Método de la inversa

- El método depende de la FDA (Función de Distribución Acumulada) de la variable.
- La FDA se puede derivar fácilmente o calcular numéricamente.
- No todas las distribuciones se pueden generar utilizando el método de transformación inversa.

Método de la inversa

Primero, genere un número u_i entre 0 y 1 y luego encuentre la coordenada x_i correspondiente usando $F^{-1}()$. Para varios valores de u_i, x_i se distribuirá correctamente a lo largo del eje x. Este método consiste en que hay una asignación uno a uno entre u_i y x_i debido a la propiedad monótona de la FDA. Una función entre conjuntos ordenados se dice monotona (o isotona) si conserva el orden dado.

Teorema: Sea $X \sim F(x)$ con $Y = F(X)$, entonces Y tiene una distribución uniforme en (0,1), es decir $P(Y \leq y) = y$ para $0 < y < 1$.
Demostración:

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P(F(X) \leq y) \\
&= P(F^{-1}(F(X)) \leq F^{-1}(y)) \\
&= P(X \leq F^{-1}(y)) \\
&= F(F^{-1}(y)) \\
&= y
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Considera la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Deriva un algoritmo de transformación inversa para esta distribución.

Solución

Derivando la CDF

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{3t^2}{2} dt = \left[\frac{t^3}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{x^3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$F(x) = \frac{x^3+1}{2} \text{ para } -1 \leq x \leq 1$$

Derivando la Inversa de la CDF

$$F^{-1}(y) = \sqrt[3]{2y-1}$$

Algoritmo de Transformación Inversa

Para un u uniformemente distribuido en [0,1]:

$$x = F^{-1}(u) = \sqrt[3]{2u-1}$$

Código en R

```
# Define la función de densidad de probabilidad (PDF)
pdf <- function(x) {
 ifelse(x >= -1 & x <= 1, 3 * x^2 / 2, 0)
}

# Encuentra la función de distribución acumulativa (CDF) integrando la PDF
cdf <- function(x) {
 integrate(pdf, lower = -1, upper = x)$value
}

# Encuentra la función inversa de la CDF
inv_cdf <- function(y) {
 uniroot(function(x) cdf(x) - y, lower = -1, upper = 1)$root
}

# Genera un número aleatorio uniforme
u <- runif(1)

# Aplica la inversa de la CDF para obtener un valor aleatorio con la distribución dada
random_value <- inv_cdf(u)
random_value
```

Ejercicio 1

Define una función de distribución acumulativa $F(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(1-x)^3$ para x en el intervalo [0, 1]. Deriva la función inversa $F^{-1}(y)$ y describe cómo podrías utilizar esta función para generar números aleatorios que sigan esta distribución usando números aleatorios uniformes $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$.

Ejercicio 2

Considera una distribución triangular que no es simétrica alrededor de su moda. La función de distribución acumulativa $F(x)$ está definida por partes como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Encuentra la función inversa $F^{-1}(y)$ y explica el proceso para generar números aleatorios de esta distribución utilizando el método de la transformación inversa.

Ejercicio 3

Sea la función de distribución acumulativa $F(x) = \frac{x^3}{3x^3+2}$ para x en el intervalo [0, 2]. Calcula la función inversa $F^{-1}(y)$ y utiliza este resultado para generar números aleatorios a partir de variables uniformes.

Ejercicio 4

Supongamos que tienes la siguiente función de distribución acumulativa $F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$ para x en el intervalo $[0, \infty)$. Deriva la función inversa $F^{-1}(y)$ y describe cómo podrías simular números aleatorios siguiendo esta distribución a partir de números aleatorios uniformes.

Ejercicio 5

Imagina una distribución acumulativa definida como $F(x) = \frac{x}{2}$ para x en $[0, 1]$, y $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4}$ para x en $(1, 3]$. Encuentra la función inversa $F^{-1}(y)$ para y en $[0, 1]$ y explica cómo generar números aleatorios para tal distribución.