МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет обшей и прикладной физики

Первое задание по математическому анализу

Автор:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.

Долгопрудный, 2024

Задача 1 (T14). *Найдите вторые частные производные функции в данной точке (0,0,0)*

$$f(x,y,z) = (1+x)^{\alpha}(1+y)^{\beta}(1+z^{\gamma})$$

Решение

$$\ln f = \alpha \ln(1+x) + \beta \ln(1+y) + \ln(1+z^{\gamma})$$

$$d\ln f = \frac{\alpha dx}{1+x} + \frac{\beta dy}{1+y} + \frac{\gamma z^{\gamma-1dz}}{1+z^{\gamma}}$$

$$d\ln f = \frac{df}{f} \to df(0,0,0) = f(0,0,0)(\alpha dx + \beta dy)$$

$$df(0,0,0) = \alpha dx + \beta dy \tag{1}$$

$$d^2 f = d(df) \quad d^2 f = d(f d\ln f)$$

$$d^2 f(x,y,z) = df(x,y,z) \otimes \frac{df(x,y,z)}{f(x,y,z)} + f(x,y,z) d^2 \ln f(x,y,z)$$

$$\frac{df(0,0,0)\otimes df(0,0,0)}{f(0,0,0)} = (\alpha dx + \beta dy)^2 = \alpha^2 dx \otimes dx + 2\alpha\beta dx \otimes dy + \beta^2 dy \otimes dy$$

$$f d^2 \ln f(0,0,0) = 1 \cdot d\left(\frac{\alpha dx}{1+x} + \frac{\beta dy}{1+y} + \frac{\gamma z^{\gamma-1} dz}{1+z^{\gamma}}\right)$$

$$f d^2 \ln f(0,0,0) = -\frac{\alpha dx^2}{(1+x)^2} - \frac{\beta dy^2}{(1+y)^2} + \frac{\gamma(\gamma-1) z^{\gamma-1}[z + z^{\gamma+1} - z \cdot \gamma z^{\gamma-1}] dz^2}{(1+z^{\gamma})^2}$$

Итого

$$d^2 f(0,0,0) = \alpha^2 dx^2 + 2\alpha\beta dx dy + \beta^2 dy^2 - \alpha dx^2 - \beta dy^2$$

Задача 2 (T15a). *Найдите вторые частные производные в точке (1,1) функции $f(x,y)$ заданной неявно соотношением*

$$ef = e^{x+y+f}$$

Решение

$$\begin{aligned} edf =& \quad e^{x+y+f}(dx + dy + df) \\ edf - efdf =& \quad ef(dx + dy) \\ df =& \quad (1-f)^{-1} f (dx + dy) \\ d^2 f =& \quad (1-f)^{-2}(df dx + df dy + f dx^2 + f dy^2)(1-f) + (f(dx+dy)df) \end{aligned}$$

$$d^2f = (1-f)^{-2}((fdx^2 + fdxdy + fdx^2 + fdy^2) + \\ +(1-f)^{-1}(f^2dx^2 + 2f^2dxdy + f^2dy^2))$$

Найдем $f(1,1)$:

$$\begin{aligned} f &= e^{1+f} \\ \ln f &= 1 + f \ (??) \end{aligned}$$

Задача 3 (Т15б)**.** *Найдите вторые частные производные в точке* $(1,1)$ *функции* $f(x,y)$ *заданной неявно соотношением*

$$f^3 - 3xyf - 2 = 0$$

Решение

$$3f^2df - 3yfdx - 3xfdy - 3xydf = 0$$

$$df(3f^2 - 3xy) = 3yfdx + 3xfdy$$

$$df = \frac{yfdx + xfdy}{f^2 - xy} = \frac{2}{3}(dx + dy)$$

$$d^2f = \frac{1}{(f^2-xy)^2}((fdxdy + ydxdf + fdxdy + xdydf)(f^2 - xy) - \\ -(yfdx + xfdy)(2fdf - xdy - ydx))$$

$$d^2f(1,1) = \frac{1}{9}(3(4dxdy + df(dx+dy)) - 2(dx+dy)(4df - dx - dy))$$

$$d^2f(1,1) = \frac{12dxdy - \frac{4}{3}(dx+dy)^2}{9} = \frac{-4}{27}dx^2 - \frac{4}{27}dy^2 + \frac{28}{27}dxdy$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4}{27} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-4}{27} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{14}{27} \tag{4}$$

Задача 4 (Т16)**.** *Найдите частные производные всех порядков функции* $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$

Решение Положим $t = x + y + z$, тогда $f(t) = \ln(t)$

$$d^n f = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n} dt^n \tag{5}$$

В свою очередь

$$dt^n = (dx + dy + dz)^n = \sum_{k_1, k_2, k_3} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} dx^{k_1} dy^{k_2} dz^{k_3} \tag{6}$$

Чтобы найти некоторую частную производную необходимо выбрать k_1, k_2, k_3, такие что $k_1 + k_2 + k_3 = n$, и она будет равна

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n} \tag{7}$$