МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет обшей и прикладной физики

Первое задание по математическому анализу

Автор:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.

Долгопрудный, 2024

Задача 1 (T14). *Найдите вторые частные производные функции в данной точке*

$$f(x,y,z) = (1+x)^\alpha(1+y)^\beta(1+z)^\gamma$$

Решение

$$\begin{aligned}
df &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^\beta(1+z)^\gamma dx + \\
&+ \beta(1+y)^{\beta-1}(1+x)^\alpha(1+z)^\gamma dy + \\
&+ \gamma(1+z)^{\gamma-1}(1+x)^\alpha(1+y)^\beta dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2f &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}(1+y)^\beta(1+z)^\gamma dx\otimes dx & + \\
&+\alpha\beta(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^{\beta-1}(1+z)^\gamma dx\otimes dy & + \\
&+\alpha\gamma(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^\beta(1+z)^{\gamma-1}dx\otimes dz & + \\
&+\beta(\beta-1)(1+x)^\alpha(1+y)^{\beta-2}(1+z)^\gamma dy\otimes dy & + \\
&+\alpha\beta(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^{\beta-1}(1+z)^\gamma dx\otimes dy & + \\
&+\beta\gamma(1+x)^\alpha(1+y)^{\beta-1}(1+z)^{\gamma-1}dy\otimes dz & + \\
&+\gamma(\gamma-1)(1+x)^\alpha(1+y)^\beta(1+z)^{\gamma-2}dz\otimes dz & + \\
&+\alpha\gamma(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^\beta(1+z)^{\gamma-1}dx\otimes dz & + \\
&+\beta\gamma(1+x)^\alpha(1+y)^{\beta-1}(1+z)^{\gamma-1}dy\otimes dz & +
\end{aligned}$$

Задача 2 (T15a). *Найдите вторые частные производные в точке (1,1) функции $f(x,y)$ заданной неявно соотношением*

$$ef = e^{x+y+f}$$

Решение

$$\begin{aligned}
edf =& \quad e^{x+y+f}(dx+dy+df) \\
edf - efdf =& \quad ef(dx+dy) \\
df =& \quad (1-f)^{-1}f(dx+dy) \\
d^2f =& \quad (1-f)^{-2}(dfdx+dfdy+fdx^2+fdy^2)(1-f)+(f(dx+dy)df)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2f = (1-f)^{-2}((&fdx^2+fdxdy+fdx^2+fdy^2)+ \\
&+(1-f)^{-1}(f^2dx^2+2f^2dxdy+f^2dy^2))
\end{aligned}$$

Найдем $f(1,1)$:

$$\begin{aligned}
f &= e^{1+f} \\
\ln f &= 1+f \ (??)
\end{aligned}$$

Задача 3 (Т15б). *Найдите вторые частные производные в точке* $(1,1)$ *функции* $f(x,y)$ *заданной неявно соотношением*

$$f^3 - 3xyf - 2 = 0$$

Решение

$$3f^2 df - 3yf dx - 3xf dy - 3xy df = 0$$
$$df(3f^2 - 3xy) = 3yf dx + 3xf dy$$
$$df = \frac{3yf dx + 3xf dy}{3f^2 - 3xy} = \frac{2}{3}(dx + dy)$$

$$d^2 f = \frac{(6f dx dy + 3y dx df + 3x dy df)(3f^2 - 3xy)}{(3f^2 - 3xy)^2} -$$
$$- \frac{(3yf dx + 3xf dy)(6f df - 3y dx - 3x dy)}{(3f^2 - 3xy)^2}$$
$$d^2 f = \frac{(12 dx dy + 2dx(dx + dy) + 2dy(dx + dy)) \cdot 9}{9^2} -$$
$$- \frac{6(dx + dy)5(dx + dy)}{9^2}$$
$$d^2 f = \frac{144 dx dy + 18 dx^2 + 18 dy^2}{9^2} - \frac{30 dx^2 + 60 dx dy + 30 dy^2}{9^2}$$
$$d^2 f = \frac{1}{81}(84 dx dy - 12 dx^2 - 12 dy^2)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-12}{81} \tag{1}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-12}{81} \tag{2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{42}{81} \tag{3}$$

Задача 4 (Т16). *Найдите частные производные всех порядков функции* $f(x,y,z) = \ln(x + y + z)$

Решение Положим $t = x + y + z$, тогда $f(t) = \ln(t)$

$$d^n f = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n} dt^n \tag{4}$$

В свою очередь

$$dt^n = (dx + dy + dz)^n = \sum_{k_1,k_2,k_3} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} dx^{k_1} dy^{k_2} dz^{k_3} \tag{5}$$

Чтобы найти некоторую частную производную необходимо выбрать k_1, k_2, k_3, такие что $k_1 + k_2 + k_3 = n$, и она будет равна

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n} \tag{6}$$