

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет общей и прикладной физики

Первое задание по математическому анализу

Автор:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.



Долгопрудный, 2024

Задача 1 (T14). Найдите вторые частные производные функции в данной точке $(0, 0, 0)$

$$f(x, y, z) = (1 + x)^\alpha (1 + y)^\beta (1 + z^\gamma)$$

Решение

$$\ln f = \alpha \ln(1 + x) + \beta \ln(1 + y) + \ln(1 + z^\gamma)$$

$$d \ln f = \frac{\alpha dx}{1 + x} + \frac{\beta dy}{1 + y} + \frac{\gamma z^{\gamma-1} dz}{1 + z^\gamma}$$

$$d \ln f = \frac{df}{f} \rightarrow df(0, 0, 0) = f(0, 0, 0)(\alpha dx + \beta dy)$$

$$df(0, 0, 0) = \alpha dx + \beta dy \quad (1)$$

$$d^2 f = d(df) \quad d^2 f = d(f d \ln f)$$

$$d^2 f(x, y, z) = df(x, y, z) \otimes \frac{df(x, y, z)}{f(x, y, z)} + f(x, y, z) d^2 \ln f(x, y, z)$$

$$\frac{df(0, 0, 0) \otimes df(0, 0, 0)}{f(0, 0, 0)} = (\alpha dx + \beta dy)^2 = \alpha^2 dx \otimes dx + 2\alpha\beta dx \otimes dy + \beta^2 dy \otimes dy$$

$$f d^2 \ln f(0, 0, 0) = 1 \cdot d \left(\frac{\alpha dx}{1 + x} + \frac{\beta dy}{1 + y} + \frac{\gamma z^{\gamma-1} dz}{1 + z^\gamma} \right)$$

$$f d^2 \ln f(0, 0, 0) = -\frac{\alpha dx^2}{(1 + x)^2} - \frac{\beta dy^2}{(1 + y)^2} + \frac{\gamma(\gamma - 1)z^{\gamma-1}[z + z^{\gamma+1} - z \cdot \gamma z^{\gamma-1}] dz^2}{(1 + z^\gamma)^2}$$

Итого

$$d^2 f(0, 0, 0) = \alpha^2 dx^2 + 2\alpha\beta dx dy + \beta^2 dy^2 - \alpha dx^2 - \beta dy^2$$

Задача 2 (T15a). Найдите вторые частные производные в точке $(1, 1)$ функции $f(x, y)$ заданной неявно соотношением

$$ef = e^{x+y+f}$$

Решение

$$\begin{aligned} edf &= e^{x+y+f}(dx + dy + df) \\ edf - efd &= ef(dx + dy) \\ df &= (1 - f)^{-1}f(dx + dy) \\ d^2 f &= (1 - f)^{-2}(df dx + df dy + f dx^2 + f dy^2)(1 - f) + (f(dx + dy)df) \end{aligned}$$

$$d^2 f = (1 - f)^{-2}((f dx^2 + f dx dy + f dx^2 + f dy^2) + \\ + (1 - f)^{-1}(f^2 dx^2 + 2f^2 dx dy + f^2 dy^2))$$

Найдем $f(1, 1)$:

$$f = e^{1+f} \\ \ln f = 1 + f \quad (??)$$

Задача 3 (T156). Найдите вторые частные производные в точке $(1, 1)$ функции $f(x, y)$ заданной неявно соотношением

$$f^3 - 3xyf - 2 = 0$$

Решение

$$3f^2 df - 3y f dx - 3x f dy - 3xy df = 0$$

$$df(3f^2 - 3xy) = 3y f dx + 3x f dy$$

$$df = \frac{3y f dx + 3x f dy}{3f^2 - 3xy} = \frac{2}{3}(dx + dy)$$

$$d^2 f = \frac{(6f dx dy + 3y dx df + 3x dy df)(3f^2 - 3xy)}{(3f^2 - 3xy)^2} - \\ - \frac{(3y f dx + 3x f dy)(6f df - 3y dx - 3x dy)}{(3f^2 - 3xy)^2}$$

$$d^2 f = \frac{(12 dx dy + 2 dx(dx + dy) + 2 dy(dx + dy)) \cdot 9}{9^2} - \\ - \frac{6(dx + dy)5(dx + dy)}{9^2}$$

$$d^2 f = \frac{144 dx dy + 18 dx^2 + 18 dy^2}{9^2} - \frac{30 dx^2 + 60 dx dy + 30 dy^2}{9^2}$$

$$d^2 f = \frac{1}{81}(84 dx dy - 12 dx^2 - 12 dy^2)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-12}{81} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-12}{81} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{42}{81} \quad (4)$$

Задача 4 (T16). Найдите частные производные всех порядков функции $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$

Решение Положим $t = x + y + z$, тогда $f(t) = \ln(t)$

$$d^n f = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n} dt^n \quad (5)$$

В свою очередь

$$dt^n = (dx + dy + dz)^n = \sum_{k_1, k_2, k_3} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} dx^{k_1} dy^{k_2} dz^{k_3} \quad (6)$$

Чтобы найти некоторую частную производную необходимо выбрать k_1, k_2, k_3 , такие что $k_1 + k_2 + k_3 = n$, и она будет равна

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n} \quad (7)$$