

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет общей и прикладной физики

**Отчёт по лабораторной работе 1.2.1 «Определение  
скорости полёта пули при помощи баллистического  
маятника»**

Выполнил:  
Студент гр. Б02-304  
Головинов. Г.А.



Долгопрудный, 2023

# 1 Аннотация

**Цель работы:** определить скорость полета пули, применяя законы сохранения и используя баллистические маятники.

**Используемые инструменты:** духовое ружье на штативе, осветитель, оптическая система для измерения отклонений маятника, измерительная линейка, пули и весы для их взвешивания, баллистические маятники

## 2 Основные теоретические сведения

### 2.1 Метод баллистического маятника

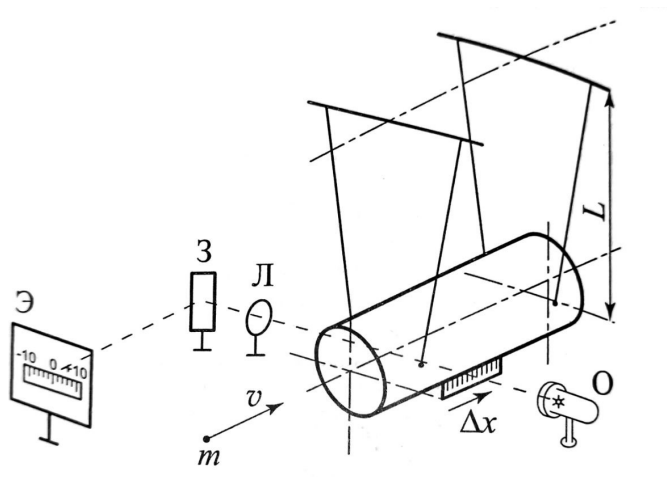


Рис. 1: Схема установки для измерения скорости полета пули

При взаимодействии маятника и пули можно считать импульс постоянным, так как время взаимодействия сильно меньше периода колебаний маятника. Следовательно отклонение от положения равновесия за время взаимодействия много меньше амплитуды колебаний.

Закон сохранения импульса:

$$mu = (M + m)v_0 \quad (1)$$

где  $m$  – масса пули,  $M$  – масса маятника,  $u$  – искомая скорость пули,  $v_0$  – начальная скорость системы маятник-пуля.

Учитывая, что масса пули много меньше массы маятника, можно сказать что

$$u = \frac{M}{m} v_0 \quad (2)$$

Далее, так как колебания маятника слабо затухающие, можно считать, что энергия в первые несколько колебаний сохраняется. Отсюда, зная массу маятника и пули, а также амплитуду колебаний, мы можем узнать начальную скорость маятника, а значит узнать и скорость пули до взаимодействия.

Закон сохранения энергии:

$$(M + m)v_0^2 = (M + m)gh \quad (3)$$

где  $h$  – подъем маятника,  $g$  – ускорение свободного падения.

Высоту подъема маятника можно вывести через угловую амплитуду:

$$h = L(1 - \cos \varphi) = 2L \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (4)$$

где  $L$  – высота подвеса. Учитывая что  $\varphi$  – мал, его можно выразить как

$$\varphi \approx \frac{\Delta x}{L} \quad (5)$$

Из соотношений (2), (3), (4) получим конечную формулу для скорости пули  $u$ :

$$u = \frac{M}{m} \sqrt{\frac{g}{L}} \Delta x \quad (6)$$

## 2.2 Метод крутильного маятника

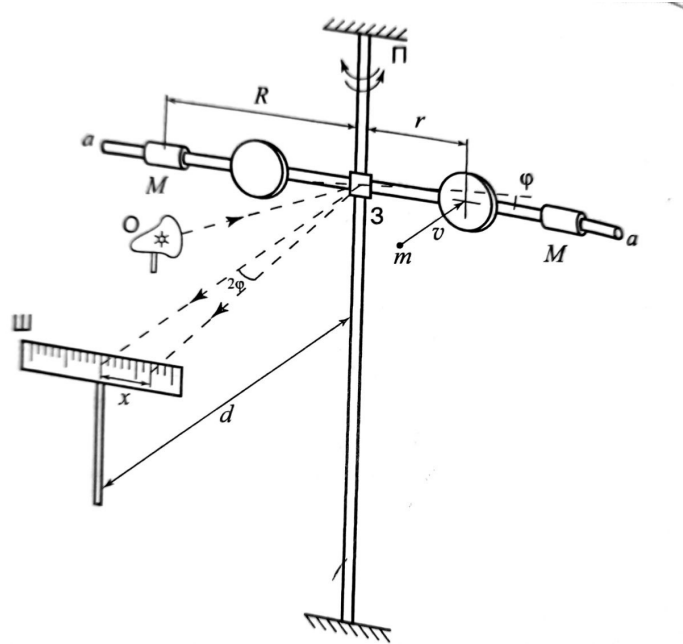


Рис. 2: Схема установки крутильного маятника

Относительно оси маятника можно записать закон сохранения момента импульса:

$$mrv = I\omega_0 \quad (7)$$

где  $r$  – расстояние от оси маятника до места попадания пули,  $\omega_0$  – начальная угловая скорость маятника.

Далее, в процессе движения маятника его энергия вращения переходит в упругую энергию закручивания проволоки. Колебания достаточно слабо затухающие, что мы можем считать энергию постоянной в течение нескольких первых колебаний.

Закон сохранения энергии:

$$k \frac{\varphi^2}{2} = I \frac{\omega_0^2}{2} \quad (8)$$

где  $k$  – модуль кручения проволоки П,  $\varphi$  – максимальный угол поворота маятника.

Из уравнений (7), (8) получим

$$u = \varphi \frac{\sqrt{kI}}{mr} \quad (9)$$

**Методика измерения  $\varphi$  и момента инерции  $I$**  Стрельба производилась в маятник без дополнительных грузов. Чтобы найти момент инерции маятника в такой конфигурации необходимо найти период собственных колебаний  $T_1$ , а затем, поменяв конфигурацию на известный дополнительный момент инерции  $\Delta I$  и измерив период  $T_2$ , можем найти изначальный момент инерции  $I$ .

Угол максимального отклонения находится с помощью лазерной линейки. Измерив отклонение точки лазера на этой линейке и расстояние от нее до оси маятника, мы можем найти малый угол  $\varphi$

$$\varphi \approx \frac{x}{d} \quad (10)$$

где  $d$  – расстояние от оси маятника до линейки.

Уравнения для момента инерции:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (11)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I + 2MR^2}{k}} \quad (12)$$

Тогда величина  $\sqrt{kI}$  находится следующим образом:

$$\sqrt{kI} = \frac{4\pi MR^2 T_1}{T_2^2 - T_1^2} \quad (13)$$

где  $R$  – расстояние от оси до дополнительных грузов,  $M$  - масса этих грузов.

### 3 Результаты измерений и их обработка

**Измерение масс пуль** В работе нам было предоставлено 10 пронумерованных пуль, 1-5 были использованы для баллистического маятника, а 6-10 для крутильного. Масса каждой пули была измерена на 3х разных

весах, что позволило определить точность измерения

|          | 1     | 2     | 3     | $\sigma_m$ |
|----------|-------|-------|-------|------------|
| $m_1$    | 0.503 | 0.508 | 0.505 | 0.002      |
| $m_2$    | 0.499 | 0.502 | 0.500 | 0.002      |
| $m_3$    | 0.510 | 0.511 | 0.511 | 0.001      |
| $m_4$    | 0.503 | 0.503 | 0.504 | 0.001      |
| $m_5$    | 0.507 | 0.508 | 0.508 | 0.001      |
| $m_6$    | 0.502 | 0.501 | 0.503 | 0.001      |
| $m_7$    | 0.497 | 0.498 | 0.498 | 0.001      |
| $m_8$    | 0.498 | 0.499 | 0.500 | 0.001      |
| $m_9$    | 0.508 | 0.510 | 0.510 | 0.001      |
| $m_{10}$ | 0.516 | 0.517 | 0.518 | 0.001      |

Таблица 1: Результаты измерений масс пуль

### 3.1 Баллистический маятник

Масса маятника была известна заранее и равна  $M = 2900 \pm 5$  g. Высота подвеса  $L = 223.5 \pm 1.0$  cm.

| Пуля | $\Delta x$ , mm |
|------|-----------------|
| 1    | 12.75           |
| 2    | 12.00           |
| 3    | 12.75           |
| 4    | 12.00           |
| 5    | 11.75           |

Таблица 2: Результаты амплитуды колебаний баллистического маятника

Полную погрешность результата будем рассчитывать по формуле:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{rnd}^2 + \sigma_{sys}^2} \quad (14)$$

Системной погрешностью будем считать цену деления  $\sigma_{sys} = 0.25$  mm.

Тогда погрешность измерений  $\sigma_x = 0.53$  mm

По формуле (6) находим  $u$ , погрешность  $\sigma_u$  вычисляем по формуле:

$$\sigma_u = u \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x}{\Delta x}\right)^2} \quad (15)$$

| Пуля       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $u$ , м/с  | 153.34 | 145.76 | 151.74 | 144.89 | 140.66 |
| $\sigma_u$ | 6.44   | 6.47   | 6.33   | 6.42   | 6.36   |

Таблица 3: Полученные скорости пуль

Тогда по формуле:

$$\sigma_u = \left( \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{-1/2} \quad (16)$$

$u = 147.28 \pm 2.53 \text{ м/с}$

### 3.2 Крутильный маятник

Массы дополнительных грузов  $m_1 = 730.6 \pm 0.1 \text{ г}$ ,  $m_2 = 713.4 \pm 0.1 \text{ г}$ .

| Пуля | $\Delta x$ , см |
|------|-----------------|
| 6    | 5.9             |
| 7    | 5.6             |
| 8    | 6.1             |
| 9    | 5.7             |
| 10   | 6.1             |

Полную погрешность, аналогично баллистическому маятнику будем рассчитывать по формуле (14), цена деления 0.1 см

Тогда полная погрешность  $\sigma_x \approx 0.25 \text{ см}$ .

**Измерение момента инерции  $I$**  Для того, чтобы найти момент инерции крутильного маятника, а точнее величину  $\sqrt{kI}$ , которая необходима для расчета скорости по формуле (9), необходимо измерить период собственных колебаний маятника с моментами инерции  $I$  и  $I + \Delta I = I + m_1 R^2 + m_2 R^2$ .

Измерения проводились по 5 полных колебаний, 3 раза для каждой конфигурации маятника:

|           | 1     | 2     | 3     |
|-----------|-------|-------|-------|
| $T_1$ , s | 6.434 | 6.314 | 6.346 |
| $T_2$ , s | 4.720 | 4.766 | 4.670 |

Таблица 4: Результаты измерений периода колебаний для двух конфигураций маятника

Полную погрешность измерения периода  $T$  вычисляем по формуле:

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{rnd}^2 + \sigma_{sys}^2} \quad (17)$$

за  $\sigma_{sys}$  возьмем среднюю скорость реакции человека, поделенную на количество периодов (т.е 0.2/5).

Тогда  $T_1 = 6.365 \pm 0.074$  s,  $T_2 = 4.719 \pm 0.062$  s.

Найдем величину  $\sqrt{kI}$  по формуле (13).  $R = 32.5 \pm 0.5$  cm,  $M = 0.722$  kg (среднее двух грузов, так как  $m_1 + m_2 = 2M$ )

Погрешность  $\sqrt{kI}$  (в единицах СИ) будем вычислять по формуле:

$$\sigma_{\sqrt{kI}} = \sqrt{kI} \left( \left( \frac{\sigma_M}{M} \right)^2 + \left( 2 \frac{\sigma_R}{R} \right)^2 + \left( 3 \frac{\sigma_{T_1}}{T_1} \right)^2 + \left( 2 \frac{\sigma_{T_2}}{T_2} \right)^2 \right)^{(1/4)} \quad (18)$$

Погрешность угла  $\varphi$  будем рассчитывать по формуле:

$$\sigma_\varphi = \varphi \sqrt{\left( \frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_d}{d} \right)^2} \quad (19)$$

А погрешность скорости пули  $u$  по формуле:

$$\sigma_u = u \sqrt{\left( \frac{\sigma_{\sqrt{kI}}}{\sqrt{kI}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_\varphi}{\varphi} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_m}{m} \right)^2} \quad (20)$$



| Пуля                   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $m$ , g                | 0.502  | 0.498  | 0.499  | 0.509  | 0.517  |
| $\sigma_m$ , g         | 0.001  | 0.001  | 0.001  | 0.001  | 0.001  |
| $x$ , cm               | 5.9    | 5.6    | 6.1    | 5.7    | 6.1    |
| $\varphi$ , rad        | 0.045  | 0.043  | 0.047  | 0.044  | 0.047  |
| $\sigma_\varphi$ , rad | 0.002  | 0.002  | 0.002  | 0.002  | 0.002  |
| $\sqrt{kI}$ , in SI    | 0.334  | 0.334  | 0.334  | 0.334  | 0.334  |
| $\sigma kI$ , in SI    | 0.025  | 0.025  | 0.025  | 0.025  | 0.025  |
| $u$ , m/s              | 143.94 | 137.72 | 149.71 | 137.15 | 144.50 |
| $\sigma_u$ , m/s       | 12.97  | 12.55  | 13.39  | 12.45  | 12.92  |

Таблица 5: Полученные скорости пуль

Тогда по формуле (16):

$$u = 142.60 \pm 5.74 \text{ m/s}$$

## 4 Обсуждение результатов и выводы

В результате выполнения работы была получена скорость пули, выпущенной из пневматического оружия двумя способами: с помощью подвешенного баллистического маятника и с помощью крутильного баллистического маятника. Результаты хорошо соотносятся, однако в первом случае погрешность оказалась недооценена.

Расхождение результатов также может быть объяснено разной скоростью выхода пули у первого ружья и у второго ружья или большим влиянием внешних сил (таких как трение или сопротивление воздуха) на второй маятник.