高等数学求导公式

01. $(C)' = 0$；02. $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$；

03. $(\sin x)' = \cos x$；

04. $(\cos x)' = -\sin x$；

05. $(\tan x)' = \sec^2 x$；

06. $(\cot x)' = -\csc^2 x$；

07. $(\sec x)' = \sec x \tan x$；

08. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$；

09. $(a^x)' = a^x \ln a$；10. $(e^x)' = e^x$；

11. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$；

12. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$；

13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

15. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；

16. $(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$。

II. 和、差、积、商的导数

01. $(u \pm v)' = u' \pm v'$；

02. $(Cu)' = Cu'$；

03. $(uv)' = u'v + uv'$；

04. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$。

III 复合函数的导数

若 $y = f(u), u = \varphi(x)$，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

或 $y'(x) = f'(u)\varphi'(x)$。

- 计算极限时常用的等价无穷小

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x \sim x$　　$\lim\limits_{x\to 0} \tan x \sim x$　　$\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x-1\right)\sim x \qquad \lim_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)\sim x \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$$

- 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

- 若 $\lim f\left(x\right)=A>0,\ \lim g\left(x\right)=B$，则 $\lim f\left(x\right)^{g(x)}=A^B$

- **罗尔定理**：$F'(x)\neq 0$若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在一 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

- **拉格朗日中值定理**：若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则存在一$\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

- **柯西中值定理**：若 $f(x)$、$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F'(x)\neq 0$则存在一 $\xi\in(a,b)$，使得$|x-x_0|<\delta$，则$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$。

- **罗必达法则**：若（1）$\lim\limits_{x\to a(或\infty)}f(x)=\lim\limits_{x\to a(或\infty)}F(x)=0(或\infty)$，（2）$f'(x)$及$F'(x)$在$0<|x-x_0|<\delta$（或$|x|>X$）处存在，且$F'(x)\neq 0$，（3）$\lim\limits_{x\to a(或\infty)}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或$\infty$），则$\lim\limits_{x\to a(或\infty)}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a(或\infty)}\frac{f'(x)}{F'(x)}$。

- **泰勒公式**：$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$

其中：$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi\in(x_0,x)$。

- **马克劳林公式**：$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

其中：$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi\in(0,x)$。

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)\quad(-\infty<x<\infty)$

2. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty)$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

5. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (-1 < x \le 1)$

- **驻点**：导数为零的点

  拐点：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的，

  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的，

若曲线在 x_0 两旁改变凹凸性，则称 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点。

- **凹凸性判断**（充分条件）：设 $f''(x)$ 存在，若 $a < x < b$ 时 $f''(x) < 0$，则曲线是为凸的，若 $a < x < b$ 时 $f''(x) > 0$，则曲线是为凹的。

设曲线方程 $y = f(x)$，$f(x)$ 具有二阶导数，则函数 $y = f(x)$ 在 (x, y) 的曲率 K 为：$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{2/3}}$

（工程中，若 $|y'| << 1$ 时，$K = |y''|$）。

基本积分公式：

$\int k dx = kx + C$　　$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$　　$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$　　$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$　　$\int \sin x dx = -\cos x + C$；

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$　　$\int \csc x \cot x = -\csc x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$　　$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int shx dx = chx + C$　　$\int chx dx = shx + C$

$*\int \tan dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$　　$*\int \cot x dx = -\ln\left|\sin x\right| + C$

$*\int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$　　$*\int \csc x dx = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$

$*\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$　　$*\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$*\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$　　$*\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$

$*\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

- 基本积分方法

1 换元法：（1）设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，而 $u = \varphi(x)$ 可导，则有：

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f(u) du = F[\varphi(x)] + C$；

（2）设 $x = \varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上单调可导，且 $\varphi'(t) \neq 0$，又设 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 具有原函数 $F(t)$，

则有：$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F[\varphi^{-1}(t)] + C$。

2 分布积分法： $\int u dv = uv - \int v du$

3. 有理函数积分： ①$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$　　②$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + Px + q)^n} dx$

4. 万能代换（三角函数的有理式的积分）： 设 $\tan \frac{x}{2} = u$，则 $dx = \frac{2}{1+u^2} du$，

$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$。

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$。

- **定积分中值定理：** $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b)$。
- **定理：** 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数

  $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，并且它的导数是

  $$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \le x \le b)$$
- **定积分换元公式：** $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$，

  $$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$。
- $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

  $$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$
- **定积分的分步积分：** $\int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b vdu$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & (n\text{为正偶数})\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & (n\text{为大于1的奇数})\end{cases}$$

- **弧长计算公式：** ① $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$；

  ② $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases} \quad (\alpha \le \text{t} \le \beta)$，$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt$；

  ③ $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$，$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$。

向量代数

- **定比分点公式：** $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$， $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$， $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$。
- **数量积：** $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta$， $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}。$$

- **向量积：** $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$。

- **平面**

➢ **平面的一般方程：** $Ax+By+Cz+D=0$（向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$ 为平面法向量）。

➢ **平面点法式方程：** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。

➢ **平面的截距式方程：** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$（$a,b,c$ 为平面在三个坐标轴上的截距）。

➢ **两个平面的夹角：**两个平面方程为： π_1 平面： $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$，

π_2 平面： $A_2x+B_2y+C_2z+D=0$，则两平面的夹角 φ 的余弦为：

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+B_2^2}}。$$

➢ **两平面平行的条件：** $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$。

➢ **两平面垂直的条件：** $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

➢ **点到平面的距离：**平面： $Ax+By+Cz+D=0$，平面外一点： $M(x_1,y_1,z_1)$，则点 M 到平面的距离： $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2B^2C^2}}$。

- **空间直线**

➢ **两个平面的交线：** $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D=0\end{cases}$。

➢ **点向式方程：**直线上的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，直线的一个向量$\vec{S}=\{m,n,p\}$，则直线方程为：

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$， 参数方程为：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

➢ **两直线的夹角：**$L_1:\frac{x-x_{01}}{m_1}=\frac{y-y_{01}}{n_1}=\frac{z-z_{01}}{p_1}$，$L_2:\frac{x-x_{02}}{m_2}=\frac{y-y_{02}}{n_2}=\frac{z-z_{02}}{p_2}$，则两直线的夹角余弦为：$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$。

两直线平行：$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$，

两直线垂直：$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$，

➢ **两直线共面（平行或相交）：**

两直线：$\begin{cases} L_1:\frac{x-x_{01}}{m_1}=\frac{y-y_{01}}{n_1}=\frac{z-z_{01}}{p_1} \\ L_2:\frac{x-x_{02}}{m_2}=\frac{y-y_{02}}{n_2}=\frac{z-z_{02}}{p_2} \end{cases}$，共面的条件：$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$。

➢ **直线与平面的夹角**

平面： $\pi:Ax+By+Cz+D=0$，直线：$L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

①若直线与平面相交，夹角：$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$；

②若直线与平面平行：$Am+Bn+Cp=0$；

③若直线与平面垂直：$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$。

● **多元函数微积分**

1. 方向导数： $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$ （φ为x轴到方向l的转角）

2. 梯度： $grad\ f\left(x,y,z\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

3. 二元函数的极值：$z=f\left(x,y\right)$，$f_x\left(x_0,y_0\right)=0$，$f_y\left(x_0,y_0\right)=0$。令 $f_{xx}\left(x_0,y_0\right)=A$，$f_{xy}\left(x_0,y_0\right)=B$，$f_{yy}\left(x_0,y_0\right)=C$。①当 $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时具有极大值，当 $A>0$ 具有极小值；②当 $AC-B^2<0$ 时没有极值；③当 $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需令作讨论。

3. 二重积分的计算 $\iint\limits_D f\left(x,y\right)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f\left(x,y\right)dy=\int_c^d dy\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}f\left(x,y\right)dx$

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)d\sigma=\iint\limits_D f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdrd\theta$$

$$\iint\limits_D f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta\left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr\right]d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$$

4. 曲面的面积计算：

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x^2\left(x,y\right)+f_y^2\left(x,y\right)}d\sigma=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

平面薄片的重心： $\bar{x}=\frac{\overline{M}}{M}=\frac{\iint\limits_D x\rho\left(x,y\right)d\sigma}{\iint\limits_D\rho\left(x,y\right)d\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\overline{M}}{M}=\frac{\iint\limits_D y\rho\left(x,y\right)d\sigma}{\iint\limits_D\rho\left(x,y\right)d\sigma}$

平面薄片的转动惯量： $I_x=\iint\limits_D y^2\rho\left(x,y\right)d\sigma,\quad I_y=\iint\limits_D x^2\rho\left(x,y\right)d\sigma$

5. 三重积分的计算：

$$\iiint\limits_D f\left(x,y,z\right)dv=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f\left(x,y,z\right)dz$$

- 曲线积分和曲面积分

1. 对弧长的曲线积分： $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t),\phi(t)\right]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)\right]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

2. 对坐标的曲线积分： $x=\varphi(t)$， $y=\phi(t)$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\left\{P\left[\varphi(t),\phi(t)\right]\varphi'^2(t)+Q\left[\varphi(t),\phi(t)\right]\phi'^2(t)\right\}dt$$

3. 对曲面的积分：

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

4. 对坐标的曲面积分：

- 无穷级数

➢ 收敛级数的基本性质：

1. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于和s，则它的各项同乘以一个常数k所得的级数$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛，且其和为ks。

2. 如果级数s、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于和s、σ，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛，且其和为$s \pm \sigma$。

3. 在级数中去掉、加上或者改变有限项，不会改变级数的收敛性。

4. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则对这级数的项任意加括号所成的级数

$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_2+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$仍收敛，且其和不变。

5.（级数收敛的必要条件）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则它的一般项趋于零，即$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

➢ 常数项级数的审敛法：

定理 1. 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是：它的部分和数列$\{s_n\}$有界。

定理 2（比较审敛法）. 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n\ (n=1,2,\cdots)$。若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；反之，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

推论 1. 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，且存在自然数N，使当$n \ge N$时有$u_n \le kv_n\ (k>0)$成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，且当$n \ge N$时有$u_n \ge kv_n\ (k>0)$成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

推论 2. 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，如果有$p>1$，使$u_n \le \frac{1}{n^p}\ (n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；如果$u_n \ge \frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

定理 3(比较审敛法的极限形式). 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，如果$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0<l<+\infty)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散。

定理 4（比值审敛法，达朗贝尔（D'Alembert）判别法）. 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的后项于前项之比值的极限等于ρ：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则当$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1$（或$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$）时级数发

散；$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散。

定理 5（根值审敛法，柯西判别法）．设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，如果它的一般项u_n的n次根的极限等于ρ：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则当$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1$（或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$）时级数发散；$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散。

定理 6（莱布尼茨定理）. 如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件：（1）$u_n\ge u_{n+1}\quad(n=1,2,3\cdots)$，（2）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则级数收敛，且其和$s\le u_1$，其余项$r_n$的绝对值$|r_n|\le u_{n+1}$。

定理 7. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛。

➢ 幂级数

定理 1（阿贝尔（Abel）定理）. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}ax^n$当$x=x_0\,(x_0\ne0)$时收敛，则适合不等式$|x|<|x_0|$的一切x使这幂级数绝对收敛；反之，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}ax^n$当$x=x_0$时发散，则适合不等式$|x|>|x_0|$的一切x使这幂级数发散。

推论：如果幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}ax^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数R存在，使得：当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；当$|x|>R$时，幂级数发散；当$x=R$与$x=-R$时，幂级数可能收敛也可能发散。

定理 2. 如果$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_{n+1}$、$a_n$是幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}ax^n$的相邻两项的系数，则这幂级数的收敛半径$R=\begin{cases}1/\rho & (\rho\ne0)\\ +\infty & (\rho=0)\\ 0 & (\rho=+\infty)\end{cases}$

性质 1． 设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}ax^n$的收敛半径$R(R>0)$，则其和函数$s(x)$在区间$(-R,R)$内连续。如果

幂级数在 $x=R$（或 $x=-R$）也收敛，则和函数 $s(x)$ 在 $(-R,R]$（或 $[-R,R)$）连续。

性质 2. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ax^n$ 的收敛半径 $R(R>0)$，则其和函数 $s(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内是可导的，且有逐项求导公式 $s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$，其中 $|x|<R$，逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

性质 3. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ax^n$ 的收敛半径 $R(R>0)$，则其和函数 $s(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内是可积的，且有逐项积分公式 $\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，其中 $|x|<R$，逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

- 欧拉公式： $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

- 傅立叶级数

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0 \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots)$ $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0 \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx=0 \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nxdx=0 \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots,k\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx=0 \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots,k\neq n)$$

- 函数展开成傅里叶级数 （$f(x)$是周期为2π的周期函数）

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

其中：
$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (\text{n=0,1,2,}\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots) \end{cases}$$

定理（收敛定理，狄利克雷（Dirichlet）充分条件）：设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

（1）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

（2）在一个周期内至多只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且：

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right]$。

定理. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在一个周期上可积，则

（1）当 $f(x)$ 为奇函数时，它的傅里叶系数为：

$$\begin{cases} a_n=0 \quad (\text{n=0,1,2,3,}\cdots) \\ b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots) \end{cases}$$

（2）当 $f(x)$ 为偶函数时，它的傅里叶系数为：
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (\text{n=0,1,2,3,}\cdots) \\ b_n=0 \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots) \end{cases}$$

➢ **周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数**

定理：设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

其中系数a_n,b_n为：$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (\text{n=0,1,2,}\cdots) \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (\text{n=1,2,3,}\cdots) \end{cases}$

当$f(x)$为奇函数时，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

其中系数b_n为：$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (\text{n=1,2,3,}\cdots)$

当$f(x)$为偶函数时，$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\right)$

其中系数a_n为：$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (\text{n=0,1,2,}\cdots)$

- 微分方程：

➢ 齐次方程：$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$u=\frac{y}{x}\to y=ux\to\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(u)\to u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)\to\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$