2016年秋《统计方法与应用》作业-4（Random Sampling）

姓名：徐魁　学号 2016311209

October 19, 2016

1 Reading.

(a) Lecture notes 4.

(b) Chpaters 5 of the book ” Statistical Inference” .

2 Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a $N(0, \sigma^2)$ population. Prove that

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\Big)^2$$

has a χ^2 distribution with $n-1$ degrees of freedom.

证明：现在要证明$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2$有一个 χ^2 分布和 $n-1$ 的自由度，我们采用数学归纳法证明，有递推公式可知，

$$(n-1)S^2 = (n-2)S_{n-1}^2 + \Big(\frac{n-1}{n}\Big)(X_n - \bar{X}_{n-1})^2$$

当n=2时，有，

$$S^2 = \frac{1}{2}(X_2 - X_1)^2$$

由于$(X_2 - X_1)/\sqrt{2}$服从于n(0,1)分布，于是根据引理5.3.2有$S_2^2 \sim \chi_1^2$。
现假设$(k-1)S_k^2 \sim \chi_{k-1}^2$，
则，当对于$n = k+1$，有，

$$kS^2 = (k-2)S_k^2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)(X_{k+1} - \bar{X}_k)^2$$

根据，假设$(k-1)S_k^2 \sim \chi_{k-1}^2$，且根据引理5.3.2，$kS_k^2 \sim \chi_k^2$，从而定理得证。
另外，可由定理：$X_1, ..., X_n$是一列独立的随机向量，$g_i(x_i)$是x_i的一元函数，则随机变量$U_i = g_i(X_i)$直接证明，$(X_{k+1} - \bar{X}_k)^2 \sim S_k^2$的独立性。

3 Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a $N(0, \sigma^2)$ population. Prove that $\bar{X}$ and S^2 are independent random variables.