

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет общей и прикладной физики

**Отчёт по лабораторной работе 1.2.2 «Проверка  
закона вращательного движения на примере  
крестообразного маятника Обербека»**

Выполнил:  
Студент гр. Б02-304  
Головинов. Г.А.

Долгопрудный, 2023

## 1 Аннотация

**Цель работы:** Проверить справедливость основного уравнения вращательного движения тела вокруг закреплённой оси, получив зависимость углового ускорения от момента инерции тела и момента сил, прикладываемых к системе тел, проанализировать влияние сил.

**Используемые инструменты:** Крестообразный маятник Обербека (Рис. 1), весы, штангенциркуль, компьютер с программой «Kinetic», грузы различной массы.

## 2 Основные теоретические сведения

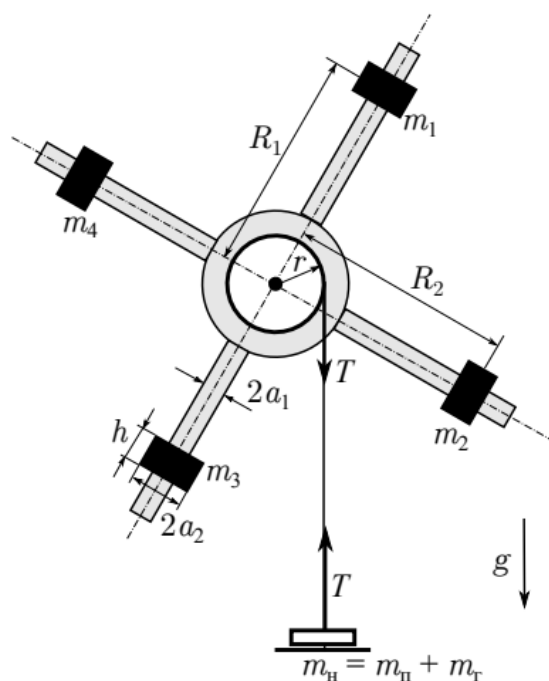


Рис. 1: Крестообразный маятник Обербека

Основное уравнение вращательного движения:

$$I\varepsilon = M \quad (1)$$

где  $\varepsilon = \beta = \ddot{\varphi}$  – угловое ускорение тела,  $M$  – суммарный момент всех сил, действующих на тело,  $I$  – момент инерции тела

### Некоторые необходимые в работе уравнения

Момент силы натяжения нити:  $M_T = rT$ , где  $r$  – радиус шкива.

Сила  $T$  выражается через  $m_n \ddot{y} = m_n g - T$ , где  $m_n = m_n + m_r$  – масса платформы с грузом

Получим:

$$M_T = m_n r (g - \beta r) \quad (2)$$

Учитывая действие силы трения на маятник:

$$(I + m_n r^2) \beta = m_n g r - M_{тр} \quad (3)$$

При проведении эксперимента получилось, что массы подвеса достаточно для медленного и равномерного вращения маятника. Это говорит, что  $M_0 < m_n g r = 0,001545 \text{ Н}\cdot\text{м}$

## 3 Результаты измерений и обработка данных

**Расчет момента инерции  $I$  маятника через график  $\beta_0(M_T)$ :** Проводим 8 измерений с грузом  $m = 100 \text{ г}$ , чтобы получить случайную погрешность измерений  $\beta_0$ :

Таблица 1: Результаты измерения  $k$  и  $\beta_0$

$k, \text{Гц}$	$\sigma_k$	$\beta_0, \text{рад/с}^2$	$\sigma_{\beta_0}$
-0,009043	0,00062	0,6165	0,00088
-0,008601	0,00094	0,6163	0,00130
-0,00779	0,00096	0,6104	0,00140
-0,007661	0,00051	0,6111	0,00053
-0,009521	0,00051	0,6219	0,00044
-0,008676	0,00073	0,6148	0,00082

По этим результатам по методу  $\chi^2$  получим:

$$\sigma_{\beta_0}^{rnd} = 0,000282 \text{ рад/с}^2 \quad (4)$$

$\beta_0$  возьмем как среднее:

$$\langle \beta_0 \rangle = 0,615166 \text{ рад/с}^2 \quad (5)$$

Таблица 2: Результаты  $M_T$  по формуле (2)

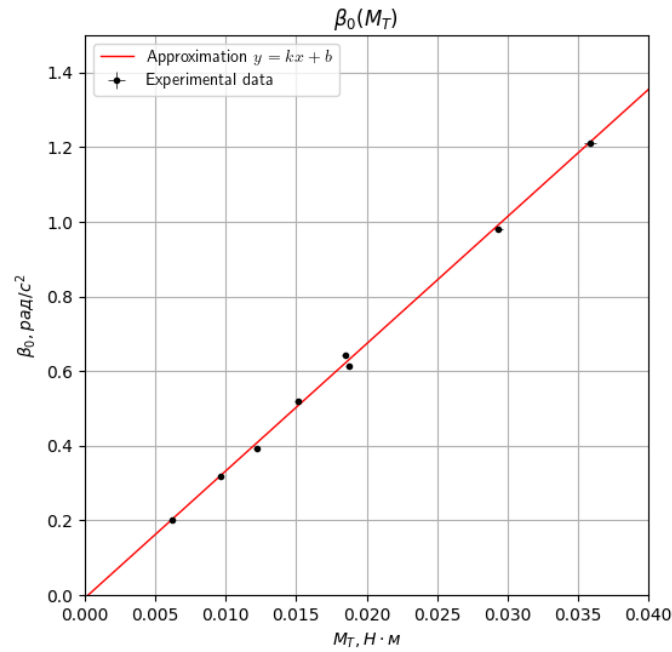
$m$ , г	$r$ , см	$k$ , Гц	$\sigma_k$ , Гц	$\beta_0$ , рад/с <sup>2</sup>	$\sigma_{\beta_0}$	$M_T$ , Н·м	$\sigma_M$ Н·м
71	1,75	-0,00696	0,00046	0,39390	0,00042	0,012180	8,67E-5
109	1,75	-0,08549	0,00026	0,61517	0,00028	0,018692	8,78E-5
171	1,75	-0,01135	0,00071	0,98040	0,00110	0,029305	9,07E-5
209	1,75	-0,01227	0,00064	1,21100	0,00100	0,035803	9,31E-5
209	0,9	-0,01156	0,00067	0,64380	0,00130	0,018442	4,80E-5
171	0,9	-0,01052	0,00068	0,51980	0,00120	0,015090	4,67E-5
109	0,9	-0,00801	0,00065	0,31900	0,00100	0,009621	4,52E-5
70	0,9	-0,00742	0,00055	0,20220	0,00065	0,006179	4,46E-5

Погрешность  $M_T$  вычислять будем по формуле:

$$\sigma_M = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2} \quad (6)$$

Погрешность измерения штангенциркуля  $\sigma_r$  не будем учитывать, так как она много меньше измеренного радиуса шкива  $r$ ,  $\sigma_m=0,5$  г,  $\sigma_g = 0,01$ .

Рис. 2: График зависимости  $\beta_0(M_T)$



```

1  import matplotlib.pyplot as plt
2  import numpy as np
3  from scipy.optimize import curve_fit
4  plt.figure(figsize=(6, 6))
5  plt.ylim(0,1.5)
6  plt.xlim(0,0.04)
7  plt.rcParams['text.usetex'] = True
8  b0 = [0.3939, 0.615166, 0.9804, 1.211, 0.6438, 0.5198,
9        0.319, 0.2022]
10 mt = [0.012189, 0.018713, 0.029356, 0.03588, 0.018453,
11        0.015098, 0.009624, 0.00618]
12 sigmab0 = [0.00042, 0.000282, 0.0011, 0.001, 0.0013,
13             0.0012, 0.001, 0.00065]
14 sigmam = [0.0002, 0.0002, 0.0003, 0.0004, 0.0002, 0.0002,
15            0.0001, 0.0001]
16
17 f = lambda k,x,b: k*x+b
18 popt,pcov = curve_fit(f,mt,b0,sigma=sigmam)
19 k,b = popt
20 print(1/k,b)
21 pp = []
22 p1 = plt.errorbar(mt,b0,sigmam,sigmab0,fmt='.k',elinewidth
23                  =0.5,label=r"Experimental data")
24 z = np.poly1d (np.polyfit(mt,b0,1))
25 x=np.linspace(0,0.04,100)
26 plt.plot(x,f(k,x,b),'r-',linewidth=1,label=r"Approximation
27          $y=kx+b$")
28 print(-b/k)
29
30 plt.title(r'$\beta_0(M_T)$')
31 plt.legend(loc='upper left')
32 plt.grid()
33 plt.show()

```

Листинг 1: Код построения графика и аппроксимации по методу  $\chi^2$

Видно, что экспериментальные точки довольно хорошо ложатся на прямую, что подтверждает справедливость основного уравнения вращательного движения.

При аппроксимации через метод  $\chi^2$  получаем прямую  $y = kx + b$ , где  $k = 34,1325$ ,  $b = -0,0086$ . Все экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую, что соответствует теории.

Пересечение с осью абсцисс при  $M_0 = 0,00023792$  Н·м, что действительно много меньше  $m_{\text{ц}}gr$ , значит полученные данные соотносятся с наблюдением.

Определим момент инерции с помощью коэффициента наклона  $k = I^{-1} \Rightarrow I = 0,029357$  кг·м<sup>2</sup>, а погрешность составила  $\sigma_I = 0,017782$

$$I = (0,029357 \pm 0,000239) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешность составила около 1% (почему так – обсудим в выводах)

**Расчет момента инерции  $I$  вторым способом** Зная массы грузов, их расстояния до оси вращения, их внешний и внутренний радиус мы можем рассчитать момент инерции системы маятник-грузы следующим образом:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2) \quad (7)$$

где  $I_0$  – момент инерции маятника без грузов, а

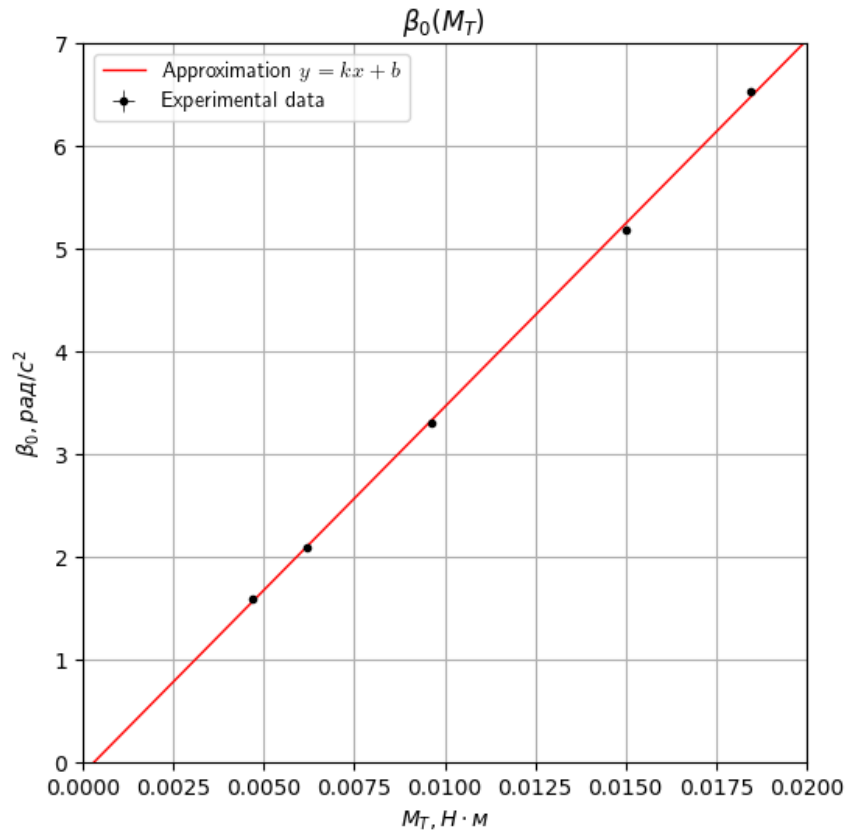
$$I_i = \frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) \quad (8)$$

Найдем  $I_0$  по аналогии с маятником с грузами:

Таблица 3: Результаты измерения для маятника без грузов

$m$ , г	$r$ , см	$\beta_0$ , рад/с <sup>2</sup>	$\sigma_{\beta_0}$ , рад/с <sup>2</sup>	$M_T$ , Н·м	$\sigma_M$ , Н·м
53	0,9	1,592	0,0059	0,00467937	4,44E-05
70	0,9	2,092	0,0100	0,00618030	4,46E-05
109	0,9	3,298	0,0093	0,00962361	4,52E-05
170	0,9	5,187	0,0120	0,01500930	4,67E-05
209	0,9	6,533	0,0200	0,01845261	4,80E-05

Рис. 3: Зависимость  $\beta_0(M_T)$  для маятника без грузов



Получим

$$I_0 = (0,002801 \pm 0,000148) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Почему получилась такая погрешность – обсудим в выводах

$I_i$  вычисляем по формуле (8) и получаем

$$\sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2) = 0,0239 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешность в данном случае вычисляем по формуле:

$$\sigma_{\Sigma I} = I \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma R}{R}\right)^2} \quad (9)$$

Погрешностью измерения  $h, a_1, a_2$  пренебрегаем, так как они были измерены с помощью штангенциркуля, а  $\sigma_R$  примем за 1 см. Итого получаем

$$I_i = (0,0239 \pm 0,0024) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

А полный момент инерции получился

$$I = (0,0267 \pm 0,0024) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Получили значение момента инерции маятника двумя способами: с помощью графика  $\beta_0(M_T)$  и с помощью теоретических соотношений (уравнения (7) и (8)). Они очень хорошо соотносятся (и даже почти попадают в интервал  $\pm 1\sigma$ )

### **3.1 Интересный колебательный процесс, который мы наблюдали во время выполнения работы**

Изначально (несмотря на очень хорошую балансировку) нам не удалось получить хорошие данные при измерении подъема и спуска груза, поэтому мы перешли в режим измерения спуска. Это улучшило ситуацию, однако в примерно половине случаев результаты имели явные колебания, которые не давали возможности доверять полученным значениям. Была выдвинута гипотеза – на результаты влиял способ намотки нити (по часовой или против), что не имело никакого физического смысла, однако оказалось правдой. Мы измерили самые «красивые» колебания, чтобы потом их нанести на график и вот что из этого получилось:



Рис. 4: Результаты измерений при «неправильной» намотке нити

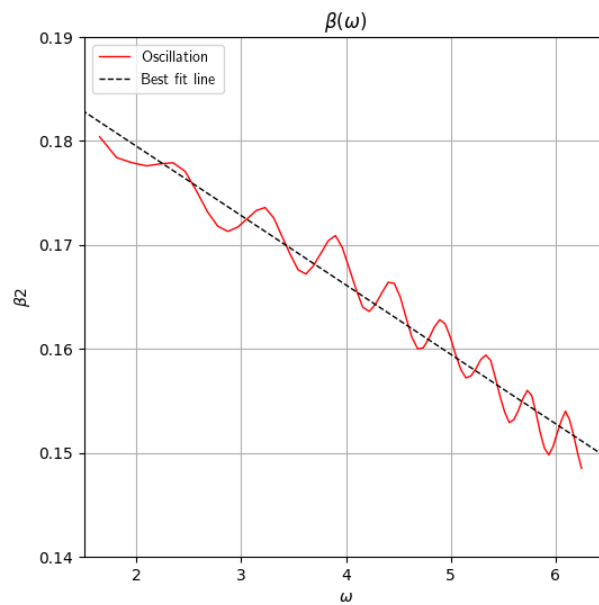
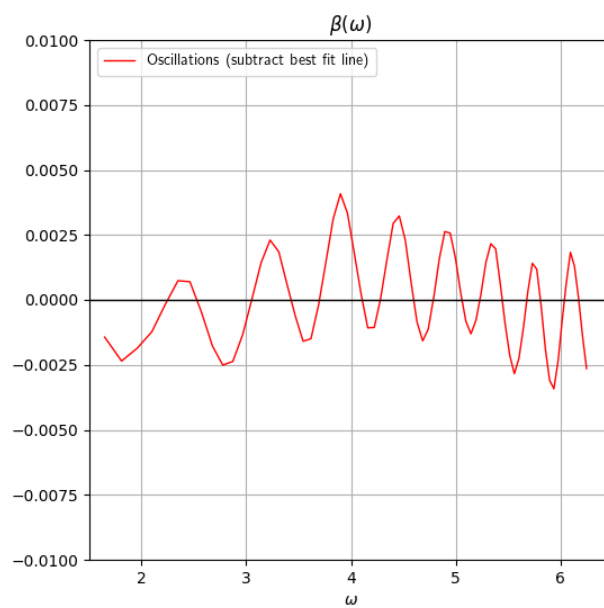


Рис. 5: Результаты измерений при «неправильной» намотке нити (с вычитом прямой по МНК)



К сожалению, в установленное время не было возможности должным образом воспроизвести этот эффект после пересборки экспериментальной установки, поэтому эта часть работы требует продолжения и заключения.

## 4 Обсуждение результатов и выводы

В ходе работы мы проверили справедливость основного уравнения вращательного движения (рис. 2)

Также мы измерили момент инерции крестообразного маятника Обербека двумя способами: с помощью теоретических соотношений (уравнения (7)-(8)) и с помощью углового коэффициента зависимости  $\beta_0(M_T)$

Полученные этими двумя методами значения очень хорошо соотносятся и почти попадают в пределы  $\pm 1\sigma$  друг от друга (относительная погрешность  $\varepsilon = 9,05\%$ ). Можно сказать, что погрешность измерений была недооценена, поэтому получилось, что данные расходятся друг от друга более чем на  $\pm 1\sigma$