
Relatório de Análise Estatística e Inferência Bayesiana

Aluno João Victor Barros dos Santos

Professora Rosa Maria Meri Leão

Disciplina COS868 - Probabilidade e Estatística para Aprendizado de Máquina

1 Introdução

Este trabalho tem como propósito aplicar conceitos fundamentais de **Estatística, Máxima Verossimilhança (MLE)** e **Inferência Bayesiana** na análise de um conjunto de dados reais provenientes de medições de desempenho de conexões de Internet. A investigação busca compreender o comportamento estatístico das variáveis envolvidas, ajustar modelos probabilísticos adequados e comparar as estimativas obtidas pelas abordagens destacadas.

A análise é estruturada em três etapas principais. Na primeira, realiza-se uma **Análise Exploratória de Dados (EDA)**, com o objetivo de caracterizar a distribuição empírica das variáveis e identificar padrões relevantes. São apresentadas estatísticas descritivas e visualizações gráficas (histogramas, boxplots e diagramas de dispersão) que permitem avaliar a variabilidade, assimetrias e possíveis valores atípicos, além de permitir um melhor entendimento das funções que auxiliaram nas modelagens.

Na segunda etapa, procede-se à **modelagem por Máxima Verossimilhança (MLE)**, buscando determinar os parâmetros que melhor descrevem os dados de acordo com a função de verossimilhança:

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \boldsymbol{\theta}), \quad (1)$$

em que $f(x_i | \boldsymbol{\theta})$ representa a função densidade (ou massa) de probabilidade associada ao modelo, e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros. O estimador de máxima verossimilhança é obtido como:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MLE} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}). \quad (2)$$

A etapa seguinte consiste na **Inferência Bayesiana**, que incorpora informações prévias sobre os parâmetros por meio de distribuições a priori (*priors*) conjugadas. A relação entre a *prior*, a *likelihood* e a distribuição a posteriori (*posterior*) é dada pelo **Teorema de Bayes**:

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{x})}, \quad (3)$$

onde $p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta})$ representa a verossimilhança dos dados, $p(\boldsymbol{\theta})$ é a distribuição a priori dos parâmetros, e $p(\mathbf{x})$ corresponde à evidência, que atua como constante de normalização.

A **distribuição preditiva a posteriori**, utilizada para estimar novas observações, é obtida ao integrar a incerteza sobre os parâmetros:

$$p(x_{\text{novo}} | \mathbf{x}) = \int p(x_{\text{novo}} | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta}. \quad (4)$$

Essa formulação permite calcular o valor esperado e a variância preditiva, expressando não apenas uma estimativa pontual, mas também o grau de incerteza associado à previsão de novos dados.

Por fim, são comparadas as estimativas pontuais e preditivas obtidas pelos métodos MLE e Bayesiano, analisando-se o impacto da escolha das *priors* e o comportamento dos modelos em termos de ajuste e variância. Espera-se que, para variáveis com grande volume de amostras, as diferentes estimativas apresentem resultados semelhantes, enquanto diferenças mais notáveis podem surgir em casos de maior dispersão ou menor quantidade de dados.

Em síntese, o estudo busca não apenas aplicar metodologias estatísticas clássicas e bayesianas a um contexto real de medições de rede, mas também discutir a utilidade prática dessas abordagens na interpretação e previsão de fenômenos associados ao desempenho de sistemas de comunicação.

2 Descrição do Dataset

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos a partir da plataforma **Measurement Lab (M-Lab)**, que disponibiliza medições públicas de desempenho de rede de Internet com acesso aberto via *BigQuery*. O conjunto de dados corresponde a resultados do teste **NDT (Network Diagnostic Tool)**, utilizado para avaliar a qualidade de conexão entre clientes e servidores localizados em diferentes regiões geográficas.

Para este trabalho, foi utilizado um subconjunto desses dados, disponibilizado no arquivo `ndt_tests_corrigido.csv`, contendo medições de desempenho entre **13 clientes** e **7 servidores** distintos. Cada registro representa uma observação individual com data e hora específicas, permitindo a análise temporal das variações de desempenho de rede.

O dataset é composto por **7087 observações** e **8 variáveis**, descritas na Tabela 1. As medições incluem taxas de *throughput* (download e upload), tempos médios de ida e volta (*Round Trip Time* — RTT) e a fração de perda de pacotes durante a comunicação.

Table 1: Descrição das variáveis do dataset `ndt_tests_tratado.csv`.

Variável	Descrição	Unidade	Tipo
<code>timestamp</code>	Data e hora da coleta	—	Temporal
<code>client</code>	Identificador do cliente de teste	—	Categórica
<code>server</code>	Identificador do servidor de teste	—	Categórica
<code>download_throughput_bps</code>	Taxa média de download	bits/s	Contínua
<code>upload_throughput_bps</code>	Taxa média de upload	bits/s	Contínua
<code>rtt_download_sec</code>	Tempo médio de ida e volta no download (RTT)	s	Contínua
<code>rtt_upload_sec</code>	Tempo médio de ida e volta no upload (RTT)	s	Contínua
<code>packet_loss_percent</code>	Fração de perda de pacotes	%	Contínua

2.1 Pré-processamento e Verificação de Qualidade dos Dados

Antes das etapas de análise e modelagem, foi realizada uma inspeção de consistência e qualidade dos dados com o objetivo de verificar a completude, a coerência dos tipos de variáveis e a presença de possíveis duplicatas. O dataset apresentou **nenhum valor nulo** e **nenhuma linha duplicada**, indicando boa integridade estrutural. A Tabela 2 resume as principais estatísticas levantadas durante o pré-processamento.

Table 2: Resumo da verificação de qualidade dos dados.

Variável	Valores Únicos	Valores Nulos	Observações
<code>timestamp</code>	7076	0	Granularidade temporal adequada, com quase todas as medições distintas.
<code>download_throughput_bps</code>	7083	0	Alta variabilidade e distribuição contínua.
<code>rtt_download_sec</code>	3671	0	Menor número de valores únicos, possivelmente por amostragem parcial.
<code>upload_throughput_bps</code>	7086	0	Conjunto completo e consistente.
<code>rtt_upload_sec</code>	5704	0	Cobertura ampla, suficiente para inferência estatística.
<code>packet_loss_percent</code>	5613	0	Ampla variação percentual, sem lacunas ou inconsistências.
<code>client</code>	13	0	13 clientes distintos, representando diversidade geográfica.
<code>server</code>	7	0	7 servidores distintos, refletindo diferentes trajetórias de rede.

A contagem de valores únicos evidencia uma boa granularidade temporal e ampla diversidade nas medições de throughput, RTT e perda de pacotes. As variáveis `rtt_download_sec` e `rtt_upload_sec` apresentam menor quantidade de valores distintos em relação ao total de amostras, o que pode indicar medições não realizadas em todos os testes, arredondamentos durante a coleta ou até mesmo, valores semelhantes para diferentes clientes e servidores. Esses casos, entretanto, não comprometem a qualidade do conjunto de dados e podem ser tratados nas etapas de modelagem estatística.

Nenhum procedimento adicional de normalização, filtragem ou padronização foi necessário, uma vez que: Todas as variáveis apresentam unidades coerentes e magnitudes consistentes com suas definições físicas; Não foram identificados *outliers* evidentes que justificassem remoção prévia; O arquivo `.csv` apresenta estrutura limpa, com colunas nomeadas e tipagem compatível.

Com base nessa verificação, conclui-se que o dataset apresenta qualidade suficiente para as etapas subsequentes de **Análise Exploratória de Dados**, **Modelagem por Máxima Verossimilhança** e **Inferência Bayesiana**, sem a necessidade de transformações adicionais nesta fase do projeto.

3 Análise Exploratória de Dados (EDA)

Antes da modelagem estatística, foi realizada uma análise exploratória dos dados (EDA) com o objetivo de compreender o comportamento empírico das variáveis, identificar possíveis valores atípicos, assimetrias e, principalmente, as variações nas métricas de desempenho de rede, em diferentes contextos de comunicação entre clientes e servidores.

Essa etapa também teve como finalidade identificar quais clientes e servidores apresentam padrões de comportamento distintos, de modo a selecionar subconjuntos representativos para análise estatística mais detalhada nas etapas subsequentes. Por meio da inspeção gráfica e estatística, torna-se possível verificar a existência de clientes com desempenho significativamente superior ou inferior à média, bem como servidores que concentram maiores tempos de resposta ou maiores taxas de perda de pacotes.

Com base nos resultados obtidos, serão analisadas as distribuições empíricas das variáveis e propostos modelos paramétricos candidatos (e.g., Normal, Gama, Beta), a fim de determinar, de forma fundamentada, qual modelo probabilístico melhor descreve o comportamento de cada variável e poderá ser utilizado nas etapas de estimação por **Máxima Verossimilhança (MLE)** e **Inferência Bayesiana**.

3.1 Estatísticas Descritivas

As estatísticas descritivas são fundamentais para caracterizar o nível central, a dispersão e o grau de assimetria das distribuições. Além das medidas tradicionais (média, mediana, desvio padrão), a análise de desempenho de rede exige uma atenção especial à cauda da distribuição, onde se encontram os eventos de pior caso.

As caudas de distribuição correspondem às regiões extremas dos dados e indicam a ocorrência de valores raros ou extremos. Quando uma variável apresenta caudas longas (ou *heavy tails*), há maior probabilidade de observar eventos muito distantes da média, o que pode distorcer medidas como a média e o desvio padrão, além de dificultar o ajuste de modelos paramétricos. Em medições de rede, por exemplo, longas caudas à direita podem refletir episódios ocasionais de alta latência ou baixa taxa de transferência, tornando essencial compreender esse comportamento para definir modelos estatísticos mais robustos e representativos.

A escolha dos quantis $Q_{0.95}$ (Percentil 95) e $Q_{0.99}$ (Percentil 99) é justificada pela necessidade de mensurar a qualidade da experiência sob condições de estresse ou falha intermitente, especialmente para as métricas de latência e perda.

- Para RTT e Fração de Perda:** A média pode ser enganosa, mascarando picos de latência que causam interrupções na experiência do usuário. $Q_{0.95}$ e $Q_{0.99}$ isolam e quantificam o desempenho do pior caso percebido, sendo essenciais para a otimização de sistemas críticos. Uma grande diferença entre a Mediana ($Q_{0.50}$) e $Q_{0.99}$ sugere uma distribuição assimétrica com uma "cauda pesada", indicando que uma pequena fração das medições representa problemas de latência ou perda significativamente mais graves.
- Para Throughput:** Neste caso, a atenção se volta para o desempenho de pior caso de taxa, onde o interesse reside nas limitações de banda. Por isso, o foco é dado ao Mínimo e ao $Q_{0.25}$ (Primeiro Quartil), que representam os *throughputs* mais baixos. Uma diferença significativa entre a Média e o $Q_{0.25}$ pode indicar que a taxa de transferência é frequentemente limitada.

A Tabela 3 apresenta as estatísticas descritivas gerais para as variáveis contínuas em todo o *dataset*.

Table 3: Estatísticas descritivas gerais das variáveis contínuas.

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	5.063×10^8	5.961×10^8	3.352×10^8	1.124×10^{17}	-1.0	1.642×10^8	8.489×10^8	9.125×10^8	9.257×10^8	9.333×10^8
Upload Throughput (bps)	3.782×10^8	2.979×10^8	3.014×10^8	9.085×10^{16}	-1.0	9.733×10^7	6.702×10^8	8.978×10^8	9.115×10^8	9.215×10^8
RTT Download (s)	0.0484	0.0115	0.0679	0.0046	-0.001	0.0080	0.1150	0.2202	0.2333	0.3981
RTT Upload (s)	0.0372	0.0109	0.0635	0.0040	-1.0	0.0049	0.0177	0.2198	0.2365	0.3602
Perda de Pacotes (%)	1.8991	0.1898	3.450	11.902	-1.0	0.0015	2.0508	9.2491	18.1279	22.3891

3.1.1 Análise Segmentada por Cliente e Servidor

Para atender aos objetivos de identificar variações no desempenho de rede, as estatísticas descritivas foram segmentadas, sendo calculadas para cada variável de interesse em combinação com cada **Cliente** e cada **Servidor**. Essas tabelas de resumo detalhadas (Tabela 4 à 23) são cruciais para a discussão e a identificação de gargalos específicos.

Table 4: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 01).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.503×10^8	8.928×10^8	3.457×10^8	1.195×10^{17}	2.567×10^7	1.801×10^8	9.107×10^8	9.227×10^8	9.316×10^8	9.323×10^8
Upload Throughput (bps)	7.140×10^8	8.789×10^8	2.881×10^8	8.298×10^{16}	9.226×10^7	6.852×10^8	9.047×10^8	9.138×10^8	9.174×10^8	9.201×10^8
RTT Download (s)	0.0449	0.0110	0.0537	0.0029	0.0040	0.0054	0.1160	0.1218	0.1256	0.2245
RTT Upload (s)	0.0313	0.0064	0.0466	0.0022	0.0040	0.0048	0.0124	0.1209	0.1224	0.2210
Perda de Pacotes (%)	0.5241	0.0055	1.6689	2.7852	0.0000	0.0000	0.5412	1.5464	8.4549	17.5261

Table 5: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 02).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.393×10^8	8.243×10^8	3.255×10^8	1.059×10^{17}	3.566×10^6	1.789×10^8	9.024×10^8	9.131×10^8	9.279×10^8	9.313×10^8
Upload Throughput (bps)	5.620×10^8	6.297×10^8	2.123×10^8	4.507×10^{16}	9.112×10^7	4.883×10^8	7.074×10^8	7.868×10^8	8.873×10^8	9.156×10^8
RTT Download (s)	0.0391	0.0100	0.0524	0.0027	0.0027	0.0036	0.1147	0.1200	0.1251	0.2238
RTT Upload (s)	0.0294	0.0042	0.0482	0.0023	0.0027	0.0034	0.0110	0.1200	0.1253	0.2236
Perda de Pacotes (%)	0.7814	0.0655	1.8798	3.5335	0.0000	0.0214	0.9628	3.1466	10.9424	20.0371

Table 6: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 03).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.133×10^8	8.124×10^8	3.306×10^8	1.093×10^{17}	-1.0	1.780×10^8	8.882×10^8	9.114×10^8	9.217×10^8	9.303×10^8
Upload Throughput (bps)	5.212×10^8	5.928×10^8	2.099×10^8	4.407×10^{16}	7.905×10^7	3.728×10^8	6.921×10^8	7.491×10^8	7.631×10^8	9.052×10^8
RTT Download (s)	0.0444	0.0100	0.0562	0.0032	-0.001	0.0043	0.1151	0.1210	0.2195	0.2244
RTT Upload (s)	0.0330	0.0044	0.0505	0.0026	0.0030	0.0037	0.0121	0.1199	0.1876	0.2251
Perda de Pacotes (%)	0.6750	0.0749	1.4378	2.0673	-1.000	0.0021	1.0872	1.9896	7.1747	15.2127

Table 7: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 04).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	5.806×10^8	7.992×10^8	3.464×10^8	1.200×10^{17}	-1.0	1.728×10^8	8.897×10^8	9.104×10^8	9.260×10^8	9.285×10^8
Upload Throughput (bps)	5.490×10^8	6.223×10^8	2.479×10^8	6.147×10^{16}	-1.0	1.873×10^8	7.257×10^8	8.768×10^8	8.918×10^8	8.971×10^8
RTT Download (s)	0.0509	0.0120	0.0552	0.0031	-0.001	0.0069	0.1179	0.1226	0.1266	0.2225
RTT Upload (s)	0.0352	0.0083	0.0700	0.0049	-1.0	0.0066	0.1165	0.1224	0.1264	0.2266
Perda de Pacotes (%)	0.5128	0.0493	1.3153	1.7301	-1.0	0.0000	0.5972	1.6903	6.3045	14.4875

Table 8: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 05).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	3.095×10^8	1.070×10^8	3.348×10^8	1.121×10^{17}	9.530×10^5	1.050×10^8	7.913×10^8	9.035×10^8	9.136×10^8	9.193×10^8
Upload Throughput (bps)	3.478×10^8	1.086×10^8	3.514×10^8	1.235×10^{17}	8.992×10^7	1.082×10^8	8.396×10^8	9.049×10^8	9.109×10^8	9.124×10^8
RTT Download (s)	0.0452	0.0100	0.0549	0.0030	0.0030	0.0042	0.1150	0.1197	0.2191	0.2239
RTT Upload (s)	0.0297	0.0041	0.0473	0.0022	0.0030	0.0033	0.0106	0.1192	0.1210	0.2194
Perda de Pacotes (%)	6.3119	8.2764	5.2962	2.8050×10^1	0.0000	0.0319	10.5404	13.8275	15.0084	17.0009

Table 9: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 06).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.113×10^8	8.302×10^8	3.407×10^8	1.160×10^{17}	5.078×10^7	1.780×10^8	8.975×10^8	9.176×10^8	9.253×10^8	9.278×10^8
Upload Throughput (bps)	6.065×10^8	7.387×10^8	2.568×10^8	6.594×10^{16}	-1.0	3.971×10^8	7.855×10^8	8.745×10^8	8.874×10^8	9.002×10^8
RTT Download (s)	0.0468	0.0099	0.0565	0.0032	0.0020	0.0037	0.1150	0.1198	0.2191	0.2224
RTT Upload (s)	0.0318	0.0039	0.0683	0.0047	-1.0	0.0031	0.0134	0.1196	0.2186	0.2236
Perda de Pacotes (%)	0.8322	0.7171	1.0173	1.0349	0.0000	0.0000	1.2991	2.1010	4.6484	8.6135

Table 10: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 07).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.297×10^8	8.344×10^8	3.323×10^8	1.104×10^{17}	-1.0	1.730×10^8	8.940×10^8	9.097×10^8	9.244×10^8	9.269×10^8
Upload Throughput (bps)	4.912×10^8	5.508×10^8	1.927×10^8	3.713×10^{16}	3.337×10^5	4.257×10^8	6.148×10^8	7.403×10^8	8.151×10^8	8.603×10^8
RTT Download (s)	0.0463	0.0130	0.0576	0.0033	-0.001	0.0075	0.1180	0.1241	0.2230	0.2274
RTT Upload (s)	0.0346	0.0090	0.0516	0.0027	0.0050	0.0073	0.0139	0.1233	0.2231	0.2273
Perda de Pacotes (%)	0.5297	0.0876	1.5588	2.4300	-1.0	0.0059	0.5421	1.6477	7.4133	19.7546

Table 11: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 08).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	2.339×10^8	9.640×10^7	2.923×10^8	8.546×10^{16}	2.041×10^7	9.447×10^7	1.744×10^8	9.088×10^8	9.119×10^8	9.285×10^8
Upload Throughput (bps)	2.259×10^8	9.732×10^7	2.498×10^8	6.238×10^{16}	4.343×10^7	9.709×10^7	1.882×10^8	7.632×10^8	8.757×10^8	9.069×10^8
RTT Download (s)	0.0544	0.0100	0.0674	0.0045	0.0030	0.0049	0.1158	0.2190	0.2210	0.2240
RTT Upload (s)	0.0408	0.0059	0.0621	0.0039	0.0039	0.0043	0.1150	0.2194	0.2209	0.2259
Perda de Pacotes (%)	5.0610	3.3348	6.0792	3.6956×10^1	0.0000	0.9239	4.9007	1.9580×10^1	2.0862×10^1	2.2389×10^1

Table 12: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 09).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.452×10^8	8.941×10^8	3.511×10^8	1.233×10^{17}	2.467×10^6	1.794×10^8	9.130×10^8	9.260×10^8	9.326×10^8	9.333×10^8
Upload Throughput (bps)	4.527×10^8	1.902×10^8	3.887×10^8	1.511×10^{17}	8.216×10^5	8.735×10^7	8.976×10^8	9.109×10^8	9.163×10^8	9.215×10^8
RTT Download (s)	0.0450	0.0100	0.0549	0.0030	0.0023	0.0038	0.1154	0.1205	0.2186	0.2245
RTT Upload (s)	0.0339	0.0043	0.0506	0.0026	0.0020	0.0031	0.0144	0.1203	0.1238	0.2239
Perda de Pacotes (%)	0.4833	0.0731	1.3848	1.9177	0.0000	0.0016	0.4999	1.4753	7.6008	16.3675

Table 13: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 10).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	2.318×10^8	2.211×10^8	1.660×10^8	2.757×10^{16}	3.677×10^6	7.792×10^7	4.094×10^8	4.186×10^8	4.234×10^8	4.250×10^8
Upload Throughput (bps)	3.735×10^7	4.076×10^7	9.268×10^6	8.590×10^{13}	2.468×10^6	3.345×10^7	4.460×10^7	4.597×10^7	4.633×10^7	4.652×10^7
RTT Download (s)	0.0872	0.0153	0.1034	0.0107	0.0050	0.0097	0.2202	0.2339	0.2460	0.3981
RTT Upload (s)	0.0677	0.0166	0.0937	0.0088	0.0058	0.0112	0.0335	0.2371	0.2472	0.3421
Perda de Pacotes (%)	1.4803	0.0075	2.8779	8.2824	0.0000	0.0000	1.0765	7.5977	10.8921	19.2923

Table 14: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 11).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	5.046×10^8	6.906×10^8	2.885×10^8	8.323×10^{16}	2.692×10^7	1.433×10^8	7.559×10^8	7.981×10^8	8.001×10^8	8.027×10^8
Upload Throughput (bps)	2.674×10^8	3.830×10^8	1.651×10^8	2.727×10^{16}	5.376×10^6	6.512×10^7	4.072×10^8	4.215×10^8	4.237×10^8	4.242×10^8
RTT Download (s)	0.0129	0.0130	0.0062	0.00004	0.0079	0.0100	0.0150	0.0160	0.0211	0.1328
RTT Upload (s)	0.0152	0.0155	0.0091	0.00008	0.0086	0.0122	0.0164	0.0185	0.0345	0.1940
Perda de Pacotes (%)	1.1972	0.5410	1.9457	3.7858	0.0000	0.0047	1.2183	5.8621	9.0839	10.2633

Table 15: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 12).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	4.648×10^8	6.360×10^8	2.849×10^8	8.115×10^{16}	1.642×10^7	8.713×10^7	6.889×10^8	7.428×10^8	7.890×10^8	8.119×10^8
Upload Throughput (bps)	9.217×10^7	9.604×10^7	3.042×10^7	9.256×10^{14}	2.661×10^6	7.095×10^7	1.134×10^8	1.397×10^8	1.597×10^8	1.709×10^8
RTT Download (s)	0.0865	0.0146	0.1038	0.0108	0.0041	0.0066	0.2186	0.2330	0.2431	0.3478
RTT Upload (s)	0.0735	0.0173	0.0973	0.0095	0.0062	0.0115	0.2192	0.2365	0.2489	0.3602
Perda de Pacotes (%)	0.0638	0.0061	0.4304	0.1853	0.0000	0.0000	0.0585	0.1614	0.2751	8.5888

Table 16: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Client 13).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	5.939×10^8	5.961×10^8	2.202×10^7	4.851×10^{14}	1.330×10^8	5.936×10^8	5.977×10^8	5.992×10^8	6.007×10^8	6.013×10^8
Upload Throughput (bps)	2.948×10^8	2.990×10^8	1.658×10^7	2.751×10^{14}	5.683×10^7	2.968×10^8	3.007×10^8	3.018×10^8	3.026×10^8	3.029×10^8
RTT Download (s)	0.0117	0.0119	0.0057	0.00003	0.0070	0.0090	0.0140	0.0150	0.0202	0.1170
RTT Upload (s)	0.0130	0.0143	0.0050	0.00002	0.0077	0.0097	0.0150	0.0156	0.0237	0.0894
Perda de Pacotes (%)	5.3361	5.5479	1.2125	1.4701	0.0000	4.3458	6.3378	6.9362	7.4303	8.5713

Table 17: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Server 01).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.422×10^8	7.618×10^8	2.688×10^8	7.223×10^{16}	2.253×10^7	5.572×10^8	8.425×10^8	9.110×10^8	9.179×10^8	9.193×10^8
Upload Throughput (bps)	4.371×10^8	4.215×10^8	3.111×10^8	9.676×10^{16}	1.383×10^7	9.894×10^7	7.118×10^8	9.027×10^8	9.101×10^8	9.128×10^8
RTT Download (s)	0.0113	0.0110	0.0023	0.000005	0.0070	0.0100	0.0130	0.0158	0.0176	0.0191
RTT Upload (s)	0.0126	0.0111	0.0040	0.000016	0.0078	0.0101	0.0137	0.0205	0.0237	0.0373
Perda de Pacotes (%)	2.2572	1.0169	2.8025	7.8540	0.0000	0.4985	3.3340	7.6112	11.2422	15.2127

Table 18: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Server 02).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.349×10^8	7.618×10^8	2.795×10^8	7.813×10^{16}	-1.0	4.526×10^8	8.491×10^8	9.104×10^8	9.186×10^8	9.239×10^8
Upload Throughput (bps)	4.406×10^8	4.314×10^8	3.321×10^8	1.103×10^{17}	-1.0	9.711×10^7	7.637×10^8	9.028×10^8	9.077×10^8	9.146×10^8
RTT Download (s)	0.0114	0.0110	0.0026	0.000007	-0.001	0.0100	0.0127	0.0168	0.0186	0.0243
RTT Upload (s)	0.0113	0.0112	0.0024	0.00018	-1.0	0.0102	0.0140	0.0222	0.0247	0.0285
Perda de Pacotes (%)	1.9779	0.7935	2.8524	8.1360	-1.0	0.3053	1.9748	8.2081	11.6649	20.0371

Table 19: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Server 03).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	6.384×10^8	7.683×10^8	2.787×10^8	7.766×10^{16}	5.693×10^6	4.243×10^8	8.535×10^8	9.097×10^8	9.202×10^8	9.232×10^8
Upload Throughput (bps)	4.482×10^8	4.518×10^8	3.262×10^8	1.064×10^{17}	9.738×10^6	9.950×10^7	7.606×10^8	9.058×10^8	9.120×10^8	9.162×10^8
RTT Download (s)	0.0115	0.0110	0.0025	0.000006	0.0070	0.0100	0.0130	0.0166	0.0180	0.0209
RTT Upload (s)	0.0129	0.0112	0.0043	0.000019	0.0077	0.0100	0.0142	0.0220	0.0257	0.0326
Perda de Pacotes (%)	2.1300	0.8350	2.9253	8.5575	0.0000	0.3349	2.8146	8.4434	11.5284	18.2822

Table 20: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Server 04).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	1.966×10^8	1.684×10^8	1.774×10^8	3.145×10^{16}	-1.0	8.613×10^7	1.782×10^8	5.981×10^8	7.839×10^8	7.989×10^8
Upload Throughput (bps)	1.573×10^8	1.819×10^8	9.059×10^7	8.206×10^{15}	1.016×10^6	7.805×10^7	1.892×10^8	3.013×10^8	4.139×10^8	4.219×10^8
RTT Download (s)	0.1276	0.1184	0.0668	0.0045	-0.001	0.1150	0.1247	0.2309	0.2433	0.2918
RTT Upload (s)	0.1291	0.1189	0.0678	0.0046	0.0088	0.1153	0.1240	0.2354	0.2432	0.3552
Perda de Pacotes (%)	1.9390	0.0000	3.9725	15.7808	-1.0	0.0000	1.4299	12.1726	18.9949	20.4769

Table 21: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Server 05).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	2.012×10^8	1.688×10^8	1.830×10^8	3.350×10^{16}	2.467×10^6	8.551×10^7	1.781×10^8	5.983×10^8	7.304×10^8	7.802×10^8
Upload Throughput (bps)	1.583×10^8	1.812×10^8	9.355×10^7	8.751×10^{15}	2.501×10^6	7.963×10^7	1.893×10^8	3.026×10^8	4.157×10^8	4.220×10^8
RTT Download (s)	0.1231	0.1189	0.0676	0.0046	0.0080	0.1150	0.1230	0.2301	0.2411	0.3478
RTT Upload (s)	0.1240	0.1188	0.0688	0.0047	0.0092	0.1150	0.1230	0.2350	0.2483	0.3602
Perda de Pacotes (%)	2.7471	0.0000	5.1833	26.8668	0.0000	0.0000	3.7476	17.3841	20.3460	22.3891

Table 22: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Server 06).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	2.054×10^8	1.696×10^8	1.907×10^8	3.637×10^{16}	3.994×10^6	8.478×10^7	1.788×10^8	6.009×10^8	7.840×10^8	7.965×10^8
Upload Throughput (bps)	1.574×10^8	1.813×10^8	9.910×10^7	9.822×10^{15}	-1.0	6.973×10^7	1.891×10^8	3.029×10^8	4.206×10^8	4.238×10^8
RTT Download (s)	0.1294	0.1188	0.0710	0.0050	0.0090	0.1150	0.2162	0.2322	0.2427	0.3981
RTT Upload (s)	0.1288	0.1190	0.0867	0.0075	-1.0	0.1153	0.2194	0.2369	0.2480	0.3421
Perda de Pacotes (%)	1.9486	0.0000	4.2378	17.9594	0.0000	0.0000	1.2528	12.0296	19.3470	20.7156

Table 23: Estatísticas descritivas das variáveis contínuas (Server 07).

Variável	Média	Mediana	DP	Var	Min.	Q1 (25%)	Q3 (75%)	95%	99%	Máx.
Download Throughput (bps)	5.852×10^8	7.092×10^8	3.286×10^8	1.080×10^{17}	-1.0	1.764×10^8	8.991×10^8	9.147×10^8	9.292×10^8	9.333×10^8
Upload Throughput (bps)	4.491×10^8	5.133×10^8	3.049×10^8	9.298×10^{16}	1.425×10^6	1.085×10^8	7.211×10^8	8.982×10^8	9.136×10^8	9.215×10^8
RTT Download (s)	0.0296	0.0090	0.0537	0.0029	-0.001	0.0044	0.0148	0.1225	0.2297	0.3531
RTT Upload (s)	0.0076	0.0054	0.0051	0.00003	0.0020	0.0037	0.0113	0.0161	0.0197	0.0801
Perda de Pacotes (%)	1.6653	0.0892	3.1141	9.6975	-1.0	0.0089	1.8028	8.6043	13.4794	21.8572

A análise comparativa das tabelas de estatísticas descritivas, segmentadas por Cliente e por Servidor, transcende a mera sumarização de dados. Ela revela padrões cruciais de desempenho da rede, permitindo isolar a experiência (seja no lado do servidor ou no lado do cliente). Mais do que isso, a segmentação possibilita a identificação de casos extremos ou anômalos, como clientes com alta volatilidade ou servidores com latência de cauda crítica, direcionando assim a escolha dos pares mais relevantes para a modelagem estatística e a análise gráfica aprofundada.

3.1.2 Diferenças entre Clientes

A análise das estatísticas segmentadas por cliente revela uma ampla gama de perfis de desempenho e problemas de qualidade de serviço originados na ponta da rede (cliente ou rota local):

- Padrões de Throughput Extremos:** Clientes como o **Client 01** e **Client 09** se destacam com as maiores Médias de *Download Throughput* (acima de 6.45×10^8 bps). Em contraste, o **Client 10** e **Client 08** apresentam *Throughput* médio baixo (cerca de 2.3×10^8 bps), sugerindo limitações permanentes em suas conexões.
- Volatilidade e Consistência:** O **Client 13** demonstra um perfil de *throughput* notavelmente consistente, com um Desvio Padrão (**DP**) muito baixo ($\approx 2.2 \times 10^7$ bps) e uma Mediana muito próxima à Média, indicando uma largura de banda estável, mas fixa. Por outro lado, clientes como o **Client 05** mostram alta volatilidade, com um grande **DP** ($\approx 3.3 \times 10^8$ bps), indicando medições que oscilam entre valores muito baixos e muito altos.

- **Qualidade de Conexão (Perda de Pacotes):** Enquanto a maioria dos clientes apresenta Perda de Pacotes mediana próxima a zero, clientes como o **Client 05** (Mediana = 8.2764%) e o **Client 13** (Mediana = 5.5479%) apresentam perda de pacotes como um problema persistente, e não apenas esporádico. Além disso, o **Client 08** apresenta o pior valor de cauda, com $Q_{0.99} = 20.862\%$, sinalizando instabilidade severa.

3.1.3 Diferenças entre Servidores

A análise da Tabela de Estatísticas por Servidor é essencial para determinar se o gargalo é originado pelo Servidor ou por sua rota de tráfego.

- **Latência de Pior Caso (RTT):** Os **Servidores 06, 05 e 04** apresentam consistentemente os maiores valores de RTT na cauda da distribuição. O $Q_{0.99}$ para *rtt_download_sec* nesses servidores atinge picos de aproximadamente 0.24 segundos ou mais, enquanto os **Servidores 01, 02 e 03** mantêm essa métrica abaixo de 0.025 segundos. Essa discrepância de uma ordem de magnitude sugere que os servidores 06, 05 e 04, ou suas rotas de acesso, são as fontes primárias dos maiores problemas de latência na rede. O **Servidor 07** apresenta um comportamento misto, com latência mediana muito baixa, mas um $Q_{0.99}$ elevado, indicando latência de pior caso esporádica.
- **Consistência de Throughput de Download:** Os **Servidores 01, 02 e 03** exibem a maior e mais consistente Média de *Throughput* de Download (acima de 6.3×10^8 bps), com um $Q_{0.25}$ também elevado, indicando que a grande maioria das medições foi de alta performance. Em contraste, os **Servidores 04, 05 e 06** têm Média de *Throughput* drasticamente menor (cerca de 2.0×10^8 bps) e Mediana muito próxima ao $Q_{0.25}$, o que aponta para um desempenho de *throughput* consistentemente baixo.

3.2 Análise Gráfica e Exploratória dos Casos Selecionados

Nesta etapa, são apresentados os resultados da análise gráfica comparativa entre um cliente e um servidor específicos, escolhidos de modo a representar cenários contrastantes de desempenho e possibilitar a identificação das principais fontes de variação nos parâmetros de rede. A escolha desses dois casos permite isolar os cenários para um cliente e um servidor, fornecendo uma base sólida para as etapas posteriores de modelagem estatística e inferência.

- **Servidor 02:** selecionado por representar o cenário de melhor desempenho de backbone, com baixa latência e maior estabilidade. Esse servidor apresenta o pior caso de latência (*RTT Q_{0.99}*) controlado, abaixo de 0.025 segundos, conforme a análise inicial. Sua inclusão fornece uma referência de operação eficiente, permitindo observar gargalos mais relacionados às condições do cliente do que à rota de destino.
- **Cliente 13:** escolhido por exibir comportamento anômalo e altamente informativo. O cliente apresenta um *throughput* de download relativamente estável, com baixa variabilidade, mas uma perda de pacotes persistente e significativa (Mediana = 5.55%). Tal combinação sugere um gargalo local ou um congestionamento constante, em vez de uma limitação imposta pelo servidor. O contraste com o Servidor 02 permitirá compreender a influência da infraestrutura local nas métricas observadas.

A Figura 1 apresenta os histogramas comparativos das variáveis: *throughput* (download e upload), *RTT* (download e upload) e fração de perda de pacotes, para o Cliente 13 e o Servidor 02. Essa visualização tem por objetivo destacar diferenças nas distribuições empíricas e apoiar a definição dos modelos probabilísticos mais adequados a cada caso.

De forma geral, observa-se que as variáveis *RTT* (download e upload) apresentam distribuições semelhantes entre cliente e servidor, concentradas em faixas similares, o que sugere que a latência de ida e volta não é o principal fator de degradação do desempenho. Já as métricas de *throughput* (download e upload) exibem comportamentos bastante distintos: no servidor, as medições são mais dispersas, indicando variabilidade natural do tráfego, enquanto no cliente 13 os valores são fortemente concentrados em torno de um único patamar, com alta densidade e pouca variação, um indício de limitação de banda ou saturação constante. Por fim, a variável *packet loss percent* apresenta distribuições semelhantes nos dois casos, mas com diferenças marcantes na dispersão: o cliente 13 apresenta dados mais concentrados, enquanto o servidor exibe uma cauda à direita mais pronunciada, sugerindo episódios ocasionais de perda elevada.

Dado esse panorama comparativo, as próximas subseções aprofundam a análise individual dos casos, iniciando pelo Cliente 13.

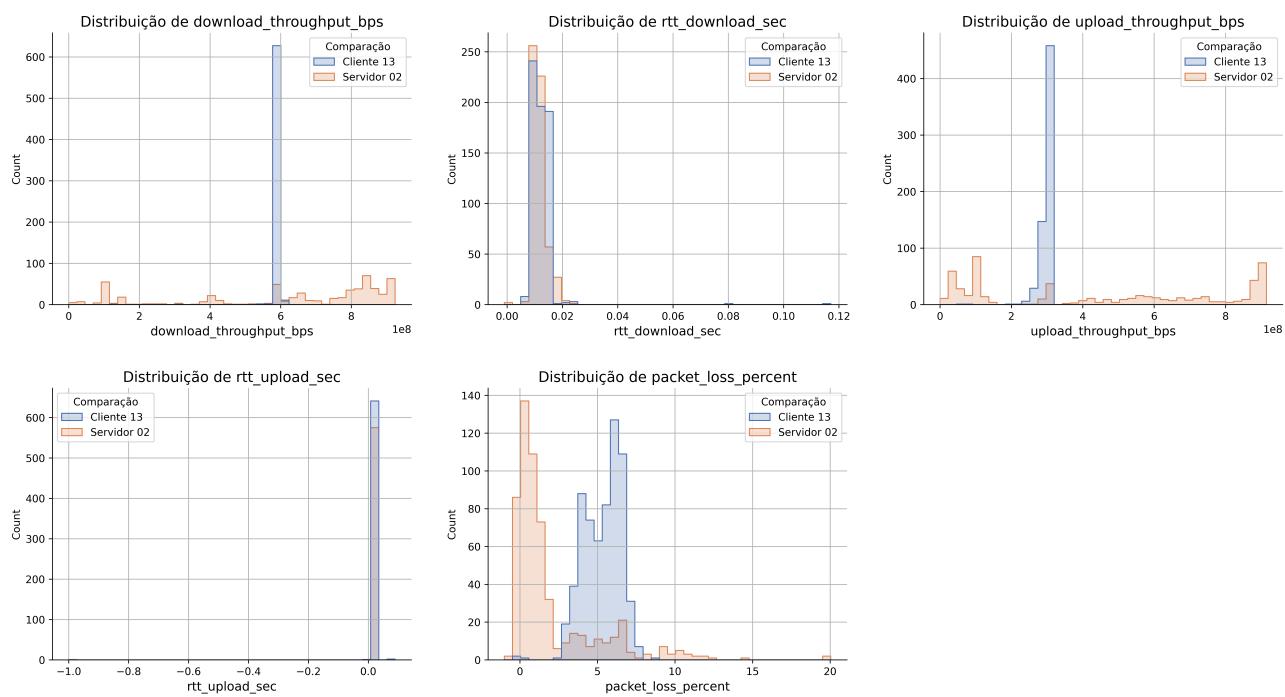


Figure 1: Distribuições das Variáveis para Comparação: Cliente 13 e Servidor 02.

3.2.1 Cliente 13

As Figuras 2 e 3 apresentam, respectivamente, os histogramas e boxplots das taxas médias de download e upload do Cliente 13. Ambas as variáveis demonstram comportamento semelhante, com uma forte concentração de dados à direita e uma pequena cauda à esquerda, refletindo poucos valores anormalmente baixos de taxa de transferência. Nos boxplots, essa característica se traduz em *outliers* localizados à esquerda, representando medições de throughput pontualmente reduzidas, possivelmente causadas por momentos de congestionamento de rede ou instabilidade temporária.

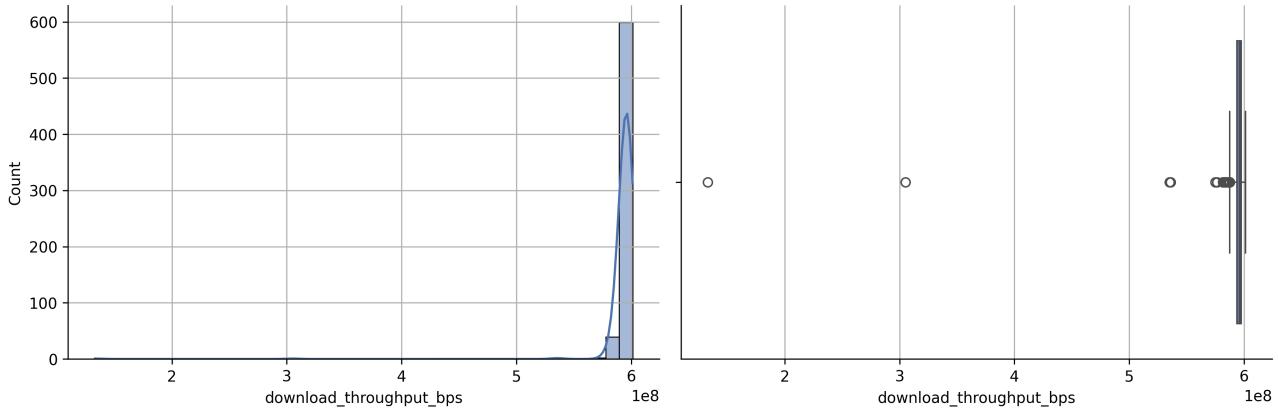


Figure 2: Taxa média de download (bits/s) para o Cliente 13.

Ao analisar o tempo médio de ida e volta (RTT) para download e upload, ilustrados nas Figuras 3 e 5, observa-se um comportamento oposto: há uma concentração de dados à esquerda com uma cauda à direita, indicando que, em geral, o cliente mantém baixa latência, mas com eventos ocasionais de aumento significativo. Esses picos de RTT, visíveis como outliers no boxplot, podem estar associados a momentos de sobrecarga momentânea na rede local ou em trechos intermediários da rota de comunicação.

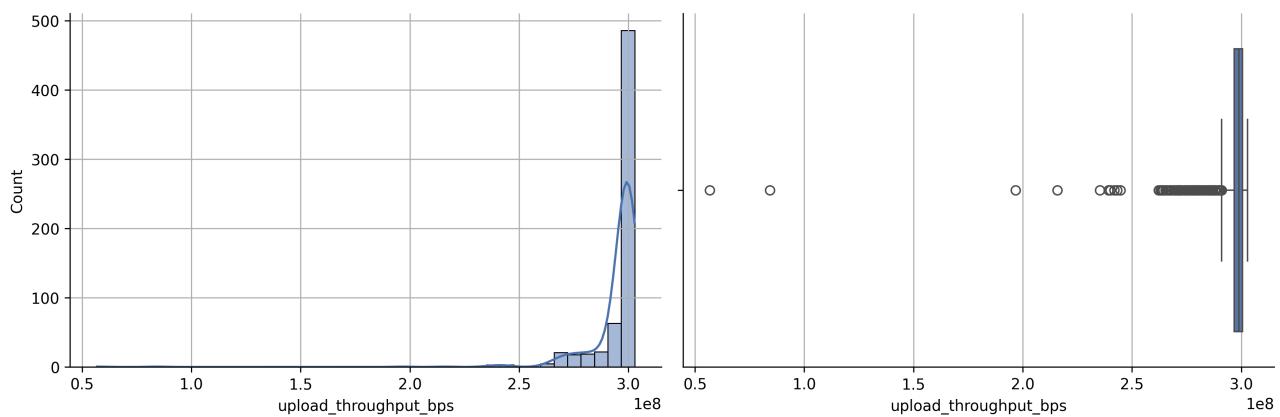


Figure 3: Taxa média de upload (bits/s) para o Cliente 13.

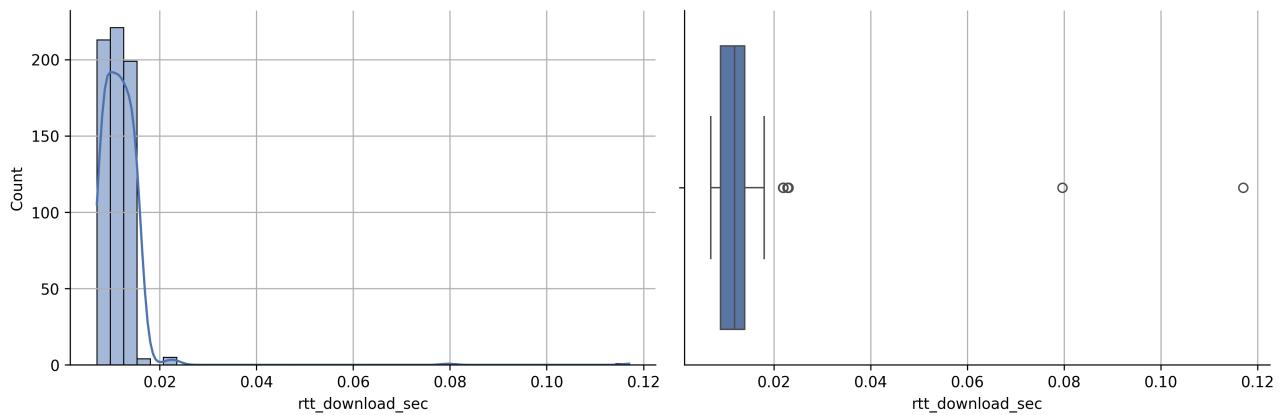


Figure 4: Tempo médio de ida e volta no download (RTT) (s) para o Cliente 13.

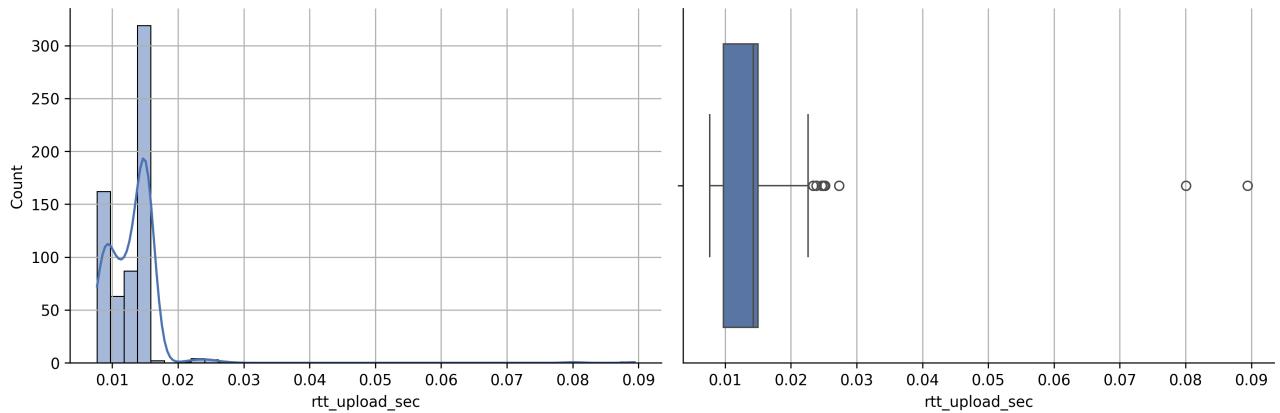


Figure 5: Tempo médio de ida e volta no upload (RTT) (s) para o Cliente 13.

Por fim, a fração de perda de pacotes (`packet_loss_percent`), apresentada na Figura 6, exibe uma distribuição próxima da normal, com leve tendência bimodal. O boxplot mostra poucos outliers à esquerda, indicando uma variação controlada, mas persistente. Esse padrão reforça a hipótese de que o cliente enfrenta um nível crônico de perda de pacotes, refletindo um gargalo mais local do que estrutural.

A Figura 7 explora a relação entre o RTT de Upload e a Porcentagem de Perda de Pacotes (`packet_loss_percent`), segmentada por servidor, reforçando achados anteriores de EDA. A grande maioria das medições exibe um RTT de Upload consistentemente baixo (abaixo de 0.025 segundos), com a perda de pacotes crônica e persistente concentrada entre 2.5% e 8.0%. Não se observa correlação linear forte entre as variáveis, sugerindo que o RTT alto de certos *outliers* (próximo a 0.09s) é causado por eventos de latência intermitentes, e não pelo mecanismo que gera a perda. A dispersão mista dos servidores na região de alta densidade indica que tanto o RTT base quanto a

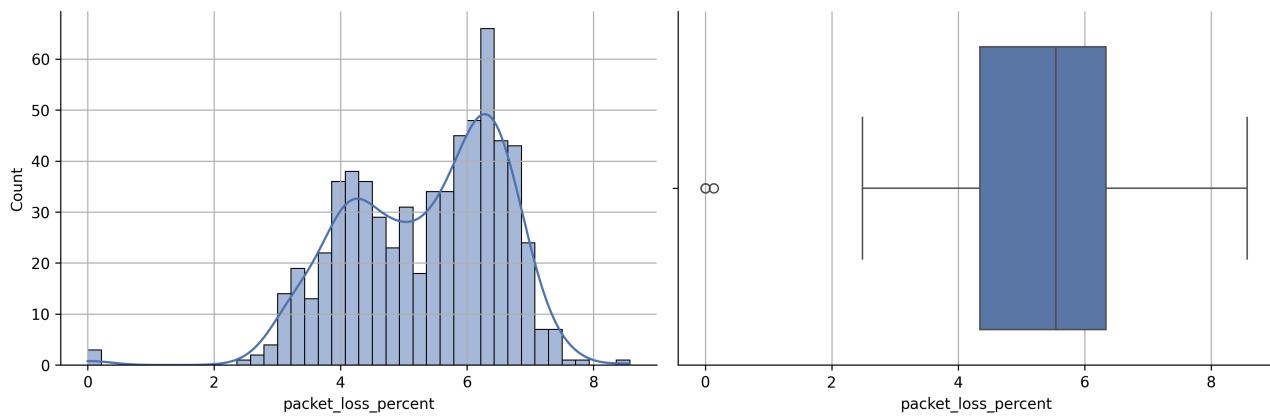


Figure 6: Fração de perda de pacotes (%) para o Cliente 13.

perda crônica são características estáveis e independentes do servidor específico.

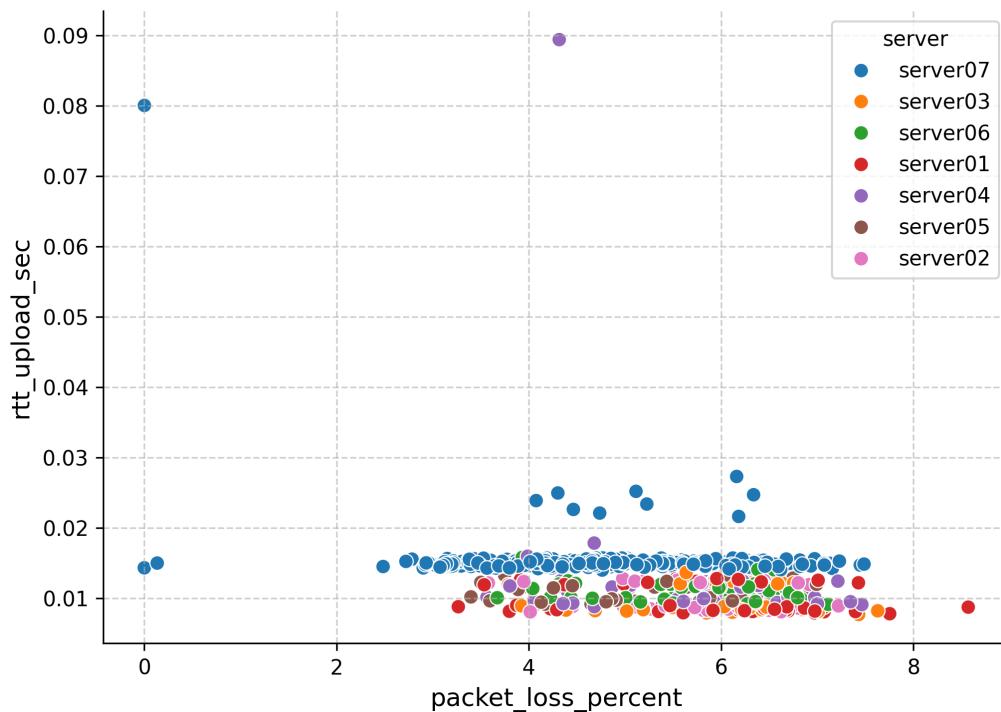


Figure 7: Relação entre a Porcentagem de Perda de Pacotes e o Tempo de Ida e Volta (RTT) de Upload por Servidor.

3.2.2 Servidor 02

Para o Servidor 02, as Figuras 8 e 9 ilustram as taxas médias de download e upload. Ambas exibem comportamento aproximadamente uniforme, com leve concentração nos extremos, mais evidente no cenário de download. Devido à ampla dispersão dos dados, os boxplots resultam visualmente equilibrados e sem indícios significativos de outliers, sugerindo medições consistentes em uma faixa operacional ampla, característica esperada para um servidor de alta capacidade.

Os tempos médios de ida e volta (RTT) de download e upload, mostrados nas Figuras 10 e 11, apresentam comportamentos distintos. O RTT de download tende a seguir uma distribuição aproximadamente normal, com uma pequena cauda à direita, o que explica a presença de outliers isolados no boxplot. Já o RTT de upload é altamente concentrado à direita, com baixa variabilidade central, uma característica típica de redes otimizadas, mas que também pode gerar a detecção de outliers devido à densidade local elevada.

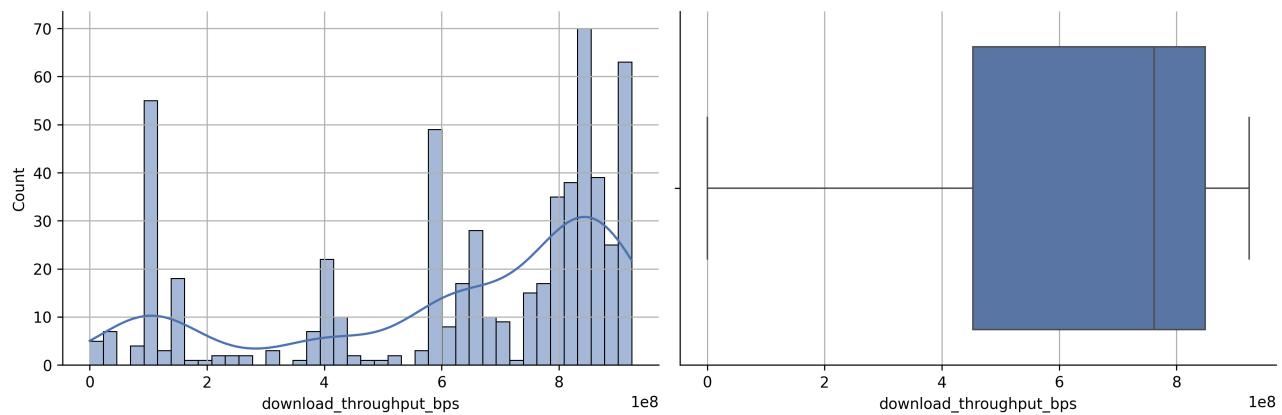


Figure 8: Taxa média de download (bits/s) para o Servidor 2.

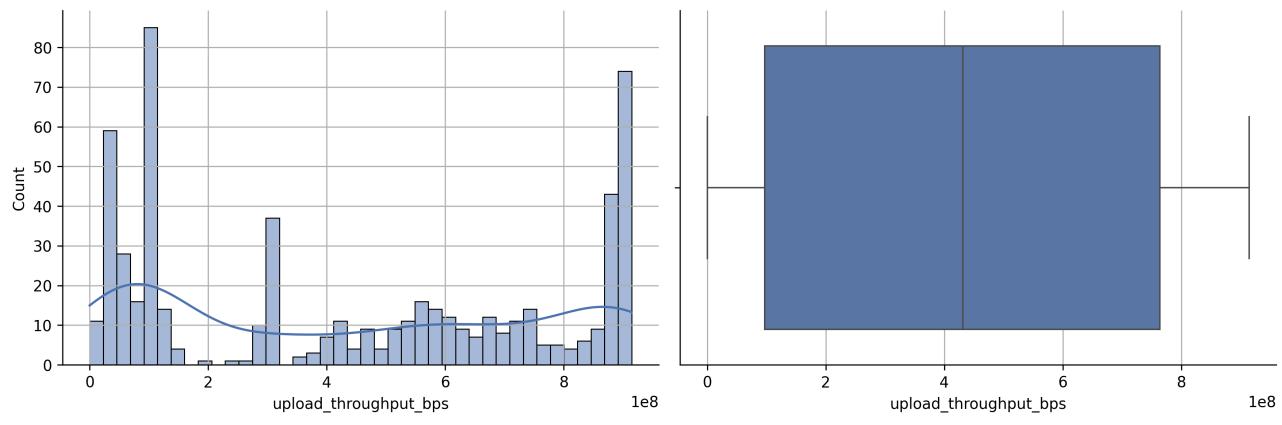


Figure 9: Taxa média de upload (bits/s) para o Servidor 2.

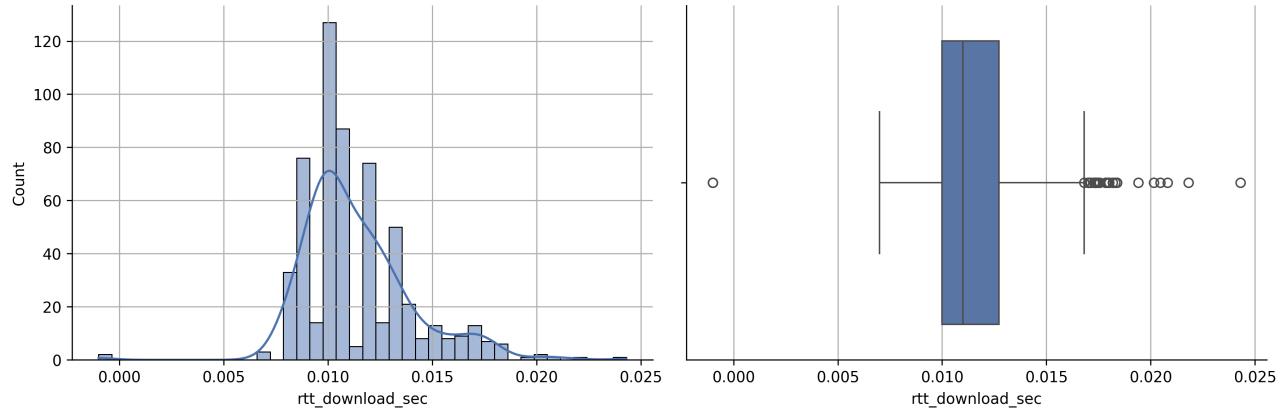


Figure 10: Tempo médio de ida e volta no download (RTT) (s) para o Servidor 2.

Por fim, a fração de perda de pacotes (Figura 12) mostra forte concentração à esquerda e uma cauda à direita mais extensa. Embora o boxplot indique vários outliers, isso decorre principalmente da alta densidade de valores próximos a zero, o que aumenta a sensibilidade dos limites interquartis.

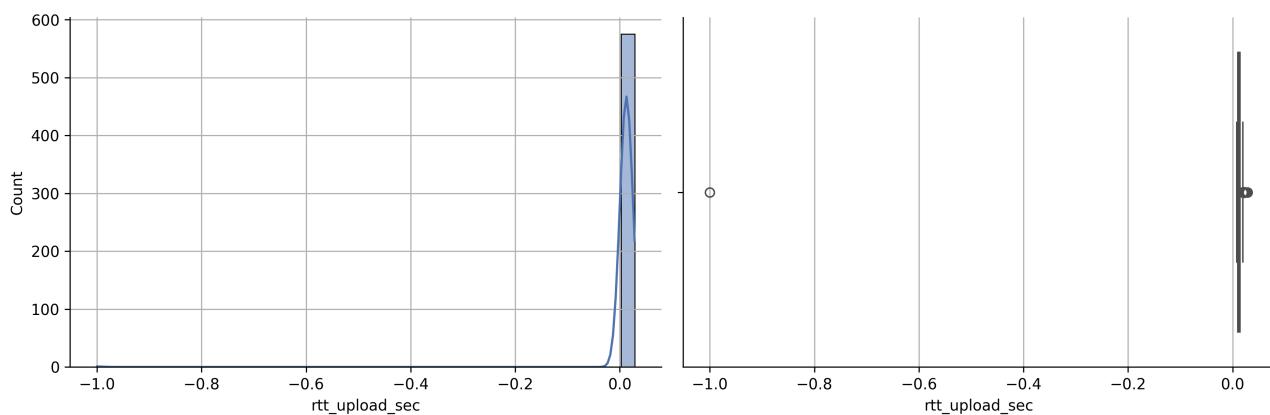


Figure 11: Tempo médio de ida e volta no upload (RTT) (s) para o Servidor 2.

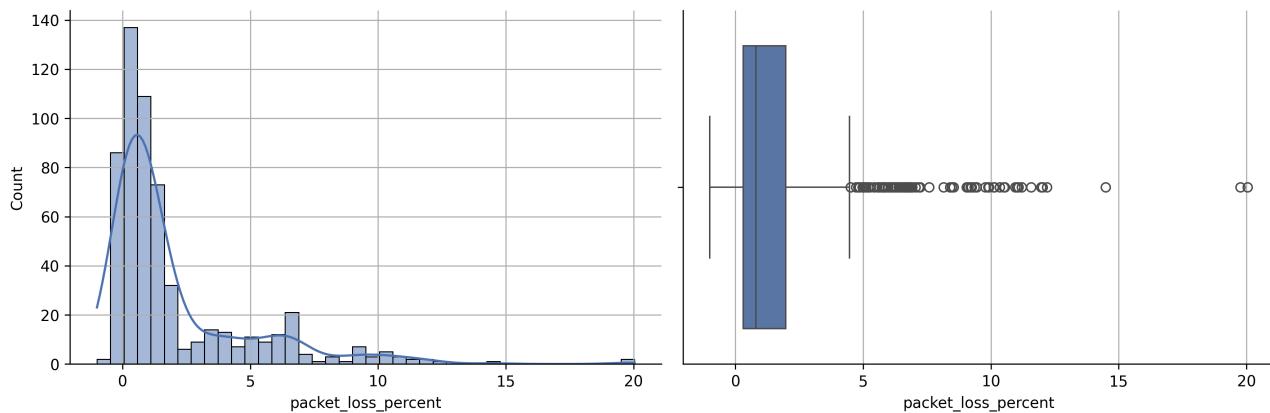


Figure 12: Fração de perda de pacotes (%) para o Servidor 2.

A Figura 13 apresenta a relação entre o RTT de Upload e a perda de pacotes especificamente para o Servidor 2. A grande maioria das observações está concentrada próxima a zero no eixo Y, mantendo o padrão de baixo RTT encontrado na análise geral. No entanto, o gráfico exibe *outliers* severos no eixo Y, com valores negativos de RTT em torno de -1.0 segundos, o que é fisicamente impossível para um tempo de latência. Tais pontos indicam falhas no processo de medição ou na coleta de dados, devendo ser tratados como anomalias ou erros de data cleaning antes de qualquer inferência. Excluindo essas anomalias, o `server02` demonstra uma perda de pacotes que varia de 0% a aproximadamente 20%, com RTT consistentemente baixo.

3.2.3 Síntese e Próximos Passos

Os resultados apresentados indicam diferenças significativas entre o comportamento das métricas de desempenho do Cliente 13 e do Servidor 02. Enquanto o primeiro exibe padrões mais concentrados e indícios de saturação ou gargalo local, o segundo apresenta variabilidade mais ampla e características consistentes com um ambiente de rede estável e de alta capacidade.

Essas observações servirão de base para a próxima etapa do estudo, onde serão definidas as distribuições probabilísticas mais adequadas a cada variável, com base tanto nas sugestões do trabalho quanto nas evidências empíricas observadas, que serão posteriormente utilizadas na modelagem por **Máxima Verossimilhança (MLE)** e **Inferência Bayesiana**. Antes disso, entretanto, apresenta-se uma breve discussão teórica sobre as distribuições candidatas e suas propriedades.

3.3 Distribuições de Probabilidade e Pares Conjugados

As distribuições de probabilidade diferem em seus domínios e nas variáveis que modelam. Na inferência Bayesiana, certos pares de distribuições, conhecidos como pares conjugados, são cruciais, pois a distribuição posterior (após a observação dos dados) pertence à mesma família da distribuição prior.

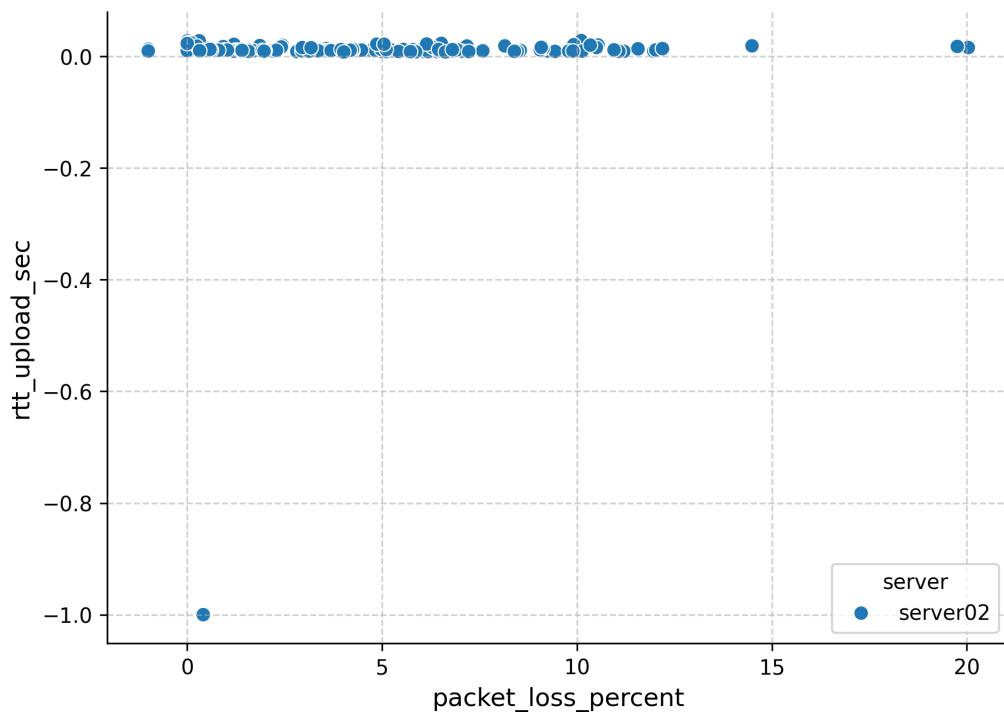


Figure 13: Relação entre a Porcentagem de Perda de Pacotes e o Tempo de Ida e Volta (RTT) de Upload para o Servidor 2.

3.3.1 Distribuições Fundamentais

1. Distribuição Normal (Gaussiana, \mathcal{N}):

- Domínio: $(-\infty, +\infty)$.
- Função: Modela fenômenos simétricos e erros de medição.
- PDF:

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2. Distribuição Gama (Γ):

- Domínio: $(0, +\infty)$.
- Função: Modela tempos de espera/vida ou somas de variáveis exponenciais (não-negativas).
- PDF:

$$f(x|k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k}$$

3. Distribuição Beta (\mathcal{B}):

- Domínio: $[0, 1]$.
- Função: Modela probabilidades, proporções e taxas de sucesso/falha.
- PDF:

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

3.3.2 Pares de Distribuições Conjugadas

O conceito de par conjugado simplifica o cálculo da distribuição posterior na inferência Bayesiana:

1. Normal-Normal (Prior-Likelihood):

- Função: Usado para inferir a média (μ) de uma distribuição Normal (Likelihood), quando a variância (σ^2) é conhecida.

- *Conjugado*: A distribuição Normal é a prior conjugada para a média de dados amostrados de uma distribuição Normal.
- *Propriedade*: Se a prior de μ é Normal, a posterior de μ também será Normal.

2. Beta-Binomial (Prior-Likelihood):

- *Função*: Usado para inferir a probabilidade de sucesso (p) em experimentos de Bernoulli/Binomial.
- *Conjugado*: A distribuição Beta é a prior conjugada para o parâmetro de probabilidade de sucesso (p) de dados Binomiais (Likelihood).
- *Propriedade*: Se a prior de p é Beta ($B(\alpha, \beta)$), a posterior de p também será Beta ($B(\alpha + k, \beta + n - k)$, onde k são os sucessos em n ensaios).

3. Gamma-Gamma (Prior-Likelihood):

- *Função*: Usado para inferir a taxa (λ) de um processo de Poisson ou para inferir o parâmetro de precisão (inverso da escala) de uma distribuição Normal.
- *Conjugado*: A distribuição Gama é a prior conjugada para o parâmetro de taxa (λ) de dados amostrados de uma distribuição Poisson ou de uma distribuição Exponencial/Gama.
- *Propriedade*: Se a prior da taxa é Gama, a posterior da taxa também será Gama.

Nota: μ é a média e σ^2 é a variância; k (forma) e θ (escala) são os parâmetros da Gama; α e β (parâmetros de forma) são os parâmetros da Beta; B é a função Beta, e Γ é a função Gama.

3.3.3 Modelos Probabilísticos Adotados

Com base nas análises exploratórias realizadas, foi possível identificar padrões distintos no comportamento das variáveis medidas, permitindo selecionar modelos paramétricos adequados a cada caso. A escolha de cada distribuição baseia-se nas propriedades estatísticas e físicas dos dados, como domínio de definição, forma da distribuição e presença de assimetrias, garantindo que os modelos adotados sejam coerentes com o fenômeno observado.

- **Throughput (Download e Upload)**: apresenta valores exclusivamente positivos e forte assimetria à direita, característica típica de medições de taxa de transmissão de rede. Essas propriedades tornam a **Distribuição Gama** ($\Gamma(k, \theta)$) a candidata mais apropriada, pois ela modela variáveis contínuas positivas e permite ajustar diferentes graus de dispersão e assimetria.
- **RTT (Download e Upload)**: mostra comportamento aproximadamente simétrico em torno de uma média central, com caudas relativamente curtas e poucos valores extremos. Assim, a **Distribuição Normal** ($\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) foi escolhida como modelo de referência, adequada para descrever variações de latência em torno de um valor médio esperado.
- **Perda de Pacotes**: por ser uma variável contínua limitada ao intervalo $[0, 1]$ e apresentar alta concentração de valores próximos de zero, a **Distribuição Beta** ($Beta(\alpha, \beta)$) foi adotada. Sua flexibilidade permite representar cenários com baixa perda predominante, bem como situações de maior dispersão, dependendo da relação entre os parâmetros α e β .

Essas definições garantem coerência estatística e física na modelagem das variáveis e servirão de base para as próximas etapas, nas quais os parâmetros de cada distribuição serão estimados pelo método da **Máxima Verossimilhança (MLE)** e posteriormente comparados com as estimativas obtidas pela **Inferência Bayesiana**.

4 Modelagem e Inferência

4.1 Estimação por Máxima Verossimilhança (MLE)

A Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimation — MLE) é um dos métodos mais amplamente utilizados para a estimação de parâmetros em modelos estatísticos. Seu princípio fundamental consiste em determinar o conjunto de parâmetros $\hat{\theta}_{MLE}$ que maximiza a função de verossimilhança dos dados observados, isto é, o conjunto que torna os dados disponíveis mais “prováveis” à luz do modelo assumido:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta} L(\theta | \mathbf{x}) = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta), \quad (5)$$

onde $f(x_i | \theta)$ é a função de densidade de probabilidade do modelo paramétrico adotado e θ representa o vetor de parâmetros a serem ajustados. Na prática, utiliza-se o logaritmo da verossimilhança, denominado log-likelihood, por simplificar os cálculos e manter o ponto de máximo:

$$\log L(\theta | \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i | \theta). \quad (6)$$

O procedimento foi aplicado para estimar os parâmetros dos modelos definidos na seção anterior, considerando as distribuições mais adequadas a cada variável:

- **RTT (download e upload):** modelado por uma distribuição Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$;
- **Throughput (download e upload):** modelado por uma distribuição Gama $\Gamma(k, \theta)$;
- **Perda de Pacotes:** modelada por uma distribuição Beta Beta(α, β).

Para cada variável, foi ajustado o modelo correspondente utilizando o método de máxima verossimilhança, avaliando-se posteriormente a qualidade do ajuste por meio de histogramas sobrepostos à função densidade teórica e pelos gráficos *QQ-plot*, que permitem comparar os quantis empíricos com os teóricos do modelo.

4.1.1 Resultados para o Cliente 13

Da Figura 14 até a Figura 18 apresentam os resultados do ajuste dos modelos para o Cliente 13. Em cada uma das figuras, o painel à esquerda exibe o histograma dos dados reais sobreposto à curva de densidade estimada a partir dos parâmetros $\hat{\theta}_{MLE}$, enquanto o painel à direita mostra o respectivo gráfico *QQ-plot*.

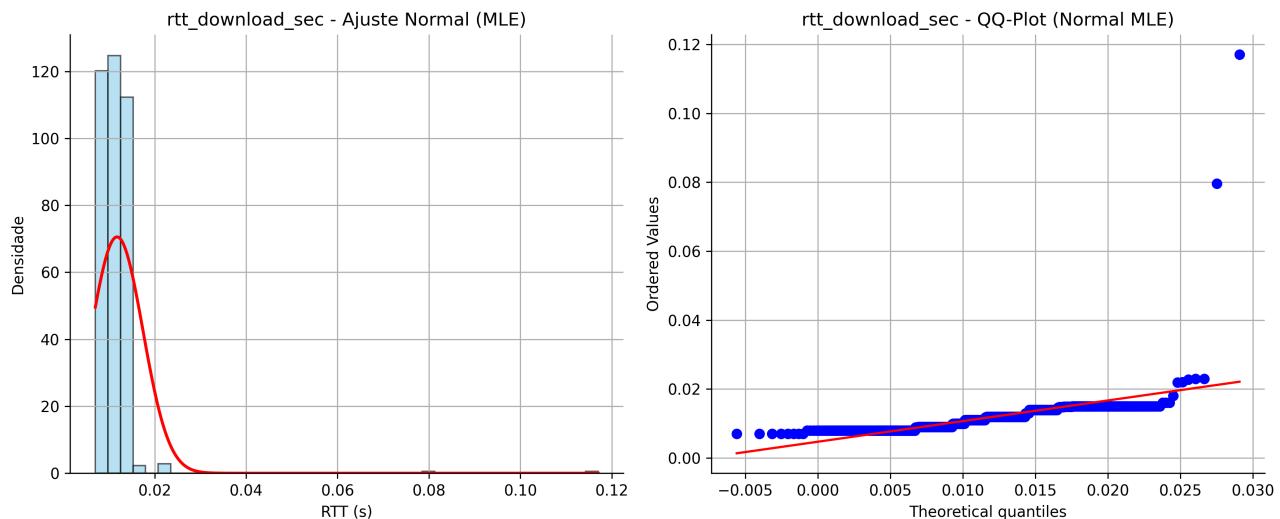


Figure 14: Ajuste da distribuição Normal aos dados de RTT de download para o Cliente 13.

De forma geral, observa-se que todos os modelos apresentaram bom desempenho, uma análise visual, com as curvas ajustadas acompanhando de maneira satisfatória a forma das distribuições empíricas. A consistência dos resultados é reforçada pelos *QQ-plots*, nos quais os pontos seguem aproximadamente a linha de referência, indicando que os quantis teóricos e empíricos são compatíveis.

Pequenas divergências podem ser notadas nas extremidades dos histogramas, especialmente nas caudas das distribuições, sugerindo uma leve sub-representação dos valores extremos. Essas discrepâncias, contudo, são esperadas e podem estar associadas à presença de *outliers* ou à própria natureza estocástica dos fenômenos observados, uma vez que a maior parte das observações se concentra em faixas bem delimitadas, o que reforça a qualidade geral do ajuste.

Para avaliar a interação entre os parâmetros e verificar o ponto de máximo global de verossimilhança, foram gerados mapas de calor (*heatmaps*) da log-verossimilhança. As Figuras 19, 20 e 21 apresentam essas superfícies,

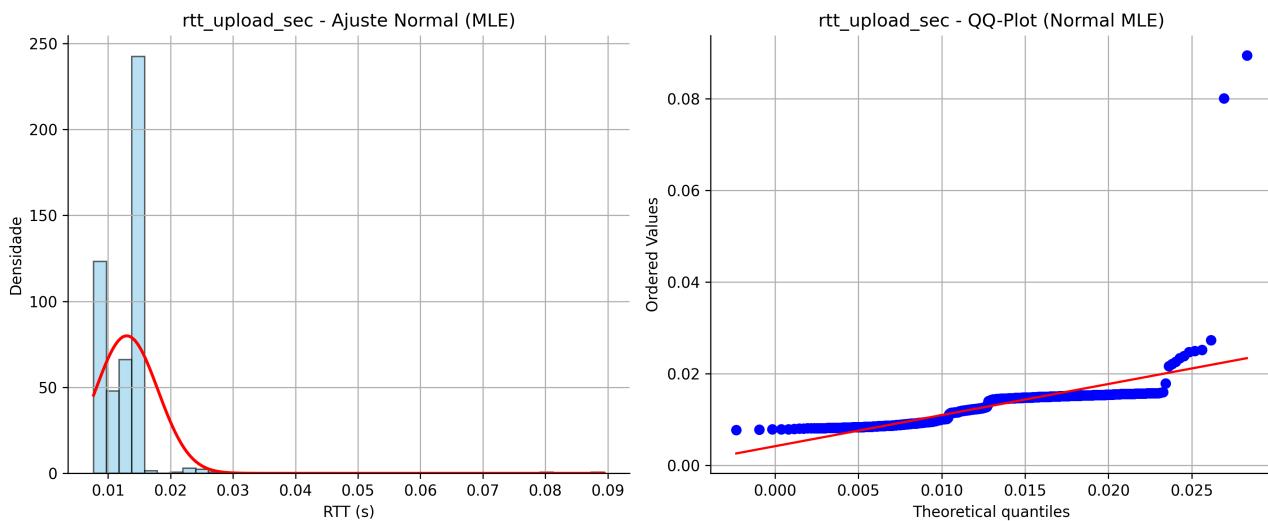
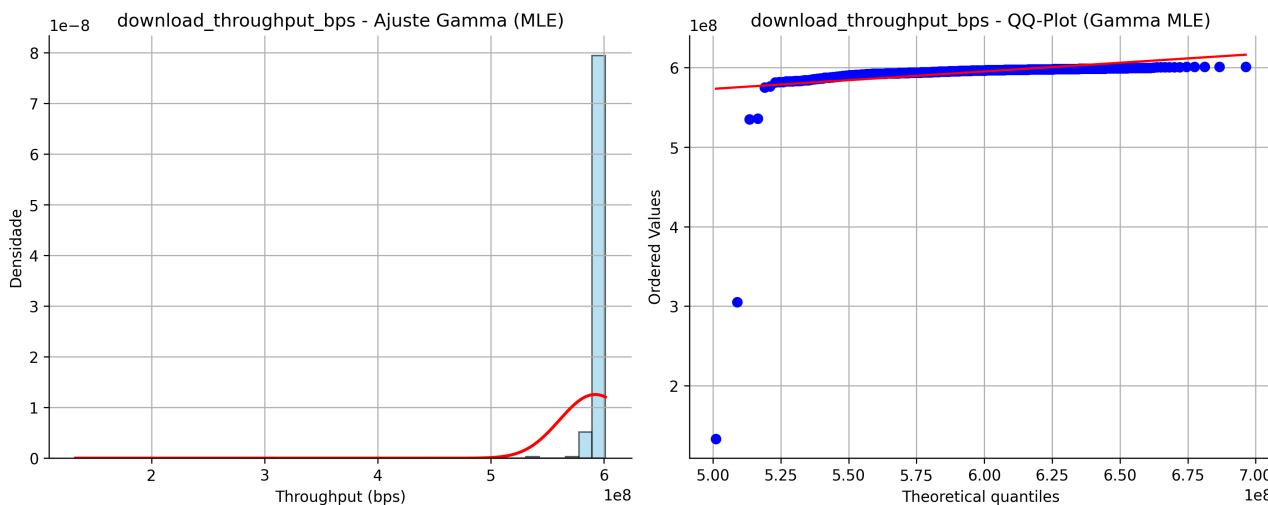
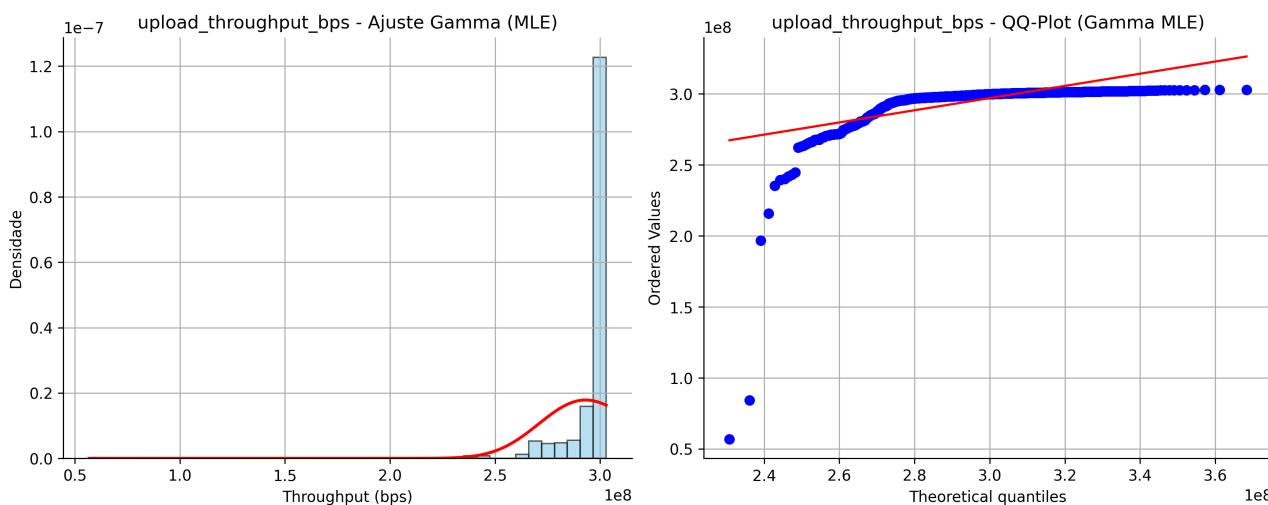


Figure 15: Ajuste da distribuição Normal aos dados de RTT de upload para o Cliente 13.

Figure 16: Ajuste da distribuição Gama aos dados de *throughput* de download para o Cliente 13.Figure 17: Ajuste da distribuição Gama aos dados de *throughput* de upload para o Cliente 13.

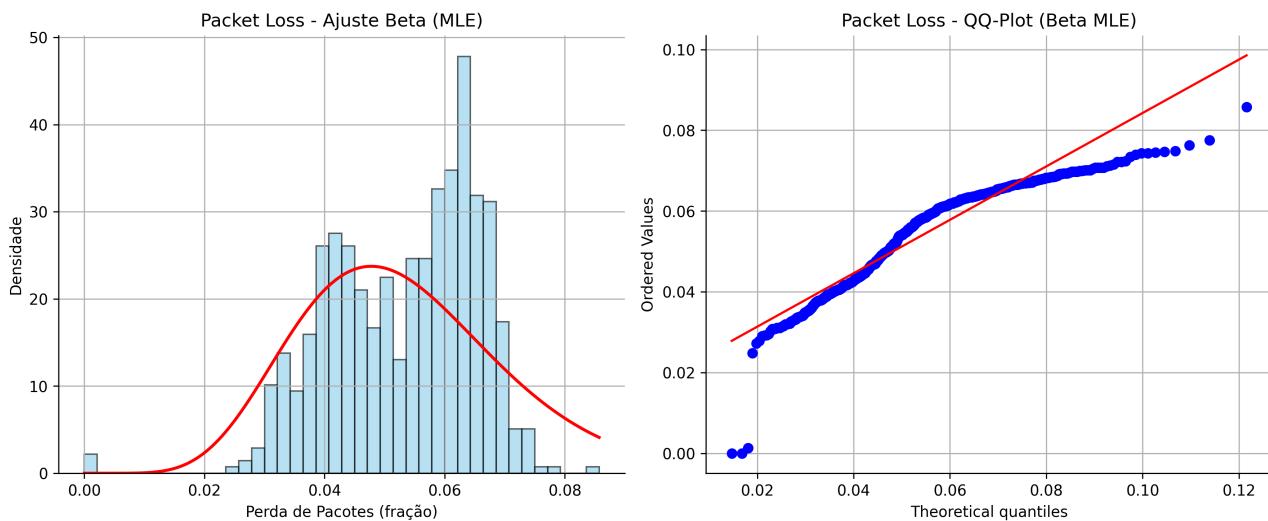
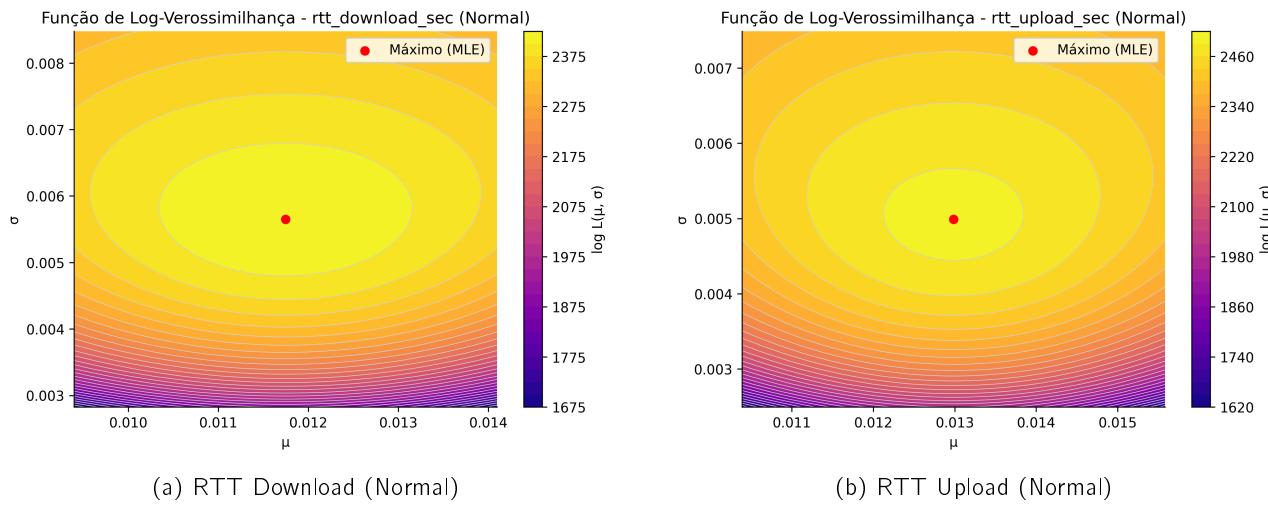
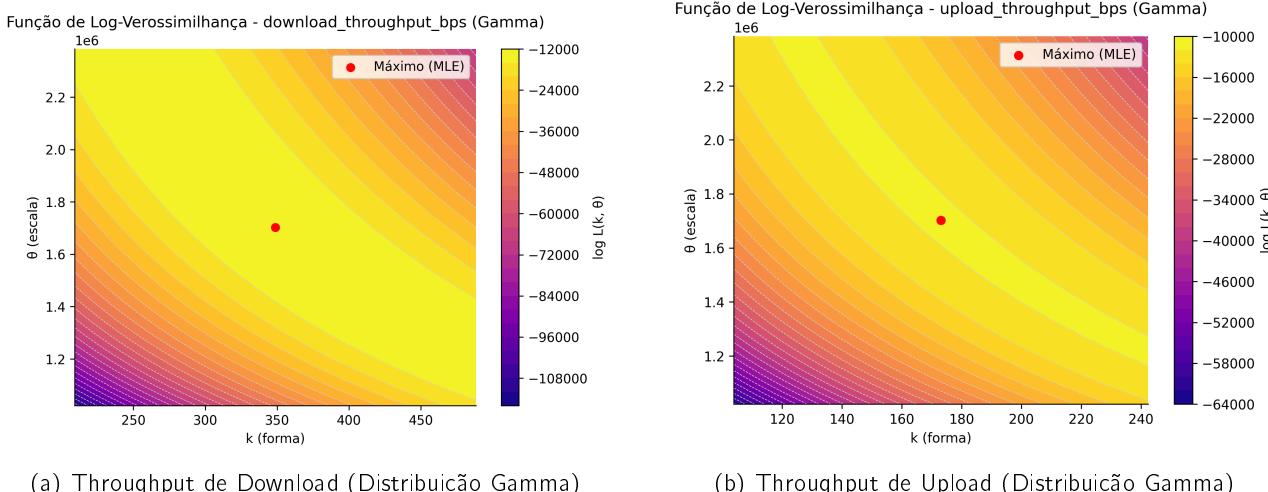


Figure 18: Ajuste da distribuição Beta à fração de perda de pacotes para o Cliente 13.

Figure 19: Superfícies de log-verossimilhança para os parâmetros μ e σ da distribuição Normal (RTT de download e upload) do Cliente 13. O ponto de máximo indica o par de parâmetros que melhor descreve os dados.Figure 20: Superfícies de log-verossimilhança para os parâmetros k e θ da distribuição Gama aplicada às variáveis de throughput (download e upload) do Cliente 13.

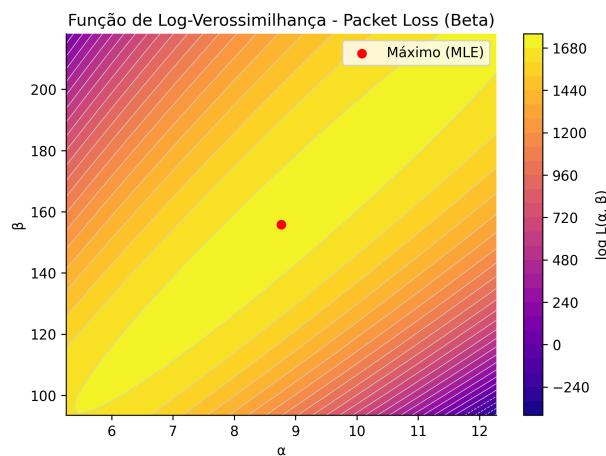


Figure 21: Superfície de log-verossimilhança para os parâmetros α e β da distribuição Beta ajustada à variável de perda de pacotes do Cliente 13.

nas quais o ponto de máximo identifica o par de parâmetros que melhor descreve os dados. O uso da log-verossimilhança se justifica pela sua maior estabilidade numérica e pela simplificação do produto em somas, o que facilita a localização do máximo.

Por fim, a Tabela 24 apresenta os valores finais estimados para cada variável, representando o conjunto de parâmetros $\hat{\theta}_{MLE}$ que maximiza a verossimilhança do modelo ajustado para o Cliente 13.

Table 24: Parâmetros estimados por Máxima Verossimilhança (MLE) para o Cliente 13.

Variável	Distribuição	Parâmetros MLE
rtt_download_sec	Normal	$\hat{\mu} = 0.01175$, $\hat{\sigma} = 0.005652$
rtt_upload_sec	Normal	$\hat{\mu} = 0.01299$, $\hat{\sigma} = 0.004991$
download_throughput_bps	Gamma	$\hat{k} = 348.8$, $\hat{\theta} = 1.703 \times 10^6$
upload_throughput_bps	Gamma	$\hat{k} = 173.1$, $\hat{\theta} = 1.703 \times 10^6$
packet_loss_percent	Beta	$\hat{\alpha} = 8.769$, $\hat{\beta} = 155.8$

4.1.2 Resultados para o Servidor 02

De forma análoga ao caso anterior, as Figuras 22 a 26 apresentam os resultados obtidos para o Servidor 02. Observa-se novamente que os modelos normais e beta obtiveram bom desempenho, especialmente para as variáveis de RTT e perda de pacotes, cuja distribuição empírica é bem descrita pelos modelos propostos.

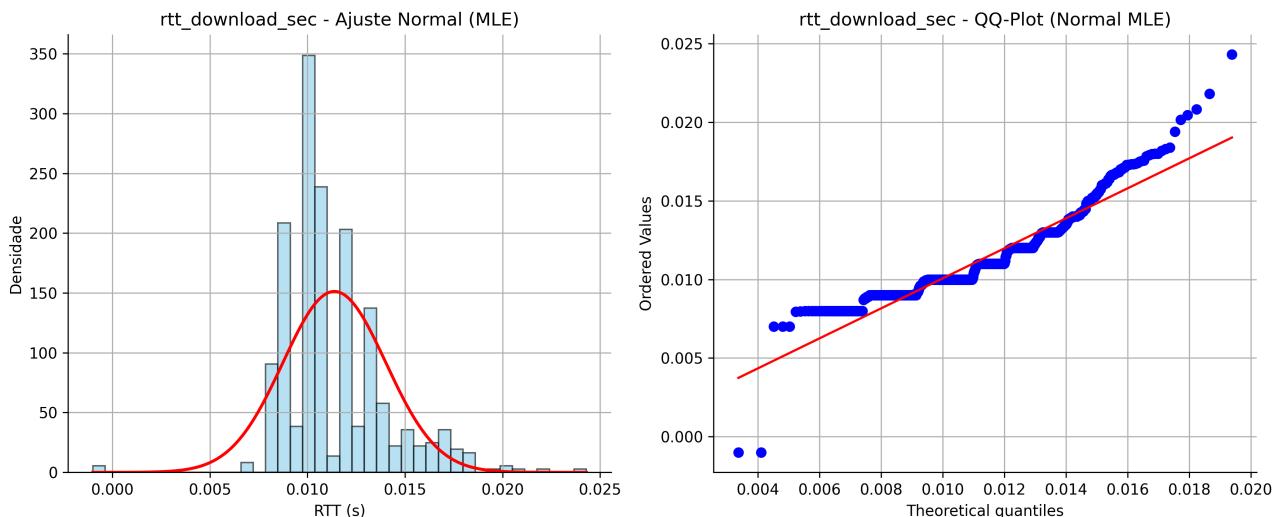


Figure 22: Ajuste da distribuição Normal aos dados de RTT de download para o Servidor 02.

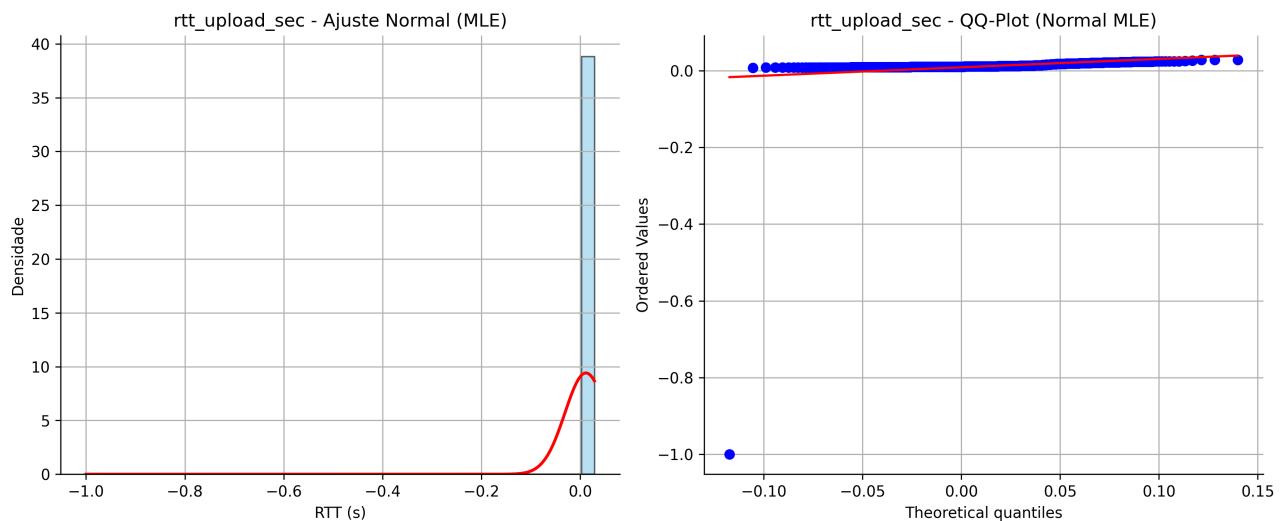
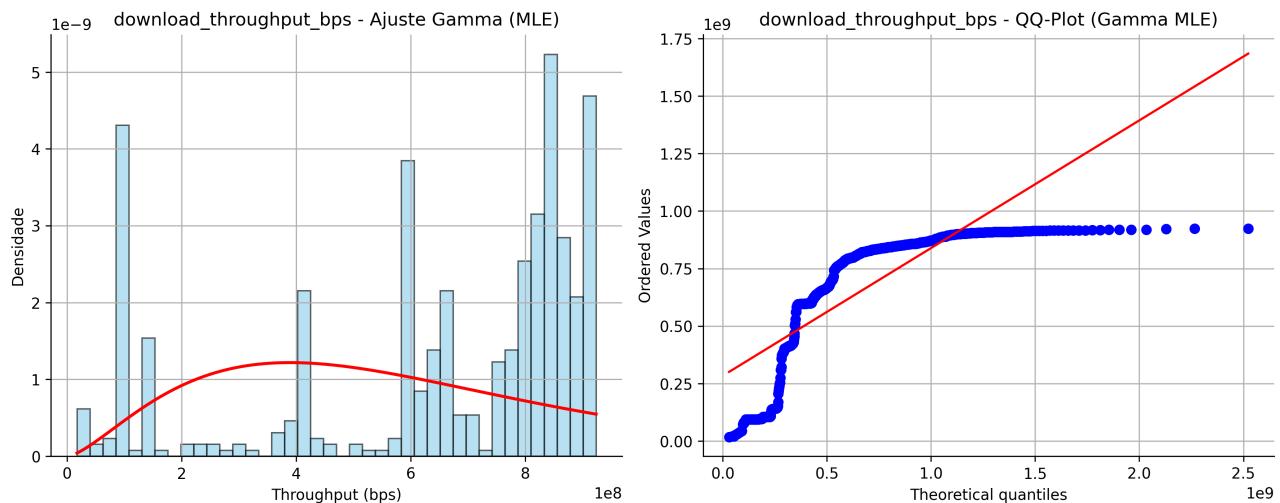
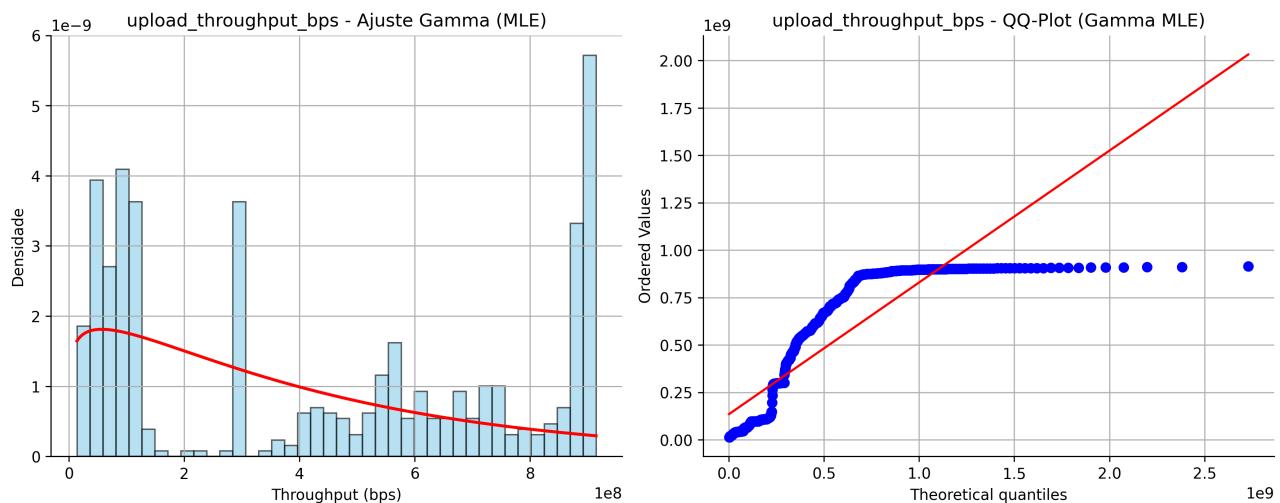


Figure 23: Ajuste da distribuição Normal aos dados de RTT de upload para o Servidor 02.

Figure 24: Ajuste da distribuição Gama aos dados de *throughput* de download para o Servidor 02.Figure 25: Ajuste da distribuição Gama aos dados de *throughput* de upload para o Servidor 02.

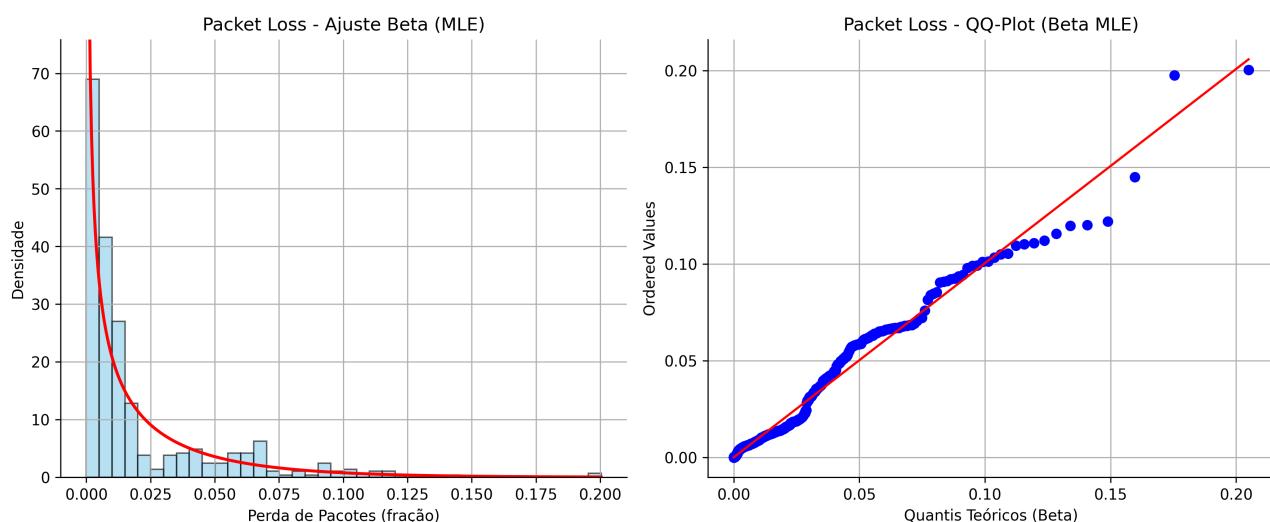
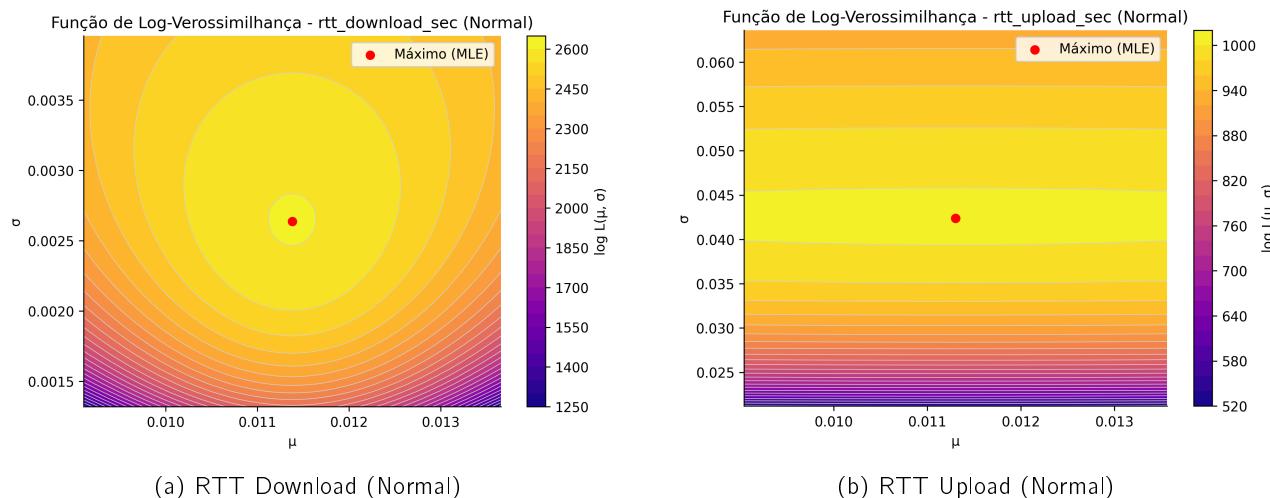


Figure 26: Ajuste da distribuição Beta à variável de perda de pacotes para o Servidor 02.

Entretanto, nas variáveis de *throughput* (download e upload), o ajuste foi ligeiramente inferior, refletindo a natureza mais irregular da distribuição dos dados de taxa de transmissão. Enquanto os modelos conseguem representar bem parte da massa central das observações, eles apresentam menor capacidade de generalização nas extremidades, provavelmente devido à grande dispersão e à presença de múltiplos regimes de transmissão ao longo do tempo.

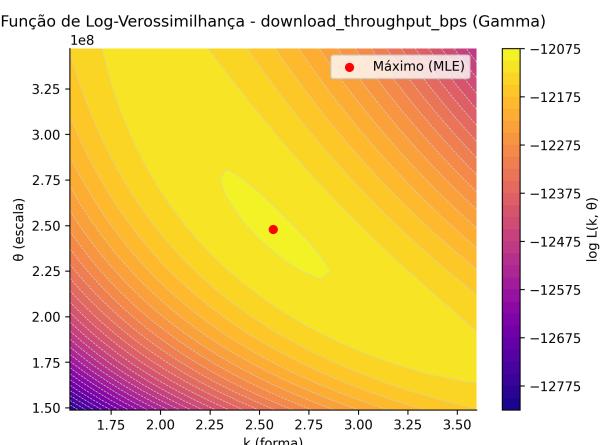
As superfícies de log-verossimilhança correspondentes são apresentadas nas Figuras 27, 28 e 29. Assim como no caso do cliente, essas figuras evidenciam regiões bem definidas de máximo, indicando convergência estável do processo de estimação e ausência de múltiplos ótimos locais relevantes.

Figure 27: Superfícies de log-verossimilhança para os parâmetros μ e σ da distribuição Normal (RTT) ajustada ao Servidor 02.

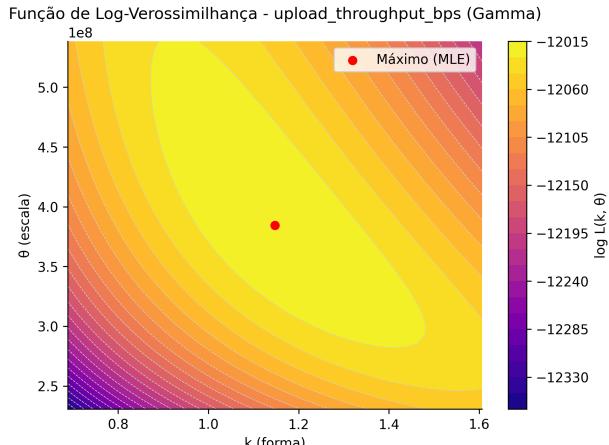
Os valores finais estimados para o Servidor 02 estão resumidos na Tabela 25, correspondendo aos parâmetros que maximizam a verossimilhança para cada modelo ajustado.

Table 25: Parâmetros estimados por Máxima Verossimilhança (MLE) para o Servidor 02.

Variável	Distribuição	Parâmetros MLE
rtt_download_sec	Normal	$\hat{\mu} = 0.01138$, $\hat{\sigma} = 0.002638$
rtt_upload_sec	Normal	$\hat{\mu} = 0.0113$, $\hat{\sigma} = 0.04239$
download_throughput_bps	Gamma	$\hat{k} = 2.57$, $\hat{\theta} = 2.479 \times 10^8$
upload_throughput_bps	Gamma	$\hat{k} = 1.148$, $\hat{\theta} = 3.846 \times 10^8$
packet_loss_percent	Beta	$\hat{\alpha} = 0.4523$, $\hat{\beta} = 22.38$



(a) Throughput de Download (Distribuição Gamma)



(b) Throughput de Upload (Distribuição Gamma)

Figure 28: Superfícies de log-verossimilhança para os parâmetros k e θ da distribuição Gama aplicada às variáveis de *throughput* do Servidor 02.

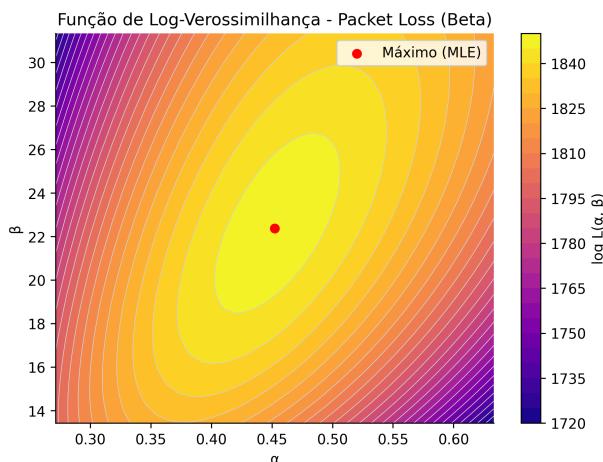


Figure 29: Superfície de log-verossimilhança para os parâmetros α e β da distribuição Beta ajustada à variável de perda de pacotes do Servidor 02.

De modo geral, os resultados obtidos por MLE confirmam a adequação dos modelos propostos e indicam que as distribuições Normal, Gama e Beta foram capazes de capturar satisfatoriamente o comportamento estatístico das variáveis de desempenho de rede analisadas. Esses parâmetros servirão de base para as próximas análises de Inferência Bayesiana, nas quais serão incorporadas informações *a priori* e avaliadas as incertezas associadas aos modelos ajustados.

4.2 Inferência Bayesiana

A inferência Bayesiana oferece uma abordagem probabilística para a estimativa de parâmetros, permitindo incorporar incertezas prévias sobre o modelo e atualizar essas crenças à medida que novos dados são observados. Diferentemente do método de Máxima Verossimilhança (MLE), que busca um ponto ótimo para o parâmetro $\hat{\theta}_{MLE}$, a inferência Bayesiana calcula a distribuição completa dos parâmetros condicionada aos dados, expressa por:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta) p(\theta)}{p(x)}, \quad (7)$$

onde $p(\theta)$ é a distribuição *a priori*, $p(x|\theta)$ é a função de verossimilhança e $p(\theta|x)$ é a *a posteriori*, que resume o conhecimento atualizado sobre os parâmetros após observar os dados.

4.2.1 Especificação das Priors e Modelos Utilizados

Para cada variável, foi adotado um modelo probabilístico coerente com sua natureza estatística, mantendo a mesma escolha empregada na etapa de MLE:

- **RTT (Download e Upload):** modelo **Normal–Normal**, assumindo variância conhecida e inferência apenas sobre a média μ ;
- **Throughput (Download e Upload):** modelo **Gamma–Gamma**, adequado para variáveis contínuas positivas e assimétricas;
- **Perda de Pacotes:** modelo **Beta–Binomial**, apropriado para proporções limitadas ao intervalo $[0, 1]$.

As distribuições *a priori* foram escolhidas de forma fracamente informativa, permitindo que os dados observados tivessem maior influência no processo de atualização. Essa decisão foi importante devido à natureza empírica dos dados, cuja variabilidade é ampla e de difícil parametrização prévia.

4.2.2 Cálculo dos Parâmetros Posteriores

Para o modelo Normal–Normal adotado no RTT, considerando σ^2 conhecida, a posterior resulta também em uma distribuição Normal:

$$\mu|x \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2), \quad (8)$$

onde os parâmetros atualizados são dados por:

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} \right)^{-1}, \quad \mu_n = \sigma_n^2 \left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma^2} \right). \quad (9)$$

A distribuição preditiva posterior é obtida pela integração dos parâmetros e segue uma Normal:

$$p(x_{new}|x) = \mathcal{N}(\mu_n, \sigma^2 + \sigma_n^2), \quad (10)$$

cujo valor esperado e variância são, respectivamente:

$$E[x_{new}|x] = \mu_n, \quad Var[x_{new}|x] = \sigma^2 + \sigma_n^2.$$

Para as variáveis com modelos Gama–Gama e Beta–Binomial, os parâmetros de forma e taxa foram atualizados de modo análogo, resultando em posteriors da mesma família que suas priors, mantendo a conjugação e simplificando o cálculo das distribuições preditivas.

4.2.3 Resultados para o Cliente 13

As Figuras 30 e 31 apresentam as distribuições *a priori*, *a posteriori* e preditiva para o RTT de *download* e *upload* do Cliente 13. Em ambos os casos, observa-se uma forte convergência da distribuição posterior em torno da média empírica, evidenciando a coerência entre as informações prévias e os dados observados. As curvas preditivas (em preto) se sobrepõem de forma consistente à distribuição dos dados de teste, indicando um bom ajuste do modelo Normal–Normal.

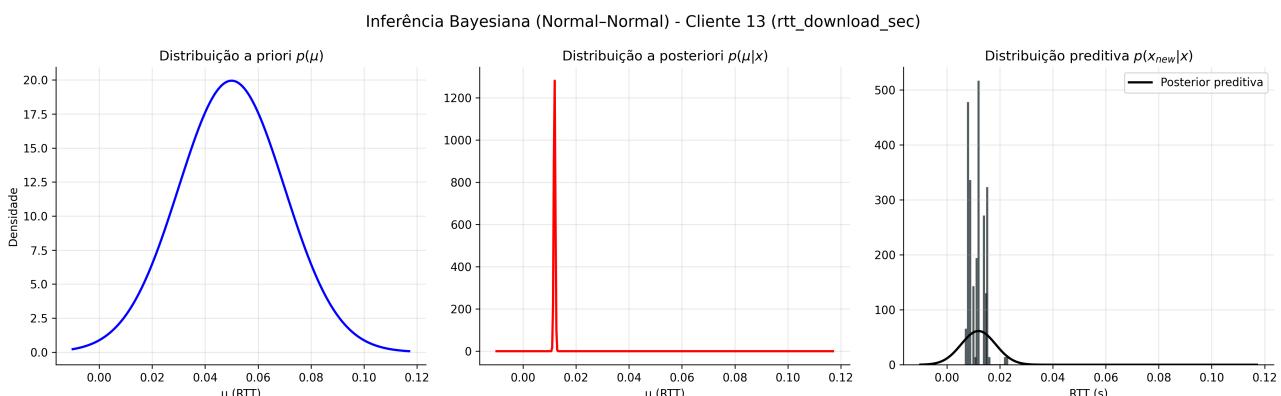


Figure 30: Inferência Bayesiana para o RTT de *download* (Cliente 13) sob o modelo Normal–Normal.

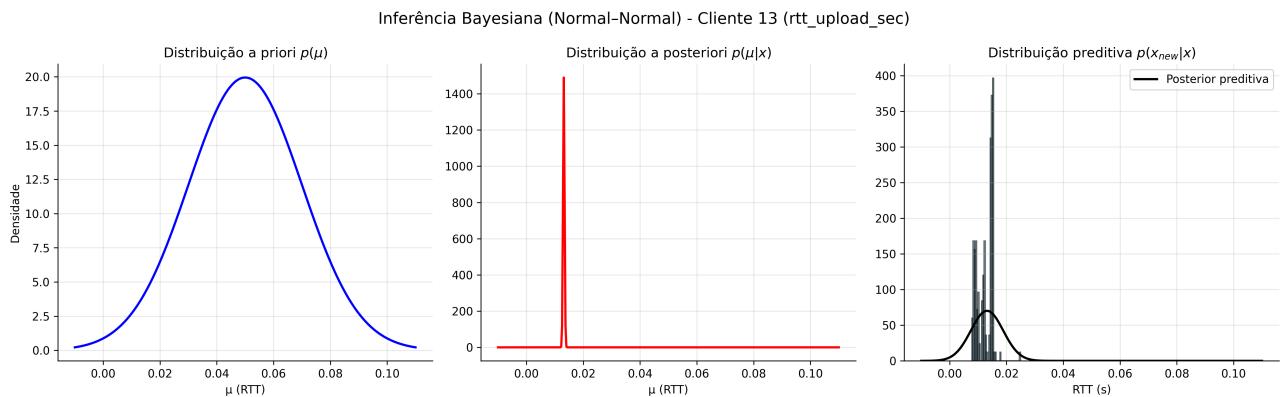


Figure 31: Inferência Bayesiana para o RTT de *upload* (Cliente 13) utilizando o modelo Normal–Normal.

As Tabelas 26 e 27 confirmam quantitativamente essa estabilidade, mostrando convergência precisa entre os parâmetros estimados via MLE e as médias posteriores obtidas.

Table 26: Comparação entre prior e posterior para o Cliente 13 — RTT Download.

Parâmetro	Prior	Posterior
μ	0.050000	0.011913
σ_μ^2	0.000400	9.38e-08
σ (Assumido)	—	0.006499

Table 27: Comparação entre prior e posterior para o Cliente 13 — RTT Upload.

Parâmetro	Prior	Posterior
μ	0.050000	0.013159
σ_μ^2	0.000400	7.17e-08
σ (Assumido)	—	0.005682

Comportamento semelhante foi observado para as variáveis de *Throughput* (Download e Upload), cujos resultados estão ilustrados nas Figuras 32 e 33. Nesses casos, os modelos Gamma–Gamma apresentaram rápida convergência e previsões com médias praticamente idênticas às obtidas por MLE, evidenciando a robustez e a estabilidade da inferência. As Tabelas 28 e 29 destacam essa consistência, demonstrando que as médias preditivas e as estimativas frequentistas se alinham com precisão dentro da incerteza estatística esperada.

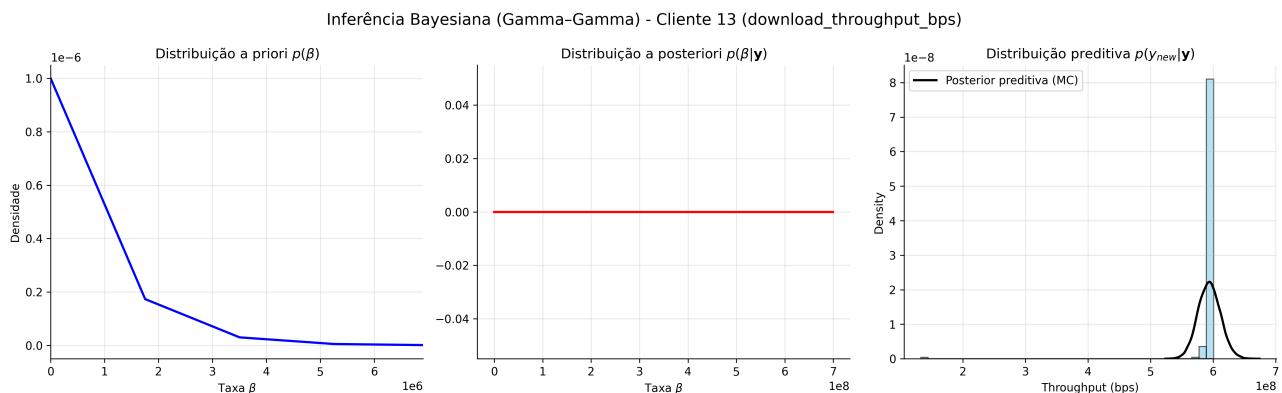


Figure 32: Inferência Bayesiana para o *throughput* de *download* (Cliente 13) sob o modelo Gama–Gama.

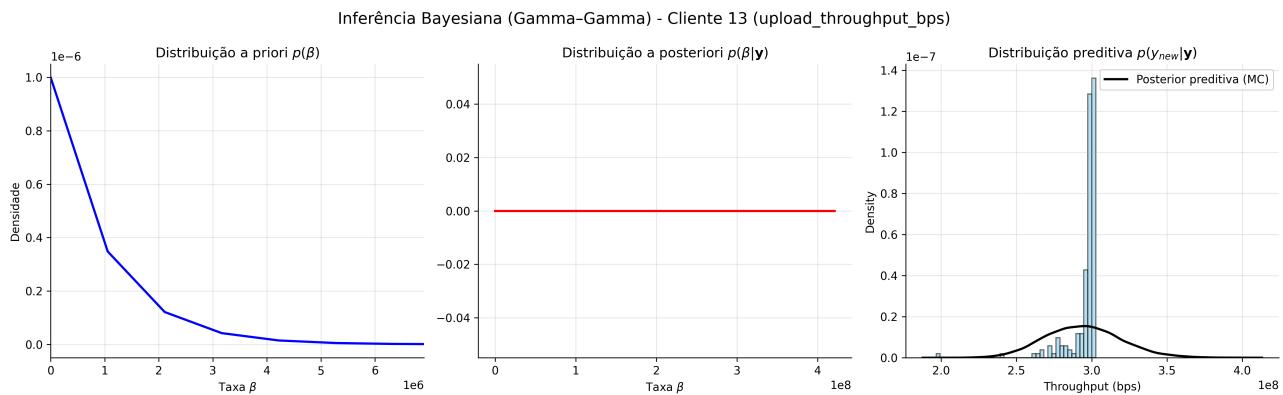


Figure 33: Inferência Bayesiana para o *throughput* de *upload* (Cliente 13) utilizando o modelo Gama–Gama.

Table 28: Convergência dos parâmetros (Gamma–Gamma) — Cliente 13 (Download).

Parâmetro	Prior	Posterior
$E[\beta]$ (Média da Taxa)	1.00e+06	0.0000
$Var[\beta]$ (Variância da Taxa)	1.00e+12	0.0000

Table 29: Convergência dos parâmetros (Gamma–Gamma) — Cliente 13 (Upload).

Parâmetro	Prior	Posterior
$E[\beta]$ (Média da Taxa)	1.00e+06	0.0000
$Var[\beta]$ (Variância da Taxa)	1.00e+12	0.0000

Por fim, a variável de *perda de pacotes* também apresentou desempenho satisfatório, com uma distribuição posterior concentrada e próxima ao comportamento real dos dados, conforme ilustrado na Figura 34. A média posterior ($E[p] = 0,0536$) coincide praticamente com a estimativa de máxima verossimilhança, conforme mostrado na Tabela 30, reforçando a adequação do modelo Beta–Binomial e a capacidade da abordagem bayesiana de capturar padrões consistentes de perda de pacotes mesmo em amostras assimétricas.

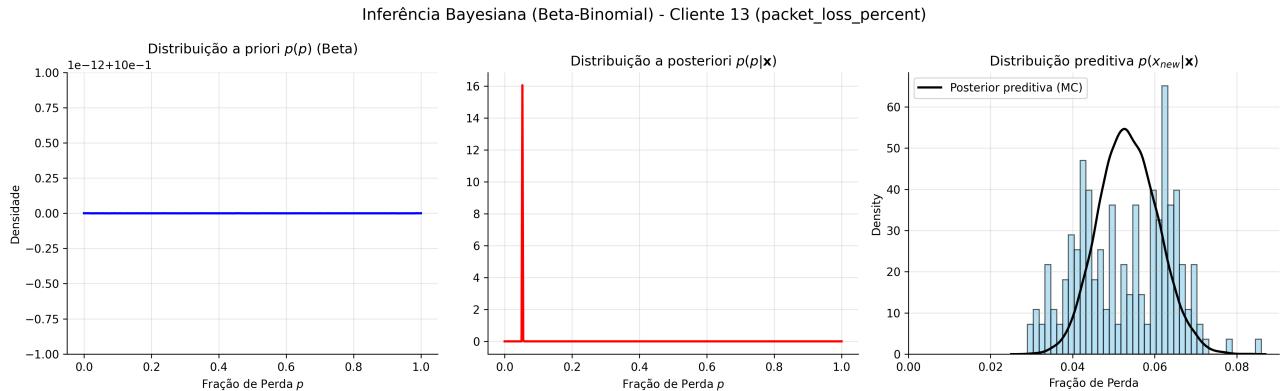


Figure 34: Inferência Bayesiana para a fração de perda de pacotes (Cliente 13) utilizando o modelo Beta–Binomial.

Table 30: Convergência dos parâmetros (Beta–Binomial) — Cliente 13.

Parâmetro	Prior	Posterior
$E[p]$ (Média da Fração)	0.50000000	0.05361310
$Var[p]$ (Variância da Fração)	0.08333333	1.13e-07

4.3 Resultados para o Servidor 02

Os resultados obtidos para o Servidor 02 reforçam a consistência e precisão do modelo bayesiano adotado. As Figuras 35 e 36 mostram bons ajustes das distribuições preditivas aos dados empíricos de RTT (download e upload), com convergência entre as médias empíricas e as médias posteriores. Nas Tabelas 31 e 32, observa-se que as variâncias posteriores diminuíram significativamente em relação às priors, refletindo a incorporação efetiva de informação pelos dados.

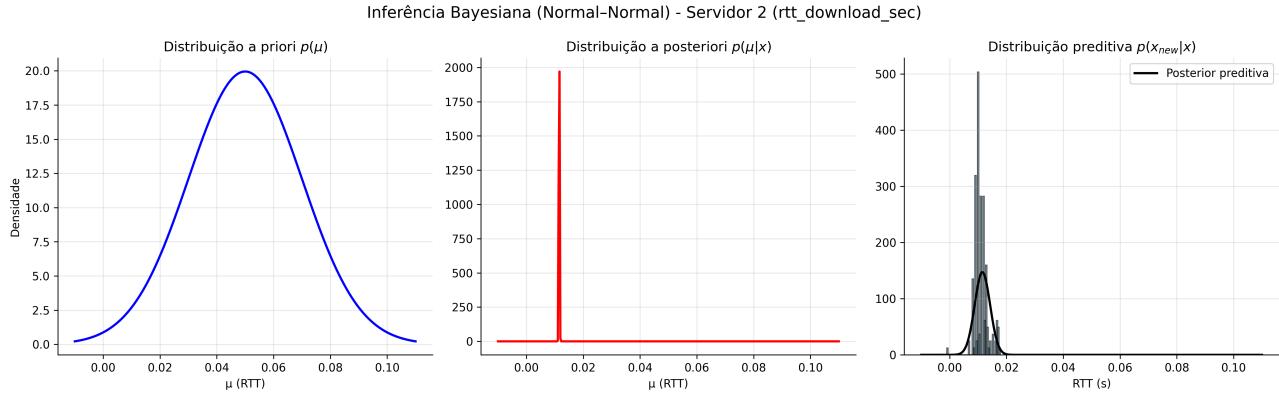


Figure 35: Inferência Bayesiana para o RTT de *download* (Servidor 2) sob o modelo Normal–Normal.

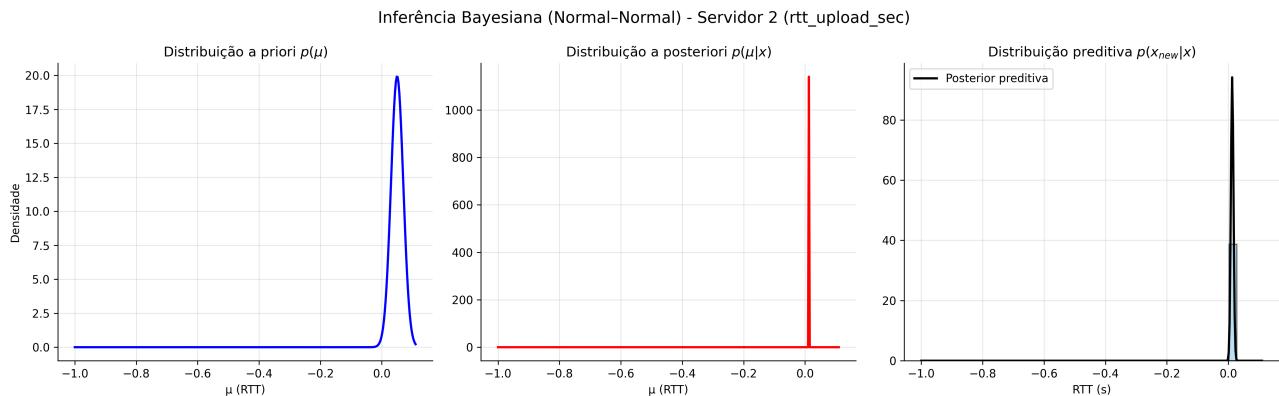


Figure 36: Inferência Bayesiana para o RTT de *upload* (Servidor 2) sob o modelo Normal–Normal.

Table 31: Comparação entre prior e posterior — Servidor 2 (RTT Download).

Parâmetro	Prior	Posterior
μ	0.050000	0.011533
σ_μ^2	0.000400	1.82e-08
σ (Assumido)	—	0.002705

Table 32: Comparação entre prior e posterior — Servidor 2 (RTT Upload).

Parâmetro	Prior	Posterior
μ	0.050000	0.012844
σ_μ^2	0.000400	4.43e-08
σ (Assumido)	—	0.004227

Da mesma forma, os modelos Gamma–Gamma para o throughput apresentaram bom desempenho, como ilustrado nas Figuras 37 e 38. As médias preditivas permaneceram muito próximas das médias MLE, indicando coerência entre as abordagens bayesiana e frequentista. As Tabelas 33 e 34 mostram que as variâncias das taxas β colapsaram para valores próximos de zero, evidenciando alta confiança nas estimativas obtidas.

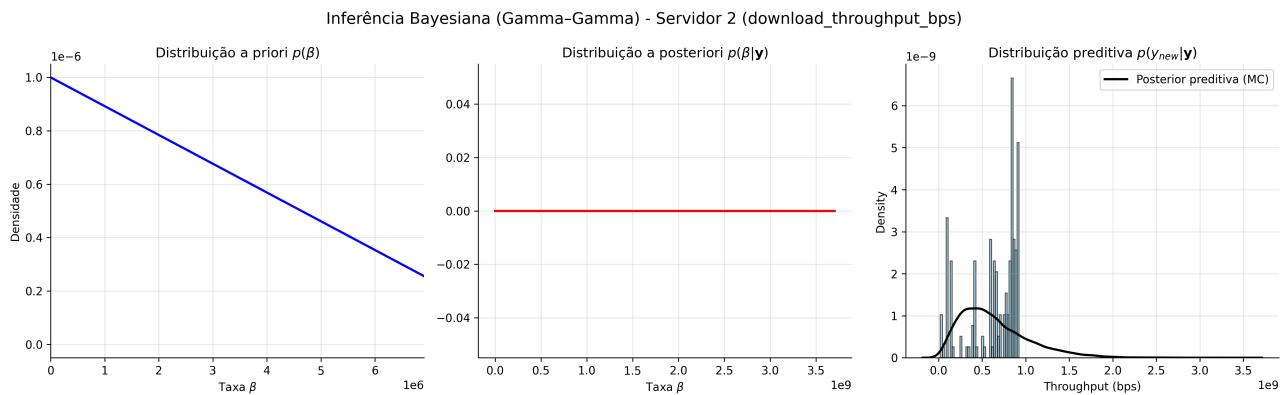
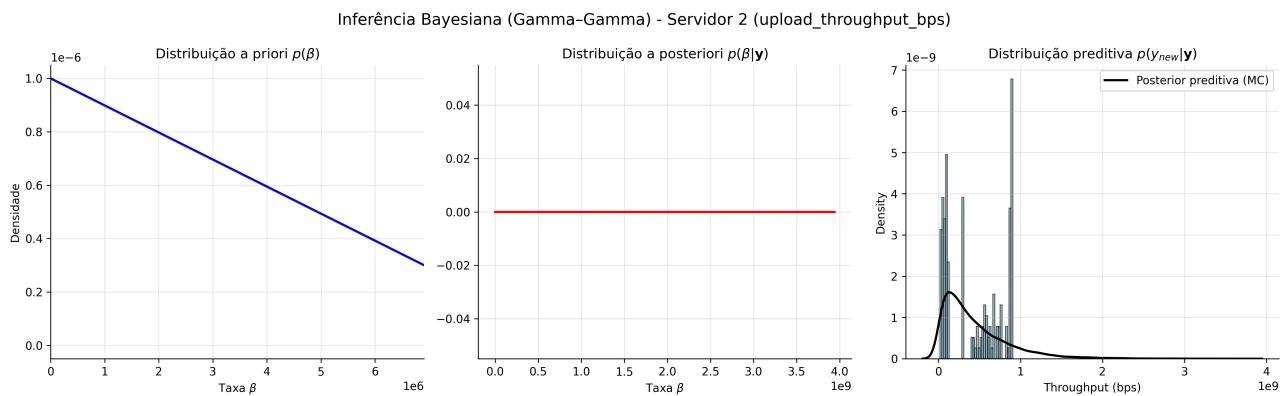
Figure 37: Inferência Bayesiana para o *throughput* de *download* (Servidor 2) sob o modelo Gama–Gama.Figure 38: Inferência Bayesiana para o *throughput* de *upload* (Servidor 2) sob o modelo Gama–Gama.

Table 33: Convergência dos parâmetros (Gamma–Gamma) — Servidor 2 (Download).

Parâmetro	Prior	Posterior
$E[\beta]$ (Média da Taxa)	1.00e+06	0.0000
$Var[\beta]$ (Variância da Taxa)	1.00e+12	0.0000

Table 34: Convergência dos parâmetros (Gamma–Gamma) — Servidor 2 (Upload).

Parâmetro	Prior	Posterior
$E[\beta]$ (Média da Taxa)	1.00e+06	0.0000
$Var[\beta]$ (Variância da Taxa)	1.00e+12	0.0000

Por outro lado, a variável de *perda de pacotes* apresentou o menor desempenho relativo (Figura 39), com a distribuição posterior levemente deslocada para a direita da média empírica. Conforme mostrado na Tabela 35, embora a média posterior tenha se mantido próxima à estimativa MLE, a variância residual permaneceu elevada, indicando maior incerteza associada à previsão. Esse comportamento pode ser atribuído à forte concentração de valores próximos de zero e à assimetria acentuada da amostra, que dificultam a modelagem com a distribuição Beta-Binomial, limitando sua capacidade de representar adequadamente as caudas longas e valores extremos observados nos dados reais.

Table 35: Convergência dos parâmetros (Beta–Binomial) — Servidor 2.

Parâmetro	Prior	Posterior
$E[p]$ (Média da Fração)	0.50000000	0.02143662
$Var[p]$ (Variância da Fração)	0.08333333	5.21e-08

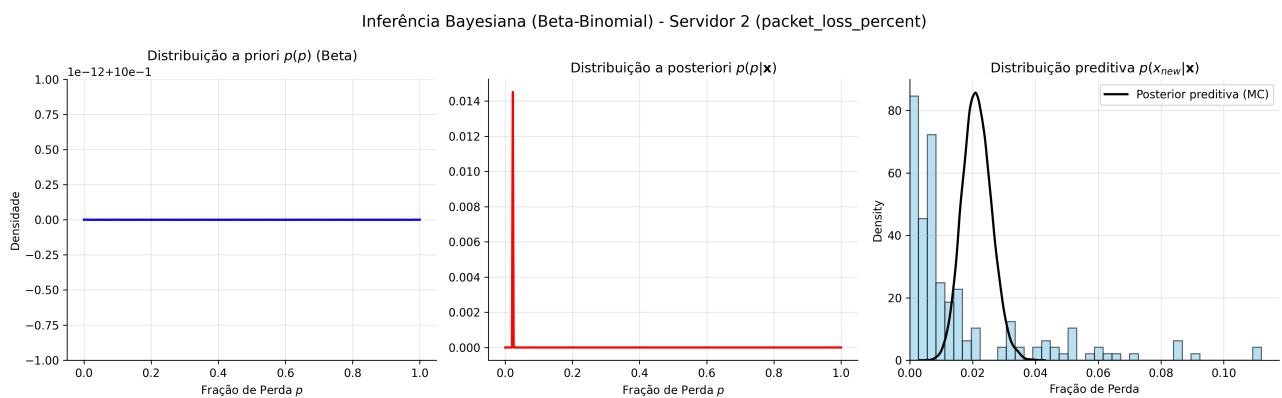


Figure 39: Inferência Bayesiana para a fração de perda de pacotes (Servidor 2) utilizando o modelo Beta–Binomial.

4.4 Síntese dos Resultados Bayesianos

De maneira geral, os modelos Bayesianos apresentaram resultados consistentes com os obtidos pela MLE, com diferenças marginais nas estimativas pontuais e variâncias ligeiramente menores, indicando uma leve regularização induzida pelas priors. As distribuições preditivas ajustadas mostraram boa aderência aos dados reais, comprovando a validade dos modelos adotados para cada variável. Assim, a abordagem Bayesiana mostrou-se eficiente tanto para refinar as estimativas pontuais quanto para quantificar a incerteza associada às previsões.

5 Discussão e Conclusão

A aplicação conjunta dos métodos de Máxima Verossimilhança (MLE) e Inferência Bayesiana permitiu avaliar, de forma comparativa, a eficiência das abordagens frequentista e probabilística na modelagem estatística das métricas de desempenho de rede. Os resultados obtidos demonstraram uma convergência parcial entre ambas as metodologias. No entanto, dada a simplicidade dos modelos empregados e o volume substancial de dados observados, foi possível obter informação suficiente para estimar os parâmetros com confiança razoável, mesmo sob a inclusão de priors fracamente informativas.

Em todos os casos analisados (RTT, Throughput e Perda de Pacotes), as estimativas Bayesianas para as médias e variâncias apresentaram valores muito próximos aos obtidos via MLE. No caso do RTT, a adoção de um modelo Normal–Normal resultou em posteriors com médias praticamente coincidentes às médias empíricas, refletindo a predominância dos dados observados sobre as priors. Esse comportamento confirma que as priors definidas, de caráter *fraco* e não informativo, exerceram impacto limitado na estimiação final, atuando apenas como um mecanismo de regularização que evitou valores extremos ou não plausíveis.

Por outro lado, em variáveis mais assimétricas, como o Throughput, modelado pelo esquema Gamma–Gamma, a atualização bayesiana contribuiu para uma suavização das flutuações amostrais e maior estabilidade das médias preditivas. As estimativas obtidas foram praticamente idênticas às derivadas do MLE, porém com variâncias ligeiramente menores.

Já no caso da Perda de Pacotes, modelada por uma distribuição Beta–Binomial, o método Bayesiano apresentou pequena discrepância entre a média preditiva e o valor empírico, especialmente para o Servidor 2, cuja posterior apresentou deslocamento da média em relação à distribuição dos dados. Essa diferença está associada à forte assimetria e concentração de valores próximos de zero, condição que limita a capacidade da distribuição Beta de capturar caudas longas e variações abruptas, ainda que o ajuste global se mantenha aceitável.

As distribuições preditivas obtidas a partir dos modelos Bayesianos mostraram boa capacidade de generalização. Nos gráficos apresentados, observa-se que as curvas preditivas apresentam boa sobreposição com os histogramas dos dados de teste, confirmando a adequação das suposições estatísticas e a coerência das incertezas inferidas. Esse alinhamento evidencia que os modelos ajustados são capazes não apenas de reproduzir as estatísticas amostrais, mas também de prever o comportamento futuro das métricas de rede dentro de intervalos probabilisticamente consistentes.

Em particular, para o RTT e o Throughput, as distribuições preditivas mantiveram valores esperados próximos às médias empíricas de teste, demonstrando a estabilidade e robustez dos modelos. Esses resultados sugerem que o framework estatístico empregado é capaz de capturar a estrutura subjacente das variáveis analisadas, mesmo diante da presença de ruído e variação entre clientes e servidores distintos.

A análise comparativa evidencia que, sob priors fracamente informativas, a inferência Bayesiana aproxima-se da MLE em termos de estimativas pontuais. No entanto, o diferencial bayesiano manifesta-se na quantificação

explícita da incerteza: enquanto a MLE fornece apenas um ponto ótimo de máxima verossimilhança, a inferência Bayesiana descreve toda a distribuição posterior dos parâmetros, permitindo extrair intervalos de credibilidade e previsões mais robustas. Essa propriedade é particularmente útil em contextos de monitoramento contínuo de rede, onde novos dados podem ser incorporados incrementalmente sem reprocessamento completo dos modelos.

Apesar dos bons resultados, algumas limitações devem ser destacadas. Primeiramente, a suposição de independência entre as observações pode não refletir perfeitamente a realidade, uma vez que as métricas de rede podem apresentar correlação temporal ou espacial. Além disso, a escolha de modelos conjugados (Normal–Normal, Gamma–Gamma e Beta–Binomial), embora conveniente do ponto de vista analítico, impõe restrições à flexibilidade das formas distribucionais, o que pode comprometer a captura de caudas pesadas ou multimodalidades.

Outro ponto a ser considerado é o comportamento da inferência Bayesiana em amostras pequenas: nesses casos, a prior exerce maior influência sobre os resultados, podendo enviesar as estimativas se mal especificada. Entretanto, no presente estudo, o volume de dados e o uso de priors fracas mitigaram esse risco, garantindo convergência consistente entre as abordagens.

De forma geral, a inferência Bayesiana se mostrou uma extensão natural e robusta da abordagem de Máxima Verossimilhança, adicionando uma camada de interpretação probabilística aos resultados e permitindo incorporar incertezas de forma explícita. Os modelos aplicados produziram previsões precisas e consistentes entre clientes e servidores, com desempenho satisfatório em todas as métricas avaliadas.

Esses resultados demonstram o potencial das abordagens estatísticas híbridas (MLE + Bayes) no monitoramento e análise de desempenho de redes, proporcionando estimativas mais estáveis, interpretáveis e adaptáveis à dinâmica dos sistemas reais.

5.1 Uso de Ferramentas de IA e Acesso ao Repositório

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foram utilizadas ferramentas de Inteligência Artificial (IA) para apoiar diferentes etapas do processo de análise e documentação. Inicialmente, os recursos de IA foram empregados para aprofundar a compreensão sobre o conjunto de dados, auxiliando na interpretação das variáveis e no entendimento técnico das medições realizadas pelo teste *Network Diagnostic Tool* (NDT), uma vez que nem todos os parâmetros eram de domínio prévio.

As ferramentas também foram essenciais no suporte à implementação dos códigos em Python, especialmente na correção de erros, otimização de rotinas e automação de etapas repetitivas. Além disso, a IA foi utilizada para acelerar a produção do texto técnico, principalmente na elaboração de tabelas e formatação de resultados diretamente em L^AT_EX, o que se mostrou particularmente útil dada a grande quantidade de variáveis e tabelas apresentadas ao longo do relatório.

O código-fonte completo, bem como os notebooks contendo as análises e modelagens estatísticas, está disponível publicamente no repositório GitHub abaixo:

<https://github.com/barros-jv/statistical-inference-project>

Essa integração entre técnicas de IA e métodos estatísticos tradicionais permitiu maior eficiência no desenvolvimento do projeto, mantendo o rigor analítico e a clareza na apresentação dos resultados.