

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет общей и прикладной физики

## Первое задание по математическому анализу

Автор:  
Студент гр. Б02-304  
Головинов. Г.А.



Долгопрудный, 2024

**Задача 1** (T14). Найдите вторые частные производные функции в данной точке

$$f(x, y, z) = (1+x)^\alpha (1+y)^\beta (1+z)^\gamma$$

**Решение**

$$\begin{aligned} df &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^\beta(1+z)^\gamma dx + \\ &+ \beta(1+x)^\alpha(1+y)^{\beta-1}(1+z)^\gamma dy + \\ &+ \gamma(1+x)^\alpha(1+y)^\beta(1+z)^{\gamma-1} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}(1+y)^\beta(1+z)^\gamma dx \otimes dx + \\ &+ \alpha\beta(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^{\beta-1}(1+z)^\gamma dx \otimes dy + \\ &+ \alpha\gamma(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^\beta(1+z)^{\gamma-1} dx \otimes dz + \\ &+ \beta(\beta-1)(1+x)^\alpha(1+y)^{\beta-2}(1+z)^\gamma dy \otimes dy + \\ &+ \alpha\beta(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^{\beta-1}(1+z)^\gamma dy \otimes dx + \\ &+ \beta\gamma(1+x)^\alpha(1+y)^{\beta-1}(1+z)^{\gamma-1} dy \otimes dz + \\ &+ \gamma(\gamma-1)(1+x)^\alpha(1+y)^\beta(1+z)^{\gamma-2} dz \otimes dz + \\ &+ \alpha\gamma(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^\beta(1+z)^{\gamma-1} dz \otimes dx + \\ &+ \beta\gamma(1+x)^\alpha(1+y)^{\beta-1}(1+z)^{\gamma-1} dz \otimes dy \end{aligned}$$

**Задача 2** (T15a). Найдите вторые частные производные в точке  $(1,1)$  функции  $f(x, y)$  заданной неявно соотношением

$$ef = e^{x+y+f}$$

**Решение**

$$\begin{aligned} edf &= e^{x+y+f}(dx + dy + df) \\ edf - efd &= ef(dx + dy) \\ df &= (1-f)^{-1}f(dx + dy) \\ d^2 f &= (1-f)^{-2}(dfdx + dfdy + fdx^2 + fdy^2)(1-f) + (f(dx + dy)df) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= (1-f)^{-2}((fdx^2 + fdx dy + fdy^2) + \\ &+ (1-f)^{-1}(f^2 dx^2 + 2f^2 dx dy + f^2 dy^2)) \end{aligned}$$

Найдем  $f(1, 1)$ :

$$\begin{aligned} f &= e^{1+f} \\ \ln f &= 1 + f \quad (??) \end{aligned}$$

**Задача 3** (Т156). Найдите вторые частные производные в точке  $(1, 1)$  функции  $f(x, y)$  заданной неявно соотношением

$$f^3 - 3xyf - 2 = 0$$

**Решение**

$$3f^2 df - 3y f dx - 3x f dy - 3xy df = 0$$

$$df(3f^2 - 3xy) = 3y f dx + 3x f dy$$

$$df = \frac{3y f dx + 3x f dy}{3f^2 - 3xy} = \frac{2}{3}(dx + dy)$$

$$d^2 f = \frac{(6f dx dy + 3y dx df + 3x dy df)(3f^2 - 3xy)}{(3f^2 - 3xy)^2} - \frac{(3y f dx + 3x f dy)(6f df - 3y dx - 3x dy)}{(3f^2 - 3xy)^2}$$

$$d^2 f = \frac{(12 dx dy + 2 dx(dx + dy) + 2 dy(dx + dy)) \cdot 9}{9^2} - \frac{6(dx + dy)5(dx + dy)}{9^2}$$

$$d^2 f = \frac{144 dx dy + 18 dx^2 + 18 dy^2}{9^2} - \frac{30 dx^2 + 60 dx dy + 30 dy^2}{9^2}$$

$$d^2 f = \frac{1}{81}(84 dx dy - 12 dx^2 - 12 dy^2)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-12}{81} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-12}{81} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{42}{81} \quad (3)$$

**Задача 4** (Т16). Найдите частные производные всех порядков функции  $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$

**Решение** Положим  $t = x + y + z$ , тогда  $f(t) = \ln(t)$

$$d^n f = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n} dt^n \quad (4)$$

В свою очередь

$$dt^n = (dx + dy + dz)^n = \sum_{k_1, k_2, k_3} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} dx^{k_1} dy^{k_2} dz^{k_3} \quad (5)$$

Чтобы найти некоторую частную производную необходимо выбрать  $k_1, k_2, k_3$ , такие что  $k_1 + k_2 + k_3 = n$ , и она будет равна

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+y+z)^n} \quad (6)$$