M = «sufrir calambres musculares», E = «comer un malvavisco» y V = «deficiencia de vitaminas». Las probabilidades de Boris son:

- $\mathrm{P(E|V)} = 0{,}4$
- $\mathrm{P(E|\neg V)} = 0{,}25$
- $\mathrm{P(M|V)} = \mathrm{P(M|EV)} = \mathrm{P(M|\neg EV)} = 0{,}75$
- $\mathrm{P(M|\neg V)} = \mathrm{P(M|E\neg V)} = \mathrm{P(M|\neg E\neg V)} = 0{,}12$
- $\mathrm{P(V)} = \frac{1}{3}$

Un teórico de la decisión causal le recomendaría a Boris que calcule la utilidad esperada de comer un malvavisco de la siguiente manera: primero debe suponer que sí tiene la deficiencia de vitaminas y calcular la utilidad esperada de comer un malvavisco, usando probabilidades condicionadas a V. Luego debe suponer que no tiene la deficiencia de vitaminas y calcular la utilidad esperada de comer un malvavisco, usando probabilidades condicionados a ¬V. Finalmente, debe calcular un valor general para comer un malvavisco al ponderar las dos utilidades esperadas con las probabilidades correspondientes. Luego, su valor esperado para comer un malvavisco será[3]:

$$\mathrm{UCE(E)} = \mathrm{P(V)}\{\mathrm{P(M|EV)U(ME)} + \mathrm{P(\neg M|EV)U(\neg ME)}\} + \mathrm{P(\neg V)}\{\mathrm{P(M|E\neg V)U(ME)} + \mathrm{P(\neg M|E\neg V)U(\neg ME)}\}$$

$$\mathrm{UCE(E)} = \mathrm{P(V)}\{\mathrm{P(M|V)U(ME)} + \mathrm{P(\neg M|V)U(\neg ME)}\} + \mathrm{P(\neg V)}\{\mathrm{P(M|\neg V)U(ME)} + \mathrm{P(\neg M|\neg V)U(\neg ME)}\}$$

$$\mathrm{UCE(E)} = 680$$ [4]

Note que en el caso de Boris hay dos hipótesis causales, a saber: (1) que en efecto está sufriendo de una deficiencia de vitaminas y (2) que no sufre de dicha deficiencia. En adelante se hará referencia a este ejemplo como el problema de los malvaviscos.

Alternativamente al algoritmo propuesto por Hitchcock, (Carr, 2017, pág. 8) propone la siguiente fórmula[5]:

$$\mathrm{EUC}(a) = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{P(k_i)U}(\mathrm{k_i} \wedge a)$$

Donde $\mathrm{k_i}$ corresponde a las hipótesis de dependencia.

---

[3] Este ejemplo —aunque con ciertas modificaciones— es expuesto por (Hitchcock C. R., 1996, pág. 513)

[4] Si se calcula $\mathrm{UCE(\neg E)}$ se obtendrá una utilidad de 670.

[5] La formulación de Carr difiere de la Hitchcock únicamente en la nomenclatura.

Antes de exponer el argumento de (Greaves & Wallace, 2006) resta discutir la noción de imprecisión. Imagine dos proposiciones, siendo estas X e Y. Suponga que un agente establece que $\mathrm{P(X)} = 0{,}7$ y $\mathrm{P(Y)} = 0{,}6$. Por otro lado X e Y o bien serán verdaderas o bien serán falsas. Se representará lo anterior con $\mathrm{W(X)}$ y $\mathrm{W(Y)}$ respectivamente. De este modo, $\mathrm{W(X)} = 0$ si X es falsa y $\mathrm{W(X)} = 1$ en caso contrario. Se asumirá que tanto X como Y son verdaderas, por ello $\mathrm{W(X)} = 1$ y $\mathrm{W(Y)} = 1$. Visualice lo anterior en el plano cartesiano. El valor de verdad de X e Y puede representarse con el par ordenado $(1{,}1)$. Luego se puede pensar en la imprecisión como la distancia en el espacio euclídeo entre los valores de verdad de las proposiciones y los grados de creencia.

De este modo la distancia entre $(\mathrm{P(X)}, \mathrm{P(Y)})$ y $(\mathrm{W(X)}, \mathrm{W(Y)})$ se puede definir así:

$$(1 - 0{,}7)^2 + (1 - 0{,}6)^2$$

Generalizando lo anterior, sean $\mathrm{X_i}, \mathrm{X_2}, \dots, \mathrm{X_n}$ un conjunto finito de proposiciones; se tiene que la imprecisión puede ser cuantificada por

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{W(X_i)} - \mathrm{P(X_i)})^2$$ [6]

Note que al calcular $(1 - 0{,}7)^2 + (1 - 0{,}6)^2$ se asume que serán valores del mundo actual, pero nada impide realizar el mismo calculo en mundos posibles, siendo estos $(0{,}1)$, $(1{,}0)$ y $(0{,}0)$.

Se dice que una regla de puntaje que suma los resultados de cálculo separados en proposiciones individuales se denomina separable. $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{W(X_i)} - \mathrm{P(X_i)})^2$ recibe el nombre de Brier score y es una medida global de la imprecisión, pues no toma en cuenta ninguna característica entre los grados de creencia. Las medidas separables no pueden hacer operaciones entre $\mathrm{X_i}$ y $\mathrm{X_j}$ con $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$. Note además que, para el Brier score, cada diferencia tiene el mismo peso específico en la suma total. Detalles adicionales sobre el Brier score pueden consultarse en (Seidenfeld, 1985) y (Leitgeb & Pettigrew, 2010).

[6] Formalmente la distancia euclidiana del espacio euclídeo n-dimensional se define como $\sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{x_i} - \mathrm{y_i})^2}$ para los vectores $\mathrm{X} = (\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \dots, \mathrm{x_n})$ e $\mathrm{Y} = (\mathrm{y_1}, \mathrm{y_2}, \dots, \mathrm{y_n})$. Luego, se define la imprecisión como el cuadrado de la distancia euclidiana.