2016年秋《统计方法与应用》作业-1（概率论）

姓名：徐魁　学号 2016311209

September 29, 2016

1 【1.2】证明下列恒等式

(a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$

证明：分两步进行证明，首先证明$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

令$x \in A \setminus B$, 即$x \in A$ 且 $x \notin B$.

由$x \notin B$ 就有$x \notin (A \cap B)$,

进而就有 $x \in A$ 且 $x \notin (A \cap B)$,

因此$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$。故” $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$”得证。

同样，由$x \notin B$ 就有$x \in B^C$,

进而就有 $x \in A$ 且 $x \in B^C$,

因此$A \setminus B = A \cap B^C$。

故“$A \setminus B = A \cap B^C$”得证。

从而，$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$得证。

(b) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

证明：两种方法均可证明。

方法一：课本定理1.1.4直接推导。

由定理 1.1.4 分配律可得,

$(B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

$\Leftrightarrow$

$((B \cap A) \cup B) \cap ((B \cap A) \cup A^C)$ (分配律)

$\Leftrightarrow$

$B \cap ((B \cap A) \cup A^C)$

$\Leftrightarrow$

$B \cap ((B \cup A^C) \cap (A \cup A^C))$ (结合律)

$\Leftrightarrow$

$B \cap (B \cup A^C)$

$\Leftrightarrow$

B 故"$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$"得证。

方法二：用集合包含关系证明。

分别证明两个集合的互相之间的包含关系。即要证明：$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$ 和 $(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$

先证明$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$ 。

令$x \in B$，有$x \in A$或$x \in A^C$。若$x \in A$，则$x \in B$且$x \in A$，进而$x \in (B \cap A)$。若$x \in A^C$，则$x \in B$且$x \in A^C$，进而$x \in (B \cap A^C)$。因此有$x \in (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$，故$B \subset (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$得证。

再证明$(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$。

令$x \in (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$。由$x \in (B \cap A)$，而$(B \cap A) \subset B$，故$x \in B$。由$x \in (B \cap A^C)$，而$(B \cap A^C) \subset B$，故$x \in B$。因此$(B \cap A) \cup (B \cap A^C) \subset B$得证。

故"$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$"得证。

(c) $B \setminus A = B \cap A^C$

证明：由$x \notin A$ 就有$x \in A^C$，

进而就有 $x \in B$ 且 $x \in A^C$，

因此$B \setminus A = B \cap A^C$。

故"$B \setminus A = B \cap A^C$"得证。

(d) $A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$

证明：课本定理1.1.4直接推导。

$A \cup (B \cap A^C)$

$\Leftrightarrow$

$(A \cup B) \cap (A \cup A^C))$ (结合律)

$\Leftrightarrow$

$(A \cup B) \cap S$

$\Leftrightarrow$

$A \cup B$

2 【1.4】设A,B为事件，利用$P(A)$,$P(B)$和$P(A \cap B)$，给出下列事件的概率公式:

(a) 事件为$A \cup B$，则概率为：$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-b)

(b) 事件为$(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$，则概率为：$p = P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B))$
= $P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B)$(有限可加性公理)
= $P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-a)
= $P(A) + P(B) - 2 * P(A \cap B)$

(c) 事件为$A \cup B$，则概率为：$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$(课本定理1.2.9-b)

(d) 事件$(A \cap B)^C$，则概率为：$p = P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B)$(课本定理1.2.8-c)

3 【1.11】设S为样本空间,

(a) 证明$\mathcal{B} = \{\varnothing, S\}$是一个$\sigma$代数;(证集合$\{\varnothing, S\}$满足$\sigma$代数的三个性质即可。)
证明:
对于集合$\{\varnothing, S\}$有$\varnothing \in \mathcal{B}$，即满足性质a。
又因为$\varnothing \in \mathcal{B}$且$S \in \mathcal{B}$，而$S^C = \varnothing$，因此$\mathcal{B}$在补运算下封闭，即满足性质b。
因为$(S \cup \varnothing) \in \mathcal{B}$，因此$\mathcal{B}$在并运算下封闭，即满足性质c。
即证得$\mathcal{B} = \{\varnothing, S\}$是一个$\sigma$代数。

(b) 令$\mathcal{B}=\{S$的全体子集，包括S本身$\}$，证明$\mathcal{B}$是一个σ代数；

证明:

因为$\varnothing$是任何集合的子集，那么$\varnothing\in S$，因此$\varnothing\in\mathcal{B}$，即满足性质a。

设A为S的一个子集，显然有$A\in\mathcal{B}$，而$A^C\in S$，因此$A^C\in\mathcal{B}$，即满足性质b。

设$A_1,A_2,...$为S的所有的子集，有，$A_1,A_2,...\in S$。那么，显然有$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}$，即有$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}$，即满足性质c。

即证得$\mathcal{B}=\{S$的全体子集，包括S本身$\}$是一个σ代数。

(c) 证明两个σ代数的交仍是σ代数。

证明:

设有两个σ代数$\mathcal{B}1$，$\mathcal{B}2$，由σ代数的性质a可知，$\varnothing\in\mathcal{B}1$且$\varnothing\in\mathcal{B}2$，进而可得$\varnothing\in\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2$，即满足性质a。

设$A\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$，则有$A\in\mathcal{B}1$ 和$A\in\mathcal{B}2$。由σ代数的性质b可知，$A^C\in\mathcal{B}1$ 和$A^C\in\mathcal{B}2$，因此$A^C\in\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2$，即满足性质b。

设$A_1,A_2,...\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$，则有$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}1$ 和$A_1,A_2,...\in\mathcal{B}2$。由$\sigma$代数的性质c可知，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}1$ 和$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{B}2)$，因此$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in(\mathcal{B}1\cap\mathcal{B}2)$，即满足性质c。

即证得证明两个σ代数的交仍是σ代数。

4 【1.13】若$P(A)=\frac{1}{3}$且$P(B^C)=\frac{1}{4}$，则A，B是否不交？试加以解释。

解：如果A,B是不交，$P(A\cap B)=0$。由$P(B^C)=\frac{1}{4}$得，$P(B)=\frac{3}{4}$，根据Bonferroni不等式，$P(A\cap B)\geqslant P(A)+P(B)-1=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-1=\frac{1}{12}>0$，因此不交。（这样证明可以吗？）

5 【1.21】橱内有n双鞋子，随机抽出$2r$只鞋子$(2r<n)$，这些鞋子全都无法配对的概率是多少？

解：随机从$2n$只鞋子中抽出$2r$只鞋子的组合数为：$\binom{2n}{2r}$。鞋子分左鞋或右鞋，如果左右鞋不配也无法进行配对，而左右鞋被选中的概率为2^{2r}，最后要求全都无法配对，必定是在n

种不同的鞋子中选$2r$只鞋子，选的组合数为：$\binom{n}{2r}$，只有这样选才一定能保证完全无法配对，而这$2r$只鞋子可以是左鞋也可以是右鞋，因此这些鞋子全都无法配对的概率是$\frac{\binom{n}{2r}2^{2r}}{\binom{2n}{2r}}$

6 【1.22】

(a) 对全年366天（包含2月29日）抽签，抽出的前180天刚好平均分布于全年12个月的概率是多少？

解：首先对366天中抽出180天出来的概率为$\binom{366}{180}$，其次要求180天平均分布在12个月中的话，意味着每个月中都均匀的抽了15天，设每个月的天数集合为$N_i = \{n_1, n_2, ..., n_{12}\}$，其实是已知的，$N_i = \{31, 29, 31, ..., 31\}$, 抽样组合数为：$\prod_{i=1}^{12}\binom{n_i}{15}$，其中$N_i = \{31, 29, 31, ..., 31\}$。因此抽出的前180天刚好平均分布于全年12个月的概率是$\frac{\prod_{i=1}^{12}\binom{n_i}{15}}{\binom{366}{180}}$，其中$N_i = \{31, 29, 31, ..., 31\}$。

(b) 抽出的前30天都不在九月份的概率是多少？ 解：9月是30天，现在进行30次抽样，组合数为：$\binom{366}{30}$，要求不抽到9月的任意一天，那么第一次抽样组合数为：$\frac{366-30}{366}$，第二次抽样组合数为：$\frac{366-30-1}{366}$,依次类推，第30次抽样的组合数为：$\frac{366-30-29}{366}$。总的概率为$\frac{\prod_{i=1}^{30}\frac{366-30-i+1}{366}}{\binom{366}{30}}$。

7 【1.29】

(a) 对于例1.2.20，枚举构成无序样本{4，4，12，12}和{2，9，9，12}的有序样本。

解：枚举结果如下表：

Table 1: 枚举

无序样本	有序样本
$\{4, 4, 12, 12\}$	(4,4,12,12), (4,12,12,4), (4,12,4,12), (12,4,12,4), (12,4,4,12), (12,12,4,4)
$\{2, 9, 9, 12\}$	(2,9,9,12), (2,9,12,9), (2,12,9,9), (9,2,9,12),(9,2,12,9), (9,9,2,12) (9,9,12,2),(9,12,2,9),(9,12,9,2), (12,2,9,9), (12,9,2,9), (12,9,9,2)

(b) 假设我们有六个数{1，2，7，8，14，20}，问有放回的抽取时，抽的无序样本{2，7，7，8，14，14}的概率是多少？

解：无序样本的抽样中，m个互不相同的数字占据的位置分别为k_1, k_2, k_m，有序的样本总数为$\frac{k!}{k_1!k_2!...k_m!}$,即为$\frac{6!}{1!2!1!2!}=180$ ，有序样本的总数为n^r 即6^6，即可得抽的无序样本{2，7，7，8，14，14}的概率是$\frac{180}{6^6}$

(c) 设对m个数分别有放回的抽取$k_1, k_2, ..., k_m$次，得到一个大小为$k(k_1+k_2+...+k_m=k)$的无序样本。证明这个样本由$\frac{k!}{k_1!k_1!...k_m!}$个有序样本构成。

证明：设抽样次数为k，那么有序抽样的总数为$k!$，由于有m个不同的数字，其内部的排列组合次数分别为：$k_1!, k_2!, ..., k_m!$，由于同一个数字处在相邻的多个位置只会得到一种有序数，因此有序抽样的总数$k!$中会有$\prod_{i=1}^{m} k_i!$个重复，因此有序样本的总数应该为$\frac{k!}{k_1!k_1!...k_m!}$。

(d) 证明多项式的系数的个数（即自助法的样本总数）为$\binom{k+m-1}{k}$，即：$\sum_{k_1,k_2,...,k_m} I_{\{k_1+k_2+...+k_m=k\}}=\binom{k+m-1}{k}$

证明：这个自助法的抽样问题可以简化成一个物体装箱问题，总数k可以看做所有的物体，即用m个互不相同的数字表示m个箱子，即k个物体装到m个箱子中，那么这种装箱的总数为$\binom{k+m-1}{k}$。

8 【1.38】证明下列各命题（假定每个条件事件的概率都是正的）

(a) 若$P(B)=1$，则对任意A，有$P(A|B)=P(A)$.

证明：由课本定理1.2.11a可得$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$，

又因为$A\cap B^C\subset B^C$，且$P(B^C)=1-P(B)=1-1=0$，

故，$P(A\cap B^C)=0$ ，所以$P(A)=P(A\cap B)$，

因此$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{1}=P(A)$，

故，若$P(B)=1$，则对任意A，有$P(A|B)=P(A)$得证。

(b) 若$A\subset B$，则$P(B|A)=1$，且$P(A|B)=P(A)/P(B)$.

证明：由$A\subset B$可得 $A\cap B=A$,

进而$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$,

同样可得$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$ 故，若$A\subset B$, 则$P(B|A)=1$，且$P(A|B)=P(A)/P(B)$得证。

(c) 若A,B不交，则$P(A|A\cup B)=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

证明：若A,B不交，则有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$(有限可加性公理),

同时有$A\cap(A\cup B)=A$.

因此，$P(A|A\cup B)=\frac{A\cap(A\cup B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$,

故，若A,B不交，则$P(A|A\cup B)=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$得证。

(d) $P(A\cap B\cap C)=P(A|B\cap C)P(B|C)P(C)$.

证明：根据结合律，有$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap(B\cap C))$,

$\Leftrightarrow$

$=P(A|B\cap C)P(B\cap C)$, 条件概率公式

$\Leftrightarrow$

$=P(A|B\cap C)P(B|C)P(C)$, 条件概率公式

故，“$P(A\cap B\cap C)=P(A|B\cap C)P(B|C)P(C)$”得证。

9 【1.41】同1.3.6，仍假定电报信号中点信号与化信号的比例是3：4，此外由于线路干扰导致$\frac{1}{4}$的点信号被误传为划信号，$\frac{1}{3}$的划信号被误传为电信号。

(a) 若收到的是划信号，试问发送的是划信号的概率是多少？

解：$P(\text{发划}|\text{收划})=\frac{P(\text{收划}|\text{发划})P(\text{收划})}{P(\text{收划}|\text{发划})P(\text{收划})+P(\text{收划}|\text{收点})P(\text{收点})}=\frac{(2/3)(4/7)}{(2/3)(4/7)+(1/4)(3/7)}=\frac{32}{41}$

(b) 假定信号的连续发送是独立事件，若收到的消息为：点–点，则发送方发送四种可能的消息的概率分布如何？

10 【1.49】称累积分布函数F_X随机大于（stochastically greater）累积分布函数F_Y，如果对任意t都有$F_X(t) \leqslant F_Y(t)$。

11 【1.50】验证式（1.5.4）

12 【1.52】证明$g(x)$是一个概率密度函数。

13 【exercise1–3】A random variable X is said to have a Gamma distribution if its pdf is:

$$f(x|\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}, x \in [0,\infty), \alpha > 0, \theta > 0$$

(a) Verify $f(x|\alpha,\theta)$ is a valid pdf.

证明：两个性质不难证明性质a，即$f_X(x) \geq 0$。

不难推导，

$$f_X(x|\alpha,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|\alpha,\theta)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx \approx 1$$

即可证$f(x|\alpha,\theta)$ 是概率密度函数。

(b) Find mean and variance of X. 解：先求期望，

$$\mathbb{E}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha$$

再求平方的期望，

$$\mathbb{E}(x^2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{2\alpha-2} e^{-2x/\theta} dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)$$

，因此方差$variance(x) = \mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}(x))^2 = \alpha$

(c) Let $Y = 1/X$. What is the pdf of Y?(Y is said to have an inverse gamma distribution)

解：令$Y = 1/X$，则有，$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$，且$Y$的概率密度函数为：

$$f_Y(y|\alpha,\theta) = f_X(y|\alpha,\theta)\frac{dx}{dy}$$

$$f_Y(y|\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}(\frac{1}{y})^{\alpha-1}e^{-1/(\theta y)} \mid \frac{1}{y^2} \mid$$

$$f_Y(y|\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}y^{-\alpha-1}e^{-1/(\theta y)}$$

用β替换θ^{-1}得:

$$f_Y(y|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{-\alpha-1}e^{-\beta/y}$$

因此，Y的概率密度函数为逆Gamma分布。