2016年秋《统计方法与应用》作业-1（概率论）

姓名：徐魁　学号 2016311209

September 29, 2016

1 【1.2】证明下列恒等式

(a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$

证明：分两步进行证明，首先证明$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

令$x \in A \setminus B$, 即$x \in A$ 且 $x \notin B$.

由$x \notin B$ 就有$x \notin (A \cap B)$,

进而就有 $x \in A$ 且 $x \notin (A \cap B)$,

因此$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$。故”$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$”得证。

同样，由$x \notin B$ 就有$x \in B^C$,

进而就有 $x \in A$ 且 $x \in B^C$,

因此$A \setminus B = A \cap B^C$。

故“$A \setminus B = A \cap B^C$”得证。

从而，$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$得证。

(b) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

证明：两种方法均可证明。

方法一：课本定理1.1.4直接推导。

由定理 1.1.4 分配律可得,

$(B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

$\Leftrightarrow$

$((B\cap A)\cup B)\cap((B\cap A)\cup A^C)$ (分配律)

$\Leftrightarrow$

$B\cap((B\cap A)\cup A^C)$

$\Leftrightarrow$

$B\cap((B\cup A^C)\cap(A\cup A^C))$ (结合律)

$\Leftrightarrow$

$B\cap(B\cup A^C)$

$\Leftrightarrow$

B 故"$B=(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$"得证。

方法二：用集合包含关系证明。

分别证明两个集合的互相之间的包含关系。即要证明：$B\subset(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$ 和 $(B\cap A)\cup(B\cap A^C)\subset B$

先证明$B\subset(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$ 。

令$x\in B$, 有$x\in A$或$x\in A^C$。若$x\in A$，则$x\in B$且$x\in A$，进而$x\in(B\cap A)$。若$x\in A^C$，则$x\in B$且$x\in A^C$，进而$x\in(B\cap A^C)$。因此有$x\in(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$，故$B\subset(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$得证。

再证明$(B\cap A)\cup(B\cap A^C)\subset B$。

令$x\in(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$。由$x\in(B\cap A)$，而$(B\cap A)\subset B$，故$x\in B$。由$x\in(B\cap A^C)$，而$(B\cap A^C)\subset B$，故$x\in B$。因此$(B\cap A)\cup(B\cap A^C)\subset B$得证。

故"$B=(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$"得证。

(c) $B\setminus A=B\cap A^C$

证明：由$x\notin A$ 就有$x\in A^C$,

进而就有 $x\in B$ 且 $x\in A^C$,

因此$B\setminus A=B\cap A^C$。

故"$B\setminus A=B\cap A^C$"得证。

(d) $A\cup B=A\cup(B\cap A^C)$

证明：课本定理1.1.4直接推导。

$A \cup (B \cap A^C)$

$\Leftrightarrow$

$(A \cup B) \cap (A \cup A^C))$ (结合律)

$\Leftrightarrow$

$(A \cup B) \cap S$

$\Leftrightarrow$

$A \cup B$

2 【1.4】设A,B为事件，利用$P(A)$,$P(B)$和$P(A \cap B)$，给出下列事件的概率公式:

(a) 事件为$A \cup B$，则概率为：$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-b)

(b) 事件为$(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$，则概率为：$p = P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B))$
= $P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B)$(有限可加性公理)
= $P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-a)
= $P(A) + P(B) - 2 * P(A \cap B)$

(c) 事件为$A \cup B$，则概率为：$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-b)

(d) 事件$(A \cap B)^C$， 则概率为：$p = P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B)$(课本定理1.2.8-c)

3 【1.11】设S为样本空间，

(a) 证明$\mathcal{B} = \{\varnothing, S\}$是一个$\sigma$代数;(证集合$\{\varnothing, S\}$满足$\sigma$代数的三个性质即可。)
证明:
对于集合$\{\varnothing, S\}$有$\varnothing \in \mathcal{B}$，即满足性质a。
又因为$\varnothing \in \mathcal{B}$且$S \in \mathcal{B}$，而$S^C = \varnothing$，因此$\mathcal{B}$在补运算下封闭，即满足性质b。
因为$(S \cup \varnothing) \in \mathcal{B}$，因此$\mathcal{B}$在并运算下封闭，即满足性质c。
即证得$\mathcal{B} = \{\varnothing, S\}$是一个$\sigma$代数。

(b) 令$\mathcal{B}=\{S$的全体子集，包括S本身$\}$，证明$\mathcal{B}$是一个σ代数;

证明:

因为$\varnothing$是任何集合的子集，那么$\varnothing\in S$, 因此$\varnothing\in\mathcal{B}$，即满足性质a。

设A为S的一个子集，显然有$A\in\mathcal{B}$，而$A^C\in S$，因此$A^C\in\mathcal{B}$，即满足性质b。

设$A_1,A_2,...$为S的所有的子集，有，$A_1,A_2,...\in S$。那么，显然有$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}$, 即有$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}$，即满足性质c。

即证得$\mathcal{B}=\{S$的全体子集，包括S本身$\}$是一个σ代数。

(c) 证明两个σ代数的交仍是σ代数。

证明:

设有两个σ代数$\mathcal{B}1$，$\mathcal{B}2$，由σ代数的性质a可知，$\varnothing\in\mathcal{B}1$且$\varnothing\in\mathcal{B}2$，进而可得$\varnothing\in\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2$，即满足性质a。

设$A\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$, 则有$A\in\mathcal{B}1$ 和$A\in\mathcal{B}2$。由σ代数的性质b可知，$A^C\in\mathcal{B}1$ 和$A^C\in\mathcal{B}2$，因此$A^C\in\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2$，即满足性质b。

设$A_1,A_2,...\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$, 则有$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}1$ 和$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}2$。由$\sigma$代数的性质c可知，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}1$ 和$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}2)$，因此$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$，即满足性质c。

即证得证明两个σ代数的交仍是σ代数。

4 【1.13】若$P(A)=\frac{1}{3}$且$P(B^C)=\frac{1}{4}$, 则A, B是否不交？试加以解释。

解: 如果A,B是不交，$P(A\cap B)=0$。由$P(B^C)=\frac{1}{4}$得，$P(B)=\frac{3}{4}$，根据Bonferroni不等式, $P(A\cap B)\geqslant P(A)+P(B)-1=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-1=\frac{1}{12}>0$, 因此不交。（这样证明可以吗？）

5 【1.21】橱内有n双鞋子，随机抽出$2r$只鞋子$(2r<n)$，这些鞋子全都无法配对的概率是多少？

解: 随机从$2n$只鞋子中抽出$2r$只鞋子的组合数为：$\binom{2n}{2r}$。鞋子分左鞋或右鞋，如果左右鞋不配也无法进行配对，而左右鞋被选中的概率为2^{2r}, 最后要求全都无法配对，必定是在n

种不同的鞋子中选$2r$只鞋子，选的组合数为：$\binom{n}{2r}$，只有这样选才一定能保证完全无法配对，而这$2r$只鞋子可以是左鞋也可以是右鞋，因此这些鞋子全都无法配对的概率是$\frac{\binom{n}{2r}2^{2r}}{\binom{2n}{2r}}$

6 【1.22】

(a) 对全年366天（包含2月29日）抽签，抽出的前180天刚好平均分布于全年12个月的概率是多少？

解：首先对366天中抽出180天出来的概率为$\binom{366}{180}$，其次要求180天平均分布在12个月中的话，意味着每个月中都均匀的抽了15天，设每个月的天数集合为$N_i = \{n_1, n_2, ..., n_{12}\}$，其实是已知的，$N_i = \{31, 29, 31, ..., 31\}$, 抽样组合数为：$\prod\limits_{i=1}^{12}\binom{n_i}{15}$，其中$N_i = \{31, 29, 31, ..., 31\}$。因此抽出的前180天刚好平均分布于全年12个月的概率是$\frac{\prod_{i=1}^{12}\binom{n_i}{15}}{\binom{366}{180}}$，其中$N_i = \{31, 29, 31, ..., 31\}$。

(b) 抽出的前30天都不在九月份的概率是多少？ 解：9月是30天，现在进行30次抽样，组合数为：$\binom{366}{30}$，要求不抽到9月的任意一天，那么第一次抽样组合数为：$\frac{366-30}{366}$，第二次抽样组合数为：$\frac{366-30-1}{366}$,依次类推，第30次抽样的组合数为：$\frac{366-30-29}{366}$。总的概率为$\frac{\prod_{i=1}^{30}\frac{366-30-i+1}{366}}{\binom{366}{30}}$。

7 【1.29】

(a) 对于例1.2.20，枚举构成无序样本{4，4，12，12}和{2，9，9，12}的有序样本。

解：枚举结果如下表：

Table 1: 枚举

无序样本	有序样本
$\{4, 4, 12, 12\}$	(4,4,12,12), (4,12,12,4), (4,12,4,12), (12,4,12,4), (12,4,4,12), (12,12,4,4)
$\{2, 9, 9, 12\}$	(2,9,9,12), (2,9,12,9), (2,12,9,9), (9,2,9,12),(9,2,12,9), (9,9,2,12) (9,9,12,2),(9,12,2,9),(9,12,9,2), (12,2,9,9), (12,9,2,9), (12,9,9,2)

(b) 假设我们有六个数$\{1, 2, 7, 8, 14, 20\}$，问有放回的抽取时，抽的无序样本$\{2, 7, 7, 8, 14,$
概率是多少？

解：无序样本的抽样中，m个互不相同的数字占据的位置分别为k_1, k_2, k_m，有序的样本总数为$\frac{k!}{k_1!k_2!...k_m!}$，即为$\frac{6!}{1!2!1!2!} = 180$，有序样本的总数为$n^r$ 即6^6，即可得抽的无序样本$\{2, 7, 7, 8, 14, 14\}$的概率是$\frac{180}{6^6}$

(c) 设对m个数分别有放回的抽取$k_1, k_2, ..., k_m$次，得到一个大小为$k(k_1 + k_2 + ... + k_m = k)$的无序样本。证明这个样本由$\frac{k!}{k_1!k_1!...k_m!}$个有序样本构成。

证明：设抽样次数为k，那么有序抽样的总数为$k!$，由于有m个不同的数字，其内部的排列组合次数分别为：$k_1!, k_2!, ..., k_m!$，由于同一个数字处在相邻的多个位置只会得到一种有序数，因此有序抽样的总数$k!$中会有$\prod_{i=1}^{m} k_i!$个重复，因此有序样本的总数应该为$\frac{k!}{k_1!k_1!...k_m!}$。

(d) 证明多项式的系数的个数（即自助法的样本总数）为$\binom{k+m-1}{k}$，即：$\sum_{k_1,k_2,...,k_m} I_{\{k_1+k_2+...+k_m=k\}} = \binom{k+m-1}{k}$

证明： 这个自助法的抽样问题可以简化成一个物体装箱问题，总数k可以看做所有的物体，即用m个互不相同的数字表示m个箱子，即k个物体装到m个箱子中，那么这种装箱的总数为$\binom{k+m-1}{k}$。

8 【1.38】证明下列各命题（假定每个条件事件的概率都是正的）

(a) 若$P(B) = 1$，则对任意A，有$P(A|B) = P(A)$.

证明：由课本定理1.2.11a可得$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$，

又因为$A \cap B^C \subset B^C$，且$P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 1 = 0$，

故，$P(A \cap B^C) = 0$，所以$P(A) = P(A \cap B)$，

因此$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{1} = P(A)$，

故，若$P(B) = 1$，则对任意A，有$P(A|B) = P(A)$得证。

(b) 若$A \subset B$，则$P(B|A) = 1$，且$P(A|B) = P(A)/P(B)$.

证明：由$A \subset B$可得 $A \cap B = A$,

进而$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$,

同样可得$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$ 故，若$A \subset B$, 则$P(B|A) = 1$，且$P(A|B) = P(A)/P(B)$得证。

(c) 若A, B不交，则$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

证明：若A, B不交，则有$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$(有限可加性公理),

同时有$A \cap (A \cup B) = A$.

因此，$P(A|A \cup B) = \frac{A \cap (A \cup B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$,

故，若A, B不交，则$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$得证。

(d) $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$.

证明：根据结合律，有$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cap C))$,

$\Leftrightarrow$

$= P(A|B \cap C)P(B \cap C)$, 条件概率公式

$\Leftrightarrow$

$= P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$, 条件概率公式

故，“$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$”得证。

9 【1.41】同1.3.6，仍假定电报信号中点信号与化信号的比例是3：4，此外由于线路干扰导致$\frac{1}{4}$的点信号被误传为划信号，$\frac{1}{3}$的划信号被误传为点信号。

(a) 若收到的是划信号，试问发送的是划信号的概率是多少？

解：$P(\text{发划}|\text{收划}) = \frac{P(\text{收划}|\text{发划})P(\text{收划})}{P(\text{收划}|\text{发划})P(\text{收划})+P(\text{收划}|\text{收点})P(\text{收点})} = \frac{(2/3)(4/7)}{(2/3)(4/7)+(1/4)(3/7)} = \frac{32}{41}$

(b) 假定信号的连续发送是独立事件，若收到的消息为：点-点，则发送方发送四种可能的消息的概率分布如何？

解：设发送的两种消息类型为A, B,因为假设是独立事件，因此有，$P(A - B|\text{点} - \text{点}) = P(A|\text{点})P(B|\text{点})$,

因此四种可能的消息概率：$P(\text{发点} - \text{发点}|\text{收点} - \text{收点}) = P(\text{发点}|\text{收点})^2$，$P(\text{发划} -$

发点|收点 − 收点) = P(发划|发点)P(收点|收点)，P(发点 − 发划|收点 − 收点) = P(发点|收点)P(发划|收点)，P(发划 − 发划|收点 − 收点) = P(发划|收点)^2。

根据题意可知，$P(\text{收点}|\text{发点}) = 1 - 1/4 = \frac{3}{4}$,

现在求P(发点|收点)和P(发划|收点),

P(发点|收点)

$= \frac{P(\text{收点}|\text{发点})P(\text{发点})}{P(\text{收点})} = \frac{P(\text{收点}|\text{发点})P(\text{发点})}{P(\text{收点}|\text{发点})P(\text{发点})+P(\text{收点}|\text{发划})P(\text{发划})} = \frac{(3/4)(3/7)}{(3/4)(3/7)+(1/3)(4/7)} = \frac{27}{43}$,

P(发划|收点)

$= \frac{P(\text{收点}|\text{发划})P(\text{发划})}{P(\text{收点})} = \frac{P(\text{收点}|\text{发划})P(\text{发划})}{P(\text{收点}|\text{发点})P(\text{发点})+P(\text{收点}|\text{发划})P(\text{发划})} = \frac{(1/3)(4/7)}{(3/4)(3/7)+(1/3)(4/7)} = \frac{16}{43}$,

因此,

$P(\text{发点} - \text{发点}|\text{收点} - \text{收点}) = P(\text{发点}|\text{收点})^2 = (\frac{27}{43})^2$,

$P(\text{发划} - \text{发点}|\text{收点} - \text{收点}) = P(\text{发划}|\text{收点})P(\text{发点}|\text{收点}) = \frac{16}{43}\frac{27}{43}$,

$P(\text{发点} - \text{发划}|\text{收点} - \text{收点}) = P(\text{发点}|\text{收点})P(\text{发划}|\text{收点}) = \frac{27}{43}\frac{16}{43}$,

$P(\text{发划} - \text{发划}|\text{收点} - \text{收点}) = P(\text{划}|\text{收点})^2 = (\frac{16}{43})^2$

10 【1.49】称累积分布函数F_X随机大于（stochastically greater）累积分布函数F_Y，如果对任意t都有$F_X(t) \leqslant F_Y(t)$。

证明：由题意可知，对于任意的t，都有$F_X(t) \leq F_Y(t)$,

所以有 $1 - F_X(t) \geq 1 - F_Y(t)$,

因此，$P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F_X(t)$,

$\geq 1 - F_Y(t) = 1 - P(Y \leq t) = P(Y > t)$.

那么对于存在的某个t'，有$P(X > t\text{‘}) = 1 - P(X \leq t\text{’}) = 1 - F_X(t\text{‘})$,

$> 1 - F_Y(t\text{’}) = 1 - P(Y \leq t\text{‘}) = P(Y > t)$.

11 【1.50】验证式（1.5.4）

解：式1.5.4为$\sum\limits_{1=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$,

假设为n的时候成立，有$\sum\limits_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$,

那么对于$n+1$, 有$\sum\limits_{k=1}^{n+1} t^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} t^{k-1} + t^n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$,
由此能够推导出该式对于所有的$n \in N^*$都成立。

12 【1.52】证明$g(x)$是一个概率密度函数。

证明: 因为$F(x_0) < 1$, 所以$1 - F(x_0) > 0$,
又因为$f(x)$是一个概率密度函数,
因此对于任意的x, 都有$f(x) > 0$,
从而有对于任意的$x \geq x_0$,都有 $\frac{f(x)}{[1-F(x_0)]} \geq 0$,
另外$\int_{x_0}^{\infty} g(x)dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{f(x)}{1-F(x_0)dx} = \frac{1-F(x_0)}{1-F(x_0)} = 1$,
故$g(x)$是一个概率密度函数得证。

13 【exercise1-3】A random variable X is said to have a Gamma distribution if its pdf is:

$$f(x|\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}, x \in [0,\infty), \alpha > 0, \theta > 0$$

(a) Verify $f(x|\alpha,\theta)$ is a valid pdf.

证明: 两个性质不难证明性质a, 即$f_X(x) \geq 0$。
不难推导,

$$f_X(x|\alpha,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|\alpha,\theta)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx \approx 1$$

即可证$f(x|\alpha,\theta)$ 是概率密度函数。

(b) Find mean and variance of X. 解: 先求期望,

$$\mathbb{E}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha$$

再求平方的期望,

$$\mathbb{E}(x^2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{2\alpha-2} e^{-2x/\theta} dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)$$

, 因此方差$variance(x) = \mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}(x))^2 = \alpha$

(c) Let $Y = 1/X$. What is the pdf of Y?(Y is said to have an inverse gamma distribution)

解：令$Y = 1/X$, 则有，$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$, 且$Y$的概率密度函数为:

$$f_Y(y|\alpha,\theta) = f_X(y|\alpha,\theta)\frac{dx}{dy}$$

$$f_Y(y|\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}(\frac{1}{y})^{\alpha-1}e^{-1/(\theta y)} \mid \frac{1}{y^2} \mid$$

$$f_Y(y|\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}y^{-\alpha-1}e^{-1/(\theta y)}$$

用β替换θ^{-1}得:

$$f_Y(y|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{-\alpha-1}e^{-\beta/y}$$

因此，Y的概率密度函数为逆Gamma分布。