

Simulación de eventos discretos

Simulación

- Imita las operaciones de una instalación o proceso del mundo real, generalmente a través de una computadora.
- El sistema que se simula podría ser:
 - Discreto: las variables de estado cambian instantáneamente en puntos separados en el tiempo (por ejemplo, cuando un cliente llega/se va).
 - Continuo: las variables de estado cambian continuamente como una función del tiempo (por ejemplo, el vuelo de un avión con variables de estado como posición o velocidad).
- Las suposiciones lógicas y matemáticas sobre cómo funciona el sistema forman un modelo del sistema.
- Los modelos simples pueden usar métodos matemáticos para obtener información exacta (solución analítica).
- Los sistemas complejos a menudo requieren simulación para evaluar numéricamente y recopilar datos para estimar las características del modelo.

Técnica analítica vs. simulación

- La teoría de colas (*queueing theory*, QT) establece modelos matemáticos para estimar el rendimiento en estado estacionario de las líneas de espera para diferentes tipos de sistemas de colas.
- Ventajas de QT frente a la simulación:
 - Más precisa cuando se puede usar QT.
 - Mucho menos esfuerzo computacional.
 - El modelado inicial del sistema puede estudiarse con QT.
- Desventajas de QT frente a la simulación:
 - Necesidad de fuertes suposiciones de modelado de colas para usar fórmulas analíticas.
 - Muchos sistemas reales (que pueden ser simulados) no son sistemas de colas.

Ventajas, desventajas y trampas de la simulación

● Ventajas

- La simulación permite una excelente flexibilidad en el modelado de sistemas complejos, de modo que los modelos de simulación pueden ser altamente válidos.
- Fácil de comparar alternativas.
- Controla las condiciones experimentales.
- Puede estudiar sistemas con un marco de tiempo muy largo.

● Desventajas

- Las simulaciones estocásticas solo producen estimaciones, con ruido.
- Los modelos de simulación pueden ser costosos de desarrollar.
- Las simulaciones generalmente producen grandes volúmenes de resultados, que deben resumirse y analizarse estadísticamente de manera adecuada.

● Trampas en la implementación

- No identificar claramente los objetivos desde el principio.
- Nivel inapropiado de detalle (en ambos sentidos).
- Diseño y análisis inadecuados de experimentos de simulación.
- Educación y formación inadecuadas.

Áreas de aplicación

- Algunas áreas de aplicación:
 - Diseño y análisis de sistemas de manufactura.
 - Determinación de requisitos de hardware para redes de comunicación.
 - Determinación de requisitos de hardware y software para un sistema informático.
 - Diseño de sistemas de transporte: aeropuertos, autopistas, puertos y subterráneos.
 - Evaluación de diseños para organizaciones de servicio como centros de llamadas, restaurantes de comida rápida, hospitales y oficinas de correos.
 - Determinación de políticas de pedidos para un sistema de inventario.
 - Análisis de sistemas financieros o económicos.

Conceptos básicos

- Sistema: una colección de entidades (personas, partes, mensajes, máquinas, servidores, etc.) que actúan e interactúan juntas hacia algún fin.
- Entidades: objetos que componen un modelo de simulación. Elementos que atraviesan el modelo.
- Atributos: valores de datos que caracterizan a las entidades.
- Estado de un sistema: conjunto de variables y sus valores necesarios para describir el sistema.
- Recursos: elementos demandados por las entidades (por ejemplo; máquinas, personal).

Ejemplo (1)

Imagine se va a modelar considera la operación diaria de una sucursal bancaria. Las entidades de este modelo son los clientes que ingresan a la sucursal, cada uno con atributos específicos como la hora de llegada y salida, el número de actividades que deben realizar en el banco y la cantidad de dinero que retiran. Los recursos del sistema son los cajeros, y las variables clave que describen el estado del sistema incluyen el número de cajeros ocupados, el número total de clientes en la sucursal y el número de personas en la fila.

Ejemplo (2)

Un propietario de un restaurante de comida rápida que debe equilibrar la satisfacción del cliente con la eficiencia operativa. El objetivo es evitar que los clientes se sientan insatisfechos por los largos tiempos de espera sin emplear a más personal del necesario. Actualmente, el restaurante cuenta con seis cajas de servicio y 30 mesas, recibiendo aproximadamente 120 clientes por hora. El servicio en caja tarda en promedio 1 minuto y 40 segundos sin filas, mientras que comer en una mesa toma alrededor de 10 minutos. Existen seis colas para el servicio, con la posibilidad de que los clientes cambien a colas más cortas. Si es necesario, hay una cola adicional para conseguir una mesa. Todos los clientes prefieren comer en el lugar y aquellos que enfrentan colas de más de 10 personas tienden a marcharse.

Distribuciones importantes en teoría de colas

- **Distribución exponencial**

- Modela el tiempo entre llegadas de clientes.
- Tiene la propiedad de falta de memoria.

- **Distribución de Poisson**

- Modela el número de llegadas de clientes en un intervalo de tiempo fijo.
- Usualmente utilizada para modelar llegadas aleatorias.

- **Distribución Erlang**

- Generalización de la distribución exponencial.
- Utilizada para modelar tiempos de servicio con más variabilidad controlada.

- **Distribución Gamma**

- Similar a la distribución Erlang, pero permite cualquier número real positivo para el parámetro de forma.
- Utilizada para modelar tiempos de espera acumulados.

Distribuciones importantes en teoría de colas

- **Distribución geométrica**

- Modela el número de intentos hasta el primer éxito.
- Utilizada en sistemas de colas discretos.

- **Distribución hipergeométrica**

- Modela el número de éxitos en una muestra sin reemplazo.
- Útil en colas con un número fijo de clientes.

- **Distribución normal**

- Aproximación para el tiempo de servicio en sistemas de colas con muchos servidores.
- Utilizada cuando los tiempos de servicio son la suma de muchos factores independientes.

Introducción a la distribución exponencial

- La distribución exponencial es una distribución continua que se utiliza para modelar el tiempo entre eventos en un proceso de Poisson.
- Es una de las distribuciones más importantes en la teoría de colas y en la teoría de la fiabilidad.

Función de densidad de probabilidad (PDF)

- La función de densidad de probabilidad de la distribución exponencial es:

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ es la tasa de eventos por unidad de tiempo.

Función de distribución acumulativa (CDF)

- La función de distribución acumulativa de la distribución exponencial es:

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Propiedades de la distribución exponencial

- **Esperanza (media):**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- **Varianza:**

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **Sin memoria:**

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$$

Esta propiedad indica que la distribución exponencial no tiene memoria.

Relación con otras distribuciones

- **Distribución Poisson:** Si los tiempos entre eventos siguen una distribución exponencial con parámetro λ , el número de eventos en un intervalo de tiempo fijo sigue una distribución Poisson con parámetro λt .
- **Distribución Gamma:** La suma de k variables aleatorias independientes y exponenciales con parámetro λ sigue una distribución Gamma con parámetros k y λ .

Distribución Gamma

- Sea Y una variable aleatoria Gamma con parámetros α y β .
- La función de densidad de probabilidad es:

$$f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y \geq 0$$

- La media y la varianza de Y son:

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Suma de exponenciales

- Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias exponenciales independientes con parámetro λ .
- Queremos encontrar la distribución de $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Función generadora de momentos

- La función generadora de momentos (MGF) de una variable exponencial X con parámetro λ es:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

- Para la suma S_n , la MGF es el producto de las MGFs de las X_i :

$$M_{S_n}(t) = (M_X(t))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n$$

Función generadora de momentos de Gamma

- La MGF de una variable Gamma con parámetros $\alpha = n$ y $\beta = \lambda$ es:

$$M_Y(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n$$

- Observamos que la MGF de S_n coincide con la MGF de una variable Gamma con parámetros n y λ .

Ejemplo (3)

- Supongamos que el tiempo entre llegadas de clientes a una tienda sigue una distribución exponencial con una tasa de $\lambda = 2$ clientes por minuto.

- **Media:**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ minutos}$$

- **Probabilidad de que el tiempo entre llegadas sea mayor a 1 minuto:**

$$P(X > 1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-2} \approx 0.1353$$

Simulación de sistemas de colas

- Los sistemas de colas se utilizan para modelar y analizar el comportamiento de las filas de espera en diferentes contextos, como bancos, hospitales y sistemas de atención al cliente.
- La simulación de sistemas de colas permite evaluar el rendimiento del sistema bajo diferentes condiciones y políticas de gestión.

Componentes de un sistema de colas

- **Clientes:** Entidades que llegan al sistema y requieren servicio.
- **Servidores:** Recursos que proporcionan el servicio a los clientes.
- **Cola:** Lugar donde los clientes esperan su turno para ser atendidos.
- **Disciplina de la cola:** Regla que determina el orden en que los clientes son atendidos (por ejemplo, FIFO, LIFO).

El paquete simmer de R

- **Descripción:** `simmer` es un paquete de R para la simulación de eventos discretos.
- **Objetivo:** Facilitar la modelización y simulación de procesos estocásticos, especialmente en teoría de colas y gestión operativa.
- **Características principales:**
 - Basado en un enfoque de programación orientada a objetos.
 - Ofrece una interfaz intuitiva y flexible para definir entornos de simulación.
 - Permite la simulación de sistemas complejos con múltiples entidades y recursos.

Funcionalidades y aplicaciones

- **Funcionalidades:**

- Creación de **tráficos** (trajectories) que representan la secuencia de actividades y colas.
- Definición de **recursos** (resources) y **entidades** (entities).
- Medición y recolección de estadísticas del sistema simulado.

- **Aplicaciones:**

- Análisis de rendimiento en sistemas de colas.
- Evaluación de estrategias de gestión de recursos.
- Optimización de flujos de trabajo en diversos contextos.

- **Ventajas:**

- Alta flexibilidad y personalización.
- Integración con otros paquetes de R para análisis y visualización de datos.

Componentes principales de simmer

- **Environ** (simmer): Entorno donde se definen los recursos y procesos.
- **Trajectory**: Define el camino que siguen las entidades a través del sistema.
- **Resource**: Representa los recursos limitados del sistema (e.g., servidores, camas).
- **Generator**: Genera nuevas entidades que ingresan al sistema.