

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Факультет общей и прикладной физики

**Отчёт по лабораторной работе 1.4.1 «Определение
ускорения свободного падения с помощью колебаний
физического маятника»**

Выполнил:
Студент гр. Б02-304
Головинов. Г.А.

Долгопрудный, 2023

1 Аннотация

Цель работы: проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и **определить ускорение свободного падения**

Используемые инструменты: Физический маятник (стержень длиной $l = 100$ см.) с возможностью изменения оси вращения, секундомер, весы.

2 Основные теоретические сведения

Физический маятник – твердое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешенным за одну из своих точек в поле силы тяжести. Ось качания (вращения) маятника можно изменять с помощью небольшой опорной призмы (см. рис. 1)

На рисунке показаны точки O – ось вращения маятника, C – центр масс стержня, a – расстояние между центром масс маятника и его осью вращения.

Измерять период колебаний маятника будем с помощью секундомера, отчитывая время, за которое происходит ровно 10 полных колебаний. Погрешность измерения с помощью секундомера примем за $\sigma_t = 0,3$ с, тогда для периода $\sigma'_t = 0,03$ с.

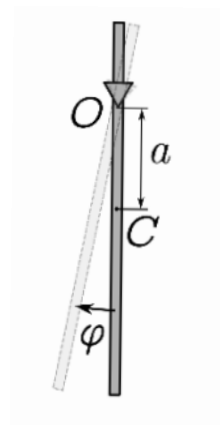


Рис. 1: Экспериментальная установка

Некоторые необходимые в работе уравнения

Момент импульса тела:

$$L = J\omega \quad (1)$$

где J – момент инерции тела (различается в зависимости от формы тела, для материальной точки определяется как mr^2), ω – угловая скорость вращения тела.

$$M = \frac{dL}{dt} \quad (2)$$

где M – момент силы

Подставляя (1) в (2) получим:

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon \quad (3)$$

где ε – угловое ускорение.

Для твёрдого тела справедливо

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad (4)$$

Просуммировав (проинтегрировав) по всей длине стержня мы получим, что момент инерции J_C относительно центра массы стержня равен

$$J_C = \frac{ml^2}{12} \quad (5)$$

А по теореме *Гюйгенса-Штейнера* момент инерции стержня относительно произвольной оси вращения равен

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2 \quad (6)$$

где a – расстояние между центром масс стержня и осью вращения (см рис. 1)

Стержень как физический маятник При достаточно малых углах отклонения φ момент возвращающей силы (тяжести) равен

$$M = -mga \sin \varphi \approx -mga\varphi \quad (7)$$

при малых амплитудах колебаний они будут иметь характер гармонических, то есть описываться по гармоническому закону (синуса, косинуса). Период колебаний произвольного физического маятника с моментом инерции J , массой m , расстоянием между центром масс и осью вращения a вычисляется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad (8)$$

такая формула получается через аналогию с пружинным маятником и формулой для него: $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, однако роль массы в данном случае

играет момент инерции тела J , а жесткость k – коэффициент пропорциональности между моментом силы и величиной отклонения mga

Подставляя момент инерции из (6) в (8) получим конечную формулу для периода колебаний нашего стержня:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2}{12} + a^2 \over ga} \quad (9)$$

заметим существенное различие с известной формулой Гюйгенса для математического маятника: $T = 2\pi \sqrt{l/g}$. Для любого физического маятника можно определить $l_{\text{пр}} = a + l^2/(12a)$ – это будет длина математического маятника с таким же периодом, что и у физического.

Уравнение колебаний Итак, колебания физического маятника можно описать гармоническим законом

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (10)$$

где A – угловая амплитуда, ω – циклическая частота, α – начальная фаза колебаний.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{J}}$$

Затухание колебаний Если маятник не идеален и существуют потери энергии в окружающую среду существует зависимость амплитуды колебаний от времени:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \quad (11)$$

где $\gamma = dA/A$ – декремент затухания

В данной работе мы находили $\tau_{\text{зат}} = 1/\gamma$ при уменьшении амплитуды в 2 раза, а не в e раз.

Также для затухающих колебаний есть безразмерная величина Q , называемая добротностью. Она вычисляется по формуле:

$$Q = \pi \frac{\tau_{\text{зат}}}{T} \quad (12)$$

3 Результаты измерений и обработка данных

Небольшое замечание по поводу методики получения и обработки данных Для каждого значения a – расстояния от центра масс

до оси вращения было проведено 3 измерения, для каждого измерения по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (T - \langle T \rangle)^2}$$

была найдена погрешность. Учитывая σ'_t конечная погрешность измерения вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_t'^2}$$

Таблица 1: Результаты измерения периодов колебаний маятника и их погрешности, шаг $\Delta a = 2$ см.

a , см	T_1 , с	T_2 , с	T_3 , с	$\langle T \rangle$, с	σ_i	σ_T	$\sigma_{\text{полн}}$
10	1,938	1,938	1,940	1,939	0,001	0,030	0,030
12	1,811	1,825	1,822	1,819	0,007	0,030	0,031
14	1,728	1,732	1,726	1,729	0,003	0,030	0,030
16	1,684	1,661	1,668	1,671	0,012	0,030	0,032
18	1,630	1,637	1,587	1,618	0,027	0,030	0,040
20	1,573	1,550	1,569	1,564	0,012	0,030	0,032
22	1,540	1,547	1,539	1,542	0,004	0,030	0,030
24	1,537	1,533	1,530	1,533	0,004	0,030	0,030
26	1,518	1,516	1,523	1,519	0,004	0,030	0,030
28	1,528	1,517	1,538	1,528	0,011	0,030	0,032
30	1,532	1,538	1,532	1,534	0,003	0,030	0,030
32	1,540	1,542	1,533	1,538	0,005	0,030	0,030
34	1,558	1,539	1,538	1,545	0,011	0,030	0,032
36	1,561	1,558	1,569	1,563	0,006	0,030	0,031
38	1,578	1,565	1,571	1,571	0,007	0,030	0,031
40	1,586	1,586	1,579	1,584	0,004	0,030	0,030
42	1,589	1,591	1,609	1,596	0,011	0,030	0,032
44	1,617	1,617	1,617	1,617	0,000	0,030	0,030
46	1,631	1,631	1,631	1,631	0,000	0,030	0,030
48	1,650	1,650	1,650	1,650	0,000	0,030	0,030

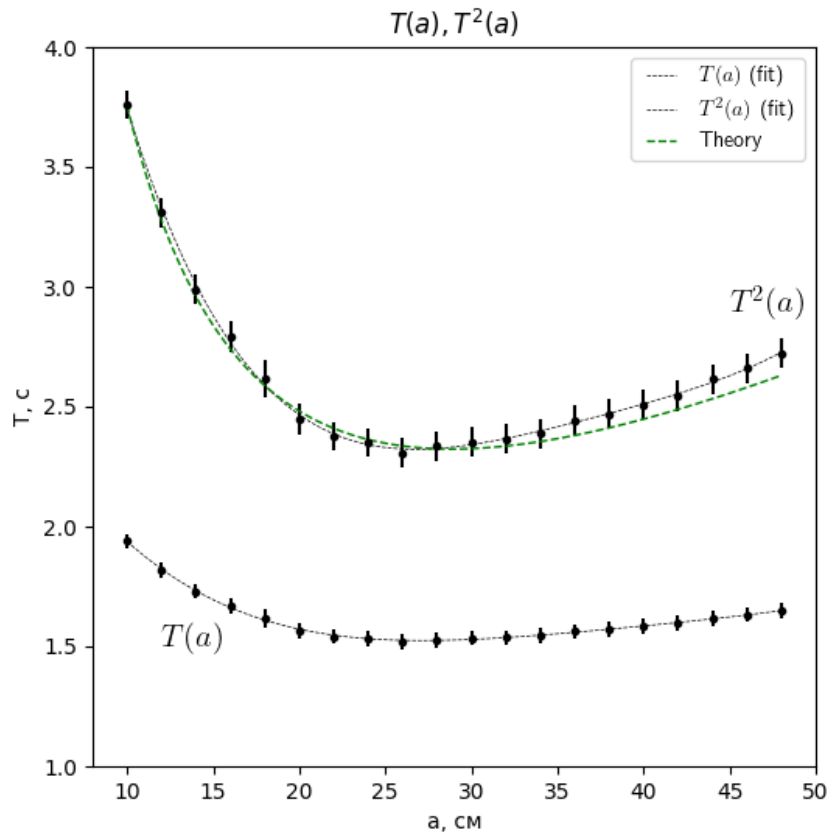
Случайная погрешность измерений оказалась много меньше, чем системная. Мы ее всё-равно будем учитывать, потому что в некоторых измерениях она действительно влияет на результат, однако можно сказать, что случайная погрешность измерений намного меньше инструментальной.

По формуле (9) находим ускорение свободного падения g . Его погрешность будет вычисляться по формуле:

$$\sigma_g = g \sqrt{\left(2\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(3\frac{\sigma_a}{a}\right)^2} \quad (13)$$

Где σ_l примем за 2 см, а σ_a за 0,5 см

Рис. 2: Полученная зависимость периода T и квадрата периода T^2 от расстояния a между центром масс маятника и его осью вращения



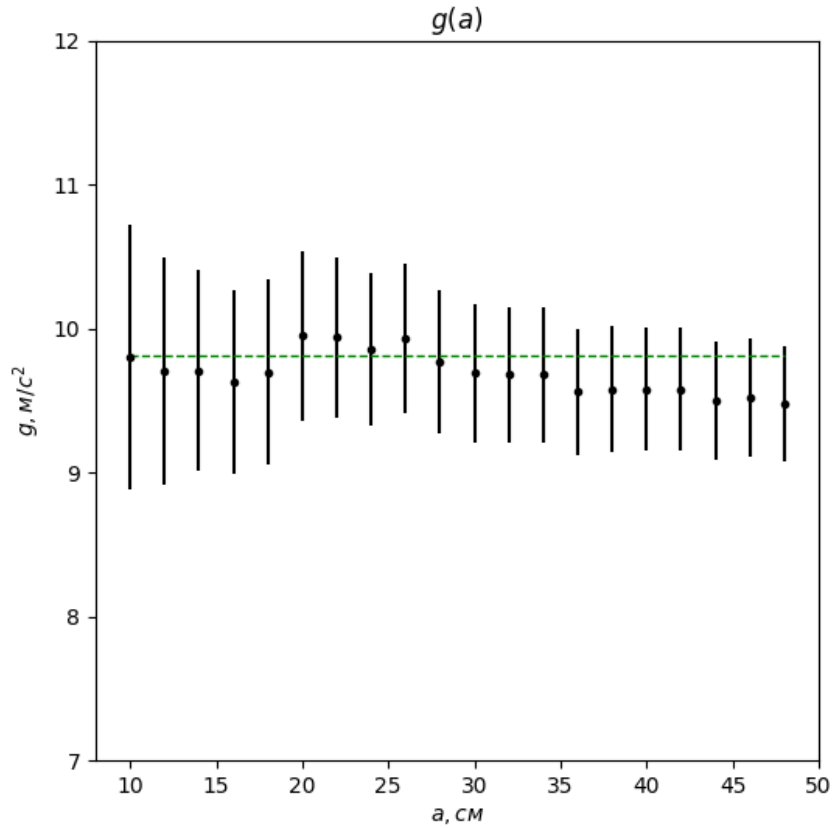
Зелёным на графике показана теоретическая зависимость $T^2(a)$ по формуле (9)

Таблица 2: Полученные значения g и их погрешности

a , см	T , с	g , $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	ε_l	ε_T	ε_a	ε_g	σ_g	$ g - g_{\text{теор}} $
10	1,939	9,80	0,02	0,02	0,05	0,09	0,92	0,01
12	1,819	9,71	0,02	0,02	0,04	0,08	0,79	0,10
14	1,729	9,71	0,02	0,02	0,04	0,07	0,70	0,10
16	1,671	9,63	0,02	0,02	0,03	0,07	0,64	0,18
18	1,618	9,70	0,02	0,02	0,03	0,07	0,64	0,11
20	1,564	9,95	0,02	0,02	0,03	0,06	0,59	0,14
22	1,542	9,94	0,02	0,02	0,02	0,06	0,56	0,13
24	1,533	9,86	0,02	0,02	0,02	0,05	0,53	0,05
26	1,519	9,93	0,02	0,02	0,02	0,05	0,52	0,12
28	1,528	9,77	0,02	0,02	0,02	0,05	0,50	0,04
30	1,534	9,69	0,02	0,02	0,02	0,05	0,48	0,12
32	1,538	9,68	0,02	0,02	0,02	0,05	0,47	0,13
34	1,545	9,68	0,02	0,02	0,01	0,05	0,47	0,13
36	1,563	9,56	0,02	0,02	0,01	0,05	0,44	0,25
38	1,571	9,58	0,02	0,02	0,01	0,05	0,44	0,23
40	1,584	9,58	0,02	0,02	0,01	0,04	0,43	0,23
42	1,596	9,58	0,02	0,02	0,01	0,05	0,43	0,23
44	1,617	9,50	0,02	0,02	0,01	0,04	0,41	0,31
46	1,631	9,52	0,02	0,02	0,01	0,04	0,41	0,29
48	1,650	9,48	0,02	0,02	0,01	0,04	0,40	0,33

Заметим, что все полученные значения ускорения свободного падения g оказались в пределах полученных нами погрешностей. Самое большое отклонение от табличных значений ε_{\max} составило 3,3%, а среднее ε_{avg} – лишь 1,6%

Рис. 3: Зависимость $g(a)$ и сравнение полученных значений с табличными



Затухание колебаний В результате измерений амплитуда колебаний уменьшилась в два раза примерно за $\tau_{\text{зат}} = 250$ сек, что дает декремент затухания $\gamma \approx 0,004$. Добротность Q получилась равной ≈ 500 . Высокая добротность показывает, что потери при колебаниях намного меньше энергии вращательного движения и что в данной работе при $n = 10$ полных колебаний их затухание не могло существенно повлиять на результаты.

3.1 Учёт влияния подвесной призмы

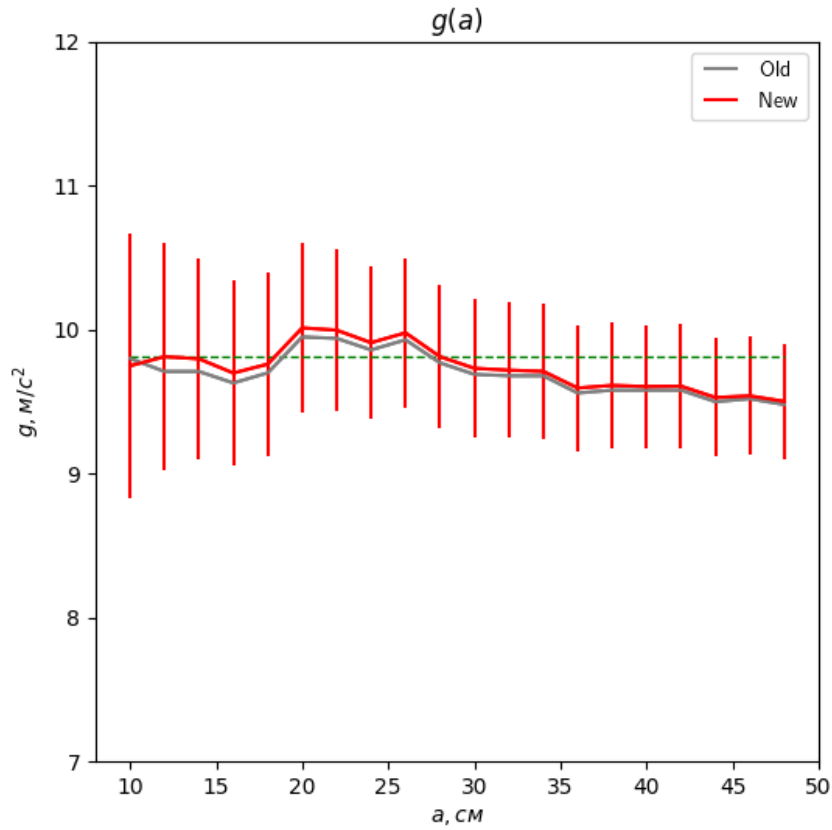
Для $a > 30$ см заметно сильное отклонение от табличных значений. Это может быть объяснено тем, что в работе мы не учитывали движение призмы, которая выступает в качестве оси вращения для маятника.

Учесть эту разницу можно с помощью соотношений:

$$x_c = \frac{m_{\text{ст}}a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}}a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} + m_{\text{пр}}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2/12 + a^2}{g \left(1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}\right) x_c}} \quad (14)$$

Получим следующий результат:

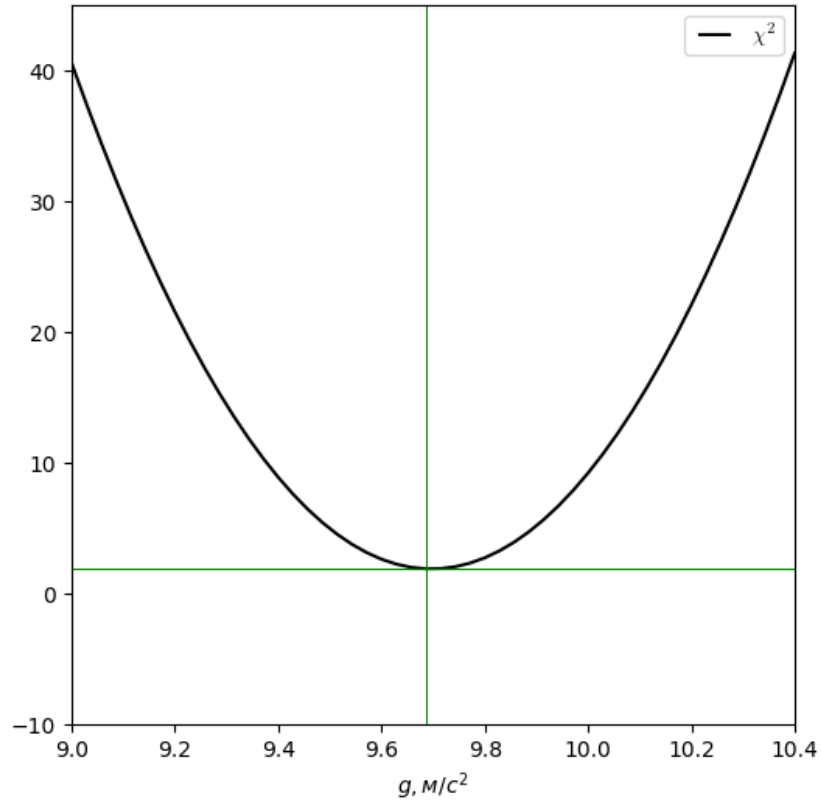
Рис. 4: Скорректированные значения $g(a)$



Видно, что учёт призмы немного улучшил точность для небольших a , однако для $a > 30$ см ситуация практически не изменилась.

С новыми результатами для $g(a)$ с помощью метода χ^2 находим итоговое значение ускорения свободного падения

Рис. 5: Функционал χ^2 для g



Минимум функционала приходится на $g = 9,6964 \text{ м/с}^2$, при этом он равен $\chi_{\min}^2 \approx 1,88$. При $\chi^2 = \chi_{\min}^2 + 1$: $g = 9,5844 \text{ м/с}^2$, следовательно итоговая погрешность $\sigma_g = 0,1121 \text{ м/с}^2$

$$g = (9,6964 \pm 0,1121) \text{ м/с}^2 \quad (15)$$

4 Обсуждение результатов и выводы

В ходе работы мы измерили ускорение свободного падения с помощью колебаний физического маятника. Полученные значения хорошо соотносятся с табличными (для отдельного измерения отклонение не больше $= 3,3\%$).

Табличное значение для московской широты $g \approx 9,8155 \text{ м/с}^2$ находятся за пределами $\pm 1\sigma_g$, однако очень близко к этой границе. Итоговое отклонение от табличного значения составило 1,2%

Учёт влияния подвесной призмы Так как для $a > 30$ см наблюдалось большое отклонение от табличных результатов, было принято решение учесть колебания подвесной призмы маятника. Это немного улучшило точность для небольших a , однако для $a > 30$ см ситуация не изменилась. Это говорит о том, что отклонение обусловлено другими допущениями и «неидеальностью» установки и эксперимента. (Например: влияние затухания колебаний, неоднородность стержня и т.д.)

Другие выводы Несмотря на это все полученные значения g достаточно близки к табличным и почти попадают в пределы $\pm 1\sigma$. Самый большой вклад в погрешность измерений внес неточный способ определения периода колебаний маятника (вообще сложно оценить погрешность измерений обычным секундомером «на глаз»), на самом деле она может быть как больше использованной нами, так и меньше. Кроме того, полученные зависимости $T(a)$ и $T^2(a)$ хорошо соотносятся с теорией (уравнения (9) и (14))