МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет обшей и прикладной физики

Отчёт по лабораторной работе 1.4.8 «Измерение модуля Юнга методом акустического резонанса»

Выполнил:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.

Долгопрудный, 2023

1 Аннотация

Цель работы: Исследовать явление аккустического резонанса в тонком стержне. Измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и разных размеров. Измерить модули Юнга этих материалов.

Используемые инструменты: Генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитный излучатель и приемник колебаний, различные тонкие стержни

2 Основные теоретические сведения

Модуль юнга E - основная характеристика упругости твёрдого тела. Если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение $\sigma = F/S$ вдоль некоторой оси x, причем вдоль других осей напряжения нет, то в этом элементе возникает относительная деформация $\varepsilon = \Delta x/x_0$, которая связана с этим напряжением соотношением:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1}$$

где E - уже упомянутый модуль Юнга, зависящий только от материала среды.

Малые колебания упругой среды Если к небольшой части среды кратковременно создать малую деформацию, то за счёт инертности и упругости среды в ней эта деформация будет передаваться соседним элементом и будет распространяться в виде продольной волны. (Продольными называются волны, у которых направление перемещения вещества совпадает с направлением распространения волны). Такую волну будем называть акустической и скорость ее распространения определяется следующим соотношением:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2}$$

где ρ - плотность среды.

В общем случае волны в твёрдых средах могут быть и поперечными, когда возникает деформация сдвига (коэффициент Пуассона не равен нулю). Однако в рамках этой работы мы ограничимся изучением продольных волн, распространяющихся в длинных тонких стержнях.

Акустический резонанс Акустическая волна, распространяющаяся вдоль стержня, испытывает отражение от его торцов. Если в длину стержня укладывается целое число полуволн, то отраженные волны будут в фазе с падающими, из-за чего возникает конструктивная интерференция, которая приводит к резкому повышению амплитуды колебаний в стержне. (Собственно определение резонанса, такое явление и называется акустическим резонансом)

Уравнение волны в тонком стержне Получим дифференциальное уравнение волны в стержне (Рис.1):

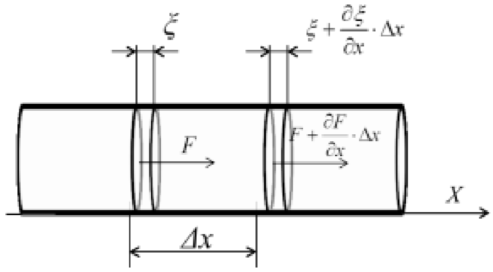

Рис. 1:

$\Delta\xi = \xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)$, пользуясь малостью Δx получим $\Delta\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x$. Таким образом:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{3}$$

функция относительного удлинения стержня то координаты x.

Тогда

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{4}$$

Здесь напряжение $\sigma = F/S$. Сила в x не равна силе в $x + \Delta x$ (соответственно и напряжения различны). Из-за этого возникает возвращающая сила ΔF, которая стремится вернуть стержень в исходное, недеформированное состояние.

$$\Delta F = S\sigma(x+\Delta x) - S\sigma(x) = S\frac{\partial \sigma}{\partial x}\Delta x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ES\Delta x \tag{5}$$

Эта сила вызовет ускорение небольшой части стержня массой $\Delta m = S\rho\Delta x$, с одной стороны по 2-му закону Ньютона:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ES\Delta x = \Delta m a = S\rho\Delta x a$$

откуда

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{E}{\rho} \tag{6}$$

С другой стороны ускорение – вторая производная смещения по времени

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{7}$$

Приравнивая соотношения (6) и (7) получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Используя обозначение (2) получаем окончательное *волновое* уравнение.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - u^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{8}$$

Далее также будет показано, что величина $u = \sqrt{E/\rho}$ является скоростью распространения акустической волны в среде.

Применимость волнового уравнения* Применимость уравнения (8) ограничена. Во-первых, вывод этого соотношения основывается на справедливости закона Гука, то есть все деформации малы, следовательно $\varepsilon \ll 1$. Во-вторых, условием тонкости стержня, то есть $R \ll \lambda \ll L$, где L – длина стержня. В случае, когда $\lambda \ll R$, стержень стоит рассматривать как неограниченную среду, и скорость распространения волны в среде u не будет определяться соотношением (2), и в нем появится некоторый «корректирующий» коэффициент. В таком случае скорость u определяется соотношением:

$$u_i = \sqrt{\frac{E}{\rho}\cdot\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

где μ – уже упомянутый коэффициент Пуассона.

Ну и наконец последний случай, когда $\lambda \approx R$, тогда требуется аккуратно учитывать граничные условия на боковых поверхностях стержня. В нашей работе эти два случая не рассматриваются.

Бегущие акустические волны. Скорость волны Для начала покажем, что произвольная функция $\xi(x,t) = \phi(x-ut)$ – то есть функция, зависящая только от комбинации $X = x - ut$, – является решением волнового уравнения (8)

Подстановкой функции ϕ, используя формулу для производной произведения, получим:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = (-u)^2\phi'', \;\; \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \phi'' \to \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

штрих в данном случае обозначает производную по аргументу $X = x - ut$

Функция $\phi(x-ut)$ описывает возмущение в среде, движущееся вдоль оси x со скоростью u, так как если мы проследим какое-то время за некоторой точкой возмущения (ее смещение остается постоянным), то есть положим что $x - ut = const$. Теперь если продифференцируем, получим $dx - udt = 0$, откуда

$$\frac{dx}{dt} = u$$

В случае, когда $u > 0$, очевидно, волна будет двигаться в положительном направлении x. Чтобы «развернуть» волну, достаточно всего лишь поменять аргумент функции ϕ на $x + ut$.

Общим решением волнового уравнения (8) является сумма двух волн, каждая из которых «бежит» вдоль x со скоростями $\pm u$:

$$\xi(x,t) = \phi_1(x-ut) + \phi_2(x+ut) \tag{9}$$

Вид функций ϕ_1 и ϕ_2 определяется из начальных и граничных условий.

Собственные колебания стержня. Стоячие волны В случае гармонического (то есть описывающегося гармоническим законом) возбуждения колебаний с частотой f, продольная волна в стержне может быть представлена как суперпозиция двух бегущих навстречу друг другу гармонических волн:

$$\xi(x,t) = A_1 \sin(\omega t + kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t - kx + \varphi_2) \tag{10}$$

где $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота. Коэффициент $k = 2\pi/\lambda$ называется волновым числом или пространственной частотой.

Соотношения между $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ определяются граничными условиями на концах стержня.

Если концы стержня не закреплены, то напряжения в них должны равняться нулю. Положим координатами концов стержня $x = 0$ и $x = L$. Тогда, используя (1), получим граничные условия для незакрепленных концов стержня:

$$\sigma(0) = 0 \to \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \sigma(L) = 0 \to \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \tag{11}$$

Записывая первое граничное условие из соотношения (11) для функции $\xi(x,t)$ из (10) получим

$$-kA_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + kA_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Отсюда очевидны условия, при которых соотношение (11) выполняется:

$$A_1 = A_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

В данном случае условие равенства амплитуд можно интерпретировать как сохранение энергии при отражении волны от торцов стержня. Условие равенства фаз говорит о том, что при отражении фаза остается неизменной.

Если закрепить концы стержня ($\sigma(0) = \sigma(L) \neq 0$), получим, что фазы падающей и отраженной волны будут отличаться на π.

Обозначим $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $A_1 = A_2 = A$, тогда подставляя в (10)

$$\xi(x,t) = A(\sin(\omega t + kx + \varphi) + \sin(\omega t - kx + \varphi))$$

Пользуясь формулов суммы синусов получим

$$\xi(x,t) = 2A\cos(\omega t + \varphi)\sin(kx) \tag{12}$$

Альтернативно синус и косинус в этой формуле могут поменяться местами, в зависимости от изначально выбранного гармонического закона в выражении (10)

Колебания вида (12) называются гармоническими стоячими волнами.

Воспользуемся условием (11), применяя к функции (12). Получим $\sin(0) = 0$ и $\sin(kL) = 0$. Первое, очевидно, истинно, а второе имеет решения:

$$k_n L = \pi n, n \in \mathbb{N}$$

Это же соотношение можно выразить через длину волны $\lambda = 2\pi/k$:

$$\lambda_n = \frac{2L}{k}, n \in \mathbb{N}$$

Подтверждаем, что стоячие волны возникают в стержне, когда на его длину укладывается целое число полуволн.

Тогда мы можем найти значения частот, при которых возникают стоячие волны:

$$\lambda_n = f_n \cdot u \Rightarrow f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L}, n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

Эти частоты называются собственными частотами колебаний стержня длины L. Именно при одной из этих частот f_n возникает явление акустического резонанса.

Амплитуда колебаний определяется функцией $\xi_0(x) = 2A\cos(kx)$, точки с максимальной амплитудой называются *пучностями*, а с минимальной – *узлами*

Еще важно отметить, что в реальности (как всегда) не все так легко: чистых стоячих волн невозможно добиться, так как всегда существует некоторая потеря энергии при отражении (и, соответственно, падение амплитуды), а также имеет место неидеальность самого стержня, возникновение посторонних колебаний при отражении, фаза которых не совпадает с падающей волной.

3 Схема установки и методика измерений

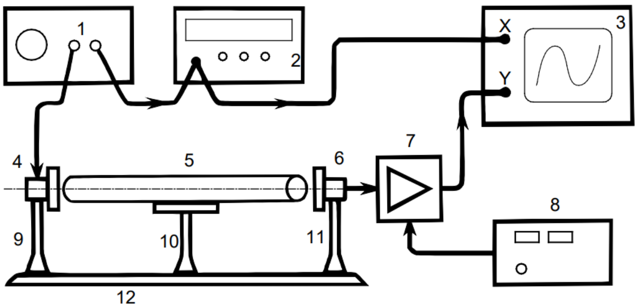

Рис. 2: Схема экспериментальной установки

На рисунке 1 – генератор звуковой частоты, 2 – частотомер, 3 – осциллограф, 4 – электромагнит-возбудитель, 5 – образец, 6 – электромагнит-приемник, 7 – усилитель звуковой частоты, 8 – блок питания усилителя, 9,11 – стойки крепления электромагнитов, 10 – стойка крепления образца, 12 – направляющая.

Методика измерений Согласно введенному обозначению (2) и последующему доказательству справедливости этого соотношения, модуль юнга E может быть найден из скорости распространения акустических волн в стержне и его плотности. Для определения скорости u в работе будет использоваться метод акустического резонанса (что такое акустический резонанс было изложено раньше). Когда периодическая возбуждающая сила будет иметь частоту близкую к f_n – собственной частоте колебаний стержня – (описана в соотношении (13)) будет наблюдаться резкое повышение амплитуды колебаний среды.

Мы будем искать такую частоту f_n при которой наблюдается акустический резонанс, зная n – число гармоник, можем получить скорость

$$u = 2L\frac{f_n}{n} \tag{14}$$

Если мы найдем зависимость $f_n(n)$, то по ней можно определить скорость распространения волны. Если наши предположения верны – графиком будет прямая, коэффициент наклона которой даст нам скорость распространения волны в стержне.

В реальности, конечно, мы никогда не увидим идеального резонанса, так как из-за неидеальности стержня имеется множество посторонних колебаний (в том числе и поперечных), которые будут нам мешать определить частоту резонанса. Ориентироваться можно только на резкое повышение амплитуды, когда $f = f_n$.

Вообще зависимость $A(f)$ будет иметь резкий пик именно в f_n, однако вокруг этой частоты тоже будет наблюдаться амплитуда выше обычной. Ширина такой «горки» определяется добротностью колебаний, однако это находится на рамками этой работы. Важно лишь отметить, что из-за высокой добротности колебаний время установления может быть достаточно велико (до нескольких секунд), поэтому в поисках f_n следует изменять частоту генератора достаточно медленно.

4 Результаты измерений и их обработка

С помощью малых образцов были получены плотности стержней:

$$\rho_{\text{медь}} = 9077.28 \pm 155.68 \text{кг/м}^3 \tag{15}$$
$$\rho_{\text{сталь}} = 7837.07 \pm 137.23 \text{кг/м}^3 \tag{16}$$
$$\rho_{\text{дюраль}} = 2928.03 \pm 55.79 \text{кг/м}^3 \tag{17}$$

Полученные значения плотностей достаточно хорошо соотносятся с табличными.

В качестве погрешности измерений частоты возьмем $2.5 * n$ Гц, так как при более больших n становилось сложнее наблюдать резонанс из-за помех в сигнале.

После настройки установки были получены данные для медного стержня.

Таблица 1: Результаты измерений для медного стержня

n	1	2	3	4	5	6
f_n, hz	3216.34	6437.41	9652.69	12873.1	16076.1	19328.9

А также для двух других – стального и из дюрали.

Таблица 2: Результаты измерений для стального стержня

n	1	2	3	4	5	6
f_n, hz	4134.2	8279.06	12409.3	16538.1	20668.3	24802.1

Таблица 3: Результаты измерений для стержня из дюрали

n	1	2	3	4	5	6
f_n, hz	4235.39	8481.51	12704.5	16935.5	21158.6	25384.6

Тогда по формуле (2) построим зависимость $f_n(n) = n(u/2L)$, согласно теории должна получиться прямая, проходящая через начало координат с коэффициентом наклона $u/2L$, откуда мы и получим искомую скорость u.

Первый фит для стержня из меди мы построим как функцию $f(x) = kx + b$ и убедимся, что y-интерсепт $b = -5.83$ Гц, что подтверждает верность теории. Для последующих фитов будем предполагать, что $b = 0$ и строить прямую $f(x) = kx$ для более точных результатов.

Погрешность модуля Юнга будем вычислять по формуле:

$$\sigma_E = E\sqrt{2\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2} \tag{18}$$

где $sigma_u$:

$$\sigma_u = u\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} \tag{19}$$

σ_k определяется как погрешность коэффициента наклона, вычисляется по методу χ^2.

Фитируя с помощью χ^2 получим следующие значения модулей Юнга и скоростей распространения звука.

$$\begin{aligned} E_{\text{медь}} &= (135.4 \pm 3.9)\text{ГПа} && (20) \\ E_{\text{сталь}} &= (193.0 \pm 5.7)\text{ГПа} && (21) \\ E_{\text{дюраль}} &= (75.6 \pm 2.3)\text{ГПа} && (22) \end{aligned}$$

$$u_{\text{медь}} = (3861.52 \pm 64.36)\text{м/с} \quad (23)$$
$$u_{\text{сталь}} = (4962.41 \pm 82.71)\text{м/с} \quad (24)$$
$$u_{\text{дюраль}} = (5081.47 \pm 84.73)\text{м/с} \quad (25)$$

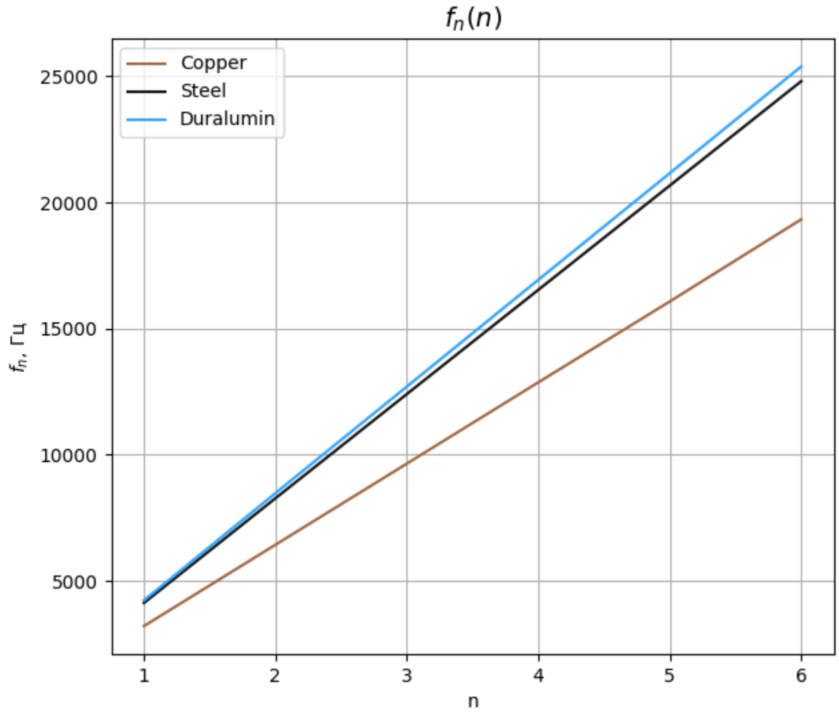

Рис. 3: Графики зависимости $f_n(n)$

На графике показаны именно значения, полученные экспериментально, а не их аппроксимация, так как они находятся настолько близко друг к другу, что никакой заметной разницы между ними нет.

Полученные значения скоростей распространения звука в средах и модулей Юнга получились достаточно близко к табличным, за исключением меди. Скорее всего это расхождение вызвано сплавом меди, который был использован для изготовления стержня.

Измерение добротности с помощью Амплитудно-Частотной Характеристики (АЧХ)

Для медного стержня вокруг 1-го резонанса было проведено 14 измерений. Ширина Δf на высоте равной $A_{max}/\sqrt{2} \approx 4.84$ hz.

Добротность Q вычисляется по формуле:

$$Q = \frac{f_n}{\Delta f} \tag{26}$$

Тогда

$$\boxed{Q \approx 671.25}$$

Как и ожидалось, добротность оказалась очень высокой, что говорит о том, что потери при отражении достаточно малы, из-за чего собственные колебания в стержне могут затухать несколько секунд.

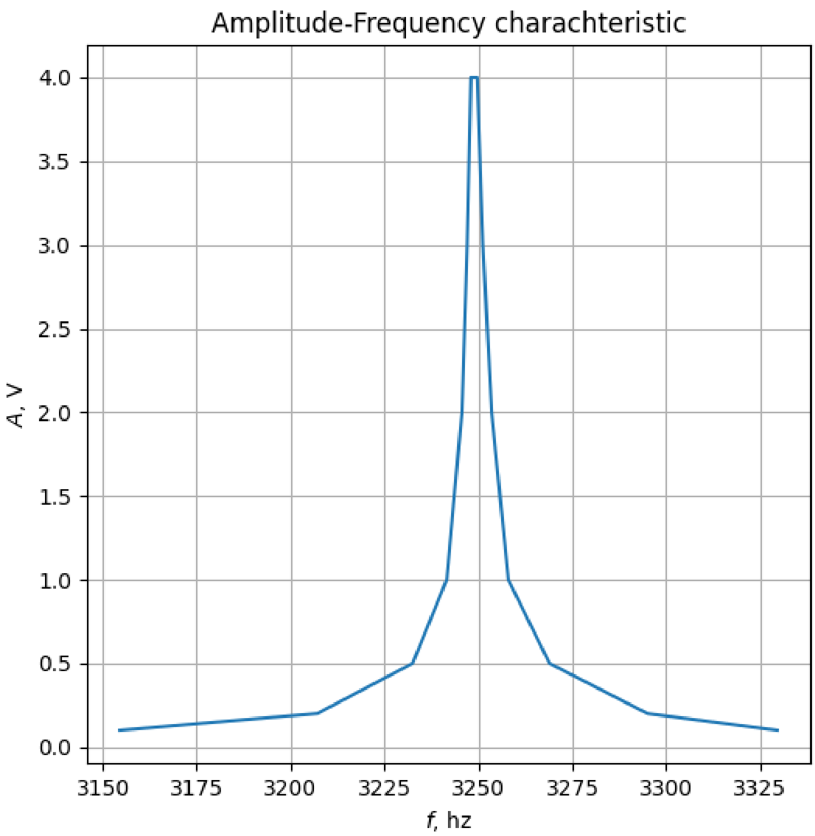

Рис. 4: Амплитудно-частотная характеристика

5 Обсуждение результатов и выводы

В результате выполнения работы была получена и подтверждена теоретическая зависимость $f_n(n)$, которая хорошо легла на прямую.

С помощью метода χ^2 были получены модули Юнга и скорости распространения звука в разных материалах с достаточно большой точностью (менее 1.7%). Полученные значения хорошо соотносятся с табличными (в зависимости от источника информации).

Кроме того, с помощью АЧХ была найдена добротность колебаний в стержне, которая оказалась высокой, что соотносится с теорией.