2016年秋《统计方法与应用》作业-1（概率论）

姓名：徐魁　学号 2016311209

September 28, 2016

1　证明下列恒等式(1.2)

(a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$

证明：分两步进行证明，首先证明$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

令$x \in A \setminus B$, 即$x \in A$ 且 $x \notin B$.

由$x \notin B$ 就有$x \notin (A \cap B)$,

进而就有 $x \in A$ 且 $x \notin (A \cap B)$,

因此$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$。故”$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$”得证。

同样，由$x \notin B$ 就有$x \in B^C$,

进而就有 $x \in A$ 且 $x \in B^C$,

因此$A \setminus B = A \cap B^C$。

故“$A \setminus B = A \cap B^C$”得证。

从而，$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$得证。

(b) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

证明：两种方法均可证明。

方法一：课本定理1.1.4直接推导。

由定理 1.1.4 分配律可得,

$(B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

$\Leftrightarrow$

$((B \cap A) \cup B) \cap ((B \cap A) \cup A^C)$ (分配律)

$\Leftrightarrow$

$B \cap ((B \cap A) \cup A^C)$

$\Leftrightarrow$

$B \cap ((B \cup A^C) \cap (A \cup A^C))$ (结合律)

$\Leftrightarrow$

$B \cap (B \cup A^C)$

$\Leftrightarrow$

B 故“$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$”得证。

方法二：用集合包含关系证明。

分别证明两个集合的互相之间的包含关系。即要证明：$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$ 和 $(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$

先证明$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$ 。

令$x \in B$, 有$x \in A$或$x \in A^C$。若$x \in A$，则$x \in B$且$x \in A$，进而$x \in (B \cap A)$。若$x \in A^C$，则$x \in B$且$x \in A^C$，进而$x \in (B \cap A^C)$。因此有$x \in (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$，故$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$得证。

再证明$(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$。

令$x \in (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$。由$x \in (B \cap A)$，而$(B \cap A) \subset B$，故$x \in B$。由$x \in (B \cap A^C)$，而$(B \cap A^C) \subset B$，故$x \in B$。因此$(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$得证。

故“$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$”得证。

(c) $B \setminus A = B \cap A^C$

证明：由$x \notin A$ 就有$x \in A^C$,

进而就有 $x \in B$ 且 $x \in A^C$,

因此$B \setminus A = B \cap A^C$。

故“$B \setminus A = B \cap A^C$”得证。

(c) $A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$

证明：课本定理1.1.4直接推导。

$A \cup (B \cap A^C)$

$\Leftrightarrow$

$(A \cup B) \cap (A \cup A^C)$ (结合律)

$\Leftrightarrow$

$(A \cup B) \cap S$

$\Leftrightarrow$

$A \cup B$

a 假设样本 $X_1, \cdots, X_n$ 来自指数总体 $e(\lambda)$, 试验进行到 r 个产品失效为止，写出似然函数，并估计未知参数 λ.

1. 假设样本 $X_1, \cdots, X_n$ 来自指数总体 $e(\lambda)$, 试验进行 t 时刻为止，写出似然函数，并估计未知参数 λ.

2. 解：指数分布的密度函数：

$$f(x;\lambda) = \lambda \exp\{-\lambda x\} I(x > 0).$$

似然函数：

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda \exp\{-\lambda X_i\})^{d_i} (\exp\{-\lambda t\})^{1-d_i} \\ &= \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i} \exp\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} [d_i X_i + (1-d_i)t]\} \\ l(\lambda) &= \log L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} [d_i X_i + (1-d_i)t] \end{aligned}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} [d_i X_i + (1-d_i)t]}.$$

问题：（1）$\hat{\lambda}$ 的渐进分布？或者渐进方差=？如何估计渐进方差？

(2) 写一个子程序估计上面对渐进方差 $\hat{\sigma}$.

(3) 在模拟计算中, 用 S 向量记录每次模拟的方差估计, 之后用 $mean(S)$ 算500次模拟的方差的平均值，与参数估计的真实样本方差 ($var(lamda)$, 其中 lamda 用来记录500次模拟的参数λ 的估计。