Bartosz Seweryn, 320733, grupa 5, projekt 1, zadanie 18

Wstęp

Wyznaczanie przybliżonego rozwiązania liniowych równań różniczkowych 1-go i 2-go rzędu, metodą Adamsa-Bashfortha 4-go rzędu, wartości początkowe zostały obliczone metodą Rungego-Kutty 4-go rzędu (wzór Gilla). Z przeprowadzonych testów numerycznych wynika, że metoda Adamsa-Bashfortha 4-go rzędu zazwyczaj skutecznie przybliża wartości szukanej funkcji z błedem globalnym rzędu h^4, gdzie h jest krokiem całkowania, czyli odległością między równoodległymi wezłami, w których przybliżamy funckję. Warto zauważyć, że krok całkowania należy dobierać dość ostrożnie, tzn. gdy będzie za duży, nasze rozwiązanie może okazać się bardzo niedokładne, z drugiej strony zbyt duże zmiejszanie kroku całkowania nie zawsze prowadzi do poprawy dokładności, a wręcz może ją pogorszyć.

Opis metody Adamsa-Bashfortha rzędu 4-go

Metoda Adamsa-Bashfortha rzędu 4-go jest metodą wielokrokową, wykorzystującą do obliczenia i-tego przybliżenia wartości wcześniejszych 4 przybliżeń. Z tego względu nie jest ona metodą samostartującą. Pierwsze, w tym wypadku 3 wartości (zerowa jest dana z warunku początkowego) muszą zostać obliczone inną metodą, np. metodą Rungego-Kutty rzędu 4 (wzór Gilla). Niech punkty $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b(n > 0)$ takie, że $x_k = a + kh$, gdzie $h = \frac{b-a}{n}$, dla przedziału $[a, b]$ będą punktami, w których chcemy przybliżyć szukaną funkcję.
Liniowe równanie różniczkowe $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$, gdzie a, b i f są funkcjami zmiennej x, można prosto sprowadzić do postaci $y' = F(x, y)$. Wtedy, dla $i >= 4$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{24}(55y'_{i-1} - 59y'_{i-2} + 37y'_{i-3} - 9y'_{i-4}),$$

gdzie $y_i = y(x_i)$, $y'_i = F(x_i, y_i)$ oraz h to krok całkowania, natomiast dla $i = 1, 2, 3$ wykorzystamy metodę Rungego-Kutty 4-go rzędu, a konkretnie wzór Gilla, który ma postać

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}(k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4),$$

gdzie

$$\begin{gathered} k_1 = hF(x_i, y_i) \\ k_2 = hF(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hF(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})k_1 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})k_2) \\ k_4 = hF(x_i + h, y_i - \frac{\sqrt{2}}{2}k_2 + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})k_3). \end{gathered}$$

Dla równań 2-go rzędu postaci $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$, gdzie a, b, c i f są funkcjami zmiennej x, postępujemy w sposób analogiczny, sprowadzamy je do postaci $y'' = g(x, y, y')$, jednak teraz musimy stworzyć układ dwóch równań pierwszego rzędu. W tym celu tworzymy wektor Y, taki że

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{f(x)-c(x)y_1-b(x)y_2}{a(x)} \end{pmatrix}, Y' = F\left(x, Y\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ g(x, y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

i wykorzystujemy wcześniejsze wzory.

Eksperymenty numeryczne

Błąd globalny metody Adamsa-Bashfortha rzędu 4-go wyraża się wzorem

$$E = (b - a)\frac{251h^4}{720}y^{(5)}(\mu),$$

dla pewnego $\mu \in (a, b)$. W tabeli 1 przedstaione są wyniki błędów globalnych dla dwóch wybranych równań w zależności od h. Jak widać błędy globalne są mniejsze, niż h^4 co jest bardzo dobrym przybliżeniem. Niestety dla równań, kórych rozwiązaniem jest na przykład funkcja $y(x) = e^x$, błąd globalny na przedziale $[0, 20]$ jest już znacznie większy, dokładne wartości zostały podane w tabeli 2. Wynika to z faktu, iż piąta pochodna funkcji e^x osiąga bardzo duże wartości, już dla $x = 10$, $y^{(5)}(10) \approx 22026$, aby zminimalizować bład musimy, więc mocno zmniejszyć krok całkowania.

W tabeli 3 zostały podane wartości błedu globalnego dla równania $y'' + y = x^2$ i dla coraz mniejszego kroku całkowania. Jak widać zwiększanie liczby węzłów (czyli zmniejszanie h), poprawia dokładność tylko do pewngo poziomu, poźniej dokładność zamiast rosnąć - maleje. Musimy zatem odpowniedno dobierać ilość węzłów do długości przedziału, aby nasz program był jak najbardziej optymalny.

Tabela 1: Przybliżony błąd globlalny E_k dla dwóch wybranych równań różniczkowych w zależności od h - kroku całkowania, RA - rowiązanie analityczne, $[a, b]$ - przedział, na którym przybliżamy rozwiązanie, war. pocz. - warunki początkowe.

równanie	RA	[a,b]	war. pocz.	h	E_k
$y' + 2y = x$	$\frac{2x+3e^{(-2x-2)}-1}{4}$	$[-1, 1]$	$y(-1) = 0$	0.02 0.01	2.33×10^{-7} 1.50×10^{-8}
$y'' + y = \sin x$	$\frac{-xcosx+\cos x-\cos(1)\sin(1-x)}{2}$	$[1, 2]$	$y(1) = 0$, $y'(1) = 0$	0.01 0.005	5.40×10^{-9} 3.46×10^{-10}

Tabela 2: Przybliżony błąd globlalny E_k dla równania różniczkowego $y'' - y' = 0$ w zależności od h - kroku całkowania, RA - rowiązanie analityczne, $[a, b]$ - przedział, na którym przybliżamy rozwiązanie.

równanie	RA	[a,b]	war. pocz.	h	E_k
$y'' - y' = 0$	e^x	$[0, 20]$	$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$	0.02 0.01 0.001	5.23×10^{2} 3.33×10^{1} 3.38×10^{-3}

Tabela 3: Przybliżony błąd globlalny E_k dla wybranego równania różniczkowego dla bardzo małych kroków całkowania, RA - rowiązanie analityczne, $[a, b]$ - przedział, na którym przybliżamy rozwiązanie.

równanie	RA	[a,b]	war. pocz.	h	E_k
$y'' + y = x^2$	$x^2 + 2\sin(1-x) + \cos(1-x) - 2$	$[1, 1.01]$	$y(1) = 0$, $y'(1) = 0$	10^{-4} 10^{-5} 10^{-6}	4.43×10^{-16} 4.46×10^{-16} 4.82×10^{-16}

W tabeli 4 zostało przedstawione porównanie błędów globalnych metody Rungego-Kutty 4-go rzędu (wzór gilla) i metody Adamsa-Bashfortha 4-go rzędu dla wybranego równania. Można zauważyć, że metoda Rungego-Kutty daje nam lepszą dokładność, niż metoda Adamsa-Bashfortha dodatkowo jest ona samostartująca.

Tabela 4: Przybliżony błąd globlalny E_k - RK w metodzie Rungego-Kutty 4-go rzędu (wzór Gilla), E_k - AB - w metodzie Adamsa-Bashfortha rzedu 4-go, dla wybranego równania różniczkowego na przedziale $[1, 2]$ dla warunków początkowych $y(1) = 0, y'(1) = 0$, AN - rozwiązanie analityczne.

równanie	AN	h	E_k - AB	E_k - RK
$y'' + 2y = x^3$	$\frac{x^3-3x+2\cos(\sqrt{2}(x-1))}{2}$	0.01 0.005	1.88×10^{-8} 1.20×10^{-9}	1.82×10^{-10} 1.13×10^{-11}