

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет общей и прикладной физики

**Отчёт по лабораторной работе 1.2.5 «Исследование
прецессии уравновешенного гороскопа»**

Выполнил:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.



Долгопрудный, 2023

1 Аннотация

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Используемые инструменты: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка

2 Основные теоретические сведения

Уравнения движения твердого тела можно записать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

уравнение (1) выражает закон движения центра масс тела, а (2) – уравнение моментов. Этих двух уравнений достаточно для полного описания движения твердого тела, так как у него только шесть степеней свободы.

Если сила \vec{F} не зависит от угловой скорости, а момент \vec{M} – от скорости поступательного движения, то эти два уравнения можно рассматривать независимо друг от друга (то есть вращательное и поступательное движение не зависят друг от друга).

Момент импульса \vec{L} твердого тела в его главных осях x, y, z равен

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z \quad (3)$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции относительно соответствующих осей, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Если тело быстро вращается вокруг некоторой оси, например:

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, I_y\omega_y$$

то такое тело принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным, если его центр масс неподвижен.

В силу (2) приращение момента импульса определяется интегралом

$$\Delta \vec{L} = \int \vec{M} dt \quad (4)$$

Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, из интеграла (4) следует, что приращение $\Delta \vec{L}$ момента импульса заметно меньше самого момента импульса:

$$|\vec{L}| \gg |\Delta \vec{L}|$$

С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

Чтобы определить, какие силы необходимо приложить к гироскопу, чтобы определенным способом изменить направление его оси, необходимо воспользоваться основным уравнением гироскопии:

$$\vec{M} = [\vec{\Omega} | \vec{L}] \quad (5)$$

где $\vec{\Omega}$ – вектор угловой скорости прецессии гироскопа. Соответственно выбирая некоторое направление прецессии, мы можем найти направление момента силы, а отсюда найти направление и самой силы.

Если $\vec{\Omega} \perp \vec{L}$, то можно найти Ω через момент силы M .

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{mgl \sin \alpha}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{mgl}{I_z \omega_0} \quad (6)$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра масс гироскопа до точки приложения силы, I_z – момент инерции ротора гироскопа относительно оси вращения, ω_0 – угловая скорость вращения гироскопа.

Так как гироскоп в работе уравновешенный – l можно считать как расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза.

В предыдущих вычислениях мы считали, что момент силы трения равен нулю. Если действие силы трения на ротор гироскопа компенсировано электромотором, то сила трения в подвесе никак не скомпенсирована. Если учесть действие этой силы, то гироскоп будет постепенно «опускаться» тем концом, на который подвешен груз. Момент силы трения можно определить из угловой скорости прецессии относительно другой

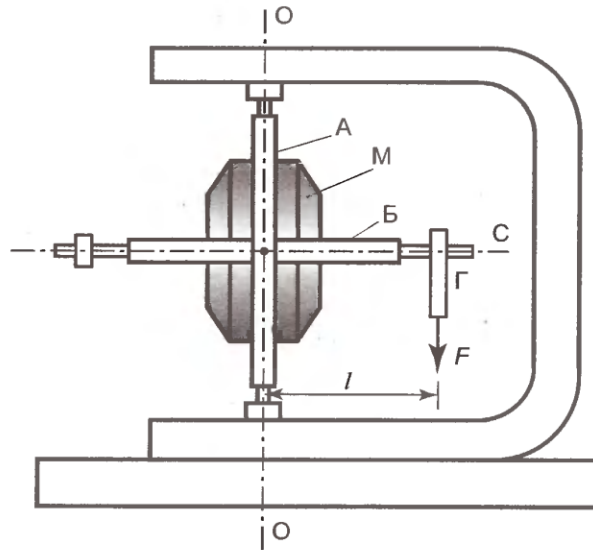


Рис. 1: Схема экспериментальной установки

оси. Момент силы трения можно вычислить из основного уравнения гироскопии следующим способом:

$$M_{fr} = I_0 \omega_0 \Omega_{fr} \quad (7)$$

Измерение момента инерции ротора гироскопа Момент инерции гироскопа относительно оси вращения мы найдем (аналогично работе 1.2.1) с помощью крутильных колебаний. Период крутильных колебаний зависит от момента инерции тела I_0 и модуля кручения проволоки k .

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{k}} \quad (8)$$

Для исключения модуля кручения необходимо подвесить цилиндр правильной формы с известными размерами и массой (то есть известным моментом инерции I_1). Тогда момент инерции ротора мы найдем из соотношения:

$$I_0 = I_1 \frac{T_0^2}{T_1^2} \quad (9)$$

где T_1 – период крутильных колебаний цилиндра.

Измерение скорости вращения ротора гироскопа Скорость вращения ротора можно найти не только с помощью прецессии: статор гироскопа имеет две обмотки. Обычно обе используются для ускорения ротора, однако в нашей работе только одна разгоняет ротор. Вторая используется для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен, из-за этого при каждом вращении на второй обмотке возникает переменная ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно измерить с помощью фигур Лиссажу, получаемых на экране осциллографа, если на один вход подать искомую ЭДС, а на другой – переменное напряжение известной частоты. При совпадении частот на экране должен появиться неподвижный эллипс.

3 Методика измерений

Работа сводится к нескольким простым задачам: нужно найти угловую скорость прецессии в зависимости от момента силы тяжести груза, если теория верна, то мы получим прямую с коэффициентом наклона равной L^{-1}

Для того, чтобы это подтвердить необходимо измерить момент инерции ротора гироскопа и угловую скорость его вращения. Это и будут две оставшиеся подзадачи этой работы.

4 Результаты измерений и их обработка

Сначала требуется узнать точные массы предоставленных нам грузов. Несмотря на то, что на них уже есть маркировка, чтобы получить более точный результат, масса каждого из них была повторно измерена.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m, \text{ g}$	60.6	76.5	92.5	115.9	141.5	141.5	173.0	214.6	269.4	339.9

Таблица 1: Полученные массы грузов

Для каждого из девяти грузов измерим время, за которое гироскоп совершит один полный оборот, а также угол на который ось гироскопа опустилась. В каждом опыте начальный угол наклона гироскопа от горизонтали был выбран $+6^\circ$, так как его можно считать малым.

N	$m, \text{ g}$	$T, \text{ s}$	$\Omega, \text{ rad/s}$	$\Delta\alpha^\circ$	$\Delta\alpha, \text{ rad}$	$\dot{\alpha}, \text{ rad/s}$
1	60.6	169	0.037	12.0	0.21	0.0012
2	76.5	131	0.048	8.9	0.15	0.0012
3	92.5	109	0.058	4.9	0.08	0.0008
4	115.9	87	0.072	6.0	0.10	0.0012
5	141.5	72	0.087	3.9	0.07	0.0010
5	141.5	71	0.088	3.1	0.05	0.0008
5	141.5	71	0.088	3.9	0.07	0.0010
6	173	58	0.108	2.3	0.04	0.0007
7	214.6	48	0.132	2.0	0.03	0.0007
8	269.4	37	0.168	2.0	0.03	0.0009
9	339.9	31	0.206	1.4	0.02	0.0008

Таблица 2: Результаты измерений для всех девяти грузов

Для пятого груза было проведено 3 измерения, чтобы оценить случайную погрешность наших измерений. Как видно, время (следовательно и угловая скорость прецессии) получаются достаточно точно, а вот угол, на который ось гироскопа опустилась, сильно меняется от измерения к измерению. Да и в целом, из теории мы ожидаем увидеть некую линейную (возможно квадратичную) зависимость, а наши результаты точно не образуют кривую.

Результаты измерений угловой скорости вращения ротора С помощью осциллографа и цифрового генератора частот была получена частота $\omega_0 = 400.017 \text{ Hz}$, ее погрешность мы оценим в 0.005 Hz , так как точность измерений этим способом достаточно велика.

Результаты измерений момента инерции ротора Момент инерции цилиндра $I_1 = 0.00123 \pm 0.00006 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ Погрешность измерения момента инерции цилиндра будем вычислять по формуле:

$$\sigma_I = I \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} \quad (10)$$

Период колебаний ротора:

n	1	2	3
$t, \text{ s}$	31.7	31.8	31.8
N	10	10	10
$T, \text{ s}$	3.17	3.18	3.18

Таблица 3: Результаты измерения периода крутильных колебаний ротора

Стандартное отклонение $\sigma_T = 0.0006 \text{ s}$. Этой погрешностью можно пренебречь, оставим лишь систематическую погрешность $\sigma_T = 0.02 \text{ s}$ из расчета, что средняя реакция человека равна 0.2 s .

Период колебаний цилиндра:

n	1	2	3
$t, \text{ s}$	40.2	40.0	40.0
N	10	10	10
$T, \text{ s}$	4.02	4.00	4.00

Таблица 4: Результаты измерений периода крутильных колебаний цилиндра

Стандартное отклонение $\sigma_T = 0.01 \text{ s}$, этим значением опять пренебрежем, будем считать погрешность σ_T равной 0.02 s .

Тогда по формуле (9) найдем момент инерции ротора:

$$I_0 = (0.00077 \pm 0.00009) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешность момента инерции ротора вычисляем по формуле

$$\sigma_{I_0} = I_0 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_1}}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{T_1}}{T_1}\right)^2} \quad (11)$$

Тогда момент импульса $L = I_0 \omega_0 = I_0 2\pi \nu$ получится $L = 1.94 \pm 0.22 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Измерение момента импульса с помощью коэффициента наклона графика $\Omega(M)$ Из таблицы 2 возьмем значения Ω и $mg l$ при $l = 0.122 \text{ m}$, чтобы построить зависимость $\Omega(M) = \Omega(mgl)$

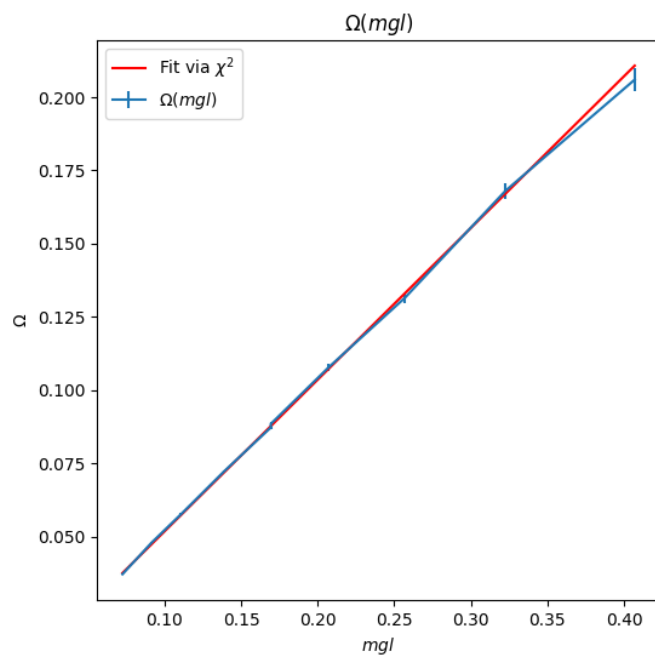


Рис. 2: Зависимость угловой скорости прецессии от момента силы тяжести груза

Аппроксимируя по методу χ^2 получим $k = 0.5178$, откуда $L = 1.93 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ (погрешность пренебрежимо мала)

Расчет момента силы трения По формуле (7) вычисляем момент силы трения для каждого груза.

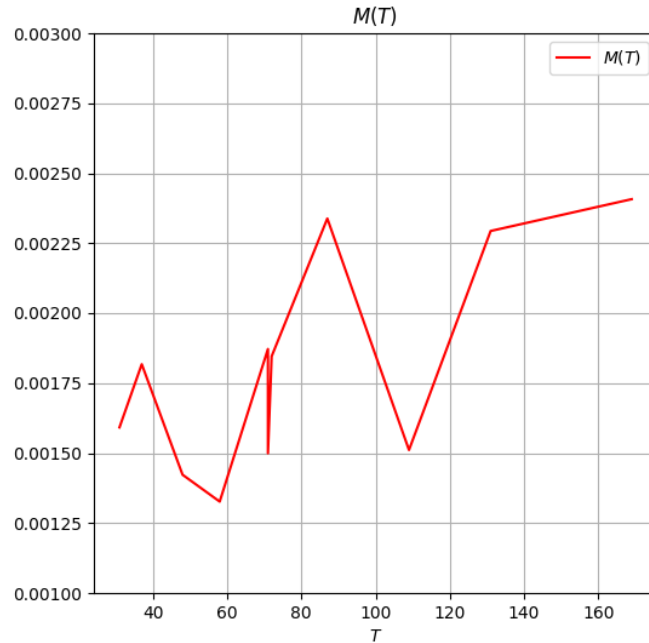


Рис. 3: Зависимость момента силы трения от периода прецессии

Видно, что шум в данных не дает возможности чем-то фитировать эту зависимость. Кроме того, мы ожидали либо горизонтальную прямую (в случае сухого трения), либо линейную зависимость с отрицательным коэффициентом наклона (в случае вязкого трения). А тут можно увидеть обратное.

5 Обсуждение результатов и выводы

В результате выполнения работы мы познакомились с явлением прецессии гироскопа. Получили экспериментально зависимость угловой скорости прецессии от момента силы тяжести груза, из которой по методу χ^2 нашли значение момента импульса ротора гироскопа. Эту же величину мы получили другим способом: измерив момент инерции ротора гироскопа и частоту его вращения. Полученные результаты очень хорошо друг с другом соотносятся.

Подобное нельзя сказать про зависимость момента силы трения от периода прецессии. Зависимость получилась шумная, по ней сложно сделать

выводы. Это может быть связано в том числе с тем, что наш гироскоп был не совсем сбалансирован – при длительном отсутствии воздействия груза, гироскоп все равно прецессирует. Это может говорить о неправильной балансировке. Кроме того, на результат повлияло отсутствие удобной шкалы для определения угла, на который гироскоп опускается.