МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет обшей и прикладной физики

Задача о мячике на вращающейся поверхности

Автор:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.

Долгопрудный, 2023-2024

1 Аннотация

Чем мы вообще занимаемся? Мы хотим рассмотреть задачу о мячике на вращающемся столе. Экспериментально можно убедиться, что у мячика есть стабильные конфигурации движения, а именно:

Во-первых, если дать мячику возможность раскрутится до скорости поверхности, а потом отпустить, он будет оставаться в том же месте. *Во-вторых*, если шарику придать небольшой толчок, он начет совершать круговые движения, причем за 2 оборота мяча стол совершает 5 или 7 полных оборотов, в зависимости от того полый ли мяч.

В этой работе хотелось бы объяснить это явление физически, доказать соотношение 2:5 и 2:7, с помощью этого определить экспериментально момент инерции мяча.

Основным источником теоретической части этой работы стала статья [1], в которой достаточно подробно описан вывод, однако некоторые промежуточные шаги отсутствуют. В моей работе все промежуточные шаги расписаны несколько подробнее.

Цель работы: исследовать феномен кругового вращения шара на быстро вращающемся диске без проскальзывания, собрать экспериментальную установку, определить момент инерции шара экспериментально, сравнить с теоретическими значениями.

Используемые инструменты: установка с вращающимся столом, шарики резиновые разного диаметра, мячики для настольного тенниса (сферы), секундомер, камера (для более точного измерения)

Подробнее об установке, ее схеме и необходимых материалах мы поговорим после теоретической части.

План выполнения работы

1. Получить уравнение движения мяча по вращающейся поверхности с учетом отсутствия проскальзывания

2. Найти решение этого уравнения

3. Собрать установку с вращающейся поверхностью

4. С помощью установки подтвердить правильность найденного решения, найти отношение периодов, найти момент инерции мяча. Сравнить с теоретическим

2 Основные теоретические сведения

2.1 Получение уравнения движения

Далее принимаем следующие обозначения:

1. $\vec{v}_d$ – вектор скорости некоторой точки на диске
2. $\vec{r}_d$ – радиус вектор этой точки
3. $\vec{v}_b$ – вектор скорости точки мячика, которая находится в соприкосновении с поверхностью
4. $\vec{\omega}_b$ – вектор угловой скорости вращения мячика
5. $\vec{R}$ – радиус вектор точки соприкосновения в системе координат мячика

Скорость любой точки диска можно определить по формуле

$$\vec{v}_d = \vec{\omega}_d \times \vec{r}_d \tag{1}$$

Скорость точки соприкосновения шара определяется по формуле

$$\vec{v}_b = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}_b \times \vec{R} \tag{2}$$

Мы предполагаем, что мяч движется без проскальзывания. Тогда

$$\vec{v}_d = \vec{v}_b \tag{3}$$

Подставляя (1) и (2) в (3) получим

$$\vec{\omega}_d \times \vec{r}_d = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}_b \times \vec{R}$$

$$\vec{\omega}_b \times \vec{R} = \vec{\omega}_d \times \vec{r} - \dot{\vec{r}} \tag{4}$$

Это уравнение мы можем продифференцировать и получим:

$$\dot{\vec{\omega}}_b \times \vec{R} = \dot{\vec{\omega}}_d \times \vec{r} - \ddot{\vec{r}} \tag{5}$$

Момент импульса шара можно определить по формуле:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}_b$$

где I – момент инерции шара. Так как шар симметричен, его момент инерции не меняется (несмотря на то что ось, относительно которой он вращается, меняется).
Тогда производная момента импульса по времени

$$\dot{\vec{L}} = I\frac{d\vec{\omega}_b}{dt} = I\dot{\vec{\omega}}_b = \vec{M} \tag{6}$$

где M – момент силы трения, действующей на шар.

$$I\dot{\vec{\omega}}_b = \vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} \tag{7}$$

По второму закону Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{8}$$

Подставляя это в предыдущее уравнение:

$$I\dot{\vec{\omega}}_b = \vec{R} \times m \cdot \ddot{\vec{r}} \tag{9}$$

Подставляя это в (5):

$$[(\vec{R}/I) \times m \cdot \ddot{\vec{r}}] \cdot \vec{R} = \vec{\omega}_d \times \dot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}} \tag{10}$$

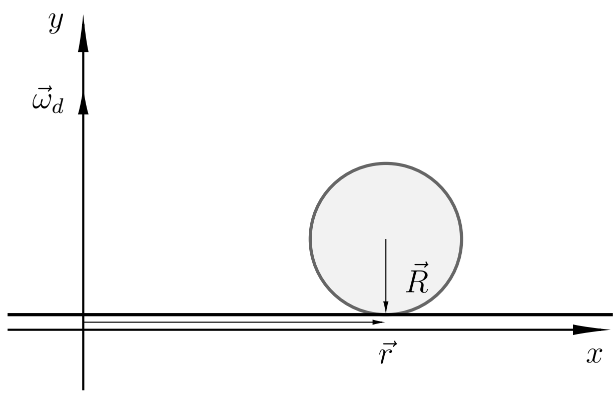

Рис. 1: Векторы $\vec{\omega}_d$, $\vec{r}$, $\vec{R}$

$\vec{F}$ сила трения находится в плоскости диска, $\vec{R}$ перпендикулярен плоскости диска, ускорение $\ddot{\vec{r}}$ сонаправлено с $\vec{F}$, значит левую часть уравнения (10) можно упростить:

$$(R^2/I) \cdot m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{\omega}_d \times \dot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}} \tag{11}$$

Выражая ускорение получим

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{\omega}_d \times \dot{\vec{r}}}{(R^2/I) \cdot m + 1} \tag{12}$$

2.2 Решение уравнения движения

Мы теперь хотим показать, что круговые орбиты радиуса ρ вокруг некоторой точки r_0 с угловой скоростью ω_c являются решением этого уравнения движения.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} \tag{13}$$
$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}_c \times \vec{\rho} \tag{14}$$
$$\ddot{\vec{r}} = -{\omega_c}^2 \vec{\rho} \tag{15}$$

Подставляя эти уравнения в (12) мы получим

$$-\omega_c^2 \vec{\rho} = \frac{\vec{\omega}_d \times (\vec{\omega}_c \times \vec{\rho})}{(R^2/I) \cdot m + 1} \tag{16}$$

Обратим внимание на то, что $\vec{\omega}_c$ и $\vec{\omega}_d$ коллинеарны, $\vec{\omega}_c \perp \vec{\rho}$ тогда векторное произведение (тройное) упрощается и можно ω_c по модулю

$$\omega_c = \frac{\omega_d}{(R^2/I) \cdot m + 1} \tag{17}$$

Отсюда и получается отношение угловых скоростей в 2:5 и 2:7. Заметим, что угловая скорость не зависит ни от массы мяча, ни от его размеров.

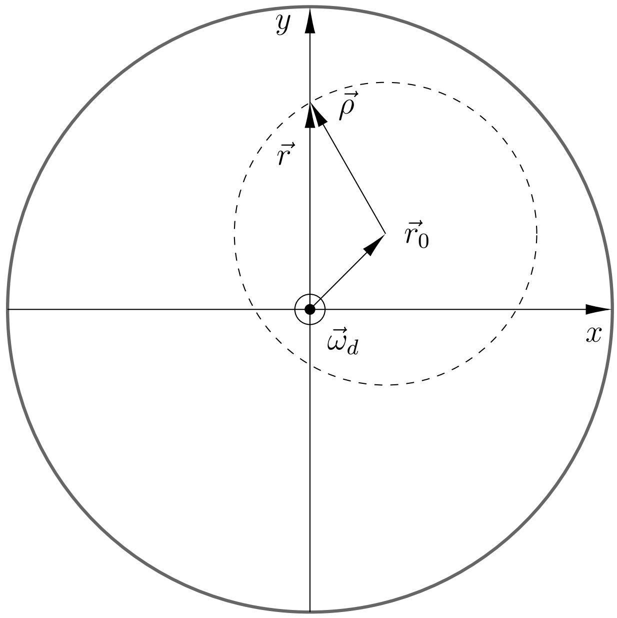

Рис. 2: Орбита мяча и векторы $\vec{r}_0$, $\vec{\rho}$, $\vec{r}$

Теперь мы можем определить константы $\vec{r}_0$ и ρ из начальных условий $\vec{r}(0)$ и $v(0)$:

$$\begin{aligned} \vec{v}(0) &= \vec{\omega}_c \times \vec{\rho} \quad (18) \\ \rho &= v(0)/\omega_c \quad (19) \end{aligned}$$

Вектор $\vec{r}_0$ можно найти из его определения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0) - \vec{\rho}(0) \quad (20)$$

тут $\vec{r}(0)$ – положение мячика в момент толчка, $\vec{\rho}(0)$ рассчитывается из (19).

Можно заметить, что если начальная скорость $\vec{v}(0) = 0$, то есть толчка не произошло, то $\rho = 0$, значит мячик будет оставаться в том же месте.

Вектор $\vec{r}_0$ – центра орбиты можно представить в координатном виде:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x(0) - (v_x(0)/\omega_c) \\ y(0) - (v_y(0)/\omega_c) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

2.3 Учет силы тяжести при наклоне диска

Если диск наклонить, то можно наблюдать смещение центра окружности в направлении, перпендикулярном наклону. Это кажется нелогичным, потому что некомпенсированная часть силы тяжести направлена в другую сторону. Давайте попробуем объяснить этот эффект.

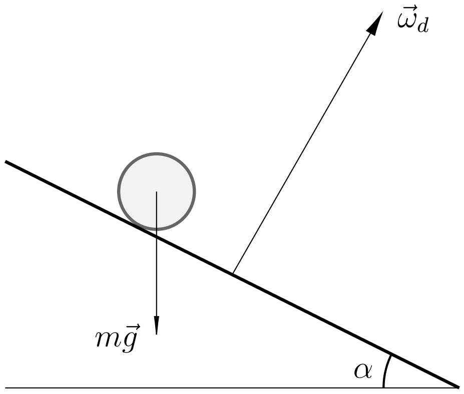

Рис. 3: Диск под наклоном

Этот случай эквивалентен тому, что к уравнению (8) добавляется постоянная сила $\vec{F}_0$:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_0 \tag{22}$$

Повторяя шаги первого вывода получаем:

$$I\dot{\vec{\omega}}_b = \vec{R} \times m \cdot \ddot{\vec{r}} + \vec{R} \times \vec{F}_0 \tag{23}$$

$$(R^2/I) \cdot m \cdot \ddot{\vec{r}} - (R^2/I)\vec{F}_0 = \vec{\omega}_d \times \dot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}} \tag{24}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{\omega}_d \times \dot{\vec{r}} + (R^2/I)\vec{F}_0}{(R^2/I) \cdot m + 1} \tag{25}$$

Решением этого уравнения будет:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} + \vec{v}_d \cdot t \tag{26}$$

где $\vec{v}_d$ – постоянная скорость смещения. Посчитаем производные и поставим в выражение (24).

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}_c \times \vec{\rho} + \vec{v}_d \tag{27}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -{\omega_c}^2\vec{\rho} \tag{28}$$

$$(R^2/I) \cdot m \cdot (-\omega_c^2\vec{\rho}) - (R^2/I)\vec{F}_0 = \vec{\omega}_d \times (\vec{\omega}_c \times \vec{\rho} + \vec{v}_d) + \omega_c^2\vec{\rho} \tag{29}$$

$$-(R^2/I)\vec{F}_0 = \vec{\omega}_d \times (\vec{\omega}_c \times \vec{\rho}) + \vec{\omega}_d \times \vec{v}_d + \omega_c^2 \vec{\rho} \cdot ((R^2/I) \cdot m + 1) \tag{30}$$

Вспомним уравнение (16): оно справедливо и для этого случая. Тогда первое и третье слагаемые сокращаются, окончательно силу можно найти по формуле:

$$\vec{F}_0 = -\frac{I}{R^2}(\vec{\omega}_d \times \vec{v}_d) \tag{31}$$

Это означает, что вектор скорости смещения $\vec{v}_d$ перпендикулярен дополнительной силе $\vec{F}_0$

Численно скорость v_d можно найти по формуле:

$$v_d = \frac{F_0 R^2}{I\omega_d} \tag{32}$$

3 Экспериментальная установка и измерения

Так как быстро вращающийся стол купить сложно, да и бюджет «лаборатории» ограничен, пришлось придумывать свое решение. В качестве основания для установки будет маленький вентилятор, питающийся от USB кабеля. В нем обычный электромоторчик, который мы прикрепим к диску из фанеры диаметром 33.8 cm и толщиной 6 mm. Кроме этого (и скотча) больше ничего не нужно, однако для нашей установки был использован еще один диск меньшего диаметра для большей стабильности системы.

3.1 Калибровка и балансировка

В этой работе очень важно иметь хорошо сбалансированную установку, так как малейшие вибрации и неровности могут создавать помехи эксперименту. Идеально в итоге установку сбалансировать не удалось, однако желаемый результат (учитывая ограниченный бюджет и силы) удалось достичь.

3.2 Измерения

В процессе работы нам удалось воспроизвести все феномены, изложенные ранее, а именно:

- Отсутствие движения при разгоне до скорости стола

- Круговые орбиты при некотором начальном толчке

- Движение, перпендикулярное дополнительной силе при наклоне стола

Далее, с помощью камеры телефона, было получено искомое соотношение 2:5 оборотам для мячика для настольного тенниса, что соответствует теории. Для однородных мячиков соотношение оказалось получить труднее, так как купленные мячики имели очень высокое сцепление с поверхностью, что иногда приводило к разрушению установки.

Также было экспериментально установлено, что радиус орбиты остается неизменным при одинаковых толчках. К сожалению точного метода измерения начальной скорости толчка у нас нет.

4 Выводы

4.1 Применимость работы и дальнейшее изучение

Этот эксперимент можно использовать как интересную физическую демонстрацию и, возможно, лабораторную работу по измерению момента инерции шара/сферы. Похожие установки стоят в некоторых физических музеях.

Кроме того, задача о вращающемся столе и мячике является основой для очень интересной статьи [2], которая посвящена исследованию динамики движения мячика, учитывая проскальзывание.

Еще одна статья от *Klaus Weltner* – [3]. В ней автор показывает способ измерения коэффициента трения качения с помощью такой установки, что может быть очень полезно в повседневной жизни.

Задача о мячике на вращающейся плоскости в том числе может быть расширена до любых тел вращения (дисков, цилиндров, и т.д.). Там эффекты бывают еще более интересные и неожиданные, чем тут. В статье [2] разобран как раз такой, обобщенный случай.

В статье [4] приводятся похожие выкладки с моей работой и статьей [1], в ней еще рассматривается проскальзывание мячика, а также возможность изменения угловой скорости стола со временем. Авторы работы приводят интересные задачи для читателя и представляют диск, каждая часть которого может вращаться с разной скоростью.

В статье [5] приводится энергетический способ получения и решения уравнения движения.

4.2 Выводы

В той или иной степени, нам удалось достичь всех поставленных целей. Все желаемые наблюдения были проведены, в том числе отношение угловых скоростей 2:5. В процессе выполнения эксперимента возникли сложности с балансировкой установки, что во многих случаях приводит к нестабильным орбитам, и мячик улетает слишком быстро.

Список литературы

[1] Klaus Weltner (1979) *Stable circular orbits of freely moving balls on rotating discs*, Am. J. Phys, University of Frankfurt.

[2] Kyeong Min Kim, Donggeon Oh, Junghwan Lee, Young-Gui Yoon, Chan-Oung Park (2018), *Dynamics of Cylindrical and Spherical Objects on a Turntable.* ffhal-01761333f

[3] Klaus Weltner (1987), *Central drift of freely moving balls on rotating disks: A new method to measure coefficients of rolling friction*, Am. J. Phys, University of Frankfurt.

[4] Gersten, Joel & Soodak, Harry & Tiersten, Martin. (1992). *Ball moving on stationary or rotating horizontal surface.* Am. J. Phys, 60. 43-47. 10.1119/1.17041.

[5] Warren Weckesser (1997) *A ball rolling on a freely spinning turntable*, Am. J. Phys, 65, Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, New York