МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет обшей и прикладной физики

Отчёт по лабораторной работе 1.2.3 «Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса»

Выполнил:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.

Долгопрудный, 2023

1 Аннотация

Цель работы: Измерение момента инерции некоторых твёрдых тел, сравнение полученных данных с теоретическими, а также проверка справедливости теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Используемые инструменты: Трифилярный подвес, секундомер, счётчик числа колебаний, набор твёрдых тел.

2 Основные теоретические сведения

Установка, используемая в работе называется трифилярным подвесом и представляет собой массивный диск, подвешенный на трех нитях к другому, меньшему диску, на большой высоте. Такая установка может совершать вращательные колебания небольшой амплитуды.

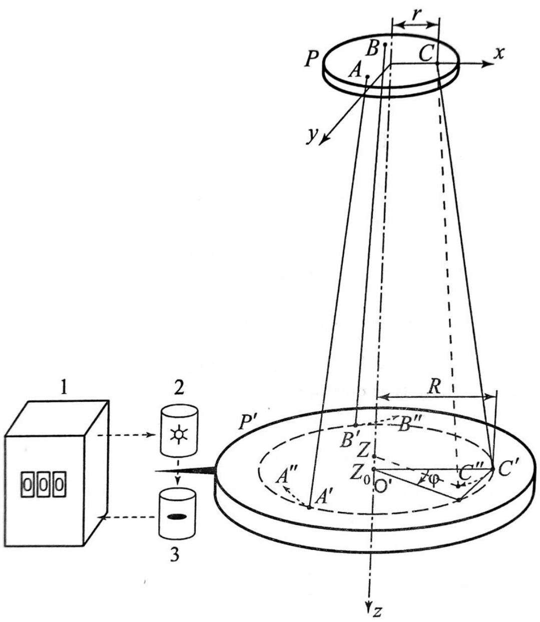

Рис. 1: Трифилярный подвес

На рисунке 1,2,3 - установка с секундомером и счётчиком числа колебаний.

Момент инерции Мерой инертности тела при вращательном движении вокруг некоторой оси является момент инерции, который по определению равен:

$$I = \int r^2 dm \tag{1}$$

Где r - расстояние части тела массой dm до оси вращения

То есть для некоторых тел известной массы и точных размеров мы можем посчитать момент инерции относительно некоторой оси. Например диск и ось, проходящая перпендикулярно ему через его центр. Однако если требуется определить момент инерции тела более сложного (в геометрическом смысле слова), то тут потребуется использовать теорему Гюйгенса-Штейнера.

Теорема Гюйгенса-Штейнера Эта теорема гласит, что для любого твёрдого тела справедливо соотношение:

$$I_A = I_C + mh^2 \tag{2}$$

где I_A - момент инерции относительно некоторой произвольной оси параллельной оси, проходящей через центр масс этого тела, I_C - момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс, h - расстояние между этими осями, m - масса тела.

С помощью этого соотношения можно найти моменты инерции более сложных комбинаций тело-ось. Например: сегмент диска и ось, проходящая через его центр масс или шар и ось, проходящая к нему по касательной.

Теорема достаточно легко доказывается математически, однако в этой работе мы проверим ее справедливость экспериментально.

Аддитивность моментов инерции Следствием из определения момента инерции очевидно является его аддитивность. То есть если мы возьмем систему из нескольких тел и рассмотрим ее вращение относительно некоторой оси, то момент инерции системы относительно этой оси будет равен алгебраической сумме моментов инерции каждого тела относительно этой оси по отдельности.

Соотношения необходимые в работе

$$I = kmT^2 \tag{3}$$

где m - масса, T - период, k - коэффициент, определяемый:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \tag{4}$$

3 Результаты измерений и обработка данных

Перед непосредственным выполнением работы требуется определить насколько сильно затухают колебания нашей установки, найти наиболее оптимальную амплитуду колебаний, а также определить момент инерции самой платформы.

Таблица 1: Полученные значения периода колебаний для каждой амплитуды

$A°$	N	t, с	T, с
30	5	22.26	4.4520
20	5	22.11	4.4220
15	5	22.07	4.4140
10	5	22.04	4.4080
5	5	22.00	4.4000

Полученные периоды почти не различаются, однако заметно, что наилучшие показания наблюдаются при амплитуде около 10-15 градусов, так как при низких амплитудах сильнее влияет затухание, а при высоких амплитудах заметны эффекты раскачивания платформы. Рабочим диапазоном определим 5-15 градусов.

На этом этапе можно было просто посчитать один раз случайную погрешность измерений и потом ее использовать для каждого последующего, однако было решено каждый раз делать по 5 измерений и определять погрешность каждый раз заново. Учитывая точность секундомера это не является обязательным пунктом.

Важная оговорка Далее момент инерции – значит момент инерции тела относительно оси симметрии (так как мы располагали тела в центре платформы)

Погрешности Погрешность коэффициента k рассчитаем по следующей формуле:

$$\sigma_k = k\sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} = 0.00000716 \tag{5}$$

Единицы в СИ.

Погрешность периода для каждого измерения будем считать как

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{4}\sum(T - \bar{T})^2 \tag{6}$$

Погрешность момента инерции будем считать

$$\sigma_I = I\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \tag{7}$$

Момент инерции пустой платформы Платформа представляет собой диск. Его масса была нам известна заранее и составила $m = 1026,4 \pm 0,5$ г. Для диска момент инерции $I = \frac{1}{2}mR^2$

Таким образом теоретический момент инерции составил 0.008095 кг·м^2, а экспериментальный (0.008019 ± 0.000161) кг·м^2 ($\varepsilon = 2\%$), расхождение с теоретическим значением менее 1%, попадает в интервал $\pm 1\sigma$.

Кольцо (полый цилиндр) Первым исследуемым телом стало кольцо (тонкостенный цилиндр), его момент инерции $I = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$

Для кольца теоретическое значение момента инерции равно 0.004282 кг·м^2. Экспериментально (вычитая платформу) получим (0.004398 ± 0.000223) кг·м^2 ($\varepsilon = 1.7\%$), расхождение с теоретическим значением 2.6%, что не попадает в интервал $\pm 1\sigma$

Диск

Вторым исследуемым телом стал диск, его момент инерции $I = \frac{1}{2}mR^2$

Для диска теоретическое значение момента инерции 0.002111 кг·м^2. Экспериментально (вычитая платформу) получим (0.002071 ± 0.000182) кг·м^2 ($\varepsilon = 1.7\%$), расхождение с теоретическим 1.9%, что чуть-чуть не попадает в интервал $\pm 1\sigma$

Кольцо и Диск Вместе эти два тела должны иметь момент инерции 0.006393 кг·м^2. Экспериментально получим (0.006482 ± 0.000268) кг·м^2 ($\varepsilon = 1.8\%$), расхождение с теоретическим значением менее 1.4%, что попадает в интервал $\pm 1\sigma$

Аддитивность моментов инерции В инструкции к работе неясно сказано как выполнять этот пункт, поэтому был выбран следующий способ:

Не вычитая платформы (мы как бы не знаем про аддитивность) в каждом из измерений диска и кольца по отдельности мы их сложим, если аддитивность выполняется, то мы получим I кольца, диска и $2I$ платформы. Если мы из этого вычтем значение, полученное для кольца и диска вместе, то должны получить I платформы.

Таким способом мы получим 0.008081 ± 0.000124 кг·м^2 (погрешность по χ^2) $\varepsilon = 1.5\%$. Расхождение с теоретическим значением I пустой платформы 0.167%.

Теорема Гюйгенса Штейнера Нам были предоставлены две половины диска (точнее сказать цилиндра), которые мы можем раздвигать на расстояние h от центра платформы (не смещая при этом центр масс системы). Тогда согласно теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции системы будет равен $I = I_{platform} + I_{disk} + mh^2$, где m - масса диска, I_disk - момент инерции диска относительно оси, проходящей перпендикулярно ему через его центр масс.

Погрешность периода возьмем по χ^2 из предыдущих пунктов (про моменты инерции других тел)

Если мы построим зависимость $I(h^2)$, то должны получить прямую $y = ax + b$, где a - масса диска, а b - момент инерции платформы и диска.

Аппроксимируя по методу χ^2 получим $a = (1.53895 \pm 0.02455)$ кг, $b = (0.009701 \pm 0.000045)$ кг·м^2

Масса диска определена с погрешностью $\varepsilon = 1.5\%$, расхождение с известным значением меньше 0.85%, что попадает в интервал $\pm 1\sigma$.

Тогда момент инерции диска $I = (0.001606 \pm 0.000045)$ кг·м^2, а экспериментально (при $h = 0$) $I = (0.001544 \pm 0.000172)$ кг·м^2, относительная разница 3.8%. Итоговый момент инерции диска $I = (0.001575 \pm 0.000044)$ кг·м^2.

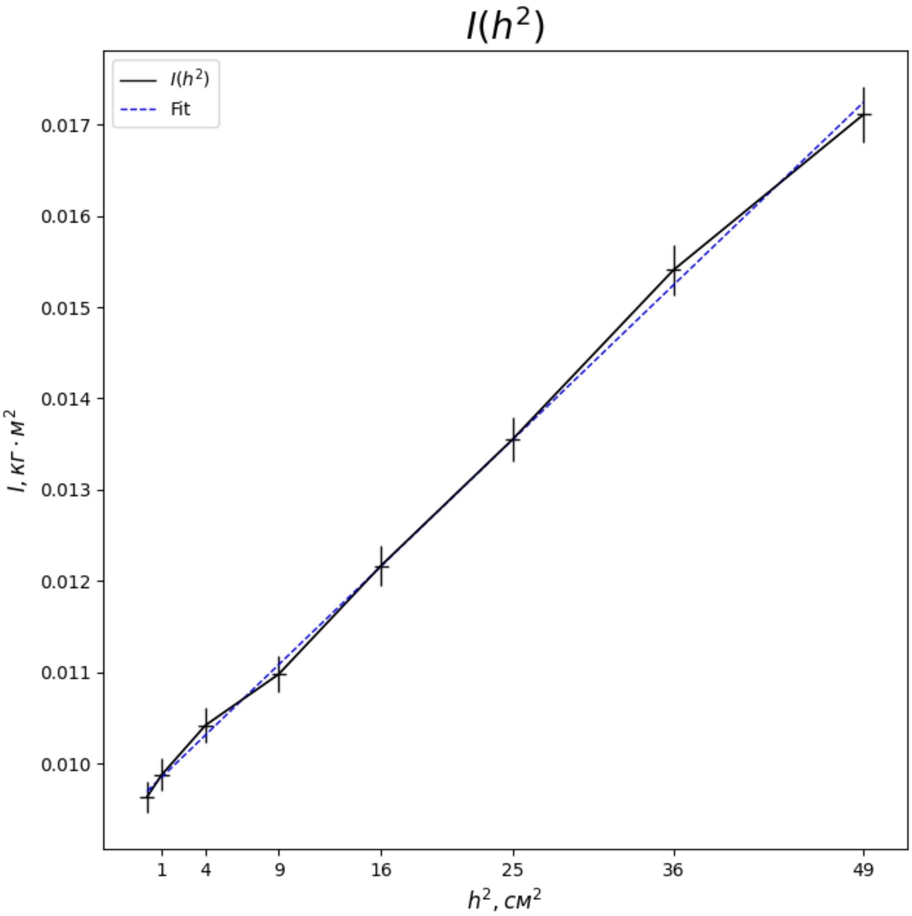

Рис. 2: Зависимость момента инерции от квадрата смещения от центра платформы

4 Обсуждение результатов и выводы

В ходе работы мы измерили экспериментально и теоретически моменты инерции различных твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса.

Практически для всех тел теоретические значения попали в интервал $\pm 1\sigma$ от экспериментальных, что говорит об достаточно хорошей оценке систематической погрешности, однако по традиции, в некоторых случаях, она была недооценена.

Кроме того, в ходе работы мы проверили справедливость аддитивности моментов инерции нескольких твёрдых тел.

Мы проверили справедливость теоремы Гюйгенса-Штейнера с помощью построения графика $I(h^2)$ для двух половинок диска, смещенного на некоторое расстояние h от центра платформы. Масса диска и его момент инерции были определены с достаточно большой точностью (масса менее 0.85%, момент инерции менее 3.8%)