

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет общей и прикладной физики

**Отчет о выполнении лабораторной работы 2.2.3:
Определение коэффициента теплопроводности при
атмосферном давлении**

Автор:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.



Долгопрудный, 2024

Аннотация

Цель работы: измерить коэффициент теплопроводности воздуха при атмосферном давлении в зависимости от температуры.

В работе используются: цилиндрическая колба с натянутой по оси нитью, термостат, вольтметр и амперметр, источник постоянного напряжения, магазин сопротивлений.

Основные теоретические сведения

Теплопроводность – процесс передачи тепловой энергии от нагретых частей системы к холодным за счет хаотического движения частиц среды. В газах теплопроводность осуществляется за счет непосредственной передачи кинетической энергии от быстрых молекул к медленным. Перенос тепла описывается законом Фурье.

Закон Фурье Этот закон утверждает, что плотность потока энергии \vec{q} (количество теплоты, переносимое через единичную площадку за единицу времени) пропорциональна градиенту температуры ∇T :

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \quad (1)$$

где κ – коэффициент теплопроводности. $[\kappa] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$

Молекулярно-кинетическая теория дает оценку коэффициента теплопроводности газов:

$$\kappa \sim \lambda \vec{v} \cdot n C_V \quad (2)$$

здесь λ – длина свободного пробега молекул газа, $\vec{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ – средняя скорость теплового движения, n – концентрация молекул, $C_V = \frac{i}{2}k$ – теплоемкость при постоянном объеме в расчете на одну молекулу

Формула (2) дает лишь оценку по порядку величины, а также правильную функциональную зависимость. Коэффициент перед этой формулой

зависит от закона взаимодействия молекул и не может быть вычислено методами общей физики. Также не подлежит прямому измерению длина свободного пробега.

Ее можно оценить как $\lambda = 1/n\sigma$, где σ – эффективное сечение столкновения молекул друг с другом – величина, характеризующая вероятность существенного отклонения налетающей частицы при взаимодействии с некоторым рассеивающим центром. В общем случае определяется как отношение плотности потока рассеянных частиц к плотности потока падающих, имеет размерность площади.

В простейшей модели $\sigma = const$, а коэффициент теплопроводности пропорционален корню абсолютной температуры: $\kappa \sim \vec{v}/\sigma \sim \sqrt{T}$. На практике сечение σ зависит от температуры и его следует считать медленно убывающей функцией.

Рассмотрим теплопроводность в цилиндрической геометрии:

Пусть тонкая нить радиусом r_1 и длиной L помещена на оси цилиндра радиуса r_0 . Температура стенок T_0 поддерживается постоянной. Пусть в нити выделяется некоторая тепловая мощность Q [Вт]. Если цилиндр длинный ($L \gg r_0$), то можно пренебречь теплоотводом через его торцы. Тогда все параметры газа можно считать зависящими только от расстояния r до оси цилиндра, а поток \vec{q} – направленным строго радиально (от оси).

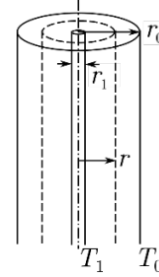


Рис. 1: Геометрия установки

Вместо уравнения (1) имеем теперь:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dr} \quad (3)$$

В стационарном состоянии полный поток тепла через цилиндрическую поверхность радиуса r и площадью $S = 2\pi rL$ должен быть одинаков и равен $Q = qS$:

$$Q = -2\pi rL \cdot \kappa \frac{dT}{dr} = const \quad (4)$$

Считая перепад температуры сильно меньшим чем само значение температуры ($\Delta \ll T_0$) можно пренебречь изменением теплопроводности κ

от радиуса. Тогда можно проинтегрировать по радиусу и температуре:

$$\begin{aligned}
 Q \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{r} &= -2\pi L \cdot \kappa \int_{T_1}^{T_0} dT \\
 Q \ln(r_0/r_1) &= 2\pi L \cdot \kappa \Delta T, \quad \Delta T = T_1 - T_0 \\
 Q &= \frac{2\pi L \kappa \Delta T}{\ln(r_0/r_1)} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Оценка времени установления равновесия Когда в процессе работы мы меняем (желаемую) температуру на термостате требуется некоторое время, чтобы жидкость достигла этой температуры, затем некоторое время, чтобы жидкость достигла стенок цилиндра, затем некоторое время, чтобы воздух в цилиндре тоже прогрелся до новой температуры. Оценим время установления нового состояния в системе (без учета нагрева термостата).

Рассмотрим плоский слой толщиной a и сечением S , заполненный газом при постоянном давлении. Пусть температура одной из граней выросла на некоторую ΔT . Это вызовет поток тепла в сторону более холодной грани, величину которого можно оценить по закону Фурье: $q \sim \kappa \Delta T / a$. Для того чтобы весь слой прогрелся на ΔT в него должно поступить тепло $nSa \cdot C_p \Delta T$, где C_p – теплоемкость при постоянном давлении в расчете на одну молекулу.

С другой стороны, поступившее за это время τ тепло можно вычислить как $qS\tau = \kappa \frac{\Delta T}{a} S\tau$. Приравнявая находим:

$$nSaC_p\Delta T = \kappa \frac{\Delta T}{a} S\tau$$

тогда

$$\tau \sim \frac{C_p a^2 n}{\kappa} \quad (6)$$

Коэффициент $\chi = \frac{\kappa}{C_p n}$ называется температуропроводностью среды. Для воздуха при нормальных условиях $\chi \sim 0.2 \text{ cm}^2/\text{s}$, что при размере $a \sim 1 \text{ cm}$ имеет характерное время $\tau \sim 5 \text{ s}$

Таким образом, состояние в установке может устанавливаться в течение нескольких десятков секунд, поэтому, учитывая также прогрев трубок, стоит ждать несколько минут после достижения термостатом желаемой температуры.

Пределы применимости теории Закон Фурье может нарушаться, когда масштабы установки соизмеримы с длиной свободного пробега молекул. Это может привести к эффекту, известному как «температурный скачок», явление, когда температура нити может отличаться от температуры окружающего газа. В данной работе этим можно пренебречь, так как при нормальных условиях $\lambda \sim 10^{-5} \text{ см}$, что сильно меньше размеров системы, и даже размеров нити.

Также возможны другие механизмы теплопередачи: конвекция и излучение. Конвекция возникает в поле тяжести только при больших вертикальных градиентах температуры, поэтому установка расположена вертикально. Мощность излучения можно оценить по закону Стефана-Больцмана:

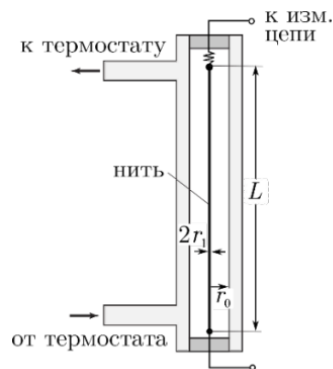
$$Q_{rad} = \epsilon S \sigma_S (T_1^4 - T_0^4) \approx 4\epsilon S \sigma_S T_0^3 \Delta T \quad (7)$$

где S – площадь поверхности нити, $\sigma_S = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$ – постоянная Стефана-Больцмана, ϵ – безразмерный «коэффициент черноты», зависящий от качества и материала излучающей поверхности. Для металлов с полированной поверхностью можно принять $\epsilon \sim 0.1 - 0.2$. По формуле (7) находим мощность излучения:

$$Q_{max} \approx 1.5 \text{ mW}$$

Экспериментальная установка

Установка представляет собой цилиндрическую трубку длиной $L = 40 \text{ см}$, диаметром $2r_0 = 1 \text{ см}$, диаметр нити $2r_1 = 50 \mu\text{м}$. Трубка заполнена воздухом, через небольшое отверстие воздух внутри системы может сообщаться с атмосферой. Стенки трубки помещены в кожух, через который пропускается вода из термостата, так что температура стенок T_0 поддерживается постоянной. Трубка расположена вертикально для предотвращения влияния конвекции, как было обговорено ранее.



Нить служит источником тепла:

$$Q = UI \quad (8)$$

где Q – мощность нагрева нити, U – напряжение на нити, I – сила тока.

Также нить является способом измерения температуры. Сопротивление нити можно найти по закону Ома:

$$R = \frac{U}{I} \quad (9)$$

Электрические приборы и нить подключены согласно следующей схеме:

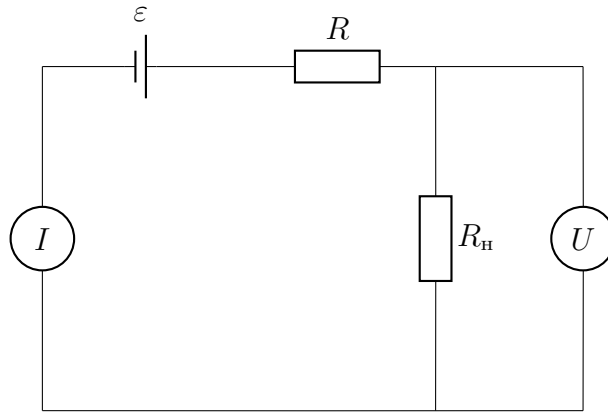


Рис. 2: Схема цепи

Предполагая, что все компоненты цепи идеальны, измерив напряжение U и силу тока I можно найти мощность, выделяемую на нити и ее сопротивление. По этим данным мы будем строить зависимость $R(Q)$ – нагрузочная кривая.

Уменьшая сопротивление магазина мы увеличиваем значение силы тока в цепи. Есть некоторое значение силы тока I_{max} , выше которой теплопроводности воздуха перестанет хватать, чтобы отводить тепло, выделяющееся на нити. Если это значение превысить, нить может перегореть.

Найдем максимальную мощность отвода воздуха по формуле (5), затем используя формулу $Q_w = I^2 R$, считая $R \approx 20\Omega$ получим, что $I_{\text{max}} \approx 137\text{mA}$, если максимальная разница температур $\Delta T \approx 20\text{K}$

Зависимость $R(T)$ – сопротивления от температуры при температурах около комнатной ($0-100C^\circ$) можно с достаточно большой точностью считать линейной зависимостью:

$$R(T) \approx R_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

где α – коэффициент пропорциональности, R_0 – сопротивление при температуре T_0 . Мы в ходе работы также проверим ее линейность.

Результаты измерения и их обработка

В результате измерений получены значения для четырех температур. Таблицы с данными приведены в приложении.

Атмосферное давление во время эксперимента $\approx 96.73 \text{ kPa}$, температура воздуха $T \approx 24.2 \text{ C}^\circ$.

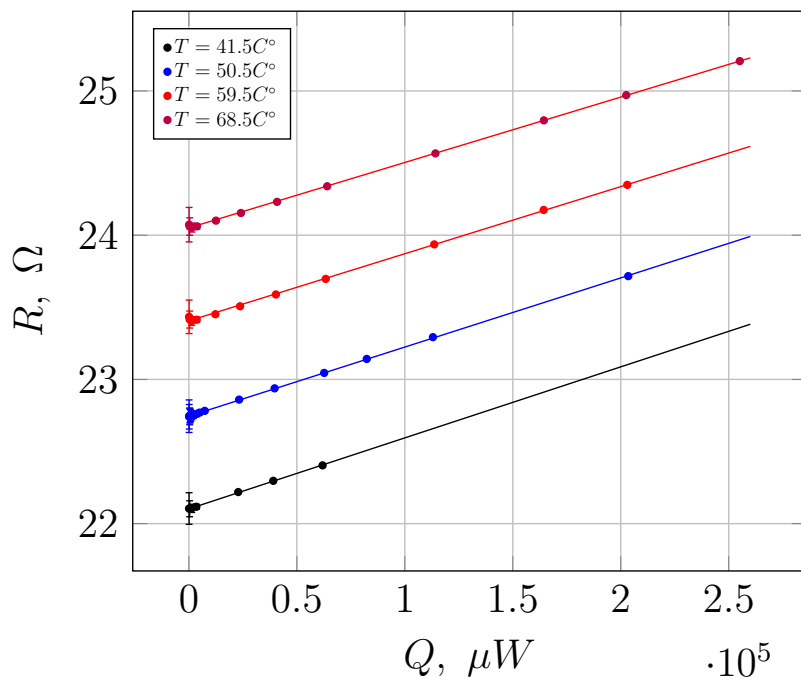


Рис. 3: Нагрузочные кривые для разных температур

Погрешности учитываются следующим образом:

$$\sigma_R = R \sqrt{\left(\frac{\sigma_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

$$\sigma_Q = Q \sqrt{\left(\frac{\sigma_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

При малых сопротивлениях магазина (т.е. при больших токах и напряжениях) влияние погрешности мало. Поэтому аппроксимировать будем методом МНК.

Погрешность каждого R_0 будем определять по формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2 \right)}$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

где $b \equiv R_0$

$$R_0 \approx 22.102 \pm 0.012, 22.744 \pm 0.011, 23.406 \pm 0.017, 24.050 \pm 0.016 \, \Omega$$

Коэффициенты наклона прямых:

$$k_1 = 4.535 \pm 0.136$$

$$k_2 = 4.655 \pm 0.120$$

$$k_3 = 4.795 \pm 0.155$$

$$k_4 = 4.925 \pm 0.143$$

где k_1 – для $T = 41.5C^\circ$, а k_4 – для $T = 68.5C^\circ$

Построим зависимость $R_0(T)$:

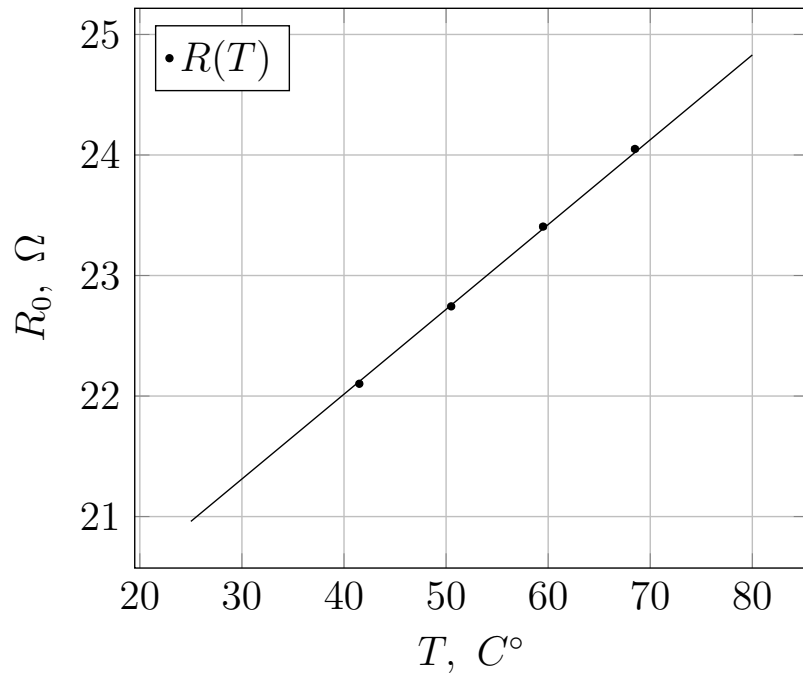


Рис. 4: Зависимость сопротивления нити от температуры

Угловым коэффициент прямой $k = 0.07035 \pm 0.00901 \text{ } \Omega/\text{K}$, экстраполируя зависимость до $T = 273\text{K}$ получим $R_{273} \approx 19.21 \pm 0.21 \text{ } \Omega$. Получим коэффициент α :

$$\alpha = \frac{k}{R_{273}} \approx (3.66 \pm 0.46) \cdot 10^{-3} \text{ } \text{K}^{-1}$$

Найдем теперь наклон $Q(\Delta T)$ – мощность, выделяемая на нити от ее перегрева относительно стенок по формуле:

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dR}{dT} \cdot \frac{dQ}{dR}$$

подставляя известные значения получим:

$$\frac{dQ}{dT} = 0.0143 \pm 0.0019 \quad T = 41.5C^{\circ}$$

$$\frac{dQ}{dT} = 0.0147 \pm 0.0019 \quad T = 50.5C^{\circ}$$

$$\frac{dQ}{dT} = 0.0151 \pm 0.0020 \quad T = 59.5C^{\circ}$$

$$\frac{dQ}{dT} = 0.0155 \pm 0.0020 \quad T = 68.5C^{\circ}$$

Учитывая формулу (5):

$$\varkappa = \frac{dQ}{dT} \cdot \frac{\ln(r_0/r_1)}{2\pi L}$$

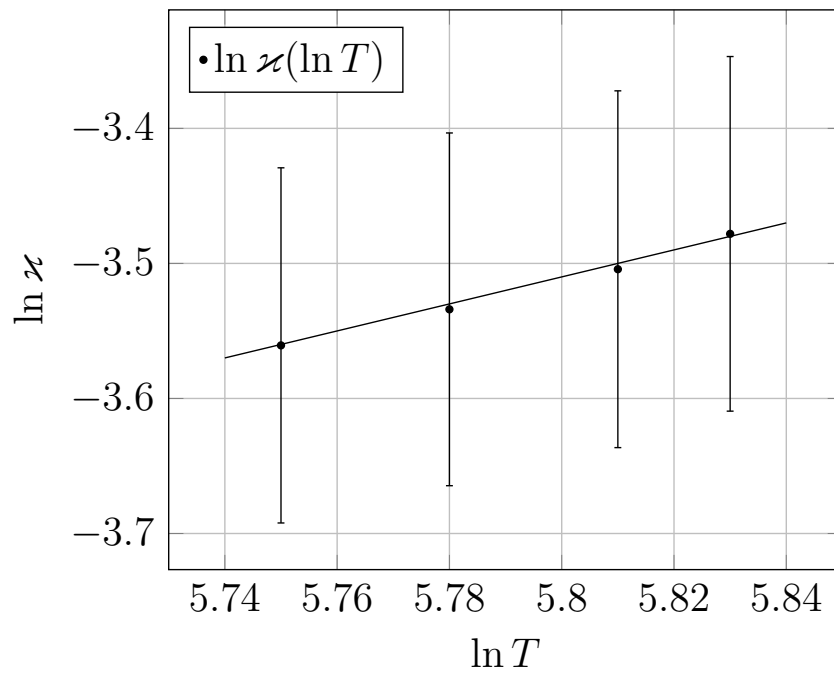


Рис. 5: Зависимость логарифма коэффициента теплопроводности \varkappa от логарифма температуры

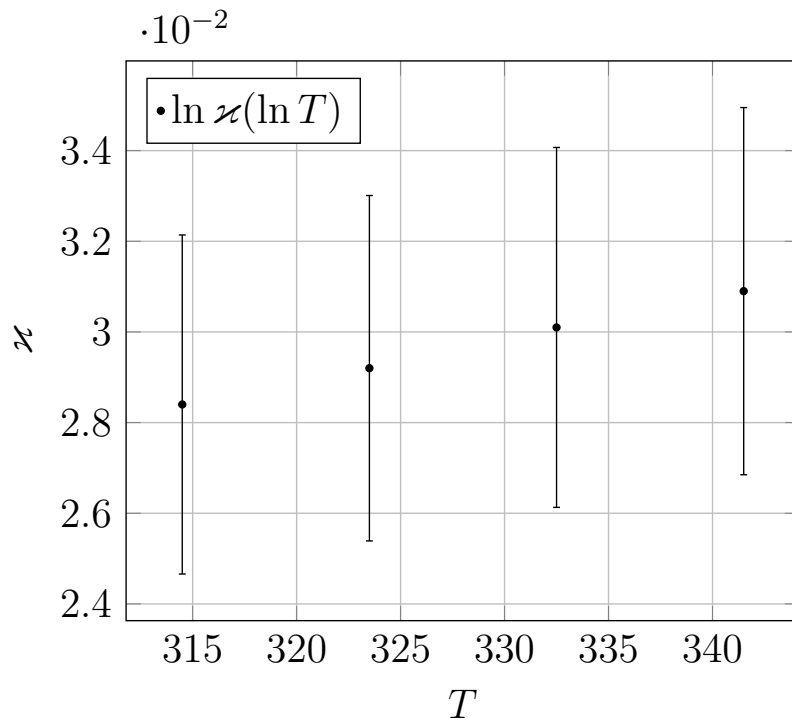


Рис. 6: Зависимость логарифма коэффициента теплопроводности κ от логарифма температуры

Угловым коэффициентом наклона графика равен показателю β , если $\kappa \sim T^\beta$. По МНК $\beta = 1.01 \pm 0.13$. Можно считать, что при комнатных температурах коэффициент теплопроводности κ зависит от температуры линейно.

Сами значения κ :

$$\kappa_1 = 0.0284 \pm 0.0037$$

$$\kappa_2 = 0.0292 \pm 0.0038$$

$$\kappa_3 = 0.0301 \pm 0.0040$$

$$\kappa_4 = 0.0309 \pm 0.0041$$

Обсуждение результатов и выводы

Мы построили зависимости $R(Q)$ – сопротивления нити от выделяемого на ней тепла, проверили его линейность. По y -интерсепту этих графиков нашли зависимость $R_0(T)$, которая тоже хорошо легла на прямую. Тем самым подтверждено линейное приближение зависимости сопротивления от температуры.

Найден коэффициент α в зависимости $R(T)$, который попадает в пределы $\pm 1\sigma$ от табличного. Достаточно высокая погрешность некоторых величин может быть объяснена малым количеством экспериментальных точек.

Найден наклон зависимости $Q(\Delta T)$, а по нему найден коэффициент теплопроводности κ . Из построенной зависимости $\ln \kappa(\ln T)$ получена постоянная $\beta \approx 1$, которая показывает, что зависимость $\kappa(T)$ линейна (по крайней мере при T близким к комнатной температуре).

Приложение А

Результаты измерений

n	R, Ω	I, mA	V, mV	$Q = UI, \mu W$	R_w, Ω
1	2000	2.0190	44.630	90.108	22.105
2	1000	3.9850	88.080	350.999	22.103
3	500	7.7640	171.630	1332.535	22.106
4	300	12.5010	276.480	3456.276	22.117
5	100	32.0710	712.580	22853.153	22.219
6	70	41.8700	933.580	39088.995	22.297
7	50	52.5700	1177.800	61916.946	22.404

Рис. А.1: Результаты измерений при $T = 41.5C^\circ$

n	R, Ω	I, mA	V, mV	$Q = UI, \mu W$	R_w, Ω
1	2000	2.019	45.92	92.717	22.745
2	1500	2.680	60.95	163.338	22.741
3	1000	3.983	90.58	360.796	22.743
4	900	4.412	100.37	442.832	22.749
5	800	4.945	112.49	556.263	22.748
6	700	5.624	127.94	719.535	22.749
7	600	6.520	148.32	967.046	22.748
8	500	7.754	176.42	1367.961	22.752
9	400	9.563	217.60	2080.909	22.754
10	300	12.477	283.98	3543.218	22.760
11	250	14.718	335.13	4932.443	22.770
12	200	17.941	408.74	7333.204	22.782
13	100	31.911	729.50	23279.075	22.860
14	70	41.603	954.28	39700.911	22.938
15	50	52.144	1201.68	62660.402	23.045
16	40	59.660	1380.66	82370.176	23.142
17	30	69.657	1622.50	113018.483	23.293
18	15	92.625	2196.71	203470.264	23.716

Рис. А.2: Результаты измерений при $T = 50.5C^\circ$

n	R, Ω	I, mA	V, mV	$Q = UI, \mu W$	R_w, Ω
1	2000	2.018	47.29	95.431	23.434
2	1000	3.980	93.19	370.896	23.415
3	500	7.745	181.27	1403.936	23.405
4	300	12.452	291.55	3630.381	23.414
5	150	22.887	536.74	12284.368	23.452
6	100	31.750	746.35	23696.613	23.507
7	70	41.328	974.90	40290.667	23.589
8	50	51.713	1225.42	63370.144	23.697
9	30	68.900	1649.20	113629.880	23.936
10	20	82.440	1993.00	164302.920	24.175
11	15	91.316	2223.47	203038.387	24.349

Рис. А.3: Результаты измерений при $T = 59.5C^\circ$

n	R, Ω	I, mA	V, mV	$Q = UI, \mu W$	R_w, Ω
1	2000	2.018	48.58	98.034	24.073
2	1000	3.978	95.71	380.734	24.060
3	500	7.735	186.05	1439.097	24.053
4	300	12.427	299.00	3715.673	24.061
5	150	22.804	549.60	12533.078	24.101
6	100	31.591	763.04	24105.197	24.154
7	70	41.061	994.96	40854.053	24.231
8	50	51.295	1248.48	64040.782	24.339
9	30	68.173	1674.80	114176.140	24.567
10	20	81.422	2018.96	164387.761	24.796
11	15	90.063	2248.93	202545.383	24.971
12	10	100.603	2535.90	255119.148	25.207

Рис. А.4: Результаты измерений при $T = 68.9C^\circ$