МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет обшей и прикладной физики

Первое задание по математическому анализу

Автор:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.

Долгопрудный, 2024

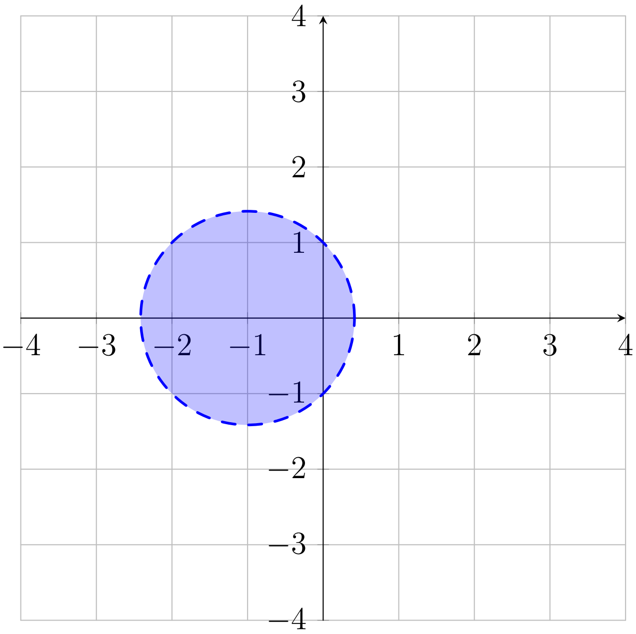
Задача 1 (К3.2.9(3)). *Является ли множество, на котором определена функция $u(x, y)$ а) замкнутым, б) открытым, в) линейно связным, г) областью, д) замкнутой областью, е) выпуклым?*

$$u(x, y) = \ln(1 - 2x - x^2 - y^2)$$

Решение Область определения логарифма:

$$1 - 2x - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 < 2$$

Открытый шар-2 радиуса $\sqrt{2}$ с центром (-1,0)



Множество не является замкнутым, так как оно не совпадает со своим замыканием. Открыто, так как шар открытый. Линейно связно, является областью, но не замкнутой областью. Выпукло.

Задача 2 (К3.2.39).

39. Пусть функция f определена на множестве E, содержащем окрестность точки $(x_0; y_0)$: $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_2$, кроме, быть может, точек прямых $x = x_0$ и $y = y_0$. Доказать, что если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f = A$ и при любом $y \in (y_0 - \delta_2; y_0 + \delta_2)$, $y \neq y_0$, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f$, то $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f = A$.

Задача 3 (T14). *Найдите вторые частные производные функции в данной точке (0,0,0)*

$$f(x, y, z) = (1 + x)^{\alpha}(1 + y)^{\beta}(1 + z^{\gamma})$$

Решение

$$\ln f = \alpha \ln(1 + x) + \beta \ln(1 + y) + \ln(1 + z^{\gamma})$$

$$d \ln f = \frac{\alpha dx}{1 + x} + \frac{\beta dy}{1 + y} + \frac{\gamma z^{\gamma - 1dz}}{1 + z^{\gamma}}$$

$$d \ln f = \frac{df}{f} \to df(0, 0, 0) = f(0, 0, 0)(\alpha dx + \beta dy)$$

$$df(0, 0, 0) = \alpha dx + \beta dy \tag{1}$$

$$d^2 f = d(df) \quad d^2 f = d(f d \ln f)$$

$$d^2 f(x, y, z) = df(x, y, z) \otimes \frac{df(x, y, z)}{f(x, y, z)} + f(x, y, z) d^2 \ln f(x, y, z)$$

$$\frac{df(0, 0, 0) \otimes df(0, 0, 0)}{f(0, 0, 0)} = (\alpha dx + \beta dy)^2 = \alpha^2 dx \otimes dx + 2\alpha\beta dx \otimes dy + \beta^2 dy \otimes dy$$

$$f d^2 \ln f(0, 0, 0) = 1 \cdot d\left(\frac{\alpha dx}{1 + x} + \frac{\beta dy}{1 + y} + \frac{\gamma z^{\gamma - 1} dz}{1 + z^{\gamma}}\right)$$

$$f d^2 \ln f(0, 0, 0) = -\frac{\alpha dx^2}{(1 + x)^2} - \frac{\beta dy^2}{(1 + y)^2} + \frac{\gamma(\gamma - 1) z^{\gamma - 1}[z + z^{\gamma + 1} - z \cdot \gamma z^{\gamma - 1}] dz^2}{(1 + z^{\gamma})^2}$$

Итого

$$d^2 f(0, 0, 0) = \alpha^2 dx^2 + 2\alpha\beta dx dy + \beta^2 dy^2 - \alpha dx^2 - \beta dy^2$$

Задача 4 (T15a). *Найдите вторые частные производные в точке (1,1) функции $f(x, y)$ заданной неявно соотношением*

$$ef = e^{x + y + f}$$

Решение

$$\begin{aligned} edf = & \quad e^{x+y+f}(dx+dy+df) \\ edf - efdf = & \quad ef(dx+dy) \\ df = & \quad (1-f)^{-1}f(dx+dy) \\ d^2f = & \quad (1-f)^{-2}(dfdx+dfdy+fdx^2+fdy^2)(1-f)+(f(dx+dy)df) \end{aligned}$$

$$d^2f = (1-f)^{-2}((fdx^2+fdxdy+fdx^2+fdy^2)+ \\ +(1-f)^{-1}(f^2dx^2+2f^2dxdy+f^2dy^2))$$

Найдем $f(1,1)$:

$$\begin{aligned} f &= e^{1+f} \\ \ln f &= 1+f \ (??) \end{aligned}$$

Задача 5 (Т15б)**.** *Найдите вторые частные производные в точке* $(1,1)$ *функции* $f(x,y)$ *заданной неявно соотношением*

$$f^3 - 3xyf - 2 = 0$$

Решение

$$3f^2df - 3yfdx - 3xfdy - 3xydf = 0$$
$$df(3f^2-3xy) = 3yfdx + 3xfdy$$
$$df = \frac{yfdx+xfdy}{f^2-xy} = \frac{2}{3}(dx+dy)$$

$$d^2f = \frac{1}{(f^2-xy)^2}((fdxdy+ydxdf+fdxdy+xdydf)(f^2-xy)- \\ -(yfdx+xfdy)(2fdf-xdy-ydx))$$
$$d^2f(1,1) = \frac{1}{9}(3(4dxdy+df(dx+dy))-2(dx+dy)(4df-dx-dy))$$
$$d^2f(1,1) = \frac{12dxdy - \frac{4}{3}(dx+dy)^2}{9} = \frac{-4}{27}dx^2 - \frac{4}{27}dy^2 + \frac{28}{27}dxdy$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4}{27} \tag{2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-4}{27} \tag{3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{14}{27} \tag{4}$$

Задача 6 (Т16)**.** *Найдите частные производные всех порядков функции* $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$

Решение Положим $t = x + y + z$, тогда $f(t) = \ln(t)$

$$d^n f = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n} dt^n \tag{5}$$

В свою очередь

$$dt^n = (dx + dy + dz)^n = \sum_{k_1,k_2,k_3} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} dx^{k_1} dy^{k_2} dz^{k_3} \tag{6}$$

Чтобы найти некоторую частную производную необходимо выбрать k_1, k_2, k_3, такие что $k_1 + k_2 + k_3 = n$, и она будет равна

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n} \tag{7}$$