УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 75 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 2 ноября 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Абсолютно сходящиеся числовые ряды

1. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Перестановка членов абсолютно сходящихся рядов.
2. Повторное суммирование и теорема о перемножении абсолютно сходящихся рядов.
3. Сравнение абсолютно сходящихся рядов. Сумма геометрической прогрессии.

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

4. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной сходимости.
5. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
6. Теорема о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.
7. Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное дифференцирование функциональных рядов.

Степенные ряды

8. Степенные ряды, их радиус сходимости. Равномерная сходимость степенных рядов в круге.
9. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
10. Производные и первообразные степенных рядов в круге сходимости.
11. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ в степенные ряды.
12. Разложение функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ в степенные ряды.
13. Разложение функции $(1+x)^\alpha$ в степенной ряд.

Условная сходимость числовых и функциональных рядов

14. Преобразование Абеля. Сходимость степенного ряда на конце интервала сходимости.
15. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
16. * Перестановка слагаемых в условно сходящемся числовом ряде.

Интеграл Римана на отрезке

17. Разбиения отрезка, суммы Дарбу и интеграл Римана. Ступенчатые функции на отрезке, линейность и монотонность интеграла от ступенчатой функции.
18. Свойства интеграла Римана на отрезке: линейность, аддитивность, монотонность.

19. Интегрируемость по Риману модуля и произведения интегрируемых функций.
20. Суммы Римана интегрируемых функций и мелкость разбиений.
21. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции.
22. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу и существование первообразной у непрерывной функции.
23. Интегрируемость по Риману монотонной функции.
24. Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Римана на отрезке.
25. Интегрирование по частям и замена переменных в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
26. Иррациональность числа e. * Доказательство иррациональности числа π по Нивену–Бурбаки.

Мера Лебега и её свойства

27. Мера элементарных множеств в евклидовом пространстве, корректность её определения и аддитивность.
28. Внешняя мера Лебега для подмножеств $\mathbb{R}^n$. Счётная субаддитивность внешней меры Лебега и её значение для элементарных множеств.
29. Расстояние между множествами в смысле внешней меры Лебега. Множества конечной меры Лебега и теоретико-множественные операции с ними.
30. Счётная аддитивность меры Лебега для множеств конечной меры.
31. Множества с возможно бесконечной мерой Лебега, операции с ними и счётная аддитивность меры Лебега в общем случае.
32. Счётные объединения и пересечения измеримых по Лебегу множеств.
33. Свойства непрерывности и регулярности меры Лебега.
34. * Пример не измеримого по Лебегу множества.
35. Измеримые по Лебегу функции и их свойства. Измеримость поточечного предела измеримых функций.
36. Борелевские множества, борелевские функции и их свойства.

Интеграл Лебега и его свойства

37. Счётно-ступенчатые функции и интеграл Лебега для них.
38. Приближение измеримой функции ступенчатыми и интеграл Лебега для измеримой функции.
39. Существование возможно бесконечного интеграла Лебега для неотрицательной измеримой функции.
40. Абсолютная интегрируемость интегрируемой по Лебегу функции и её разложение на неотрицательную и неположительную часть.
41. Линейность и монотонность интеграла Лебега.

Предельный переход в интеграле Лебега

42. Понятие приближения функции в среднем. Приближение интегрируемой функции в среднем ограниченной функцией.
43. Приближение в среднем интегрируемой функции функцией с конечным числом элементарных ступенек.
44. Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам интегрирования.
45. Непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования и непрерывность интеграла Лебега по отрезку с переменным верхним пределом.
46. Теорема о монотонной сходимости. Перестановка счётного суммирования и интегрирования.
47. Теорема об ограниченной сходимости.
48. * Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Несобственные интегралы функции одной переменной

49. Вторая теорема о среднем для интеграла произведения функций по отрезку.
50. Несобственные интегралы. Связь сходимости несобственного интеграла с существованием интеграла Лебега. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
51. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.
52. Интегральный признак сходимости ряда неотрицательных чисел.

Повторное интегрирование и линейная замена переменных в интеграле Лебега

53. Представление неотрицательной измеримой функции в виде суммы счётного числа ступенек.
54. Мера декартова произведения измеримых множеств.
55. Теорема Фубини для борелевских функций.
56. Теорема Фубини для измеримых функций.
57. Мера подграфика неотрицательной функции и представление интеграла неотрицательной функции через интегрирование по области значений.
58. Линейная замена переменных в интеграле Лебега.

Применения интеграла Лебега

59. Интегралы, зависящие от параметра. Достаточные условия возможности переставить интегрирование и дифференцирование по параметру.
60. Интегральная теорема о среднем для непрерывной на связном множестве функции.
61. Вычисление интеграла Пуассона и объёма единичного шара в $\mathbb{R}^n$.
62. Гамма-функция, формула понижения и её значения при целых и полуцелых значениях аргумента.

63. Бета-функция и её выражение через гамма-функцию.
64. Асимптотическая формула Стирлинга для гамма-функции.

*** Дифференцируемость почти всюду**

65. * Лемма Безиковича о покрытии отрезками на прямой.
66. * Теорема о плотности измеримого множества на прямой.
67. * Усреднение интегрируемой по Лебегу на прямой функции, дифференцируемость почти всюду интеграла с переменным верхним пределом.
68. * Существование производной почти всюду и формула Ньютона–Лейбница для липшицевой функции одной переменной.

Дифференцирование функций нескольких переменных

69. Дифференцируемые функции нескольких переменных. Частные производные.
70. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
71. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных высших порядков. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.
72. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа.
`http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf`

<u>*Дополнительная*</u>

2. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, Т. 2. — Москва : Наука, 2000.
3. *Тао Т.* An Introduction to Measure Theory. — American Mathematical Society, 2011.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 февраля – 6 марта)

I. Множества в конечномерных евклидовых пространствах (С3, §§1,2)

Т.1. Является ли область определения выражения замкнутым множеством, открытым множеством, связным множеством

а) $\sqrt{xy}$; б) $\dfrac{1}{x^4+y^4-1}$; в) $\arcsin\dfrac{y}{x}$?

Т.2. Является ли множество

$$\{(e^t\cos t, e^t\sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$ а) открытым; б) замкнутым; в) связным?

Т.3. Является ли множество

$$\{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$ а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

Т.4. Найдите для множества точек в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ с рациональными координатами множества его

а) внутренних точек; б) внешних точек; в) граничных точек.

Т.5. Постройте последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

Т.6. Постройте незамкнутое множество, все точки которого изолированные.

Т.7. Докажите для произвольного $X \subseteq \mathbb{R}^n$ утверждения

а) $\partial(\partial X) \subseteq \partial X$; б) $\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)$.

II. Предел и непрерывность функции нескольких переменных (С3, §2)

Т.8. Найдите повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f$ и предел в точке $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f$ функции двух переменных, заданной выражением

а) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; б) $x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$; в) $\left(1+xy^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

T.9. Для функции $f(x,\,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ исследуйте существование предела в точке $(0,\,0)$. Посчитайте пределы по всевозможным направлениям для этой функции в точке $(0,\,0)$.

T.10. Существует ли инъективная непрерывная функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

T.11*. Существует ли сюръективное непрерывное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

III. Частные производные, дифференциал и формула Тейлора для функции нескольких переменных (C3, §§3,4)

T.12. Исследуйте на дифференцируемость функции двух переменных в точке $(0,0)$

<u>а)</u> $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{y}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ б) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$

в) $f(x,y) = \ln(1 + \sqrt[3]{x^2y})$; <u>г)</u> $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^4}$.

<u>T.13</u>. Найдите частные производные f''_{xy} и f''_{yx} в точке $(0,0)$ для функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

T.14. Найдите вторые частные производные функции в данной точке

<u>а)</u> $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}$, $(x,y,z) = (1,1,1)$;

б) $f(x,y,z) = (1+x)^\alpha(1+y)^\beta(1+z^\gamma)$, $(x,y,z) = (0,0,0)$, α,β,γ — константы.

T.15. Найдите вторые частные производные в точке $(1,1)$ функции $f(x,y)$, заданной неявно соотношением

<u>а)</u> $ef = e^{x+y+f}$; б) $f^3 - 3xyf - 2 = 0$, $u(1,1) = 2$.

<u>T.16</u>. Найдите частные производные всех порядков функции $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$.

T.17. Разложите функцию по формуле Тейлора второго порядка в точке $(0,0)$ с остаточным членом в виде $o(x^2+y^2)$ и в форме Лагранжа

<u>а)</u> $f(x,y) = (1+x)^y$; б) $f(x,y) = e^x\cos y$.

IV. Числовые ряды (C2, §§13–15)

Т.18. Найдите сумму ряда

<u>а)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{25n^2+5n-6}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

<u>в)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos\beta n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \sin\beta n$, a, β — константы, $|a|<1$.

Т.19. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд в зависимости от параметров α и β

<u>а)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\alpha n} n^\beta$.

Т.20. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right)$; <u>б)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{3n^2+n^2\sin\frac{\pi n}{3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$; <u>д)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2}$;

<u>ё)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Т.21. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд в зависимости от параметра α

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n\ln^\alpha n}$; <u>в)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\left(\sqrt{n}+\sin n\right)^\alpha}$.

Т.22*. Докажите, что если последовательность положительных чисел (a_n) убывает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

$\boxed{20+2^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 марта – 6 апреля)

I. Функциональные последовательности и ряды (С2, §§17,18)

Т.1. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на данных множествах функциональную последовательность (f_n)

<u>а)</u> $f_n(x) = n^2\left(\dfrac{x}{n} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}\right)$ на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$;

б) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$ на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$;

<u>в)</u> $f_n(x) = \operatorname{arctg} x^n$ на $(1,2)$ и $(2,+\infty)$;

г) $f_n(x) = n \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n}$ на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$;

д) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ на $[0,1]$; е) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0,1]$.

Т.2. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на данных множествах функциональные ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}}$ на $(0,+\infty)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{n} \sin \dfrac{x}{n}$ на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{n^2+x^2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n}$ на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2x^2}{n^4+x^4} \sin \dfrac{n}{x}$ на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x \sin \dfrac{1}{(xn)^2}$ на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x \ln nx}{n^2}$ на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$.

Т.3. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно в точках a и b, а каждая функция $u_n(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то этот ряд сходится равномерно на $[a,b]$.

Т.4. Докажите, что если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно по $x \in [0,+\infty)$.

Т.5. Докажите, что дзета-функция Римана $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ бесконечно дифференцируема на интервале $(1,+\infty)$.

Т.6. Докажите, что если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель (равна нулю за пределами некоторого отрезка), а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

Т.7*. Пусть последовательность неотрицательных непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций (f_n) убывает по n и поточечно стремится к нулевой функции. Докажите, что на самом деле (f_n) сходится равномерно.

II. Степенные ряды и ряд Тейлора (С2, §§20,21)

Т.8. Найдите радиус сходимости степенного ряда

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! z^n}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2 z^n}{(2n)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(1-i)^n}$.

Т.9. Найдите радиус сходимости степенного ряда и исследуйте сходимость на концах интервала сходимости

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)\, x^n$, $a > 0$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Т.10. Разложите функцию в ряд Тейлора в данной точке x_0 и найдите радиус сходимости

а) $\dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$, $x_0 = 0$; б) $\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$, $x_0 = 0$; в) $\ln \dfrac{2 + x^2}{\sqrt{1 - 2x^2}}$, $x_0 = 0$;

г) $\sin^3 x$, $x_0 = 0$; д) $\operatorname{arctg} \dfrac{2 - x}{1 + 2x}$, $x_0 = 0$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$, $x_0 = 2$.

Т.11. Найдите сумму степенного ряда

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

Т.12. Докажите, что ряд Маклорена функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

имеет бесконечный радиус сходимости, но не везде сходится к этой функции.

III. Интеграл функции одной переменной (С2, §6)

Т.13. Вычислите интегралы как пределы интегральных сумм

а) $\int\limits_0^1 e^x\, dx$; б) $\int\limits_0^\pi \sin x\, dx$.

Т.14. Найдите интеграл $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x}$ и с его помощью докажите равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

Т.15. Объясните, почему неверно равенство $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{1} = 0$.

Т.16. Докажите, что для чётной интегрируемой функции $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ выполняется $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$, а для нечётной f выполняется $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

T.17. Докажите неравенства для интегралов

а) $1 - \dfrac{1}{n} < \int\limits_0^1 e^{-x^n}\, dx < 1$ при $n \in \mathbb{N}$;

б) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{-a \sin x}\, dx < \dfrac{\pi}{2a}\,(1 - e^{-a})$ при $a > 0$;

в) $\left| \int\limits_a^b \dfrac{\sin x}{x}\, dx \right| \le \dfrac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

T.18. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[0, T]$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx.$$

T.19. Докажите, что $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся непрерывные $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, такие что $g \le f \le h$ и $\int\limits_a^b h(x) - g(x)\, dx < \varepsilon$.

IV. Мера элементарных множеств и мера Жордана

T.20. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ и $T \subset \mathbb{R}^m$ — элементарные множества. Докажите, что для их декартова произведения $S \times T \subset \mathbb{R}^{n+m}$ выполняется $m\,(S \times T) = mS \cdot mT$.

T.21. Может ли счётное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ иметь нулевую меру Жордана?

T.22. Может ли счётное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ иметь положительную меру Жордана?

T.23. Всякое ли компактное подмножество $\mathbb{R}$ измеримо по Жордану?

V. Мера Лебега и её свойства

T.24. Пусть X — это множество рациональных точек квадрата $[0, 1]^2$. Измеримо ли оно по Жордану? Измеримо ли оно по Лебегу?

T.25. Пусть X — это множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющих хотя бы одну рациональную координату. Измеримо ли оно по Лебегу?

T.26. Приведите пример замкнутого подмножества отрезка $[0, 1]$, состоящего только из иррациональных чисел и имеющего меру Лебега не менее 0,999.

<u>Т.27</u>. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет Лебегову меру нуль, функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Докажите, что $f(A)$ тоже имеет Лебегову меру нуль.

Т.28*. Докажите, что утверждение предыдущей задачи будет неверно, если заменить непрерывную дифференцируемость f на непрерывность.

Т.29. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера $\mu(X \setminus (X+t))$ стремится к нулю при $t \to 0$. Здесь $X+t$ — это сдвиг множества X на t.

<u>Т.30</u>. Докажите, что мера Лебега любого открытого множества равна его нижней мере Жордана.

Т.31. Докажите, что мера Лебега любого компактного множества равна его верхней мере Жордана.

Т.32. Пусть X_k — последовательность измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$, а X — множество таких точек $x \in \mathbb{R}$, для которых включение $x \in X_k$ выполняется для чётных k и нарушается для нечётных k. Докажите, что X измеримо по Лебегу.

Т.33. Докажите, что у произвольной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множество точек разрыва измеримо по Лебегу.

VI. Измеримые функции

<u>Т.34</u>. Докажите, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда для всякого рационального $r \in \mathbb{Q}$ множество

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \le r\}$$

измеримо.

<u>Т.35</u>. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то её график имеет меру Лебега нуль на плоскости.

Т.36. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема везде. Докажите, что её производная измерима по Лебегу.

$$\boxed{34 + 2^*}$$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–15 мая)

I. Абсолютно и условно сходящиеся интегралы функции одной переменной (С2, §§11,12)

Т.1. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$

а) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ch} \alpha x - \ln(1+x^2) - 1}{\sqrt[3]{8-x^3} - 2}\, dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch} \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\, dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+x^\alpha)}{x \ln^\alpha(1+x)}\, dx$.

Т.2. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

а) $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^\beta x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}\, dx$.

Т.3. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$

а) $\int\limits_0^{+\infty} x^{4\alpha/3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^\alpha}\, dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^\alpha)}{x^{3/2}}\, dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \sin \frac{\cos x^3}{x+1}\, dx$;

г) $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$; д) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{(2x - \cos \ln x)^\alpha}\, dx$; е) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos x^3}{(3x - \operatorname{arctg} x)^\alpha}\, dx$;

ё) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}\, dx$; ж) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(\sqrt{x} + \sin x)^\alpha}\, dx$.

Т.4. Найдите явное асимптотически эквивалентное выражение для интеграла

$$\int\limits_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2/2}\, dt$$

при $x \to +\infty$ в зависимости от параметра α.

Т.5. Определён ли интеграл по прямой как интеграл Лебега

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$?

II. Вычисление и приложения интеграла Лебега (С2, §§7,8)

Т.6. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми

а) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$, $x = 1$, $y = 0$; б) $y = \ln x$, $y = \ln \frac{1}{x}$, $x = 0$.

Т.7. Найдите длину кривой

а) $y = \ln \sin x$, $\pi/3 \le x \le 2\pi/3$; б) $y = t - \sin t$, $x = 1 - \cos t$, $0 \le t \le \pi$;

в) $r = 1 - \cos \varphi$ в полярных координатах.

Т.8. Найдите объём тела вращения, заданного неравенствами

а) $\sqrt{y^2+z^2} \le \sqrt{x}e^{-x}$, $0 \le x \le +\infty$;

б) $a(y^2+z^2) \le x \le b + c(x^2+y^2)$, $a > c$ и $b > 0$ — константы.

Т.9. Пусть $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма. Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

Т.10. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Т.11. Напишите асимптотически эквивалентную формулу для двойного факториала

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

при $n \to \infty$ без факториалов и гамма-функций.

Т.12. Докажите формулу

$$\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

III. Свойства интеграла Лебега

Т.13. Докажите формулу включений-исключений для множеств $X_1, \dots, X_N \subseteq \subseteq \mathbb{R}^n$ конечной меры

$$\mu\left(X_1 \cup \dots \cup X_N\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu\left(X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_K}\right).$$

Т.14. Найдите интеграл Лебега функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданной как

$$f(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Т.15. Верно ли, что если f имеет первообразную на отрезке $[a, b]$, то f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$ с конечным интегралом?

Т.16. Докажите, что если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a,b), и её производная ограничена, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

T.17. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, то

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx = 0.$$

T.18. Постройте последовательность функций $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая возрастает по n,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = +\infty \text{ и для любого } n \ \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = -\infty.$$

T.19. Пусть f интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ с конечным интегралом. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\mu(X) < \delta$, то

$$\int_X |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

T.20*. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю. Покажите, что для неё и её производной не выполняется формула Ньютона–Лейбница.

IV. Сравнение интеграла Римана и интеграла Лебега

T.21. Докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

T.22. Пусть последовательность непрерывных функций $f_n : [a,b] \to [0,+\infty)$ убывает по n и стремится к нулю в среднем. Докажите, что эта последовательность функций стремится к нулю почти всюду.

T.23*. Докажите, что $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

$\boxed{21 + 2^*}$

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв