2016年秋《统计方法与应用》作业-1（概率论）

姓名：徐魁　学号 2016311209

September 28, 2016

1　【1.2】证明下列恒等式

(a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$

证明：分两步进行证明，首先证明$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

令$x \in A \setminus B$, 即$x \in A$ 且 $x \notin B$.

由$x \notin B$ 就有$x \notin (A \cap B)$,

进而就有 $x \in A$ 且 $x \notin (A \cap B)$,

因此$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$。故"$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$"得证。

同样，由$x \notin B$ 就有$x \in B^C$,

进而就有 $x \in A$ 且 $x \in B^C$,

因此$A \setminus B = A \cap B^C$。

故"$A \setminus B = A \cap B^C$"得证。

从而，$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$得证。

(b) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

证明：两种方法均可证明。

方法一：课本定理1.1.4直接推导。

由定理 1.1.4 分配律可得,

$(B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

$\Leftrightarrow$

$((B \cap A) \cup B) \cap ((B \cap A) \cup A^C)$ (分配律)

$\Leftrightarrow$

$B \cap ((B \cap A) \cup A^C)$

$\Leftrightarrow$

$B \cap ((B \cup A^C) \cap (A \cup A^C))$ (结合律)

$\Leftrightarrow$

$B \cap (B \cup A^C)$

$\Leftrightarrow$

B 故"$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$"得证。

方法二：用集合包含关系证明。

分别证明两个集合的互相之间的包含关系。即要证明：$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$ 和 $(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$

先证明$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$ 。

令$x \in B$, 有$x \in A$或$x \in A^C$。若$x \in A$，则$x \in B$且$x \in A$，进而$x \in (B \cap A)$。若$x \in A^C$，则$x \in B$且$x \in A^C$，进而$x \in (B \cap A^C)$。因此有$x \in (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$，故$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$得证。

再证明$(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$。

令$x \in (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$。由$x \in (B \cap A)$，而$(B \cap A) \subset B$，故$x \in B$。由$x \in (B \cap A^C)$，而$(B \cap A^C) \subset B$，故$x \in B$。因此$(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$得证。

故"$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$"得证。

(c) $B \setminus A = B \cap A^C$

证明：由$x \notin A$ 就有$x \in A^C$,

进而就有 $x \in B$ 且 $x \in A^C$,

因此$B \setminus A = B \cap A^C$。

故"$B \setminus A = B \cap A^C$"得证。

(d) $A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$

证明：课本定理1.1.4直接推导。

$A \cup (B \cap A^C)$

$\Leftrightarrow$

$(A \cup B) \cap (A \cup A^C))$ (结合律)

$\Leftrightarrow$

$(A \cup B) \cap S$

$\Leftrightarrow$

$A \cup B$

2 【1.4】设A,B为事件，利用$P(A)$,$P(B)$和$P(A \cap B)$，给出下列事件的概率公式:

(a) 事件为$A \cup B$，则概率为：$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-b)

(b) 事件为$(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$，则概率为：$p = P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B))$
= $P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B)$(有限可加性公理)
= $P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-a)
= $P(A) + P(B) - 2 * P(A \cap B)$

(c) 事件为$A \cup B$，则概率为：$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-b)

(d) 事件$(A \cap B)^C$，则概率为：$p = P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B)$(课本定理1.2.8-c)

3 【1.11】设S为样本空间，

(a) 证明$\mathcal{B} = \{\varnothing, S\}$是一个$\sigma$代数;
证集合$\{\varnothing, S\}$满足σ代数的三个性质即可。
证明：对于集合$\{\varnothing, S\}$有$\varnothing \in \mathcal{B}$，即满足性质a。
又因为$\varnothing \in \mathcal{B}$且$S \in \mathcal{B}$，而$S^C = \varnothing$，因此$\mathcal{B}$在补运算下封闭，即满足性质b。
因为$(S \cup \varnothing) \in \mathcal{B}$，因此$\mathcal{B}$在并运算下封闭，即满足性质c。
即证得$\mathcal{B} = \{\varnothing, S\}$是一个$\sigma$代数。

(b) 令$\mathcal{B}=\{S$的全体子集，包括S本身$\}$，证明$\mathcal{B}$是一个σ代数;

证明：因为$\varnothing$是任何集合的子集，那么$\varnothing\in S$, 因此$\varnothing\in\mathcal{B}$，即满足性质a。

设A为S的一个子集，显然有$A\in\mathcal{B}$，而$A^C\in S$，因此$A^C\in\mathcal{B}$，即满足性质b。

设$A_1,A_2,...$为S的所有的子集，有，$A_1,A_2,...\in S$。那么，显然有$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}$, 即有$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}$，即满足性质c。

即证得$\mathcal{B}=\{S$的全体子集，包括S本身$\}$是一个σ代数。

(c) 证明两个σ代数的交仍是σ代数。

设有两个σ代数$\mathcal{B}1$，$\mathcal{B}2$，由σ代数的性质a可知，$\varnothing\in\mathcal{B}1$且$\varnothing\in\mathcal{B}2$，进而可得$\varnothing\in\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2$，即满足性质a。

设$A\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$, 则有$A\in\mathcal{B}1$ 和$A\in\mathcal{B}2$。由σ代数的性质b可知，$A^C\in\mathcal{B}1$ 和$A^C\in\mathcal{B}2$，因此$A^C\in\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2$，即满足性质b。

设$A_1,A_2,...\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$, 则有$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}1$ 和$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}2$。由$\sigma$代数的性质c可知，$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}1$ 和$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}2)$，因此$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$，即满足性质c。

即证得证明两个σ代数的交仍是σ代数。

4 Example

a 假设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 来自指数总体 $e(\lambda)$, 试验进行到 r 个产品失效为止，写出似然函数，并估计未知参数 λ.

1. 假设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 来自指数总体 $e(\lambda)$, 试验进行 t 时刻为止，写出似然函数，并估计未知参数 λ.

2. 解：指数分布的密度函数:

$$f(x;\lambda)=\lambda\exp\{-\lambda x\}I(x>0).$$

似然函数:

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda \exp\{-\lambda X_i\})^{d_i} (\exp\{-\lambda t\})^{1-d_i} \\
&= \lambda^{\sum_{i=1}^{n} d_i} \exp\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} [d_i X_i + (1-d_i)t]\} \\
l(\lambda) &= \log L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} [d_i X_i + (1-d_i)t]
\end{aligned}
$$

$$
\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{\sum_{i=1}^{n} [d_i X_i + (1-d_i)t]}.
$$

问题: （1）$\hat{\lambda}$ 的渐进分布？或者渐进方差=？如何估计渐进方差？

(2) 写一个子程序估计上面对渐进方差 $\hat{\sigma}$.

(3) 在模拟计算中, 用 S 向量记录每次模拟的方差估计, 之后用 $mean(S)$ 算500次模拟的方差的平均值, 与参数估计的真实样本方差 ($var(lamda)$, 其中 lamda 用来记录500次模拟的参数λ 的估计。