ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу **“Аналитическая геометрия”**

1 курс, осенний семестр, 2023/2024 уч.г. (ЛФИ)

(Поток Ершова А.В.)

**I. Введение.**

1. Матрицы и детерминанты малых порядков. Системы линейных уравнений.

2. Множества. Отношение эквивалентности и разбиение множества на классы эквивалентности. Фактормножество, каноническая проекция (отображение факторизации). Бинарные операции на множестве. Согласованность бинарной операции с отношением эквивалентности.

3. Абелевы группы. Кольца. Поля.

**II. Векторы и декартовы системы координат (ДСК) на плоскости и в пространстве.**

1. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Матрица перехода. Изменение координат при замене базиса.

2. Скалярное произведение, его свойства. Скалярная проекция вектора на ориентированную прямую, векторная проекция вектора на прямую. Выражение скалярного произведения в ортонормированном и произвольном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами.

3. Левые и правые тройки векторов. Ориентированные плоскость и пространство. Ориентированные площадь параллелограмма на плоскости и объем параллелепипеда в пространстве (смешанное произведение), их свойства. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Критерий компланарности.

4. Векторное произведение, его свойства, выражение в произвольном и правом ортонормированном базисе. Вычисление площадей, перпендикуляр к паре векторов. Двойное векторное произведение.

5. Общая декартова система координат, прямоугольная система координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода.

**III. Многочлены-1.**

1. Многочлены с вещественными коэффициентами. Степень многочлена. Сложение, умножение, деление с остатком. Кольцо многочленов $\mathbb{R}[X]$ как пример ассоциативного коммутативного кольца с 1. Отсутствие делителей нуля в $\mathbb{R}[X]$.

2. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня, число корней с учетом кратности не превосходит степени многочлена. Совпадение формального и функционального равенства многочленов из $\mathbb{R}[X]$. Формулы Виета.

3. Кольцо $\mathbb{R}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ многочленов от $n$ переменных. Степень, её инвариантность относительно линейной невырожденной замены переменных.

4. Понятие уравнения множества. Алгебраические множества (линии и поверхности); пересечение и объединение алгебраических множеств. Порядок алгебраической кривой (поверхности), сохранение порядка при переходе к другой ДСК. Пересечение алгебраического множества с прямой и с плоскостью.

**IV. Прямые и плоскости. Эллипс, гипербола, парабола. Поверхности.**

1. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Линейное неравенство. Пучок прямых. Формула расстояния от точки до прямой.

2. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Линейное неравенство. Пучок плоскостей. Формула расстояния от точки до плоскости.

3. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых. Формула для расстояния от точки до прямой (в пространстве) и между скрещивающимися прямыми.

4. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Касательные. Оптическое свойство.

5. Цилиндрические, конические поверхности, поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие.

**V. Линейные (векторные) пространства. Базис и размерность.**

1. Определение линейного пространства над полем, примеры линейных пространств. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Три леммы о линейной зависимости.

2. Подпространства. Линейная оболочка подмножества линейного пространства. Конечномерные линейные пространства. Базис, его существование в конечномерном линейном пространстве. Лемма Штейница о замене. Размерность конечномерного линейного пространства, корректность ее определения. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Базис как минимальная порождающая и как максимальная линейно независимая система.

3. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода, ее невырожденность.

**VI. Матрицы. Ранг. Элементарные преобразования.**

1. Линейные операции с матрицами (сложение, умножение на скаляр.) Линейное пространство матриц фиксированного размера $m \times n$, его размерность и стандартный базис в нём. Транспонирование. След матрицы.

2. Элементарные преобразования строк и столбцов. Элементарные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному виду методом Гаусса.

3. Строчный и столбцовый ранги матрицы. Базисная система строк (столбцов). Невырожденные матрицы. Инвариантность строчного и столбцового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк. Элементарные преобразования строк не меняют линейных зависимостей между столбцами. Совпадение строчного и столбцового рангов матрицы. Оценка ранга суммы матриц.

4. Умножение матриц, его свойства. Кольцо (алгебра) квадратных матриц порядка $n$.

5. Оценка ранга произведения матриц. Обратимые матрицы. Критерий обратимости-1 (невырожденность=обратимость). Группа $\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ обратимых матриц порядка $n$. Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью метода Гаусса. Базисный минор (невырожденность подматриц на пересечении системы $r = \operatorname{rk} A$ линейно независимых строк и столбцов).

**VII. Определитель.**

1. Детерминант (определитель) порядка $n$ как полилинейная и кососимметричная функция строк матриц порядка $n$, принимающая на единичной матрице значение 1. Существование и единственность определителя. Формула полного разложения определителя.

2. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов). Определитель треугольной матрицы. Критерий обратимости матрицы-2 ($\det \neq 0$). Определитель транспонированной матрицы.

3. Определитель произведения матриц. Определитель матрицы с углом нулей. Разложение определителя по строке, столбцу.

4. Правило Крамера решения СЛУ (с невырожденной матрицей коэффициентов), формула для обратной матрицы.

**VIII. Группы.**

1. Понятия полугруппы и группы. Абелевы группы. Аддитивная и мультипликативная формы записи. Порядок конечной группы. Определения гомоморфизма и изоморфизма. Ядро гомоморфизма, критерий инъективности. Прямое произведение (прямая сумма). Подгруппы.

2. Порядок элемента. Циклические группы, их классификация. Количество порождающих элементов в циклической группе порядка $n$ равно $\phi(n)$ (функция Эйлера). Подгруппы циклической группы. Равенство $n = \sum_{d|n} \phi(d)$.

3. Симметрическая группа $S_n$. Разложение перестановки в произведение независимых циклов. Функция $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ (знак перестановки). Доказательство гомоморфности функции sgn. Знакопеременная группа $A_n$.

4. Левые смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа, её следствия: порядок элемента — делитель порядка группы; описание групп простого порядка; теоремы Ферма и Эйлера (в теории чисел).

**X. Кольца и поля.**

1. Теория делимости в $\mathbb{Z}$. Простые числа. НОД. Алгоритм Евклида, тождество Безу (линейное представление НОД). Разложение на простые множители и его единственность.

2. Арифметика по модулю $n$. Кольцо $\mathbb{Z}_n$. Существование изоморфизма $\mathbb{Z}_{kl} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ при $(k, l) = 1$. Мультипликативность функции Эйлера. Кольцо $\mathbb{Z}_n$ — поле тогда и только тогда, когда $n$ — простое. Характеристика поля.

3. Поле комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая и показательная запись. Комплексное сопряжение. Умножение и возведение в степень, обращение. Извлечение корней. Группа корней $n$-й степени из 1.

4. Кольцо $\mathbb{K}[X]$ многочленов над произвольным полем. Отсутствие делителей нуля. Алгоритм Евклида, НОД. Неприводимые многочлены, разложение на неприводимые множители и его единственность. Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.