

Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Karlovej

Matematické problémy väzňov

21. septembra 2015

Ondrej Škopek

Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Karlovej

Matematické problémy väzňov a študentov

21. septembra 2015

Ondrej Škopek

O mne

O mne

Ondrej Škopek

O mne

Ondrej Škopek
<oskopek@matfyz.cz>

O mne

Ondrej Škopek
<oskopek@matfyz.cz>
oskopek.com

O mne

Ondrej Škopek
<oskopek@matfyz.cz>
oskopek.com

Pýtajte sa

O mne

Ondrej Škopek
<oskopek@matfyz.cz>
oskopek.com

Pýtajte sa

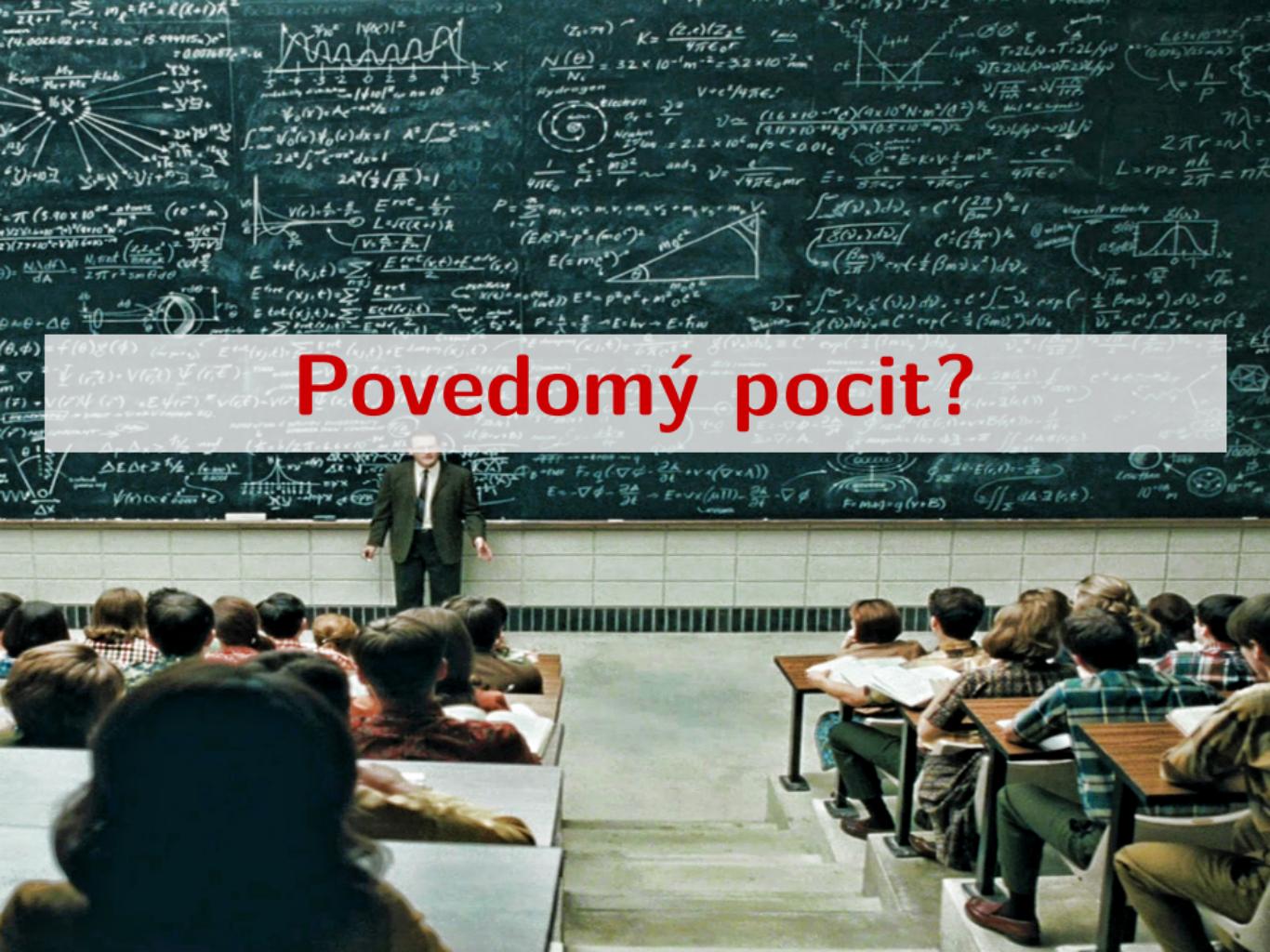
veľa a často

O vás

Čo je matematika?



Povedomý pocit?



Groups /
 Homomorphisms
 P.J. gummis

$$\begin{array}{l}
 \text{f}(1) = 1 \\
 \text{f}(2) = 2 \\
 \text{f}(3) = 3 \\
 \text{f}(4) = 4 \\
 \text{f}(5) = 5 \\
 \text{f}(6) = 6 \\
 \text{f}(7) = 7 \\
 \text{f}(8) = 8 \\
 \text{f}(9) = 9 \\
 \text{f}(10) = 10 \\
 \text{f}(11) = 11 \\
 \text{f}(12) = 12 \\
 \text{f}(13) = 13 \\
 \text{f}(14) = 14 \\
 \text{f}(15) = 15 \\
 \text{f}(16) = 16 \\
 \text{f}(17) = 17 \\
 \text{f}(18) = 18 \\
 \text{f}(19) = 19 \\
 \text{f}(20) = 20
 \end{array}$$

$$f(M) = e^{2\pi i M}$$

Definition: Say that f is a K -approximate polynomial if there exists δ such that $\|f\|_{U^k} \geq \frac{1}{K}$.
 Question: What are the approximate polynomials?
 Theorem: $\|f\|_{U^k} \geq \frac{1}{K} \Rightarrow |\mathbb{E}_{x \in [0,1]} f(x)| \geq \frac{1}{C}$
 $\|f\|_{U^k} \geq \frac{1}{K} \Rightarrow \text{totalVar}(f) \geq C \delta$

$f(x) = e^{2\pi i f(x)}$
 $\|f\|_{U^k}^k \geq \frac{1}{K^k} \Rightarrow \mathbb{E}_{x \in [0,1]} e^{2\pi i k f(x)} = e^{2\pi i k \mathbb{E}_{x \in [0,1]} f(x)}$
 lower bound for $\mathbb{E}_{x \in [0,1]} e^{2\pi i k f(x)}$
 Conjecture:
 $\|f\|_{U^k} \geq \frac{1}{K} \Rightarrow \mathbb{E}_{x \in [0,1]} e^{2\pi i k f(x)} = e^{2\pi i k \mathbb{E}_{x \in [0,1]} f(x)}$
 $K=1$
 $K=2$ ($\mathbb{E}_{x \in [0,1]} \cos(2\pi k f(x)) = \mathbb{E}_{x \in [0,1]} \cos(\pi k \sin(2\pi k f(x)))$)





Matematika v praxi dnes







Už dávno to nie je mužská záležitosť...

„Matematik je jediným druhem vědce, který může oprávněně prohlásit: Lehnu si na gauč, zavřu oči a pracuji.“

„Matematik je jediným druhem vědce, který může oprávněně prohlásit: Lehnu si na gauč, zavřu oči a pracuji.“

– Keith Devlin

Triky s čísłami

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5
- Vynásob ho dvomi

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5
- Vynásob ho dvomi
- Pripočítaj 2

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5
- Vynásob ho dvomi
- Pripočítaj 2
- Vynásob 3

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5
- Vynásob ho dvomi
- Pripočítaj 2
- Vynásob 3
- Odpočítaj dvojnásobok svojho pôvodného čísla

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5
- Vynásob ho dvomi
- Pripočítaj 2
- Vynásob 3
- Odpočítaj dvojnásobok svojho pôvodného čísla
- Pripočítaj 6

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5
- Vynásob ho dvomi
- Pripočítaj 2
- Vynásob 3
- Odpočítaj dvojnásobok svojho pôvodného čísla
- Pripočítaj 6
- Vydel' 4

Triky s číslami

Už ste niekde určite videli podobnú úlohu:

- Mysli si číslo od 1-5
- Vynásob ho dvomi
- Pripočítaj 2
- Vynásob 3
- Odpočítaj dvojnásobok svojho pôvodného čísla
- Pripočítaj 6
- Vydel' 4
- Odpočítaj svoje pôvodné číslo (znova)

Triky s číslami

Výsledok:

Triky s číslami

Výsledok: 3

Triky s číslami

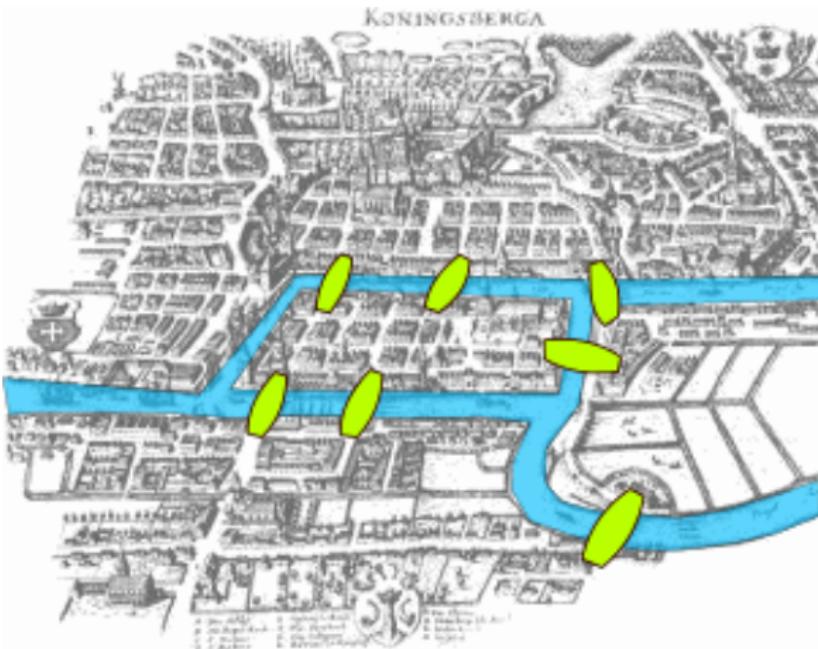
- Výjde to aj pre iné čísla? Alebo iba od 1-5?

Triky s číslami

- Výjde to aj pre iné čísla? Alebo iba od 1-5?
- Prečo to vždy výjde rovnako?

Sedem mostov mesta Královec

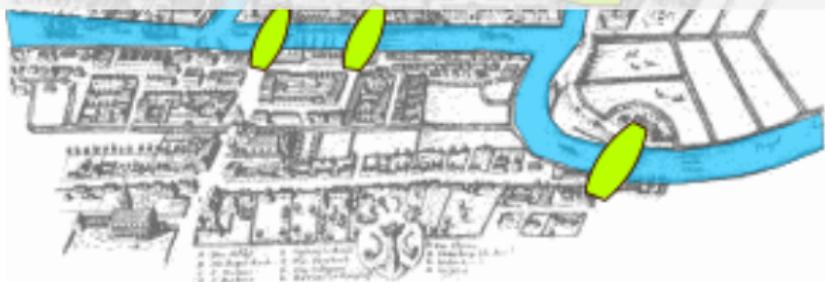
Sedem mostov mesta Královec



Sedem mostov mesta Královec



Nájdete takú cestu?



Sedem mostov mesta Královec

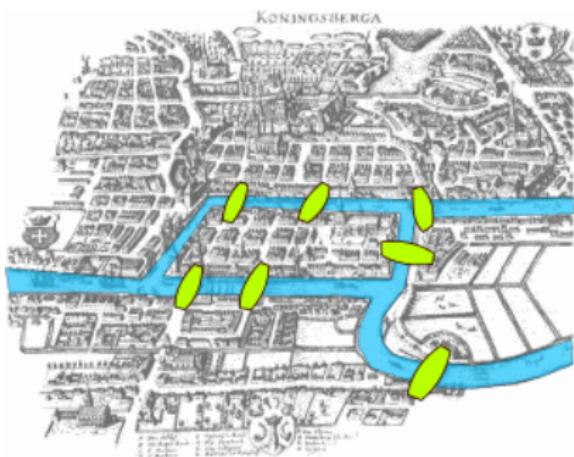
- Prečo nie?

Sedem mostov mesta Královec

- Prečo nie?
- Dá sa ukázať, že taká neexistuje?

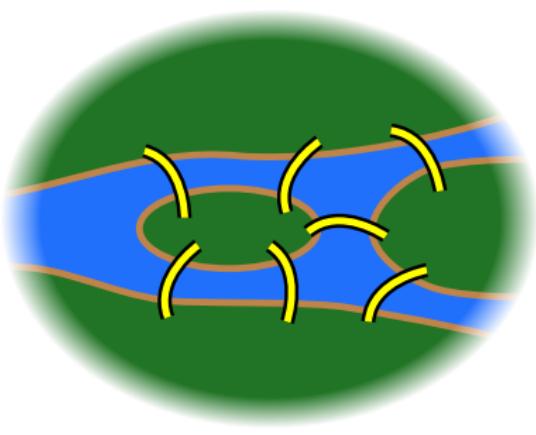
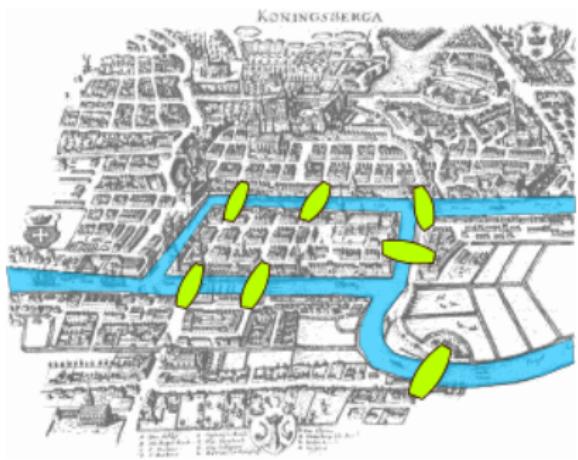
Sedem mostov mesta Královec

- Prečo nie?
- Dá sa ukázať, že taká neexistuje?



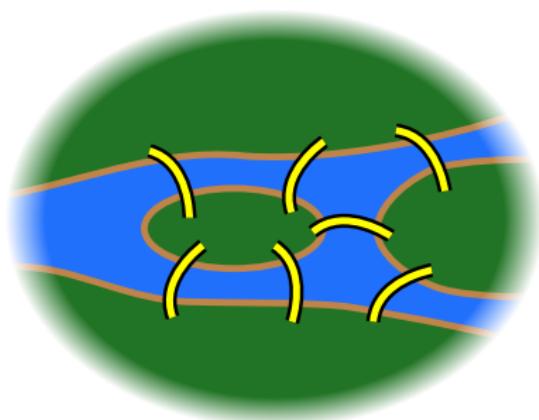
Sedem mostov mesta Královec

- Prečo nie?
- Dá sa ukázať, že taká neexistuje?



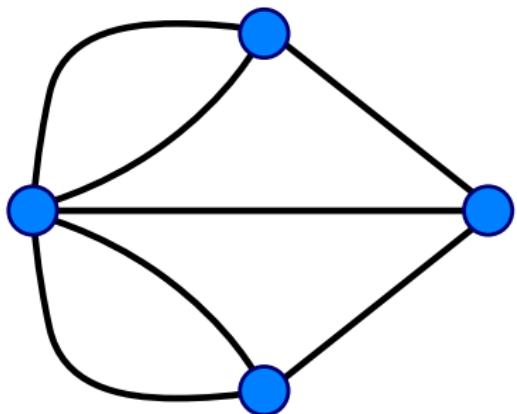
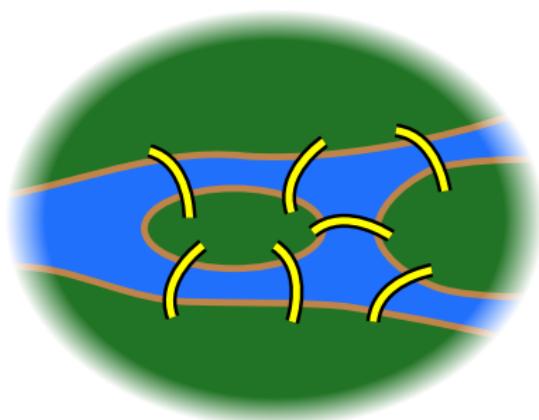
Sedem mostov mesta Královec

- Prečo nie?
- Dá sa ukázať, že taká neexistuje?



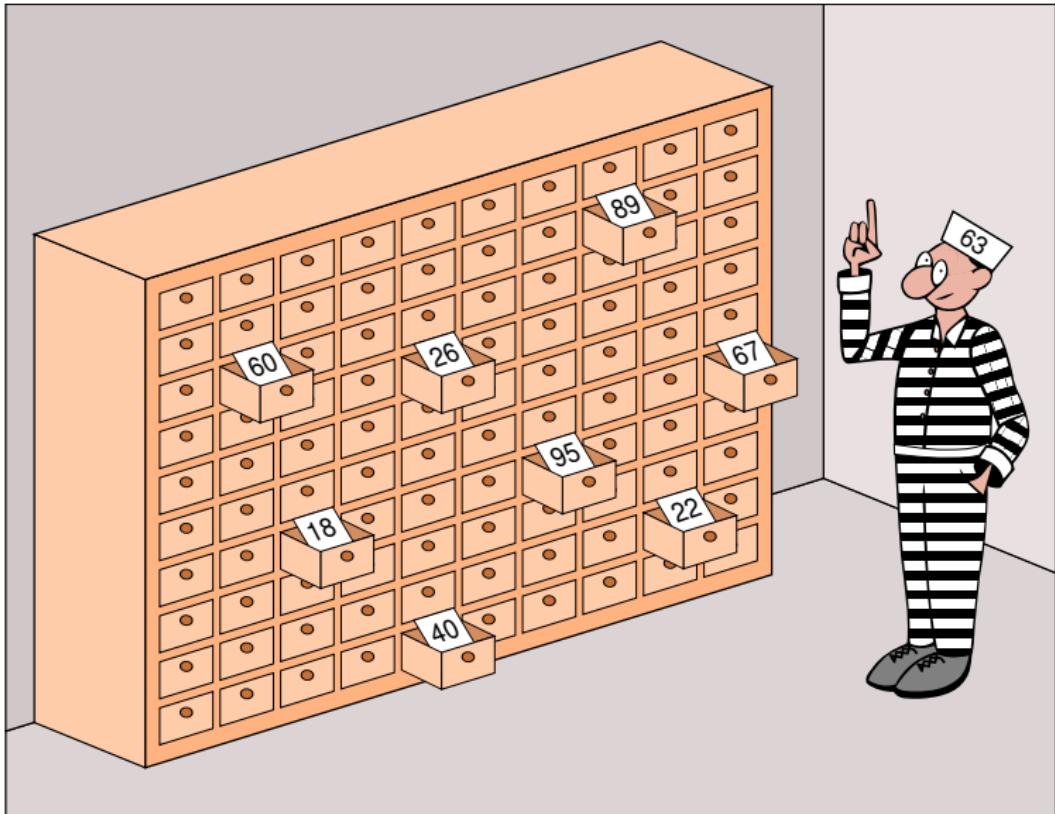
Sedem mostov mesta Královec

- Prečo nie?
- Dá sa ukázať, že taká neexistuje?



Problém 100 väzňov

Problém 100 väzňov



Problém 100 väzňov

- 100 väzňov označených 1-100

Problém 100 väzňov

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100

Problém 100 väzňov

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100
- Každý väzeň otvorí najviac 50 zásuviek

Problém 100 väzňov

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100
- Každý väzeň otvorí najviac 50 zásuviek
- Žiadna výmena informácií v priebehu

Problém 100 väzňov

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100
- Každý väzeň otvorí najviac 50 zásuviek
- Žiadna výmena informácií v priebehu
- Omilostí **všetkých** práve vtedy, keď každý nájde svoje číslo

Problém 100 väzňov

- 100 väzňov označených 1-100
- 100 zásuviek označených 1-100
- Každý väzeň otvorí najviac 50 zásuviek
- Žiadna výmena informácií v priebehu
- Omilostí **všetkých** práve vtedy, keď každý nájde svoje číslo
- Ak aspoň jeden nenájde svoje číslo, neomilostí **nikoho**

Problém 100 väzňov – Stratégia?

- Väzeň filozof: „Každý z nás otvorí 50 zásuviek náhodne, veď lepšia stratégia nemôže existovať.“

Problém 100 väzňov – Stratégia?

- Väzeň filozof: „Každý z nás otvorí 50 zásuviek náhodne, veď lepšia stratégia nemôže existovať.“
- Pravdepodobnosť prežitia?

Problém 100 väzňov – Stratégia?

- Väzeň matematik: „Každý z nás otvorí zásuvku so svojím číslom a pokračujeme vždy otvorením tej zásuvky, ktorej číslo sme našli vnútri predchádzajúcej.“

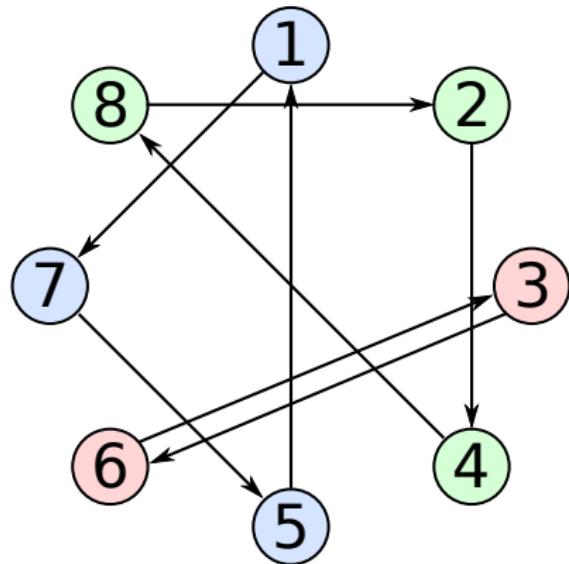
Problém 100 väzňov – Stratégia?

- Väzeň matematik: „Každý z nás otvorí zásuvku so svojím číslom a pokračujeme vždy otvorením tej zásuvky, ktorej číslo sme našli vnútri predchádzajúcej.“
- Pravdepodobnosť prežitia?

Problém 100 väzňov – Príklad 1

číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	7	4	6	8	1	3	5	2

Problém 100 väzňov – Príklad 1

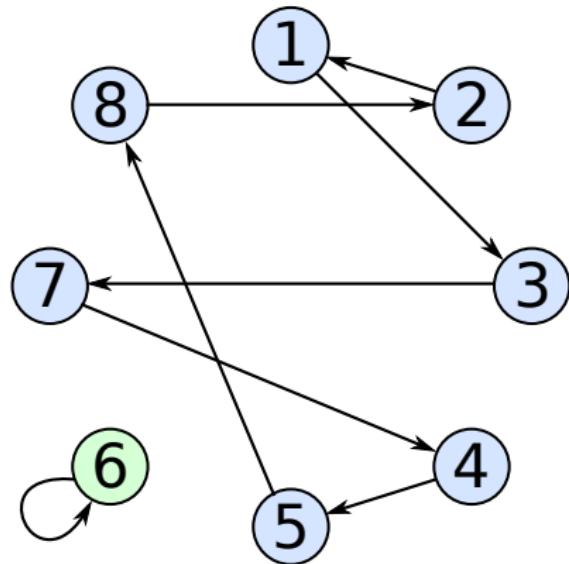


číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	7	4	6	8	1	3	5	2

Problém 100 väzňov – Príklad 2

číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	3	1	7	5	8	6	4	2

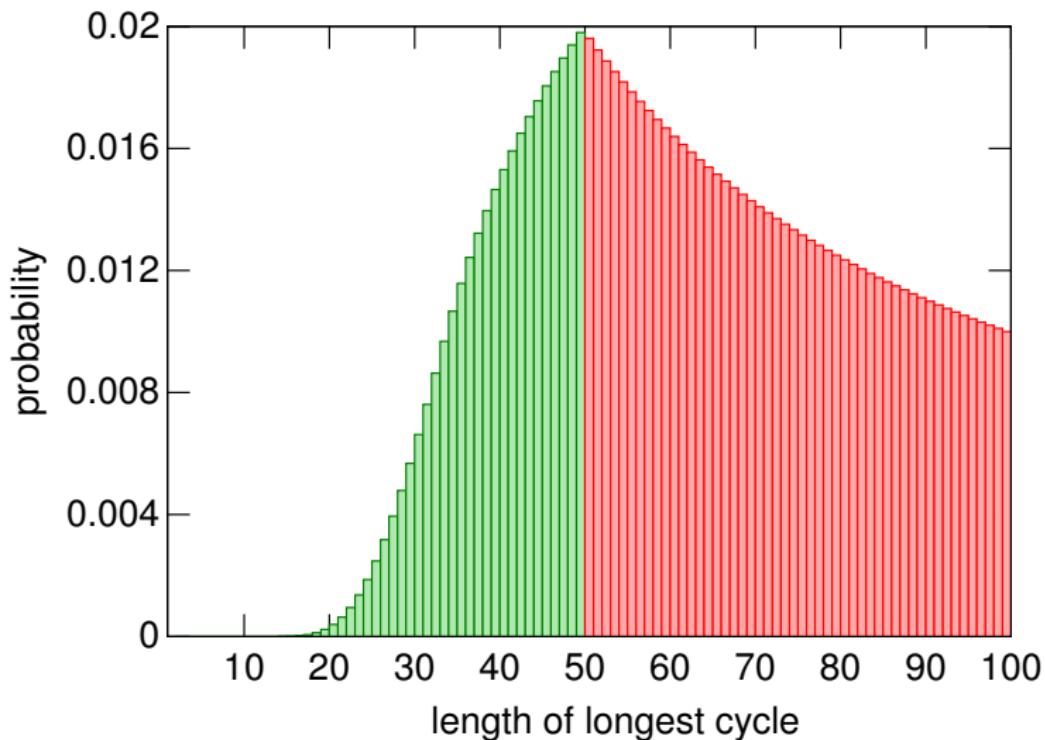
Problém 100 väzňov – Príklad 2



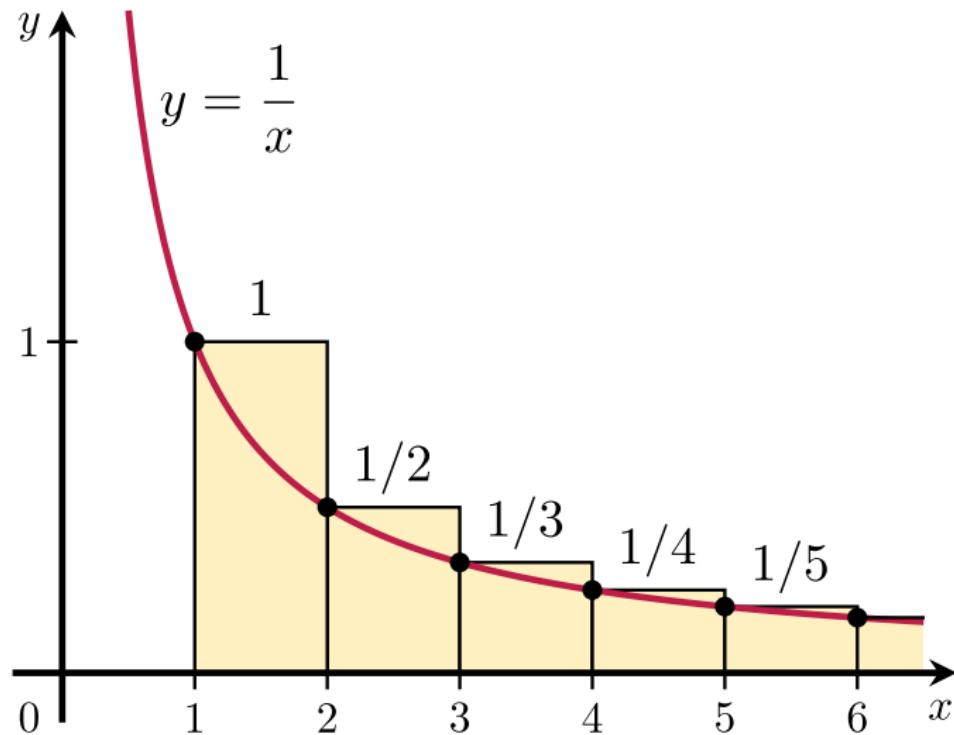
číslo zásuvky	1	2	3	4	5	6	7	8
číslo väzňa	3	1	7	5	8	6	4	2

Akú šancu naozaj väzni majú?

Pravdepodobnosťná distribúcia permutácií podľa dĺžky najdlhšieho cyklu



Harmonické čísla ako odhad daný plochou pod hyperbolou



*„Ak ľudia neveria, že matematika je jednoduchá,
je to len preto, lebo si neuvedomujú, aký zložitý
je život.“*

*„Ak ľudia neveria, že matematika je jednoduchá,
je to len preto, lebo si neuvedomujú, aký zložitý
je život.“*

– John von Neumann

*„Ak ľudia neveria, že matematika je jednoduchá,
je to len preto, lebo si neuvedomujú, aký zložitý
je život.“*

– John von Neumann, 1947

Tipy na dlhé zimné večery

Tipy na dlhé zimné večery

- Introduction to Mathematical Thinking

<https://www.coursera.org/course/maththink>

Tipy na dlhé zimné večery

- Introduction to Mathematical Thinking

<https://www.coursera.org/course/maththink>

- Programming for Everybody (Python)

<https://www.coursera.org/course/pythonlearn>

Ďakujem za pozornosť

Ďakujem za pozornosť

Ondrej Škopek
<oskopek@matfyz.cz>
oskopek.com

Zdroje |



Rhett Allain. *How Should Two Lost People Find Each Other?* 2013. URL: <http://www.wired.com/2013/09/two-statisticians-lost-in-the-woods/>.



Ed Brambley. *Pure Mathematics*. 2009. URL: <https://www.flickr.com/photos/edbrambley/4260498576/>.



Max Warshauer Eugene Curtin. “The locker puzzle”. In: *Mathematical Intelligencer* (2006).



hackNY.org. *Spring 2012 Student Hackathon Coding*. 2012. URL: <https://www.flickr.com/photos/hackny/6890140478/>.



Brett Jordan. *Big Problem*. 2012. URL: <https://www.flickr.com/photos/x1brett/7047276741/>.

Zdroje II



Richard P. Stanley. *Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux, and More.* 2014.



Charis Tsevis. *We can code it!* 2014. URL:
<https://www.flickr.com/photos/tsevis/14456896435/>.



Wikipedia. *100 prisoners problem.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem.



Wikipedia. *7 bridges.* 2015. URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:7_bridges.svg.



Wikipedia. *Graph representation of the permutation (1 3 7 4 5 8 2)(6).* 2015. URL:
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_cycles_qtl2.svg.

Zdroje III



Wikipedia. *Graph representation of the permutation (1 7 5)(2 4 8)(3 6)*. 2015. URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_cycles_qtl1.svg.



Wikipedia. *Illustration for the 100 prisoners problem*. 2015.

URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:100_prisoners_problem_qtl1.svg.



Wikipedia. *Illustration of the integral test in calculus*. 2015.

URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Integral_Test.svg.



Wikipedia. *Konigsberg bridges*. 2015. URL:

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png.

Zdroje IV



Wikipedia. *Konigsberg graph.* 2015. URL:
http://en.wikipedia.org/wiki/File:K%C3%B6nigsberg_graph.svg.



Wikipedia. *Probability mass function of the length of the longest cycle of a random permutation of length 100. Cycle lengths <= 50 are green, cycle lengths > 50 are red.* 2015.
URL: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Permutation_longest_cycle_length_pmf_qtl2.svg.



Wikipedia. *Seven Bridges of Königsberg.* 2015. URL:
http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg.



Wikipedia. *The King's Wise Men.* 2015. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Induction_puzzles#Examples.