

Fourierrekker fra bilder

Av Benjamin Dybvik, Tobias Blegeberg og Ole Martin Ruud

Innholdsfortegnelse

1. Introduksjon
2. Grunnleggende om Fourierrekke
3. Noen anvendelser av Fourierrekker (kort med noen eksempler)
4. Lage en fourierrekke fra et bilde
 - Introduksjon
 - Introdusere at vi skal fremvise et bilde som en fourierrekke
 - Introdusere JPEG
 - Teori om å gjøre bilder om til fourierrekker
 - Lett forklare hvordan JPEG gjennomfører det
 - Problemstilling
 - Fremstille et bilde som en eller flere fourierrekker
 - Beslyende eksempler
 - DCT vs DFT
 - Framstilling
5. Konklusjon
6. Resultater
7. Referanser

► 1. Introduksjon

▼ 2. Grunnleggende om fourierrekker

► Introduksjon til fourierrekker

► Den generaliserte fourierrekken

► Odde og like funksjoner

► Den komplekse fourierrekken

▼ Et eksempel på en fourierrekke

Under skal det vises fra et eksempel på en periodisk funksjon $f(t)$ som det skal lages en fourierrekke til. T er perioden til funksjonen.

restart;

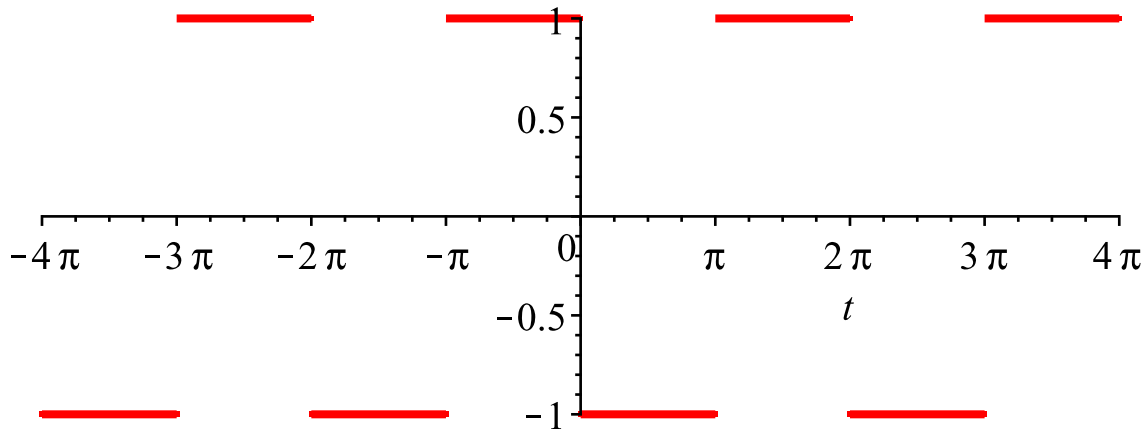
$f := t \mapsto \text{piecewise}(0 \leq t \leq \pi, -1, \pi < t \leq 2 \cdot \pi, 1); T := 2 \cdot \pi;$

$$f := t \mapsto \begin{cases} -1 & 0 \leq t \leq \pi \\ 1 & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$T := 2 \pi$$

(2.5.1)

$P_s := j \rightarrow \text{plot}(f(t - j \cdot T), t = j \cdot T .. T \cdot (j + 1), \text{discont} = \text{true}, \text{symbol} = \text{"point"}, \text{color} = \text{"red"},$
 $\text{thickness} = 3) :$
 $P_f := \text{plots:-display}([\text{seq}(P_s(j), j = -2 .. 1)])$



$c_n := n \rightarrow \text{int}\left(f(t) \cdot \exp\left(-i \cdot n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T}\right) \cdot t\right), t = 0 \dots T\right)$

$$c_n := n \mapsto \int_0^T f(t) e^{\frac{-2 i n \pi t}{T}} dt$$

(2.5.2)

$\psi := (t, l) \rightarrow \text{sum}\left(\frac{1}{T} \cdot c_n(n) \cdot \exp\left(i \cdot n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T}\right) \cdot t\right), n = -l \dots l\right)$

$$\psi := (t, l) \mapsto \sum_{n=-l}^l \frac{c_n(n) e^{\frac{2 i n \pi t}{T}}}{T}$$

(2.5.3)

Her regnes ut fourierrekken til $f(t)$ (2.4.1) med l antall ledd.

$l := 7 :$

$\psi_l := \text{evalc}(\psi(t, l))$

$$\psi_l := -\frac{4 \sin(7 t)}{7 \pi} - \frac{4 \sin(5 t)}{5 \pi} - \frac{4 \sin(3 t)}{3 \pi} - \frac{4 \sin(t)}{\pi}$$

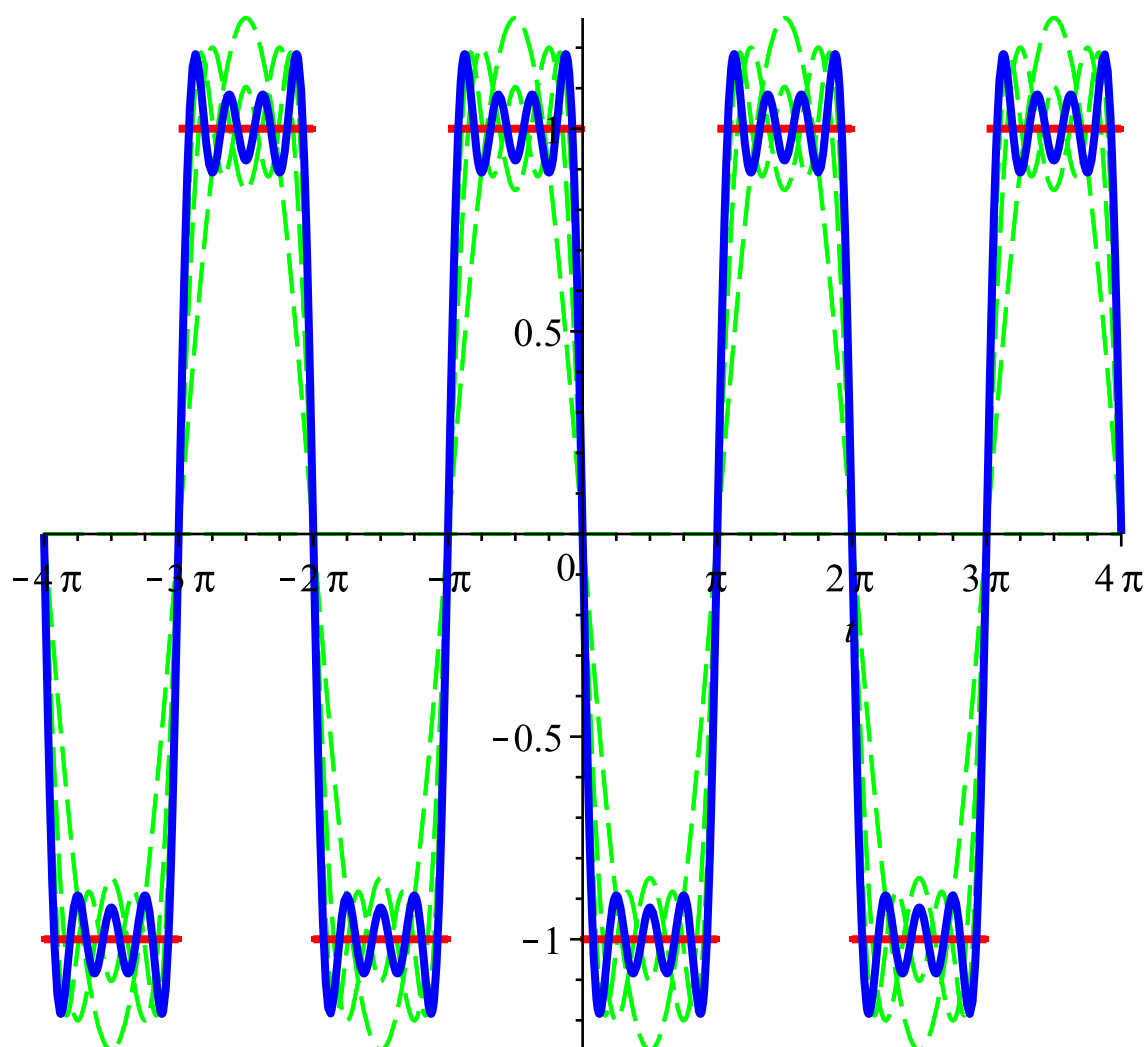
(2.5.4)

Her plottes fourierrekken (2.4.4), vist her i blått, med l antall ledd og originalfunksjonen $f(t)$ (2.4.1), vist her i rødt. I tillegg er det tegnet opp hver fourierrekke med færre ledd enn rekken (2.4.4) vi regnet ut. Slik kan man se hvordan flere ledd endrer på rekke. Rekkene med færre ledd l er grønne.

$P_\psi := \text{plot}(\psi_l, t = -2 \cdot T \dots 2 \cdot T, \text{color} = \text{"blue"}, \text{thickness} = 3) :$

$Pr_\psi := \text{plot}([\text{seq}(\psi(t, j), j = 0 \dots (l - 1))], t = -2 \cdot T \dots 2 \cdot T, \text{color} = \text{"green"}, \text{linestyle} = \text{"dash"}) :$

$\text{plots:-display}([Pr_\psi, P_f, P_\psi])$



3. Noen anvendelser av fourierrekker

Anvendelser av fourierrekker

Det viser seg at man kan bruke fourierrekker til å framstilling nesten alle slags bølger som en funksjon. Som vist tidligere kan en fourierrekke kunne tilnærme seg en bølge ved å ha uendelig antall cosinus og sinus ledd. Dette gir oss en enorm mulighet til å framstille mange ting rundt oss som funksjoner ettersom så mye vi omgår dagligdags enten er eller kan oppfattes som bølger. Eksempler på slike dagligdagse bølger vi omgår kan være i det elektromagnetiske spekteret slik som signaler fra en mobil eller lydspekteret slik som musikk eller en stemme. Mekaniske ting som går i en viss takt kan vi også framstille som cosinus og sinus bølger. Eksempler på dette er klokker, motorer eller kraftverk der maskinene går i en fast syklus. [1] Ingeniører bruker fourerrekker til å illustrere forskjellige bølger som funksjoner. Oppfinneren av Fourierrekker Joseph Fourier brukte fourierrekker for å regne på varmetap, varmebølger og vibrasjoner.

Ingeniører bruker fourerrekker innen mange fagfelt. For å kunne regne på høy og lavvann og hvordan bølger påvirker et skip, til komprimering av data og tolkning av elektromagnetiske bølger slik som i telekommunikasjon. Dette gjelder mange områder innenfor signalbehandling, slik som radar, sonar, x-ray, mobiltelefoni og samband. I for eksempel Wifi brukes fourerrekker for å kode og dekode signalet presist slik at det kan bli tolket digitalt. Det

brukes også for å restaurere signaler som er i ferd med å «viskes ut» på grunn av dårlig dekning. [3]

Ved å ta opp lyd kan man konstruere dette om til en fourerrekke funksjon. Denne funksjonen består av mange ledd som går an å dele opp og analysere separat. Ved å analysere de forskjellige frekvensene som den originale lyden består av, kan man danne seg en graf. Et program som Shazam bruker denne teknikken til å kunne finne ut hvilken sang man hører på. Shazam tar grafen og sammenligner den med en database for å se om den matcher. Om Shazam finner en match vil den fortelle deg hvilke sang du hører på. [2] Smarttelefon stemmegjenkjenningsprogramvare slik som Siri bruker samme teknologi for å forstå hva du ber den om å gjøre. Ved å analysere stemmen din og sjekke det opp med en Apple database skal den være i stand til å gjøre som du ber den om. Så langt kan man få et lite inntrykk av hva man kan framstille med fourerrekker og det er langt flere muligheter. Fourerrekker kan være et veldig kraftig verktøy i forskjellige anvendelser om det blir brukt smart.

[1] <https://math.stackexchange.com/questions/579453/real-world-application-of-fourier-series> 21.09.17

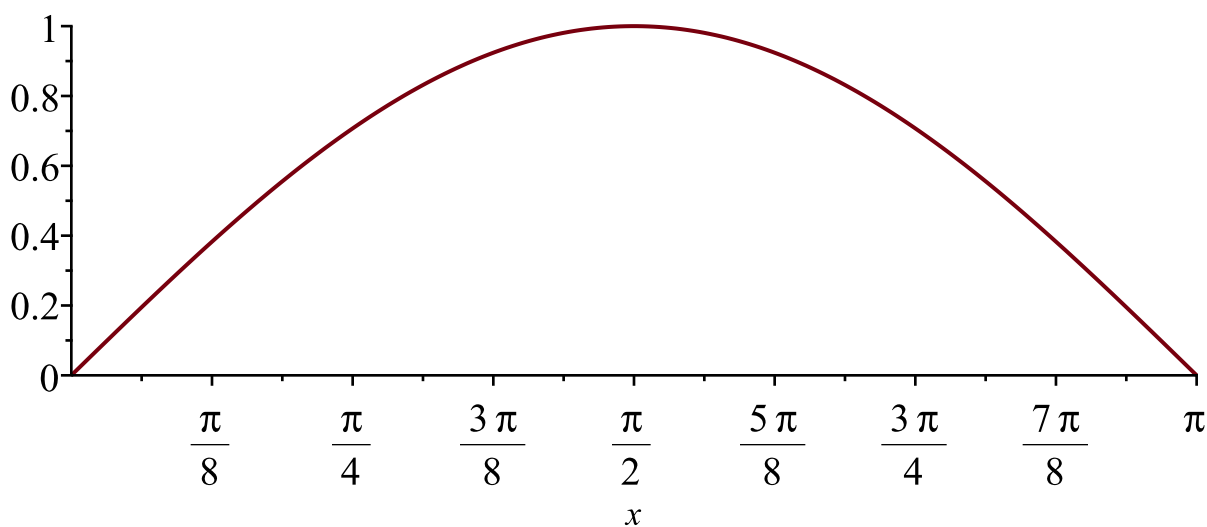
[2] https://www.youtube.com/watch?v=K0_TP5Sf7yc 21.09.17

[3] <https://www.quora.com/Why-are-Fourier-series-important-Are-there-any-real-life-applications-of-Fourier-series> 21.09.17

Eksempel på anvendelse i musikkinstrumenter

Her skal det ses litt nærmere på hvordan Fourierrekker blir anvendt i dagligdagse ting og objekter, som for eksempel lyd og instrumenter. Hva er det som skjer når man drar buen over en cello? Til å begynne med må det bli bestemt hva lyd er for noe. En simpel forklaring er at lyd er fortynninger og fortetninger i luften, eller i et annet medium som disse bølgene kan bevege seg i. Disse bølgene kalles for lydbølger. Det er trommehinnen i øret som greier å registrere disse hurtige endringene i lufttrykket. Dette er fordi mennesker har membraner inne i øret som vil svinge i samme takt som lydbølgene. Grunnen til at celloen kan lage disse harmoniske lydbølgene med frekvenser som kan høres er på grunn av celloens utforming.

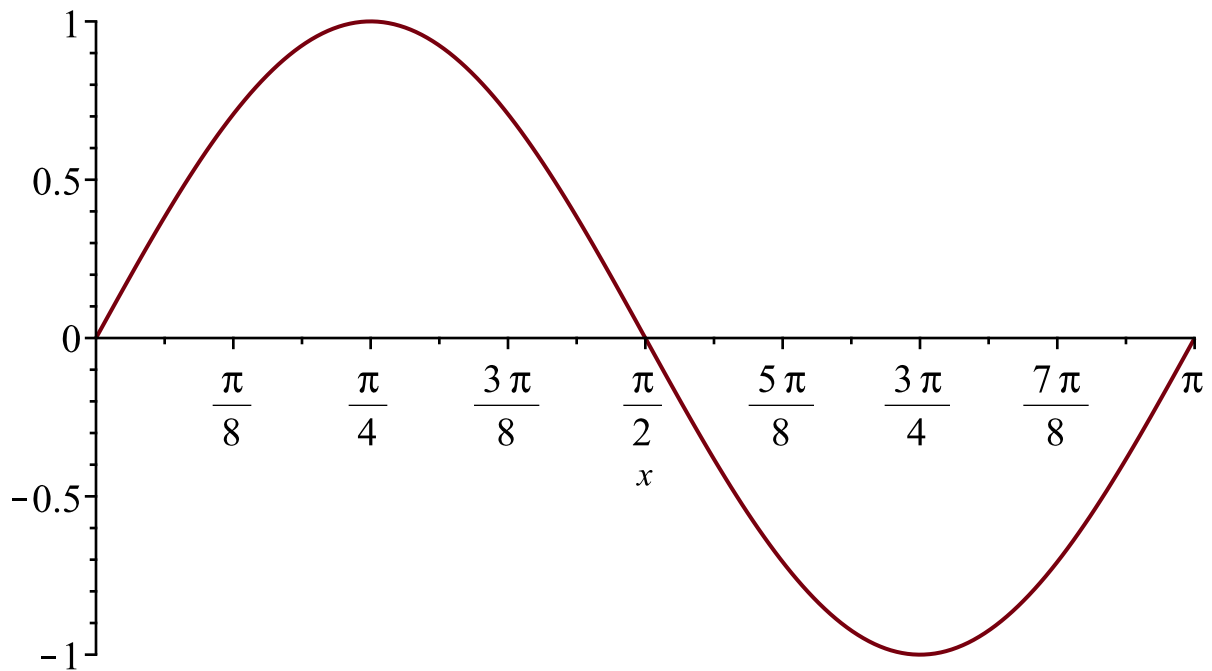
Celloen har flere strenger med en bestemt lengde som er tilpasset tonen den skal lage. I dette eksemplet bestemmes det for enkelhetsskyld at lengden på cellostrengen er π . Cellostrengen legges langs med x-aksen. Siden lengden på strengen er π blir også perioden $T = \pi$. Av disse opplysningene kan man lage en funksjon av cellostrengen. Dette er illustrert under som $f(x) = \sin(x)$



Figur x

Dette er utslaget man får hvis man drar buen over celloen. Dette definerer man i dette eksempelet som en tone på 65 Hz som tilsvarer en C i musikk skalaen. Grafen svinger heropp

og ned 65 ganger i sekundet. Så legger man en finger i punktet $\frac{\pi}{2}$, da får vi funksjonen $f(x) = \sin(2x)$.



Dette er fouriersinusrekker som kan utledes videre på formen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\pi x)$. Dette er en tone på 130 Hz som da også er en C, men denne tonen er høyere i toneskala. Det vil si dobbelt så mange svingninger. Det man skal ta med seg er at for hver gang frekvensen dobler seg så får man den samme tonen, men i en skala opp. Dette er mye brukt innenfor for eksempel musikkteori.

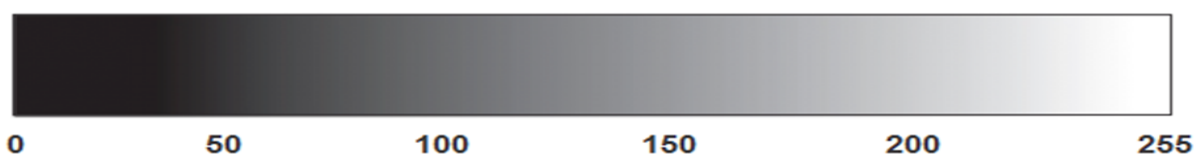
4. Lage en fourierrekke fra et bilde

► Hvordan fungerer JPEG

► Vår omgjøring fra bilde til fourierrekke

► Forklaring av teoridelen

Tidligere ble det definert en fourierrekke som summen av harmoniske funksjoner med ulike frekvenser og amplituder. I tillegg er et kvav at den er tilnærmet lik en periodisk funksjon. Nå skal et bilde bli representert ved hjelp av en fourierrekke. Ved å bryte ned et bilde i flere pixler vil hver individuelle pixel få en egen fargeverdi. I dette eksemplet skal det brukes fargeverdier fra og med 0 til og med 255, hvor 0 er sort og 255 er hvit. Fargeverdien definerer altså hvilken fargetone en pixel har. Dette er illustrert i figuren under.



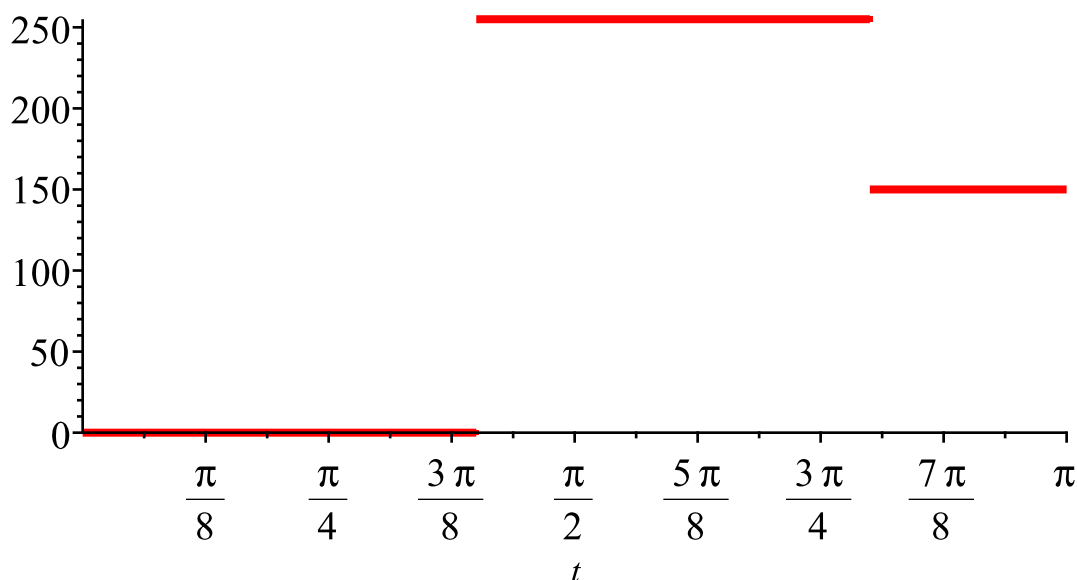
Figur 1

Nå som det er mulig å representere fargetonene som fargeverdier skal også fargeverdiene framstilles grafisk. Langs den horisontale akse får hver pixel et like stort intervall. Hvor alle pixlene i bildet totalt utgjør perioden T . Langs den vertikale akse er fargeverdiene, som er representert gjennom amplituden til funksjonen. Når alle verdiene fra pixlene er satt inn i graf $f(t)$ vil funksjonsuttrykket i det gitte intervallet være lik fargeverdien, altså en horisontal rett linje. Som et eksempel tas et bilde som inneholder følgende fargeverdier i kronologisk rekkefølge: 0, 255, 150, 150, 0 (sort, hvit, grå, grå, sort). Under er $f(t)$ presentert med perioden $T = \pi$.

$$f := t \mapsto \text{piecewise} \left(0 \leq t \leq \frac{2\pi}{5}, 0, \frac{2\pi}{5} \leq t \leq \frac{4\pi}{5}, 255, \frac{4\pi}{5} \leq t \leq \frac{6\pi}{5}, 150, \frac{6\pi}{5} \leq t \leq \frac{8\pi}{5}, 150, \frac{8\pi}{5} \leq t \leq \pi, 0 \right);$$

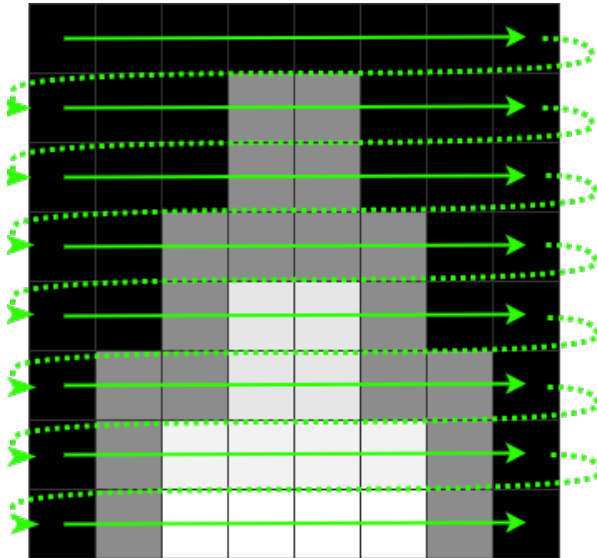
$$f := t \mapsto \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{5} \\ 255 & \frac{2\pi}{5} \leq t \leq \frac{4\pi}{5} \\ 150 & \frac{4\pi}{5} \leq t \leq \frac{6\pi}{5} \\ 150 & \frac{6\pi}{5} \leq t \leq \frac{8\pi}{5} \\ 0 & \frac{8\pi}{5} \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (4.2.1.1)$$

`plot(f(t), t = 0 .. Pi, discontinuous = true, symbol = "point", color = "red", thickness = 3)`

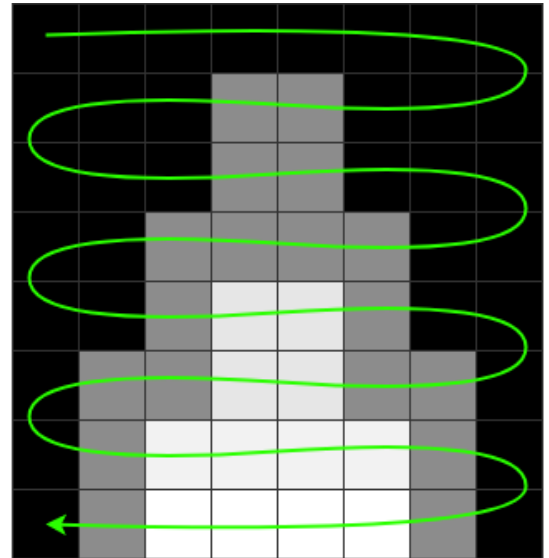


Figur **TODO**

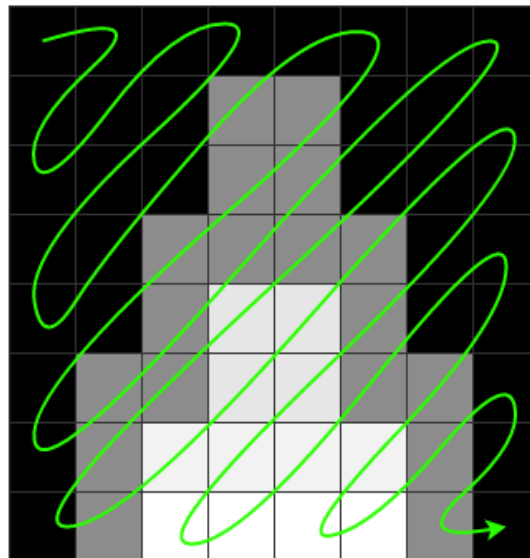
Nå som det er vist hvordan man kan plote pixlene inn i grafen, må man vite hvordan man systematisk skal legge inn pixlene fra bildet. Her skal man finne den måten som man legger inn data på hvor kurven av fourierrekken blir tilnærmet lik bildet. For eksempel vil en løsning være å legge alle pixlene med lik fargeverdi i samlede grupper. På den måten får kurven færrest utslag, og sannsynligheten for at verdiene som er tilnærmet like bilde, blir lik de faktiske verdiene til bildet. I oppgaven har vi definert tre ulike metoder som vi vil se nærmere på. Metode nr. 1 er å starte øverts i venstre hjørne og lese fra venstre mot høyre for hver linje. Metode nr. 2 starter også i øverste venstre hjørne, men for hver nye linje går man motsatt vei av forrige linje. Metode nr. 3 starter i øverste venstre hjørne og går i et sikksakk mønster diagonalt ned mot det nederste høyre hjørne. (Se Figur 2)



Metode 1



Metode 2



Metode 3

Figur 2

Vi skal i anvendelsesdelen benytte oss av to ulike bilder. Et "kunstig" i den form av at de inneholder bråe overganger fra sort til hvitt. Dette er typisk et bilde av tekst eller figurer. Det andre bildet er "naturlig" i den form av at det inneholder relativt jevne overganger mellom lyse og mørke områder. Dette er typisk bilder man har tatt med fotokamera av landskap eller personer. Med disse to ulike bildene håper vi å illustrere i hvilke tilfeller denne "komprimeringsmetoden" vil fungere best.

▼ Anvendelse av teorien

Fremgangsmåte

Nå som vi har 3 ulike metoder for å gjøre et bilde om til en fourierrekke, så skal vi generere en fourierrekke med hver av metodene og analysere hvilken som gir den beste tilnærmingen. Under er det en liste i kronologisk rekkefølge som forteller hvordan vi skal gjøre et bilde om til en fourierrekke.

1. Lage to ulike typer bilder, et med skarpe kanter mellom lyst og mørkt og et med naturlige, myke overganger.
2. Dele bildet opp i mindre biter på 8×8 piksler, for å ikke få for mye data per fourierrekke.
3. Generere en funksjon $f(t)$ som minner om (4.2.1) som benytter seg av de 3 ulike metodene.
4. Lage en graf som viser $f(t)$ og $\psi(t)$ med ulike antall ledd.
5. Generere et bilde utifra $\psi(t)$ og sammenlikne kvaliteten med originalen
6. Analysere resultatene for å finne ut:

- Hvilken metode som er best for ulike bildetyper
- Hvor nært originalen bildet blir
- Hvor mange ledd vi kan fjerne uten å miste for mye oppfattet kvalitet

▼ Metode 1

Det naturlige bilde

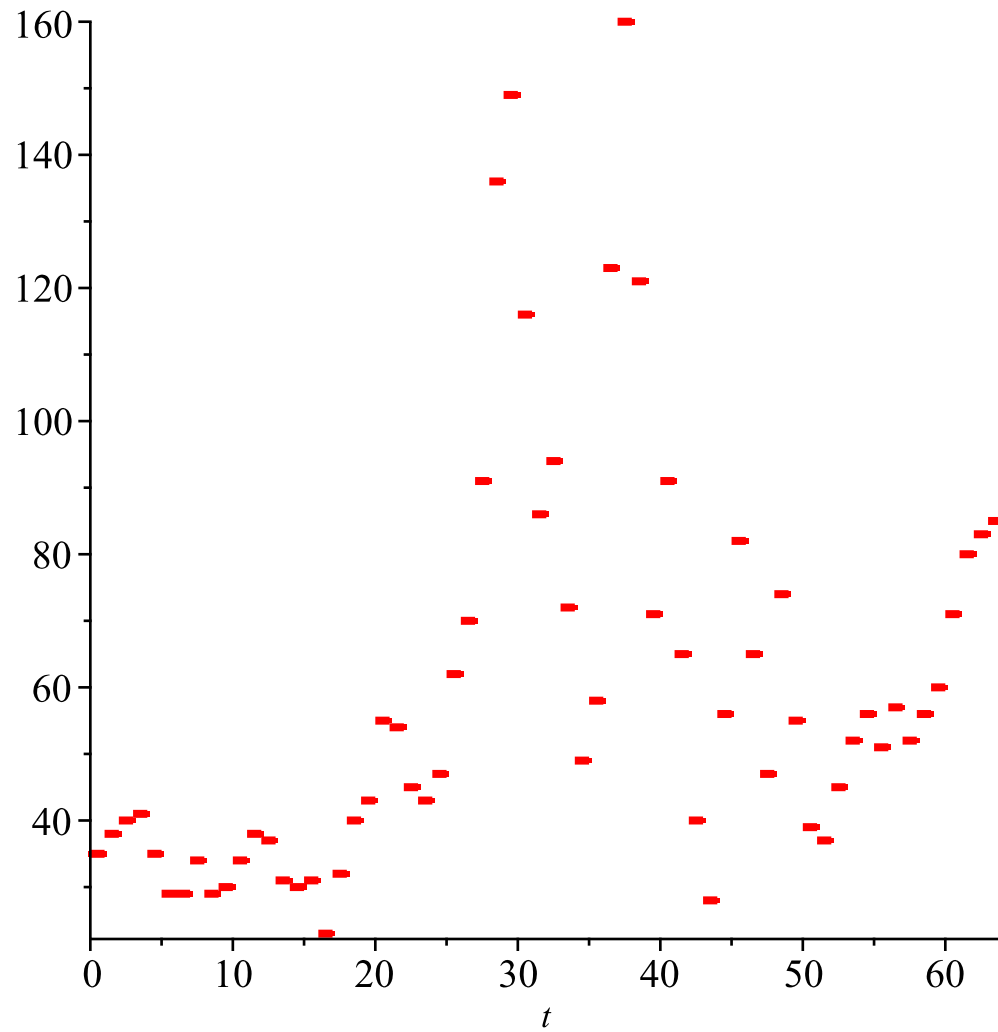
Under er utregningen av metode 1 med bildet nr.1

$$f(t) := \text{piecewise}(0 \leq t \leq 1.0, 35, 1.0 \leq t \leq 2.0, 38, 2.0 \leq t \leq 3.0, 40, 3.0 \leq t \leq 4.0, 41, 4.0 \leq t \leq 5.0, 35, 5.0 \leq t \leq 6.0, 29, 6.0 \leq t \leq 7.0, 29, 7.0 \leq t \leq 8.0, 34, 8.0 \leq t \leq 9.0, 29, 9.0 \leq t \leq 10.0, 30, 10.0 \leq t \leq 11.0, 34, 11.0 \leq t \leq 12.0, 38, 12.0 \leq t \leq 13.0, 37, 13.0 \leq t \leq 14.0, 31, 14.0 \leq t \leq 15.0, 30, 15.0 \leq t \leq 16.0, 31, 16.0 \leq t \leq 17.0, 23, 17.0 \leq t \leq 18.0, 32, 18.0 \leq t \leq 19.0, 40, 19.0 \leq t \leq 20.0, 43, 20.0 \leq t \leq 21.0, 55, 21.0 \leq t \leq 22.0, 54, 22.0 \leq t \leq 23.0, 45, 23.0 \leq t \leq 24.0, 43, 24.0 \leq t \leq 25.0, 47, 25.0 \leq t \leq 26.0, 62, 26.0 \leq t \leq 27.0, 70, 27.0 \leq t \leq 28.0, 91, 28.0 \leq t \leq 29.0, 136, 29.0 \leq t \leq 30.0, 149, 30.0 \leq t \leq 31.0, 116, 31.0 \leq t \leq 32.0, 86, 32.0 \leq t \leq 33.0, 94, 33.0 \leq t \leq 34.0, 72, 34.0 \leq t \leq 35.0, 49, 35.0 \leq t \leq 36.0, 58, 36.0 \leq t \leq 37.0, 123, 37.0 \leq t \leq 38.0, 160, 38.0 \leq t \leq 39.0, 121, 39.0 \leq t \leq 40.0, 71, 40.0 \leq t \leq 41.0, 91, 41.0 \leq t \leq 42.0, 65, 42.0 \leq t \leq 43.0, 40, 43.0 \leq t \leq 44.0, 28, 44.0 \leq t \leq 45.0, 56, 45.0 \leq t \leq 46.0, 82, 46.0 \leq t \leq 47.0, 65, 47.0 \leq t \leq 48.0, 47, 48.0 \leq t \leq 49.0, 74, 49.0 \leq t \leq 50.0, 55, 50.0 \leq t \leq 51.0, 39, 51.0 \leq t \leq 52.0, 37, 52.0 \leq t \leq 53.0, 45, 53.0 \leq t \leq 54.0, 52, 54.0 \leq t \leq 55.0, 56, 55.0 \leq t \leq 56.0, 51, 56.0 \leq t \leq 57.0, 57, 57.0 \leq t \leq 58.0, 52, 58.0 \leq t \leq 59.0, 56, 59.0 \leq t \leq 60.0, 60, 60.0 \leq t \leq 61.0, 71, 61.0 \leq t \leq 62.0, 80, 62.0 \leq t \leq 63.0, 83, 63.0 \leq t \leq 64.0, 85) : T := 2 \cdot 64;$$


```

P_s := j→plot( $f(t-j\cdot T)$ ,  $t=\frac{j\cdot T}{2} .. \frac{T}{2}\cdot(j+1)$ , discont=true, symbol="point", color
= "red", thickness=3) :
P_org := plots:-display([seq(P_s(j),j=0)])

```



Figur X

$$a_0 := \frac{4}{T} \cdot \text{int}\left(f(t), t=0 \dots \frac{T}{2}\right)$$

119.0000000

(4.2.2.1.2)

$$a_n := n \rightarrow \frac{4}{T} \cdot \text{int}\left(f(t) \cdot \cos\left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T}\right) \cdot t\right), t=0 \dots \frac{T}{2}\right)$$

$$n \rightarrow \frac{4 \left(\int_0^{\frac{1}{2} T} f(t) \cos\left(\frac{2 n \pi t}{T}\right) dt \right)}{T} \quad (4.2.2.1.3)$$

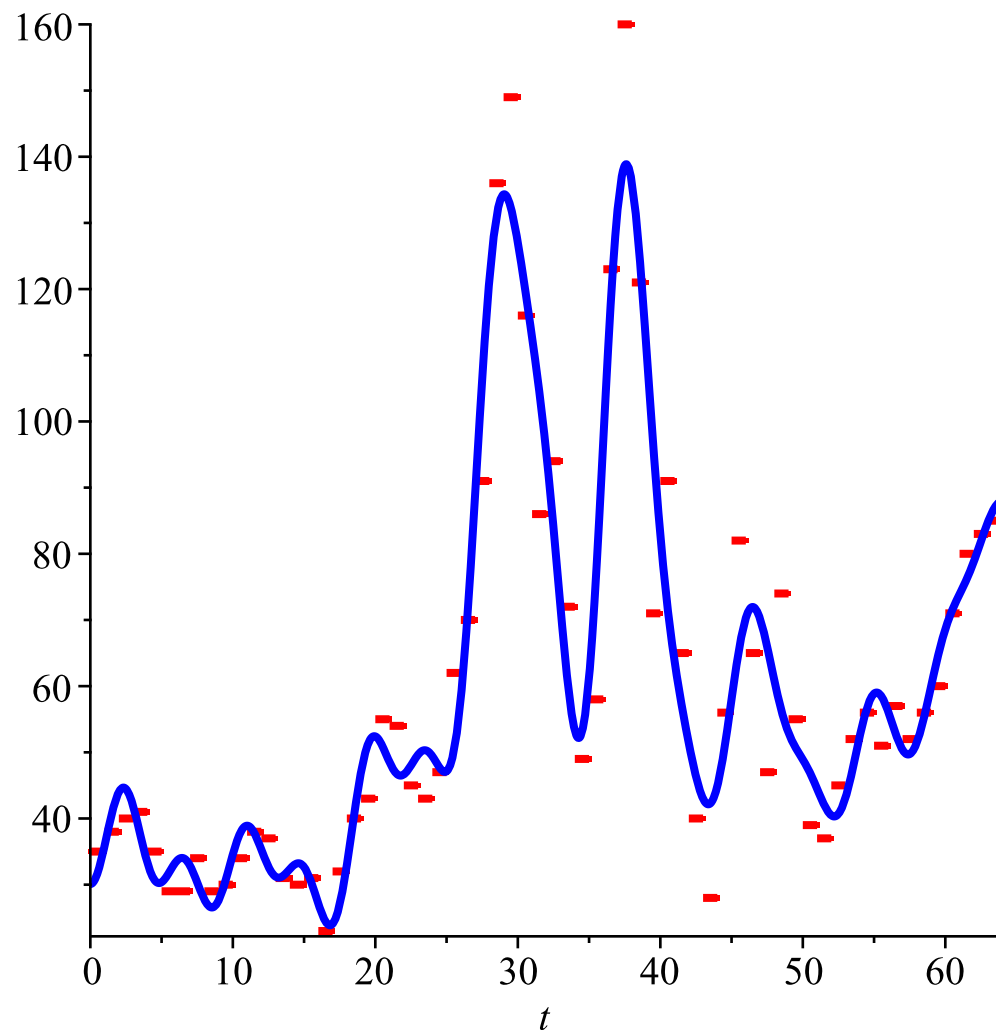
$$\begin{aligned} \psi &:= (t, l) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \text{sum}\left(a_n(n) \cdot \cos\left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T}\right) \cdot t\right), n = 1 \dots l\right) \\ (t, l) &\rightarrow \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^l a_n(n) \cos\left(\frac{2 n \pi t}{T}\right) \end{aligned} \quad (4.2.2.1.4)$$

$l := 30 :$

$\psi_l := \text{evalf}(\psi(t, l))$

$$\begin{aligned} &2.666858805 \cos(0.3926990818 t) + 0.5969812336 \cos(1.178097245 t) \quad (4.2.2.1.5) \\ &- 3.416310600 \cos(0.3436116965 t) - 1.451916591 \cos(1.276272016 t) \\ &+ 1.445977885 \cos(1.030835090 t) - 4.499224926 \cos(1.423534171 t) \\ &- 1.896305728 \cos(0.2945243113 t) - 3.492448353 \cos(0.2454369261 t) \\ &- 0.2065333042 \cos(1.129009860 t) + 1.555520529 \cos(1.374446786 t) \\ &+ 1.228146344 \cos(1.325359401 t) - 0.9876229740 \cos(1.227184630 t) \\ &- 1.790991219 \cos(1.472621557 t) - 2.013328305 \cos(1.079922475 t) \\ &+ 19.76409237 \cos(0.1963495409 t) \\ &+ 0.2246210129 \cos(0.1472621557 t) \\ &- 21.51398980 \cos(0.09817477044 t) \\ &- 15.22332500 \cos(0.04908738522 t) \\ &- 2.204861448 \cos(0.7853981635 t) - 14.41919822 \cos(0.7363107783 t) \\ &+ 6.731108123 \cos(0.6872233931 t) + 10.41940379 \cos(0.6381360078 t) \\ &- 4.981558929 \cos(0.5890486226 t) - 5.451235899 \cos(0.5399612374 t) \\ &+ 4.862893998 \cos(0.4908738522 t) + 1.158730050 \cos(0.4417864670 t) \\ &+ 0.2239924829 \cos(0.9817477044 t) \\ &- 2.409057144 \cos(0.9326603192 t) - 1.029279681 \cos(0.8835729339 t) \\ &+ 6.699547494 \cos(0.8344855487 t) + 59.50000000 \end{aligned}$$

$P_\psi := \text{plot}\left(\psi_l(t), t = 0 \dots \frac{T}{2}, \text{color} = \text{"blue"}, \text{thickness} = 3\right) :$
 $Pr_\psi := \text{plot}\left([\text{seq}(\psi(t, j), j = 0 \dots (l - 1))], t = 0 \dots T, \text{color} = \text{"green"}, \text{linestyle} = \text{"dash"}\right) :$
 $\text{plots:display}([P_{org}, P_\psi])$



Figur X

Bildene

Bilde til venstre er originalbildet, og det andre er konstruert av fourierrekken. Bildet som er et resultat av fourierrekken, har mistet flest fargeverdier i de områdene hvor kontrasten er høyest. Under er endringen i fargeverdier fra det originale bildet til det konstruerte, representert i en matrise og en graf. Dette bekrefter også at med metode 1 er endringene størst i områdene med store kontraster, som for eksempel i det lyse området på høyre siden av bildet.

```

 $\Delta := \text{Matrix}([ [5, 3, -4, 0, 2, -1, -4, 2],$ 
 $[2, 3, 0, 0, 2, 0, -2, -1],$ 
 $[ -4, 8, 8, -4, 3, 6, -1, -6],$ 
 $[ -2, 15, 12, 3, 15, 15, -11, -26],$ 
 $[ -1, 1, -4, -3, 26, 28, -15, -40],$ 
 $[9, 2, -11, -14, 12, 24, -5, -23],$ 
 $[14, 3, -9, -7, 5, 9, 4, -7],$ 

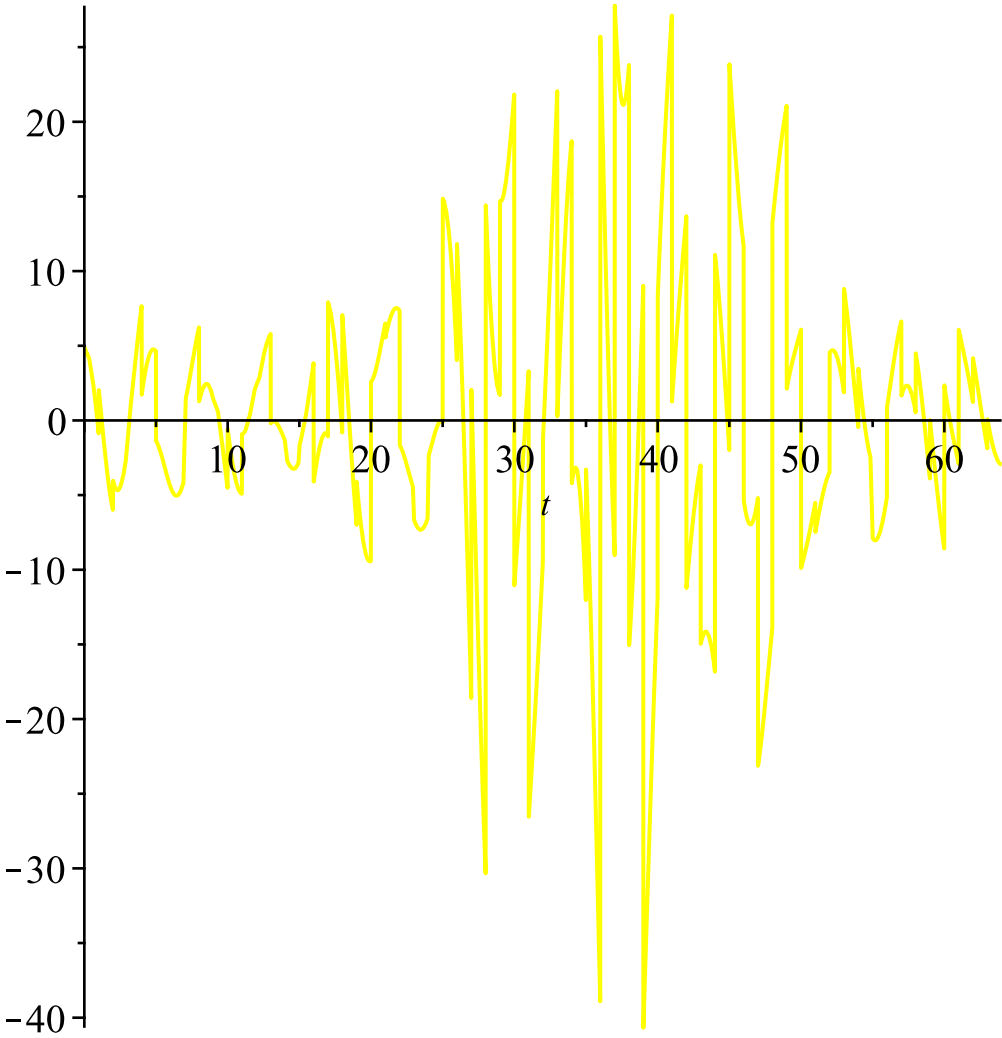
```

[1, 2, 5, 1, 3, 7, 5, 1]])

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & 0 & 2 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 8 & 8 & -4 & 3 & 6 & -1 & -6 \\ -2 & 15 & 12 & 3 & 15 & 15 & -11 & -26 \\ -1 & 1 & -4 & -3 & 26 & 28 & -15 & -40 \\ 9 & 2 & -11 & -14 & 12 & 24 & -5 & -23 \\ 14 & 3 & -9 & -7 & 5 & 9 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 3 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(4.2.2.1.6)

$$P_{\Delta} := plot\left(f(t) - \psi_I(t), t=0 \ldots \frac{T}{2}, color=yellow\right)$$



Figur ❌

Restart

Det kunstig bilde

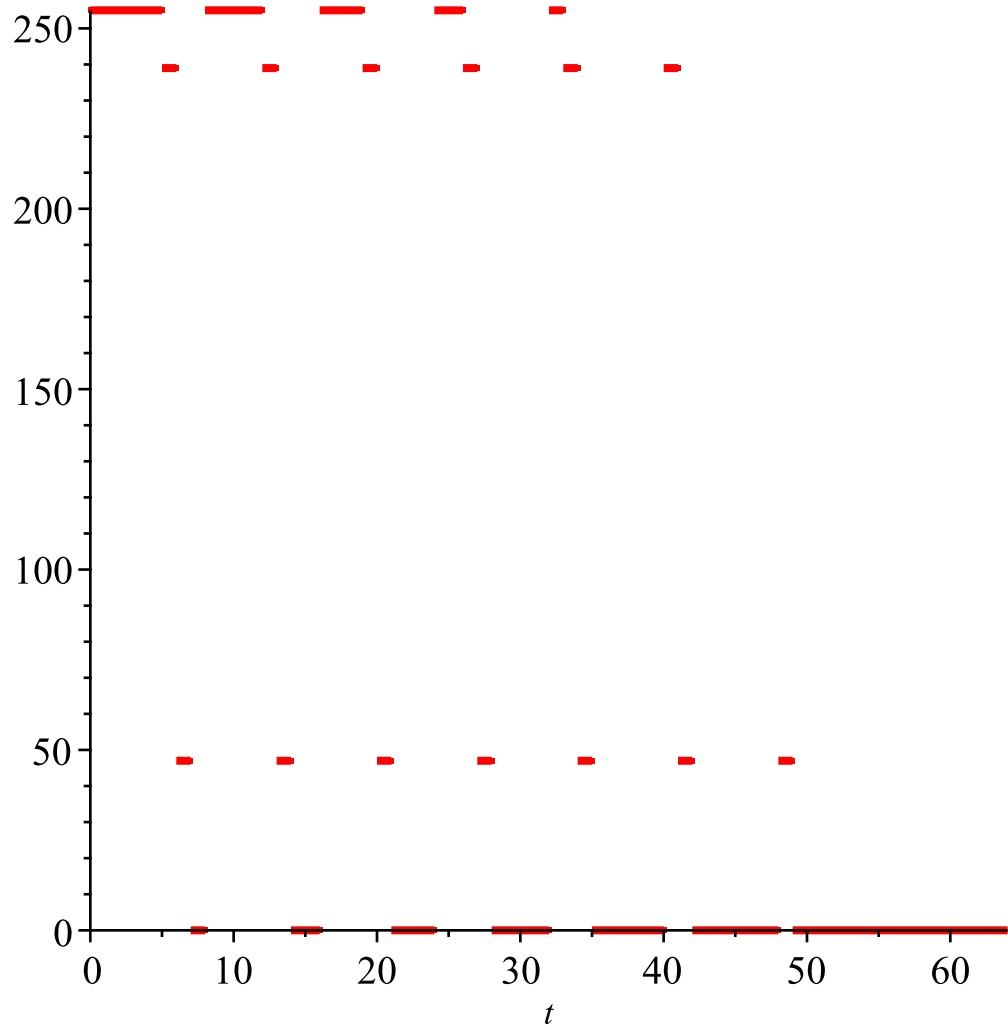
Under er utregningen av metode 1 med bildet nr.2

$f(t) := \text{piecewise}(0 \leq t \leq 1.0, 255, 1.0 \leq t \leq 2.0, 255, 2.0 \leq t \leq 3.0, 255, 3.0 \leq t \leq 4.0, 255, 4.0 \leq t \leq 5.0, 255, 5.0 \leq t \leq 6.0, 239, 6.0 \leq t \leq 7.0, 47, 7.0 \leq t \leq 8.0, 0, 8.0 \leq t \leq 9.0, 255, 9.0 \leq t \leq 10.0, 255, 10.0 \leq t \leq 11.0, 255, 11.0 \leq t \leq 12.0, 255, 12.0 \leq t \leq 13.0, 239, 13.0 \leq t \leq 14.0, 47, 14.0 \leq t \leq 15.0, 0, 15.0 \leq t \leq 16.0, 0, 16.0 \leq t \leq 17.0, 255, 17.0 \leq t \leq 18.0, 255, 18.0 \leq t \leq 19.0, 255, 19.0 \leq t \leq 20.0, 239, 20.0 \leq t \leq 21.0, 47, 21.0 \leq t \leq 22.0, 0, 22.0 \leq t \leq 23.0, 0, 23.0 \leq t \leq 24.0, 0, 24.0 \leq t \leq 25.0, 255, 25.0 \leq t \leq 26.0, 255, 26.0 \leq t \leq 27.0, 239, 27.0 \leq t \leq 28.0, 47, 28.0 \leq t \leq 29.0, 0, 29.0 \leq t \leq 30.0, 0, 30.0 \leq t \leq 31.0, 0, 31.0 \leq t \leq 32.0, 0, 32.0 \leq t \leq 33.0, 255, 33.0 \leq t \leq 34.0, 239, 34.0 \leq t \leq 35.0, 47, 35.0 \leq t \leq 36.0, 0, 36.0 \leq t \leq 37.0, 0, 37.0 \leq t \leq 38.0, 0, 38.0 \leq t \leq 39.0, 0, 39.0 \leq t \leq 40.0, 0, 40.0 \leq t \leq 41.0, 239, 41.0 \leq t \leq 42.0, 47, 42.0 \leq t \leq 43.0, 0, 43.0 \leq t \leq 44.0, 0, 44.0 \leq t \leq 45.0, 0, 45.0 \leq t \leq 46.0, 0, 46.0 \leq t \leq 47.0, 0, 47.0 \leq t \leq 48.0, 0, 48.0 \leq t \leq 49.0, 47, 49.0 \leq t \leq 50.0, 0, 50.0 \leq t \leq 51.0, 0, 51.0 \leq t \leq 52.0, 0, 52.0 \leq t \leq 53.0, 0, 53.0 \leq t \leq 54.0, 0, 54.0 \leq t \leq 55.0, 0, 55.0 \leq t \leq 56.0, 0, 56.0 \leq t \leq 57.0, 0, 57.0 \leq t \leq 58.0, 0, 58.0 \leq t \leq 59.0, 0, 59.0 \leq t \leq 60.0, 0, 60.0 \leq t \leq 61.0, 0, 61.0 \leq t \leq 62.0, 0, 62.0 \leq t \leq 63.0, 0, 63.0 \leq t \leq 64.0, 0) : T := 2 \cdot 64;$

128

(4.2.2.1.7)

$P_s := j \rightarrow \text{plot}\left(f(t - j \cdot T), t = \frac{j \cdot T}{2} .. \frac{T}{2} \cdot (j + 1), \text{discont} = \text{true}, \text{symbol} = \text{"point"}, \text{color} = \text{"red"}, \text{thickness} = 3\right) :$
 $P_org := \text{plots:-display}([seq(P_s(j), j = 0)])$



Figur X

$$a_0 := \frac{4}{T} \cdot \text{int}\left(f(t), t=0 \dots \frac{T}{2}\right)$$

174.6250000
(4.2.2.1.8)

$$a_n := n \rightarrow \frac{4}{T} \cdot \text{int}\left(f(t) \cdot \cos\left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T}\right) \cdot t\right), t=0 \dots \frac{T}{2}\right)$$

$$n \rightarrow \frac{4 \left(\int_0^{\frac{1}{2} T} f(t) \cos\left(\frac{2 n \pi t}{T}\right) dt \right)}{T}$$
(4.2.2.1.9)

$$\psi := (t, l) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \text{sum}\left(a_n(n) \cdot \cos\left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T}\right) \cdot t\right), n=1 \dots l\right)$$

$$(t, l) \rightarrow \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^l a_n(n) \cos\left(\frac{2 n \pi t}{T}\right) \quad (4.2.2.1.10)$$

$l := 30 :$

$\Psi_l := evalf(\psi(t, l))$

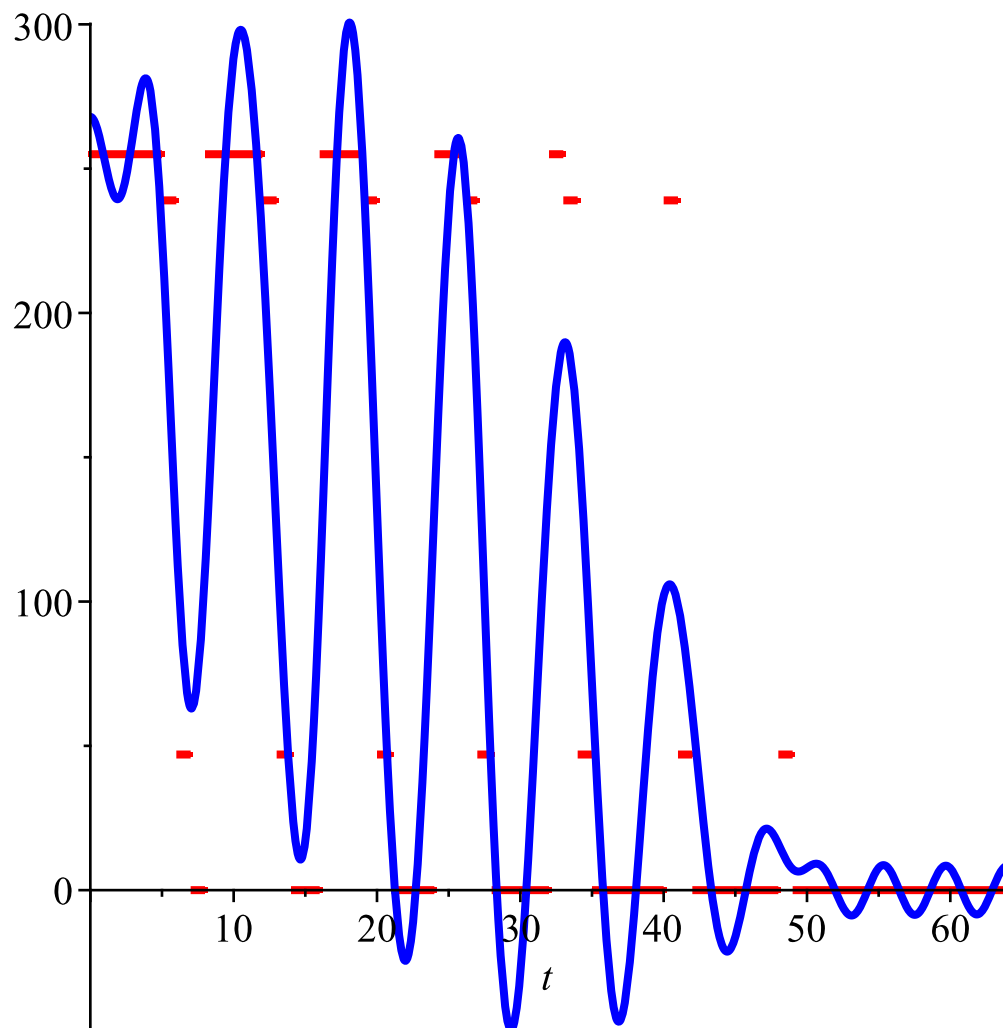
$$\begin{aligned} & 37.44296117 \cos(0.7363107783 t) + 11.48941865 \cos(0.6872233931 t) \quad (4.2.2.1.11) \\ & + 6.261527702 \cos(0.6381360078 t) \\ & + 9.339745335 \cos(0.5890486226 t) + 3.919654668 \cos(1.079922475 t) \\ & + 4.337172607 \cos(1.129009860 t) + 6.488675903 \cos(0.7853981635 t) \\ & - 68.47655620 \cos(0.8344855487 t) \\ & - 58.79769524 \cos(0.8835729339 t) \\ & + 3.053133572 \cos(0.9326603192 t) \\ & + 13.47659130 \cos(0.9817477044 t) + 1.510748248 \cos(1.030835090 t) \\ & + 2.326883905 \cos(1.178097245 t) + 4.342268974 \cos(1.227184630 t) \\ & + 4.103968140 \cos(1.276272016 t) + 3.146958559 \cos(1.325359401 t) \\ & + 6.998963097 \cos(1.374446786 t) + 4.367747001 \cos(1.423534171 t) \\ & + 7.889420968 \cos(1.472621557 t) + 87.31250000 \\ & + 106.0587638 \cos(0.04908738522 t) \\ & + 17.06261344 \cos(0.09817477044 t) \\ & + 6.453685153 \cos(0.1472621557 t) \\ & + 10.76460122 \cos(0.1963495409 t) \\ & + 4.466594453 \cos(0.2454369261 t) \\ & + 5.800017106 \cos(0.2945243113 t) \\ & + 6.041196480 \cos(0.3436116965 t) \\ & + 4.218106830 \cos(0.3926990818 t) \\ & + 6.016474294 \cos(0.4417864670 t) \\ & + 5.788666897 \cos(0.4908738522 t) \\ & + 4.740925924 \cos(0.5399612374 t) \end{aligned}$$

$P_\Psi := plot\left(\Psi_l(t), t = 0 \dots \frac{T}{2}, color = "blue", thickness = 3\right) :$

$Pr_\Psi := plot([seq(\psi(t, j), j = 0 \dots (l - 1))], t = 0 \dots T, color = "green", linestyle$

$= "dash") :$

$plots:-display([P_{org}, P_\Psi])$



Figur X

Bildene

Bilde til venstre er originalbildet, og det andre er konstruert av fourierrekken. Kontrasten går diagonalt fra nederste venstre hjørne til det øverste høyre hjørne. Med metode 1, som leser fra venstre til høyre på hver linje, er det ikke trivielt at kontraster går på skrått av bildet. Som et av hvordan bildet blir lest, blir det store forskjeller på høyre og venstre kant av bildet. Under er differansen mellom det originale bildet, og bildet som er konstruert med fourierrekker. Differansen er representert i en matrise og en graf.

```

$$\Delta := \text{Matrix}([ [0, 3, 16, 0, 0, 12, -74, -63],$$


$$[-111, 40, 0, 0, 15, -76, -32, -16],$$


$$[-104, 23, 0, -14, -84, -18, 0, -21],$$


$$[124, 20, -15, -119, -37, 0, 0, -52],$$


$$[112, 50, -112, -71, 0, 0, 0, -60],$$


$$[-118, -51, -61, -13, 0, 0, -6, -20],$$


$$[31, -7, -7, -8, 0, 0, 0, -7],$$

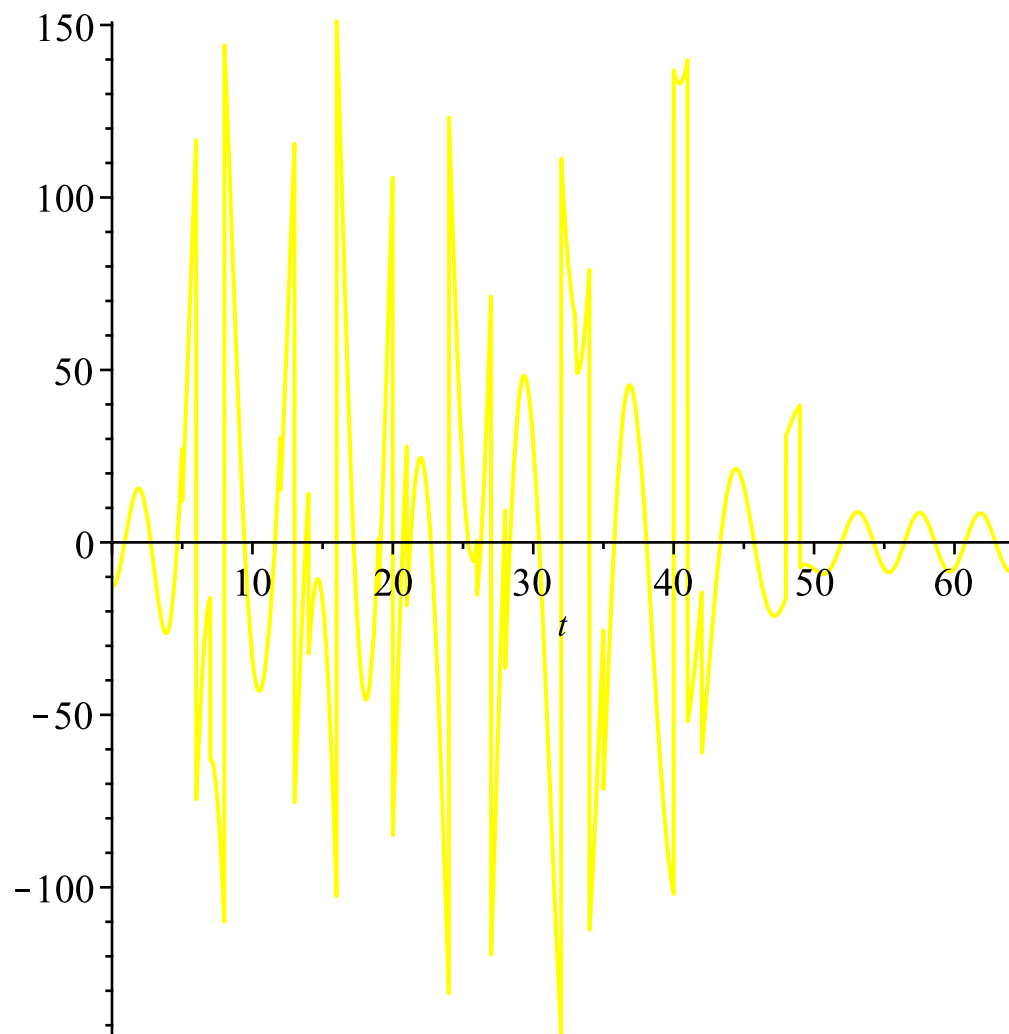
```


[-5, 0, 0, -4, -7, 0, 0, 0]])

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 16 & 0 & 0 & 12 & -74 & -63 \\ -111 & 40 & 0 & 0 & 15 & -76 & -32 & -16 \\ -104 & 23 & 0 & -14 & -84 & -18 & 0 & -21 \\ 124 & 20 & -15 & -119 & -37 & 0 & 0 & -52 \\ 112 & 50 & -112 & -71 & 0 & 0 & 0 & -60 \\ -118 & -51 & -61 & -13 & 0 & 0 & -6 & -20 \\ 31 & -7 & -7 & -8 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -5 & 0 & 0 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.2.2.1.12)

$P_{\Delta} := \text{plot}\left(f(t) - \psi_I(t), t=0 \dots \frac{T}{2}, \text{color}=\text{yellow}\right)$



Figur ✖

Metode 2

I metode 2 brukes metoden som leser sikk-sakk. Det vil si at første linje leses fra venstre til høyre og andre linje fra høyre til venstre. Annenhver linje leses motsatt så linje tre er lik som linje én og så videre.

Under har vi dataene lest på denne måten. Her er alle pikslene fra 0 til og med 64 inkludert i en rekke. Tatt ut fra en 8x8 blokk i bildet "natur.png".

$f(t) := \text{piecewise}(0 \leq t \leq 1.0, 35, 1.0 \leq t \leq 2.0, 38, 2.0 \leq t \leq 3.0, 40, 3.0 \leq t \leq 4.0, 41, 4.0 \leq t \leq 5.0, 35, 5.0 \leq t \leq 6.0, 29, 6.0 \leq t \leq 7.0, 29, 7.0 \leq t \leq 8.0, 34, 8.0 \leq t \leq 9.0, 31, 9.0 \leq t \leq 10.0, 30, 10.0 \leq t \leq 11.0, 31, 11.0 \leq t \leq 12.0, 37, 12.0 \leq t \leq 13.0, 38, 13.0 \leq t \leq 14.0, 34, 14.0 \leq t \leq 15.0, 30, 15.0 \leq t \leq 16.0, 29, 16.0 \leq t \leq 17.0, 23, 17.0 \leq t \leq 18.0, 32, 18.0 \leq t \leq 19.0, 40, 19.0 \leq t \leq 20.0, 43, 20.0 \leq t \leq 21.0, 55, 21.0 \leq t \leq 22.0, 54, 22.0 \leq t \leq 23.0, 45, 23.0 \leq t \leq 24.0, 43, 24.0 \leq t \leq 25.0, 86, 25.0 \leq t \leq 26.0, 116, 26.0 \leq t \leq 27.0, 149, 27.0 \leq t \leq 28.0, 136, 28.0 \leq t \leq 29.0, 91, 29.0 \leq t \leq 30.0, 70, 30.0 \leq t \leq 31.0, 62, 31.0 \leq t \leq 32.0, 47, 32.0 \leq t \leq 33.0, 94, 33.0 \leq t \leq 34.0, 72, 34.0 \leq t \leq 35.0, 49, 35.0 \leq t \leq 36.0, 58, 36.0 \leq t \leq 37.0, 123, 37.0 \leq t \leq 38.0, 160, 38.0 \leq t \leq 39.0, 121, 39.0 \leq t \leq 40.0, 71, 40.0 \leq t \leq 41.0, 47, 41.0 \leq t \leq 42.0, 65, 42.0 \leq t \leq 43.0, 82, 43.0 \leq t \leq 44.0, 56, 44.0 \leq t \leq 45.0, 28, 45.0 \leq t \leq 46.0, 40, 46.0 \leq t \leq 47.0, 65, 47.0 \leq t \leq 48.0, 91, 48.0 \leq t \leq 49.0, 74, 49.0 \leq t \leq 50.0, 55, 50.0 \leq t \leq 51.0, 39, 51.0 \leq t \leq 52.0, 37, 52.0 \leq t \leq 53.0, 45, 53.0 \leq t \leq 54.0, 52, 54.0 \leq t \leq 55.0, 56, 55.0 \leq t \leq 56.0, 51, 56.0 \leq t \leq 57.0, 85, 57.0 \leq t \leq 58.0, 83, 58.0 \leq t \leq 59.0, 80, 59.0 \leq t \leq 60.0, 71, 60.0 \leq t \leq 61.0, 60, 61.0 \leq t \leq 62.0, 56, 62.0 \leq t \leq 63.0, 52, 63.0 \leq t \leq 64.0, 57)$
:

Videre skal denne rekken brukes i en fourierrekke. Dette gjøres så vi kan erstatte en rekke med pikseldata om til en fourierrekke som bruker mindre data, men viser tilnærmet samme bilde. For at dette skal gjøres må vi definere noen vardier.

$c \text{ in } \sim \text{Re} :$

$T := 2 \cdot 64 :$

$\omega := \frac{2 \pi}{T} :$

Videre kalkuleres a_0 og a_n som skal brukes i fourierrekken ψ .

$a_0 := \frac{4}{T} \cdot \text{int} \left(f(t), t = 0 \dots \frac{T}{2} \right) :$

$a_n := n \rightarrow \frac{4}{T} \cdot \text{int} \left(f(t) \cdot \cos \left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \right) \cdot t \right), t = 0 \dots \frac{T}{2} \right) :$

$$\psi := (t, l) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \text{sum} \left(a_n(n) \cdot \cos \left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T} \right) \cdot t \right), n = 1 \dots l \right)$$

$$\psi := (t, l) \mapsto \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{n=1}^l a_n(n) \cos \left(\frac{2 n \pi t}{T} \right) \right) \quad (4.2.2.2.1)$$

Når vi regner ut fourierrekken får vi følgende verdier.

$l := 30 :$

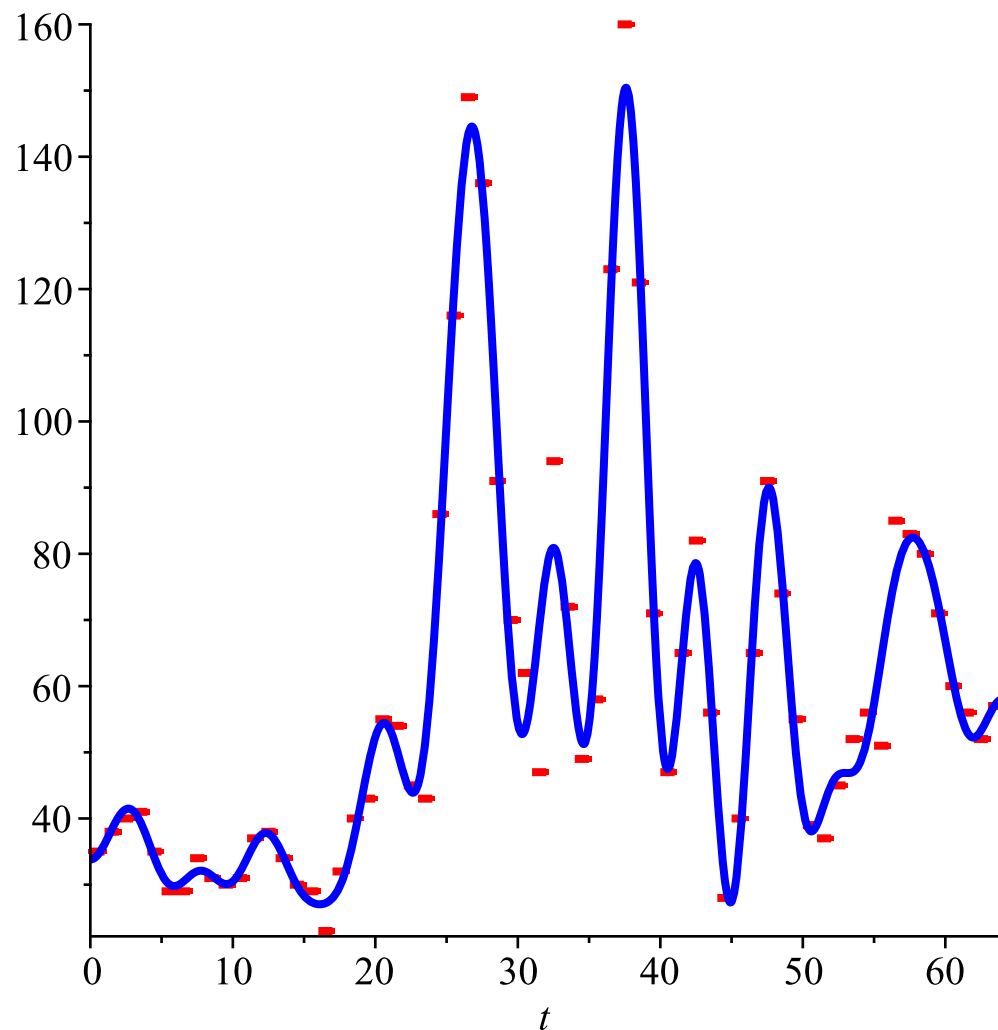
$\psi_l := \text{evalf}(\psi(t, l))$

$$\begin{aligned} \psi_l := & 2.341256007 \cos(1.472621557 t) + 2.148735114 \cos(0.9326603192 t) \quad (4.2.2.2.2) \\ & + 4.190673122 \cos(0.5399612374 t) - 2.858826814 \cos(0.7363107783 t) \\ & - 0.03472056186 \cos(0.8835729339 t) \\ & + 0.5307959997 \cos(1.030835090 t) + 3.416281422 \cos(0.4417864670 t) \\ & + 59.50000000 - 8.161832632 \cos(1.079922475 t) \\ & - 9.149249802 \cos(0.3926990818 t) - 1.607026366 \cos(0.3436116965 t) \\ & + 7.823331424 \cos(0.6872233931 t) \\ & + 0.7948032883 \cos(0.2945243113 t) - 3.153960481 \cos(1.423534171 t) \\ & + 4.452976208 \cos(0.9817477044 t) - 15.37498004 \cos(0.5890486226 t) \\ & - 2.204861485 \cos(0.7853981635 t) + 9.111487328 \cos(0.4908738522 t) \\ & - 20.62772473 \cos(0.09817477044 t) \\ & + 4.698111812 \cos(0.6381360078 t) \\ & - 14.04741687 \cos(0.04908738522 t) + 11.27713635 \cos(1.178097245 t) \\ & - 3.423161034 \cos(1.129009860 t) - 0.8232963198 \cos(1.374446786 t) \\ & - 1.888083889 \cos(0.1472621557 t) + 13.99991020 \cos(0.1963495409 t) \\ & + 3.231925023 \cos(0.2454369261 t) + 5.500081535 \cos(1.325359401 t) \\ & - 7.026962955 \cos(1.276272016 t) - 4.876834627 \cos(0.8344855487 t) \\ & - 3.949392806 \cos(1.227184630 t) \end{aligned}$$

$P1 := \text{plot} \left(\psi_l(t), t = 0 \dots \frac{T}{2}, \text{color} = \text{"blue"}, \text{thickness} = 3 \right) :$

$P2 := \text{plot}(f(t), t = 0 \dots 64, \text{discont} = \text{true}, \text{symbol} = \text{"point"}, \text{color} = \text{"red"}, \text{thickness} = 3) :$

$\text{plots:-display}([P2, P1])$



Grafen over har alle pikslene i x-aksen og fargeverdien i y-aksen. De røde strekene representerer presis verdi av pikslene i bildet. Den blå grafen er fourierrekken som er en etterligning av bildet sine faktiske verdier.

Original:

BILDE ORIGINAL

```
Matrix([ [35, 38, 40, 41, 35, 29, 29, 34],
[29, 30, 34, 38, 37, 31, 30, 31],
[23, 32, 40, 43, 55, 54, 45, 43],
[47, 62, 70, 91, 136, 149, 116, 86],
[94, 72, 49, 58, 123, 160, 121, 71],
[91, 65, 40, 28, 56, 82, 65, 47],
[74, 55, 39, 37, 45, 52, 56, 51],
[57, 52, 56, 60, 71, 80, 83, 85]])
```

$$\begin{bmatrix} 35 & 38 & 40 & 41 & 35 & 29 & 29 & 34 \\ 29 & 30 & 34 & 38 & 37 & 31 & 30 & 31 \\ 23 & 32 & 40 & 43 & 55 & 54 & 45 & 43 \\ 47 & 62 & 70 & 91 & 136 & 149 & 116 & 86 \\ 94 & 72 & 49 & 58 & 123 & 160 & 121 & 71 \\ 91 & 65 & 40 & 28 & 56 & 82 & 65 & 47 \\ 74 & 55 & 39 & 37 & 45 & 52 & 56 & 51 \\ 57 & 52 & 56 & 60 & 71 & 80 & 83 & 85 \end{bmatrix}$$

(4.2.2.2.3)

Fourier:

FOURIER BILDE

Matrix([[33, 36, 40, 41, 36, 31, 29, 31],
[28, 32, 36, 37, 34, 30, 30, 32],
[27, 27, 32, 42, 52, 53, 46, 45],
[59, 54, 79, 119, 143, 134, 99, 63],
[77, 77, 57, 54, 91, 139, 145, 99],
[82, 49, 27, 43, 73, 74, 52, 54],
[87, 63, 41, 39, 45, 46, 48, 57],
[55, 52, 56, 66, 77, 82, 80, 70]])

$$\begin{bmatrix} 33 & 36 & 40 & 41 & 36 & 31 & 29 & 31 \\ 28 & 32 & 36 & 37 & 34 & 30 & 30 & 32 \\ 27 & 27 & 32 & 42 & 52 & 53 & 46 & 45 \\ 59 & 54 & 79 & 119 & 143 & 134 & 99 & 63 \\ 77 & 77 & 57 & 54 & 91 & 139 & 145 & 99 \\ 82 & 49 & 27 & 43 & 73 & 74 & 52 & 54 \\ 87 & 63 & 41 & 39 & 45 & 46 & 48 & 57 \\ 55 & 52 & 56 & 66 & 77 & 82 & 80 & 70 \end{bmatrix}$$

(4.2.2.2.4)

Delta:

$\Delta := \text{Matrix}([[2, 2, 0, 0, -1, -2, 0, 3],$
[1, -2, -2, 1, 3, 1, 0, -1],
[-4, 5, 8, 1, 3, 1, -1, -2],
[-12, 8, -9, -28, -7, 15, 17, 23],
[17, -5, -8, 4, 32, 21, -24, -28],
[9, 16, 13, -15, -17, 8, 13, -7],
[-13, -8, -2, -2, 0, 6, 8, -6],

[2, 0, 0, -6, -6, -2, 3, 15]])

$$\Delta := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 8 & 1 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ -12 & 8 & -9 & -28 & -7 & 15 & 17 & 23 \\ 17 & -5 & -8 & 4 & 32 & 21 & -24 & -28 \\ 9 & 16 & 13 & -15 & -17 & 8 & 13 & -7 \\ -13 & -8 & -2 & -2 & 0 & 6 & 8 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & -6 & -2 & 3 & 15 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.2.5)$$

$P_{\Delta} := \text{plot}\left(f(t) - \psi_I(t), t=0 \dots \frac{T}{2}, \text{color}=\text{yellow}\right)$

Error, (in plot) expecting a real constant as range endpoint but received (1/2)*T

Under har vi dataene i $f(x)$ som en rekke. Her er alle pikslene fra 0 til og med 64 inkludert i en rekke. Tatt ut fra en 8x8 blokk i bildet "sirkel.png".

$f(t) := \text{piecewise}(0 \leq t \leq 1.0, 255, 1.0 \leq t \leq 2.0, 255, 2.0 \leq t \leq 3.0, 255, 3.0 \leq t \leq 4.0, 255, 4.0 \leq t \leq 5.0, 255, 5.0 \leq t \leq 6.0, 239, 6.0 \leq t \leq 7.0, 47, 7.0 \leq t \leq 8.0, 0, 8.0 \leq t \leq 9.0, 0, 9.0 \leq t \leq 10.0, 0, 10.0 \leq t \leq 11.0, 47, 11.0 \leq t \leq 12.0, 239, 12.0 \leq t \leq 13.0, 255, 13.0 \leq t \leq 14.0, 255, 14.0 \leq t \leq 15.0, 255, 15.0 \leq t \leq 16.0, 255, 16.0 \leq t \leq 17.0, 255, 17.0 \leq t \leq 18.0, 255, 18.0 \leq t \leq 19.0, 255, 19.0 \leq t \leq 20.0, 239, 20.0 \leq t \leq 21.0, 47, 21.0 \leq t \leq 22.0, 0, 22.0 \leq t \leq 23.0, 0, 23.0 \leq t \leq 24.0, 0, 24.0 \leq t \leq 25.0, 0, 25.0 \leq t \leq 26.0, 0, 26.0 \leq t \leq 27.0, 0, 27.0 \leq t \leq 28.0, 0, 28.0 \leq t \leq 29.0, 47, 29.0 \leq t \leq 30.0, 239, 30.0 \leq t \leq 31.0, 255, 31.0 \leq t \leq 32.0, 255, 32.0 \leq t \leq 33.0, 255, 33.0 \leq t \leq 34.0, 239, 34.0 \leq t \leq 35.0, 47, 35.0 \leq t \leq 36.0, 0, 36.0 \leq t \leq 37.0, 0, 37.0 \leq t \leq 38.0, 0, 38.0 \leq t \leq 39.0, 0, 39.0 \leq t \leq 40.0, 0, 40.0 \leq t \leq 41.0, 0, 41.0 \leq t \leq 42.0, 0, 42.0 \leq t \leq 43.0, 0, 43.0 \leq t \leq 44.0, 0, 44.0 \leq t \leq 45.0, 0, 45.0 \leq t \leq 46.0, 0, 46.0 \leq t \leq 47.0, 47, 47.0 \leq t \leq 48.0, 239, 48.0 \leq t \leq 49.0, 47, 49.0 \leq t \leq 50.0, 0, 50.0 \leq t \leq 51.0, 0, 51.0 \leq t \leq 52.0, 0, 52.0 \leq t \leq 53.0, 0, 53.0 \leq t \leq 54.0, 0, 54.0 \leq t \leq 55.0, 0, 55.0 \leq t \leq 56.0, 0, 56.0 \leq t \leq 57.0, 0, 57.0 \leq t \leq 58.0, 0, 58.0 \leq t \leq 59.0, 0, 59.0 \leq t \leq 60.0, 0, 60.0 \leq t \leq 61.0, 0, 61.0 \leq t \leq 62.0, 0, 62.0 \leq t \leq 63.0, 0, 63.0 \leq t \leq 64.0, 0) :$

Videre skal denne rekken brukes i en fourierrekke. Dette gjøres så vi kan erstatte en rekke med pikseldata om til en fourierrekke som bruker mindre data, men viser tilnærmet samme bilde. For at dette skal gjøres må vi definere noen vardier.

c in ~ Re :

$T := 2 \cdot 64 :$

$\omega := \frac{2 \pi}{T} :$

Videre kalkuleres a_0 og a_n som skal brukes i fourierrekken ψ .

$a_0 := \frac{4}{T} \cdot \text{int} \left(f(t), t = 0 \dots \frac{T}{2} \right) :$

$a_n := n \rightarrow \frac{4}{T} \cdot \text{int} \left(f(t) \cdot \cos \left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \right) \cdot t \right), t = 0 \dots \frac{T}{2} \right) :$

$\psi := (t, l) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \text{sum} \left(a_n(n) \cdot \cos \left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \right) \cdot t \right), n = 1 \dots l \right)$

$$\psi := (t, l) \mapsto \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{n=1}^l a_n(n) \cos \left(\frac{2 n \pi t}{T} \right) \right) \quad (4.2.2.2.6)$$

Når vi regner ut fourierrekken får vi følgende verdier.

$l := 30 :$

$\psi_l := \text{evalf}(\psi(t, l))$

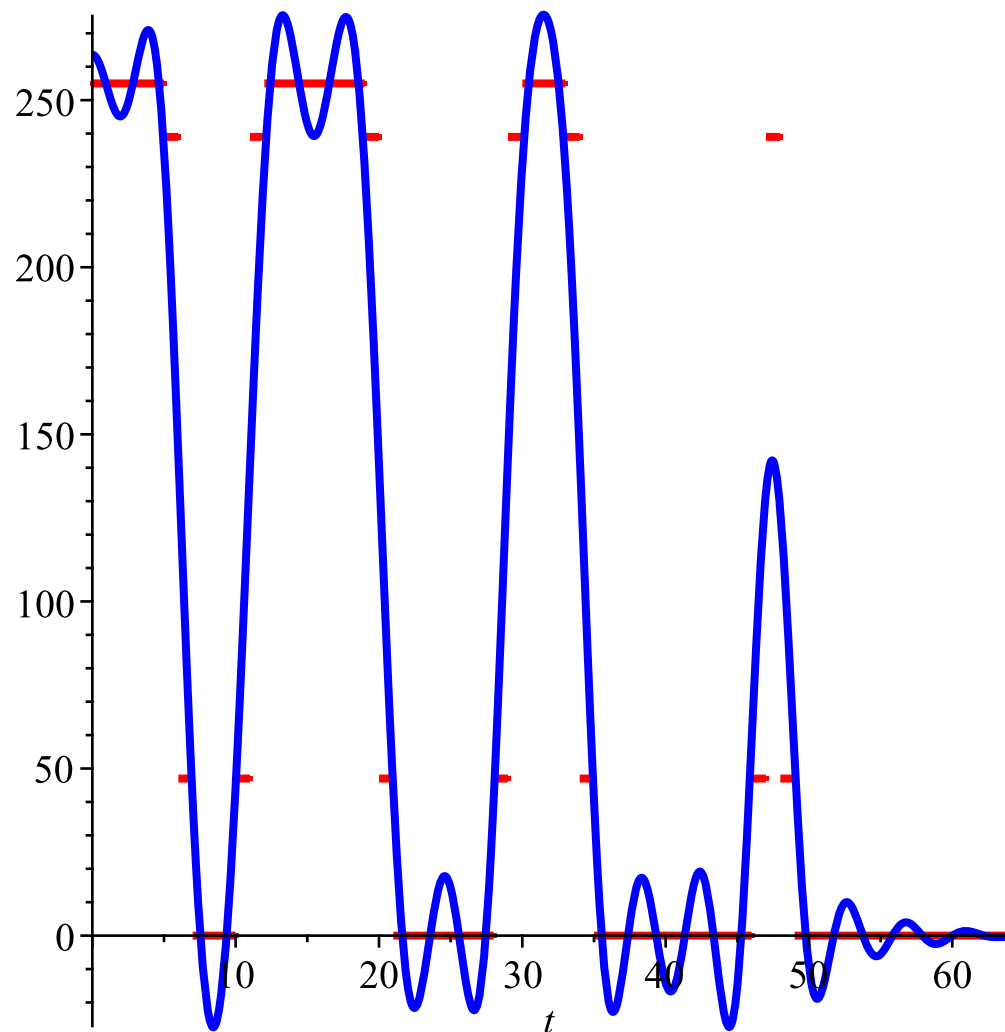
$\psi_l := -5.178799325 \cos(1.374446786 t) + 14.43287480 \cos(1.325359401 t) \quad (4.2.2.2.7)$

$$\begin{aligned} & - 0.2758849509 \cos(1.276272016 t) - 2.928708740 \cos(1.227184630 t) \\ & + 7.59868663 \cos(0.09817477044 t) \\ & + 94.76072589 \cos(0.04908738522 t) + 7.848280088 \cos(1.472621557 t) \\ & - 2.032607729 \cos(1.423534171 t) + 4.725676732 \cos(1.178097245 t) \\ & - 8.128108816 \cos(1.129009860 t) + 9.288161938 \cos(1.079922475 t) \\ & + 18.53256178 \cos(1.030835090 t) + 9.868053260 \cos(0.9817477044 t) \\ & + 4.170214805 \cos(0.9326603192 t) - 26.89808733 \cos(0.8835729339 t) \\ & + 2.82012366 \cos(0.1472621557 t) + 3.628188082 \cos(0.1963495409 t) \\ & - 2.833511848 \cos(0.2454369261 t) - 17.08111621 \cos(0.2945243113 t) \\ & + 31.59389713 \cos(0.3436116965 t) + 94.78152005 \cos(0.3926990818 t) \\ & + 35.73977026 \cos(0.4417864670 t) - 23.77173001 \cos(0.4908738522 t) \\ & - 9.727022594 \cos(0.5399612374 t) - 0.442978238 \cos(0.5890486226 t) \\ & - 0.5581053872 \cos(0.6381360078 t) \\ & - 26.28139678 \cos(0.6872233931 t) - 27.53698705 \cos(0.7363107783 t) \\ & + 6.488675841 \cos(0.7853981635 t) - 16.34303865 \cos(0.8344855487 t) \\ & + 87.31250000 \end{aligned}$$

```
P1 := plot( $\psi_I(t)$ , t = 0 ..  $\frac{T}{2}$ , color = "blue", thickness = 3) :
```

```
P2 := plot(f(t), t = 0 .. 64, discount = true, symbol = "point", color = "red", thickness = 3) :
```

```
plots:-display([P2, P1])
```



Grafen over har alle pikslene i x-aksen og fargeverdien i y-aksen. De røde strekene representerer presis verdi av pikslene i bildet. Den blå grafen er fourierrekken som er en etterligning av bildet sine faktiske verdier.

Original:

BILDE ORIGINAL

```
[ [255, 255, 255, 255, 255, 239, 47, 0],  
  [255, 255, 255, 255, 239, 47, 0, 0],  
  [255, 255, 255, 239, 47, 0, 0, 0],
```



```
[255, 255, 239, 47, 0, 0, 0, 0],
[255, 239, 47, 0, 0, 0, 0, 0],
[239, 47, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[47, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]
```

Fourier:

FOURIER BILDE

```
[ [255, 254, 245, 255, 255, 235, 143, 40],
  [242, 255, 255, 230, 140, 44, 0, 0],
  [243, 255, 255, 230, 140, 43, 0, 0],
  [255, 230, 143, 40, 0, 0, 14, 11],
  [255, 230, 144, 40, 0, 0, 15, 8],
  [132, 58, 0, 0, 10, 15, 0, 0],
  [127, 52, 0, 0, 5, 8, 0, 0],
  [0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 1]]
```

Delta:

```
[ [0, 1, 10, 0, 0, 4, -96, -40],
  [13, 0, 0, 25, 99, 3, 0, 0],
  [12, 0, 0, 9, -93, -43, 0, 0],
  [0, 25, 96, 7, 0, 0, -14, -11],
  [0, 9, -97, -40, 0, 0, -15, -8],
  [107, -11, 0, 0, -10, -15, 0, 0],
  [-80, -52, 0, 0, -5, -8, 0, 0],
  [0, 0, -1, 0, 0, 0, -3, -1]]
```

▼ **Metode 3**

Naturlig bilde

Under er den genererte rekken som ble laget av å bruke metode 3. Som nevnt i fremgangsmåten ble et python-skript brukt for å generere denne funksjonen (Se vedlegg 1).

restart;

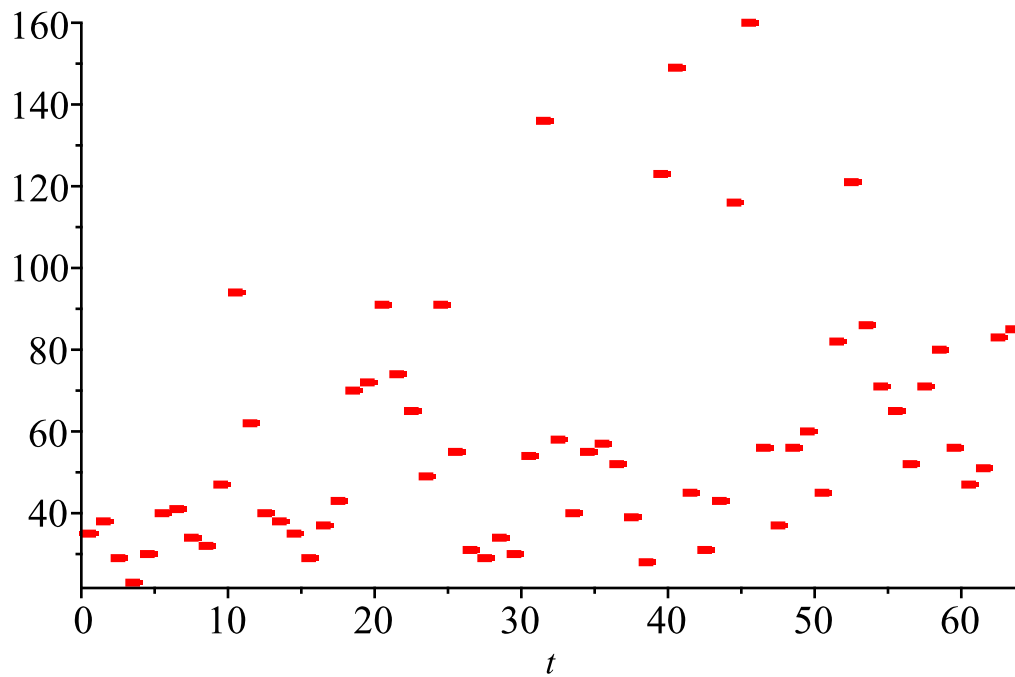
$f(t) := \text{piecewise}(0 \leq t \leq 1.0, 35, 1.0 \leq t \leq 2.0, 38, 2.0 \leq t \leq 3.0, 29, 3.0 \leq t \leq 4.0, 23,$
 $4.0 \leq t \leq 5.0, 30, 5.0 \leq t \leq 6.0, 40, 6.0 \leq t \leq 7.0, 41, 7.0 \leq t \leq 8.0, 34, 8.0 \leq t \leq 9.0,$
 $32, 9.0 \leq t \leq 10.0, 47, 10.0 \leq t \leq 11.0, 94, 11.0 \leq t \leq 12.0, 62, 12.0 \leq t \leq 13.0, 40,$

13.0 ≤ t ≤ 14.0, 38, 14.0 ≤ t ≤ 15.0, 35, 15.0 ≤ t ≤ 16.0, 29, 16.0 ≤ t ≤ 17.0, 37,
 17.0 ≤ t ≤ 18.0, 43, 18.0 ≤ t ≤ 19.0, 70, 19.0 ≤ t ≤ 20.0, 72, 20.0 ≤ t ≤ 21.0, 91,
 21.0 ≤ t ≤ 22.0, 74, 22.0 ≤ t ≤ 23.0, 65, 23.0 ≤ t ≤ 24.0, 49, 24.0 ≤ t ≤ 25.0, 91,
 25.0 ≤ t ≤ 26.0, 55, 26.0 ≤ t ≤ 27.0, 31, 27.0 ≤ t ≤ 28.0, 29, 28.0 ≤ t ≤ 29.0, 34,
 29.0 ≤ t ≤ 30.0, 30, 30.0 ≤ t ≤ 31.0, 54, 31.0 ≤ t ≤ 32.0, 136, 32.0 ≤ t ≤ 33.0, 58,
 33.0 ≤ t ≤ 34.0, 40, 34.0 ≤ t ≤ 35.0, 55, 35.0 ≤ t ≤ 36.0, 57, 36.0 ≤ t ≤ 37.0, 52,
 37.0 ≤ t ≤ 38.0, 39, 38.0 ≤ t ≤ 39.0, 28, 39.0 ≤ t ≤ 40.0, 123, 40.0 ≤ t ≤ 41.0, 149,
 41.0 ≤ t ≤ 42.0, 45, 42.0 ≤ t ≤ 43.0, 31, 43.0 ≤ t ≤ 44.0, 43, 44.0 ≤ t ≤ 45.0, 116,
 45.0 ≤ t ≤ 46.0, 160, 46.0 ≤ t ≤ 47.0, 56, 47.0 ≤ t ≤ 48.0, 37, 48.0 ≤ t ≤ 49.0, 56,
 49.0 ≤ t ≤ 50.0, 60, 50.0 ≤ t ≤ 51.0, 45, 51.0 ≤ t ≤ 52.0, 82, 52.0 ≤ t ≤ 53.0, 121,
 53.0 ≤ t ≤ 54.0, 86, 54.0 ≤ t ≤ 55.0, 71, 55.0 ≤ t ≤ 56.0, 65, 56.0 ≤ t ≤ 57.0, 52,
 57.0 ≤ t ≤ 58.0, 71, 58.0 ≤ t ≤ 59.0, 80, 59.0 ≤ t ≤ 60.0, 56, 60.0 ≤ t ≤ 61.0, 47,
 61.0 ≤ t ≤ 62.0, 51, 62.0 ≤ t ≤ 63.0, 83, 63.0 ≤ t ≤ 64.0, 85) : T := 2·64;

T := 128

(4.2.2.3.1)

$P_{org} := \text{plot}\left(f(t), t = 0.. \frac{T}{2}, \text{discont} = \text{true}, \text{symbol} = \text{"point"}, \text{color} = \text{"red"}, \text{thickness} = 3\right)$



Figur **TODO**

$a_n := n \rightarrow \frac{4}{T} \cdot \text{int}\left(f(t) \cdot \cos\left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T}\right) \cdot t\right), t = 0 \dots \frac{T}{2}\right)$

$$a_n := n \mapsto \frac{4 \left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2 n \pi t}{T}\right) dt \right)}{T}$$

(4.2.2.3.2)

$a_0 := \frac{4}{T} \cdot \text{int}\left(f(t), t = 0 \dots \frac{T}{2}\right)$

$a_0 := 119.0000000$

(4.2.2.3.3)

$$\psi := (t, l) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \text{sum} \left(a_n(n) \cdot \cos \left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T} \right) \cdot t \right), n = 1 \dots l \right)$$

$$\psi := (t, l) \mapsto \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{n=1}^l a_n(n) \cos \left(\frac{2 n \pi t}{T} \right) \right) \quad (4.2.2.3.4)$$

$$l := 30$$

$$l := 30 \quad (4.2.2.3.5)$$

$$\psi_l := \text{evalf}(\psi(t, l))$$

$$\psi_l := 14.42273737 \cos(0.5890486226 t) \quad (4.2.2.3.6)$$

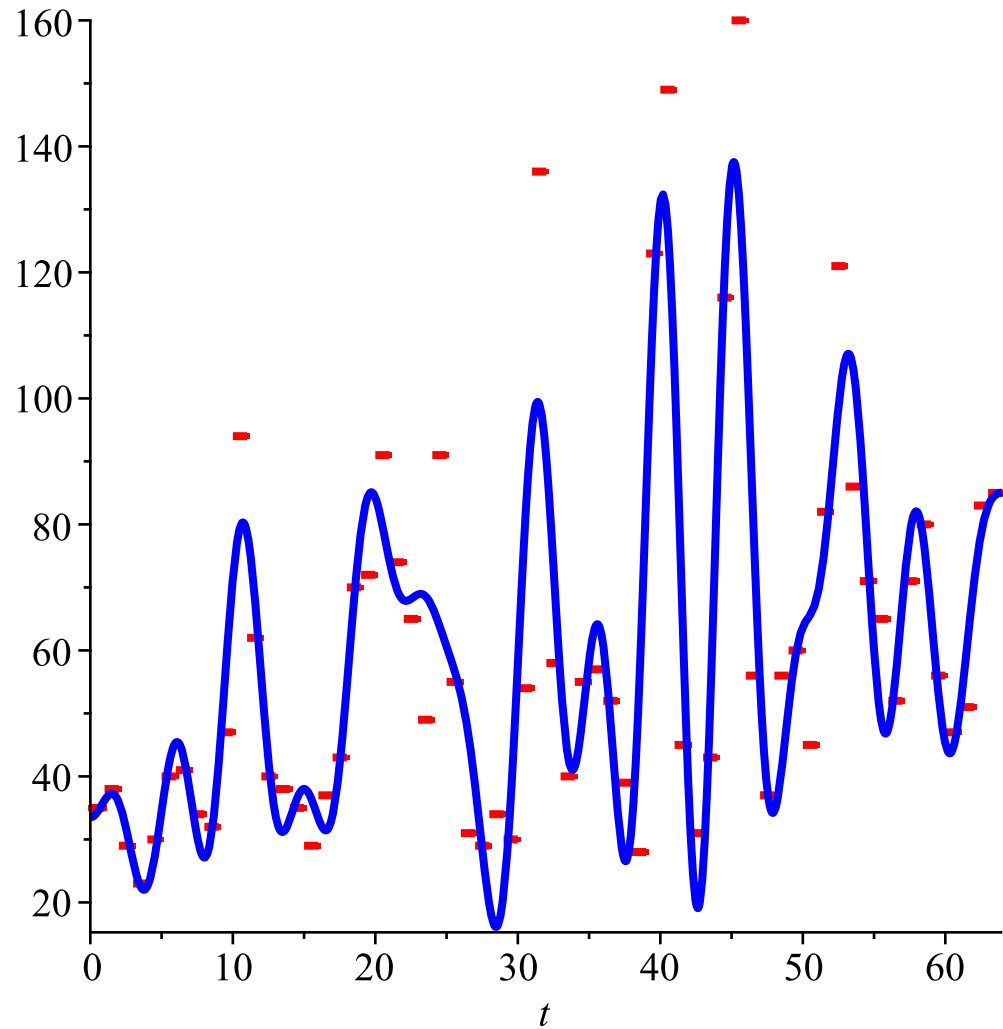
$$\begin{aligned} & - 15.95154437 \cos(0.04908738522 t) \\ & + 2.491166030 \cos(0.8344855487 t) \\ & + 0.2288648922 \cos(0.5399612374 t) \\ & - 4.920585156 \cos(0.09817477044 t) \\ & - 10.70114577 \cos(1.325359401 t) \\ & - 3.046817470 \cos(0.4908738522 t) \\ & + 0.8251672254 \cos(0.9326603192 t) \\ & + 6.370079700 \cos(1.276272016 t) \\ & + 8.410422905 \cos(1.227184630 t) \\ & - 3.058664659 \cos(0.4417864670 t) \\ & - 4.103695131 \cos(0.3926990818 t) \\ & + 0.0480751051 \cos(0.3436116965 t) \\ & - 7.674725384 \cos(1.030835090 t) \\ & + 7.295606929 \cos(1.079922475 t) \\ & + 3.379156066 \cos(0.2945243113 t) \\ & - 6.875958244 \cos(0.1963495409 t) \\ & + 5.300766655 \cos(1.423534171 t) \\ & - 12.72286855 \cos(1.472621557 t) \\ & - 4.034061056 \cos(0.7363107783 t) \\ & - 0.3853117758 \cos(0.1472621557 t) \\ & - 0.9867164463 \cos(0.2454369261 t) \\ & + 1.769126038 \cos(0.7853981635 t) \\ & + 0.8937167995 \cos(0.6381360078 t) \\ & - 1.168868868 \cos(1.129009860 t) \\ & - 2.783162121 \cos(1.178097245 t) \\ & - 12.01165083 \cos(0.8835729339 t) \\ & + 2.481377691 \cos(1.374446786 t) \\ & + 10.45961345 \cos(0.9817477044 t) + 59.50000000 \\ & + 0.053915950 \cos(0.6872233931 t) \end{aligned}$$

$$P_\psi := \text{plot} \left(\psi_l(t), t = 0 \dots \frac{T}{2}, \text{color} = \text{"blue"}, \text{thickness} = 3 \right) :$$

```

Prψ := plot([seq(ψ(t, j), j = 0 ... (l - 1))], t = 0 ... T, color = "green", linestyle
= "dash") :
plots:display([Porg, Pψ])

```



Figur **TODO**

Deretter generere vi et bilde utifra fourierrekken som vi har regnet ut. Dette gjør vi som nevnt ved å legge funksjonsuttrykket vi fikk av $\psi_l(t)$ inn i skriptet (Se vedlegg 1).



Figur TODO



Figur TODO

Her ser vi originalbildet og det genererte fourierbildet. I fourierbildet har vi noen diagonale hakkete linjer, dette er et resultat av metoden vi har brukt for å generere $f(t)$. Selvom det er noen diagonale linjer, er dette bare 8x8 piksler. Når vi legger dette inn i bildet igjen vil vi se at det nesten ikke er synlig. I denne fourierrekken er det 30 ledd, og dermed trenger vi bare å lagre 30 (alle a_n -verdier) verdier istedenfor 64 (en verdi for hver piksel). Under er det en analyse av forskjellen Δ mellom pikseldataen til de to bildene.

Δ

(4.2.2.3.7)

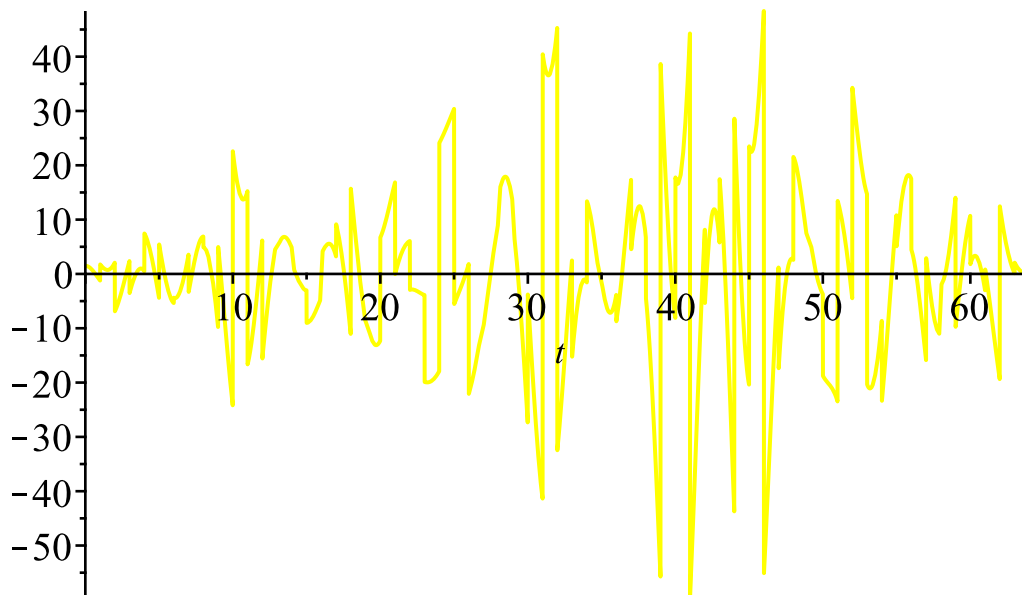
$\Delta := \text{Matrix}([[2, 2, 6, -4, 2, -9, -9, 15], [-6, 8, -3, 5, 4, -22, 9, -5], [-3, 5, -15, 10, -5, -3, -59, 18], [6, -16, 16, 25, 41, 18, 29, -20], [23, -6, -19, -32, 39, 24, 35, -23], [7, -2, -15, -4, -55, 14, 6, 2], [0, 14, 5, -17, -18, 5, -9, 1], [-1, -8, 22, 10, 4, -2, 13, 3]])$

$$\Delta := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & -4 & 2 & -9 & -9 & 15 \\ -6 & 8 & -3 & 5 & 4 & -22 & 9 & -5 \\ -3 & 5 & -15 & 10 & -5 & -3 & -59 & 18 \\ 6 & -16 & 16 & 25 & 41 & 18 & 29 & -20 \\ 23 & -6 & -19 & -32 & 39 & 24 & 35 & -23 \\ 7 & -2 & -15 & -4 & -55 & 14 & 6 & 2 \\ 0 & 14 & 5 & -17 & -18 & 5 & -9 & 1 \\ -1 & -8 & 22 & 10 & 4 & -2 & 13 & 3 \end{bmatrix}$$

(4.2.2.3.8)

Vi ser her at det er store forskjeller mellom pikselverdier. Dette er det samme fenomenet vi ser i grafen over. Hvis vi grafer forskjellen mellom $f(t)$ og $\psi_I(t)$ får vi en enda bedre visualisering av forskjellene.

$$P_{\Delta} := \text{plot}\left(f(t) - \psi_I(t), t = 0 \dots \frac{T}{2}, \text{color} = \text{"yellow"}\right)$$



Figur **TODO**

Som vi nå også ser fra P_{Δ} så er forskjellen mellom originalbildet og fourierrekken ganske stor. Vi ser utifra grafen P_{Δ} at det er et avvik på rundt 60 på det meste. Dette forteller oss at bildet generert fra fourierrekken mest sannsynlig har steder der den ikke representerer bildet på en god måte, men dette er ikke alltid tilfellet. Som vi ser utifra bildene over (Se figur **TODO**) så er bildet fortsatt relativt bra selv om det største avviket mellom $f(t)$ og $\psi_I(t)$ er stort.

Kunstig bilde

Under er den genererte rekken som ble laget av å bruke metode 3. Som nevnt i fremgangsmåten ble et python-skript brukt for å generere denne funksjonen (Se vedlegg 1).

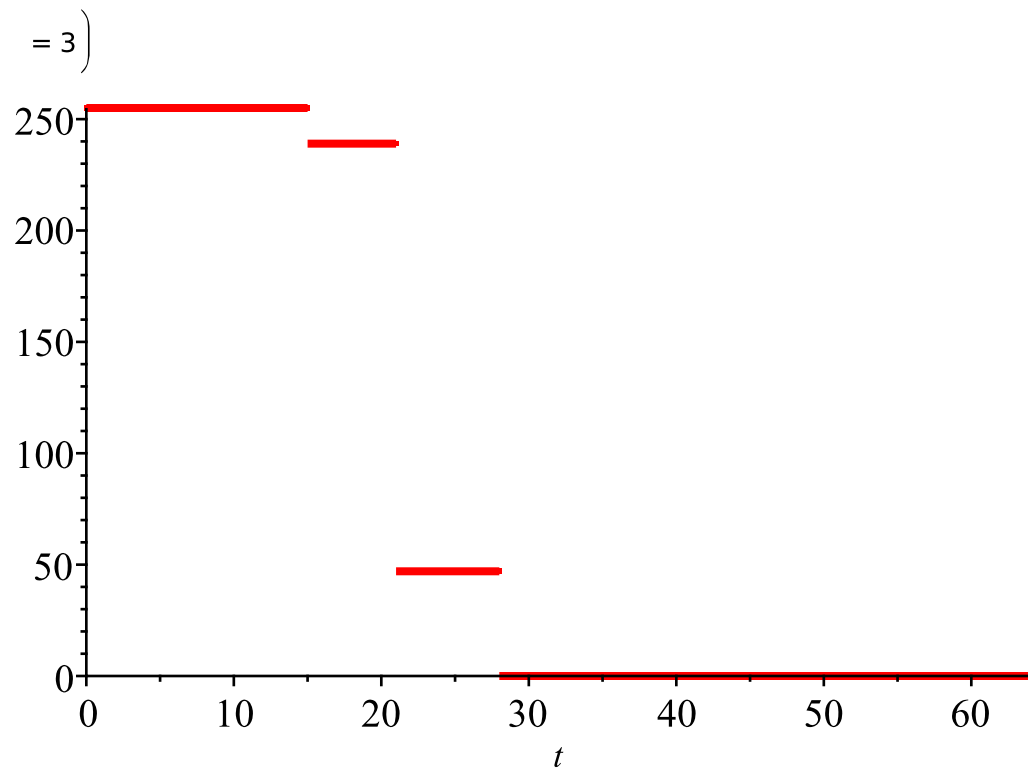
restart;

```
f(t) := piecewise(0 ≤ t ≤ 1.0, 255, 1.0 ≤ t ≤ 2.0, 255, 2.0 ≤ t ≤ 3.0, 255, 3.0 ≤ t ≤ 4.0,
255, 4.0 ≤ t ≤ 5.0, 255, 5.0 ≤ t ≤ 6.0, 255, 6.0 ≤ t ≤ 7.0, 255, 7.0 ≤ t ≤ 8.0, 255,
8.0 ≤ t ≤ 9.0, 255, 9.0 ≤ t ≤ 10.0, 255, 10.0 ≤ t ≤ 11.0, 255, 11.0 ≤ t ≤ 12.0, 255,
12.0 ≤ t ≤ 13.0, 255, 13.0 ≤ t ≤ 14.0, 255, 14.0 ≤ t ≤ 15.0, 255, 15.0 ≤ t ≤ 16.0,
239, 16.0 ≤ t ≤ 17.0, 239, 17.0 ≤ t ≤ 18.0, 239, 18.0 ≤ t ≤ 19.0, 239, 19.0 ≤ t
≤ 20.0, 239, 20.0 ≤ t ≤ 21.0, 239, 21.0 ≤ t ≤ 22.0, 47, 22.0 ≤ t ≤ 23.0, 47, 23.0 ≤ t
≤ 24.0, 47, 24.0 ≤ t ≤ 25.0, 47, 25.0 ≤ t ≤ 26.0, 47, 26.0 ≤ t ≤ 27.0, 47, 27.0 ≤ t
≤ 28.0, 47, 28.0 ≤ t ≤ 29.0, 0, 29.0 ≤ t ≤ 30.0, 0, 30.0 ≤ t ≤ 31.0, 0, 31.0 ≤ t
≤ 32.0, 0, 32.0 ≤ t ≤ 33.0, 0, 33.0 ≤ t ≤ 34.0, 0, 34.0 ≤ t ≤ 35.0, 0, 35.0 ≤ t ≤ 36.0,
0, 36.0 ≤ t ≤ 37.0, 0, 37.0 ≤ t ≤ 38.0, 0, 38.0 ≤ t ≤ 39.0, 0, 39.0 ≤ t ≤ 40.0, 0, 40.0
≤ t ≤ 41.0, 0, 41.0 ≤ t ≤ 42.0, 0, 42.0 ≤ t ≤ 43.0, 0, 43.0 ≤ t ≤ 44.0, 0, 44.0 ≤ t
≤ 45.0, 0, 45.0 ≤ t ≤ 46.0, 0, 46.0 ≤ t ≤ 47.0, 0, 47.0 ≤ t ≤ 48.0, 0, 48.0 ≤ t ≤ 49.0,
0, 49.0 ≤ t ≤ 50.0, 0, 50.0 ≤ t ≤ 51.0, 0, 51.0 ≤ t ≤ 52.0, 0, 52.0 ≤ t ≤ 53.0, 0, 53.0
≤ t ≤ 54.0, 0, 54.0 ≤ t ≤ 55.0, 0, 55.0 ≤ t ≤ 56.0, 0, 56.0 ≤ t ≤ 57.0, 0, 57.0 ≤ t
≤ 58.0, 0, 58.0 ≤ t ≤ 59.0, 0, 59.0 ≤ t ≤ 60.0, 0, 60.0 ≤ t ≤ 61.0, 0, 61.0 ≤ t ≤ 62.0,
0, 62.0 ≤ t ≤ 63.0, 0, 63.0 ≤ t ≤ 64.0, 0) : T := 2·64;
```

$T := 128$

(4.2.2.3.9)

$P_{org} := \text{plot}\left(f(t), t = 0.. \frac{T}{2}, \text{discont} = \text{true}, \text{symbol} = \text{"point"}, \text{color} = \text{"red"}, \text{thickness}\right)$



Figur **TODO**

$$a_n := n \rightarrow \frac{4}{T} \cdot \text{int} \left(f(t) \cdot \cos \left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T} \right) \cdot t \right), t = 0 \dots \frac{T}{2} \right)$$

$$a_n := n \mapsto \frac{4 \left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \left(\frac{2 n \pi t}{T} \right) dt \right)}{T} \quad (4.2.2.3.10)$$

$$a_0 := \frac{4}{T} \cdot \text{int} \left(f(t), t = 0 \dots \frac{T}{2} \right)$$

$$a_0 := 174.6250000 \quad (4.2.2.3.11)$$

$$\psi := (t, l) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \text{sum} \left(a_n(n) \cdot \cos \left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{T} \right) \cdot t \right), n = 1 \dots l \right)$$

$$\psi := (t, l) \mapsto \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{n=1}^l a_n(n) \cos \left(\frac{2 n \pi t}{T} \right) \right) \quad (4.2.2.3.12)$$

$$l := 30$$

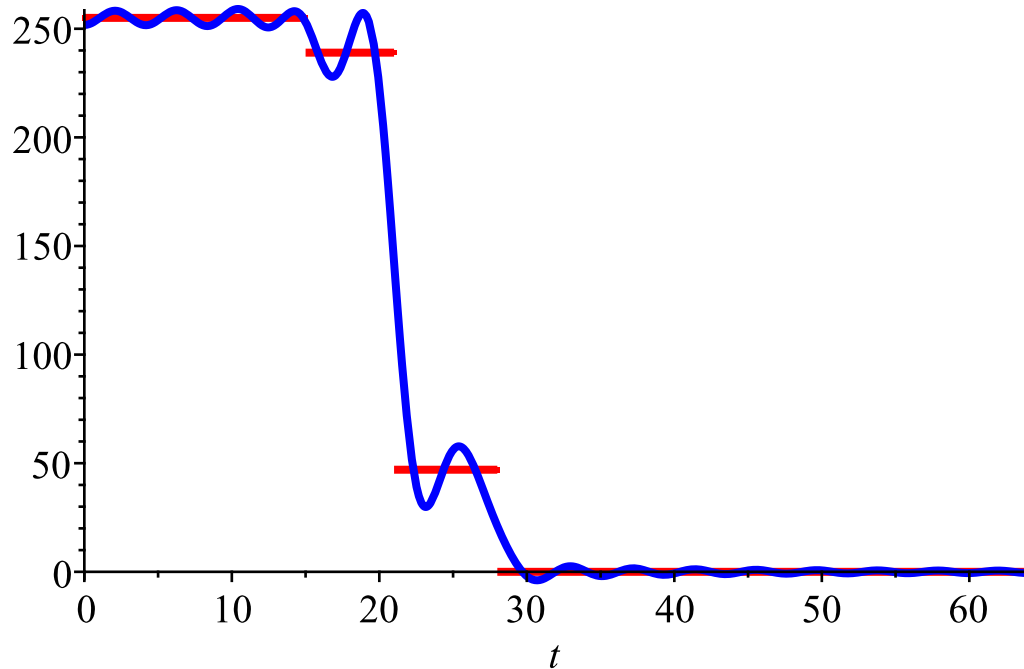
$$l := 30 \quad (4.2.2.3.13)$$

$$\psi_l := \text{evalf}(\psi(t, l))$$

$$\begin{aligned} \psi_l := & 87.31250000 - 3.566504710 \cos(0.1472621557 t) \\ & + 141.0276691 \cos(0.04908738522 t) \\ & + 0.985911939 \cos(0.2945243113 t) \\ & - 30.20040468 \cos(0.1963495409 t) \end{aligned} \quad (4.2.2.3.14)$$

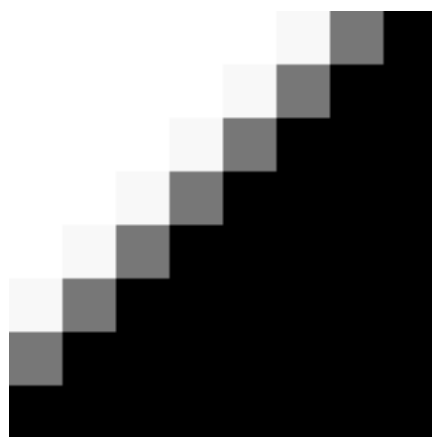
$$\begin{aligned}
& -19.82176616 \cos(0.2454369261 t) \\
& + 64.69265187 \cos(0.09817477044 t) \\
& - 5.785914227 \cos(0.4908738522 t) \\
& + 11.87593921 \cos(0.3436116965 t) \\
& + 9.888450648 \cos(0.3926990818 t) \\
& + 1.725469068 \cos(0.4417864670 t) \\
& - 8.730228779 \cos(0.8344855487 t) \\
& - 8.052902122 \cos(0.5399612374 t) \\
& - 3.278710526 \cos(0.5890486226 t) \\
& + 4.938007688 \cos(0.6381360078 t) \\
& - 5.852056005 \cos(0.7853981635 t) \\
& - 2.248346107 \cos(0.8835729339 t) \\
& + 6.159973590 \cos(0.9326603192 t) \\
& + 7.475453779 \cos(0.9817477044 t) \\
& + 8.610305090 \cos(0.6872233931 t) \\
& + 3.258151057 \cos(0.7363107783 t) \\
& + 1.287146206 \cos(1.030835090 t) \\
& - 4.999438596 \cos(1.079922475 t) \\
& - 5.420052033 \cos(1.129009860 t) \\
& - 3.142672782 \cos(1.423534171 t) \\
& - 2.335600308 \cos(1.472621557 t) \\
& + 3.729066048 \cos(1.276272016 t) \\
& - 1.094383682 \cos(1.178097245 t) \\
& + 2.971808007 \cos(1.227184630 t) \\
& + 1.643479624 \cos(1.325359401 t) \\
& - 1.312866830 \cos(1.374446786 t)
\end{aligned}$$

$P_{\psi} := \text{plot}\left(\psi_I(t), t = 0 \dots \frac{T}{2}, \text{color} = \text{"blue"}, \text{thickness} = 3\right) :$
 $Pr_{\psi} := \text{plot}\left([\text{seq}(\psi(t, j), j = 0 \dots (I - 1))], t = 0 \dots T, \text{color} = \text{"green"}, \text{linestyle} = \text{"dash"}\right) :$
 $\text{plots:display}\left([P_{org}, P_{\psi}]\right)$

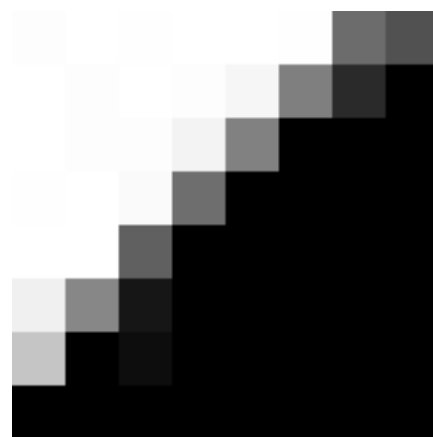


Figur **TODO**

Deretter generere vi et bilde utifra fourierrekken som vi har regnet ut. Dette gjør vi som nevnt ved å legge funksjonsuttrykket vi fikk av $\psi_f(t)$ inn i skriptet (Se vedlegg 1).



Figur **TODO**



Figur **TODO**

Her ser vi originalbildet og det genererte fourierbildet. I dette bildet passer fourierrekken utmerket. Dette er fordi den skarpe linjen mellom hvitt og sort er parallell med metode 3. Vi ser også i grafen (Se figur **TODO**) at dette er tilfellet ettersom det bare er en bratt del i figuren. I denne fourierrekken er det 30 ledd, og dermed trenger vi bare å lagre 30 (alle a_n -verdier) verdier istedenfor 64 (en verdi for hver piksel). Under er det en analyse av forskjellen Δ mellom pikseldataen til de to bildene.

```

$$\Delta := \text{Matrix}([ [ 4, 1, 2, 0, 0, -14, 9, -21], [0, 4, 0, 4, 4, -7, -6, 0],$$


$$[0, 4, 4, 11, -9, 0, 0, 0], [3, 0, -5, 7, 0, 0, 0, 0], [0, -16,$$


$$17, 0, 0, 0, 0, 0], [16, -15, -2, 0, 0, 0, 0, 0], [-95, 0, -1,$$

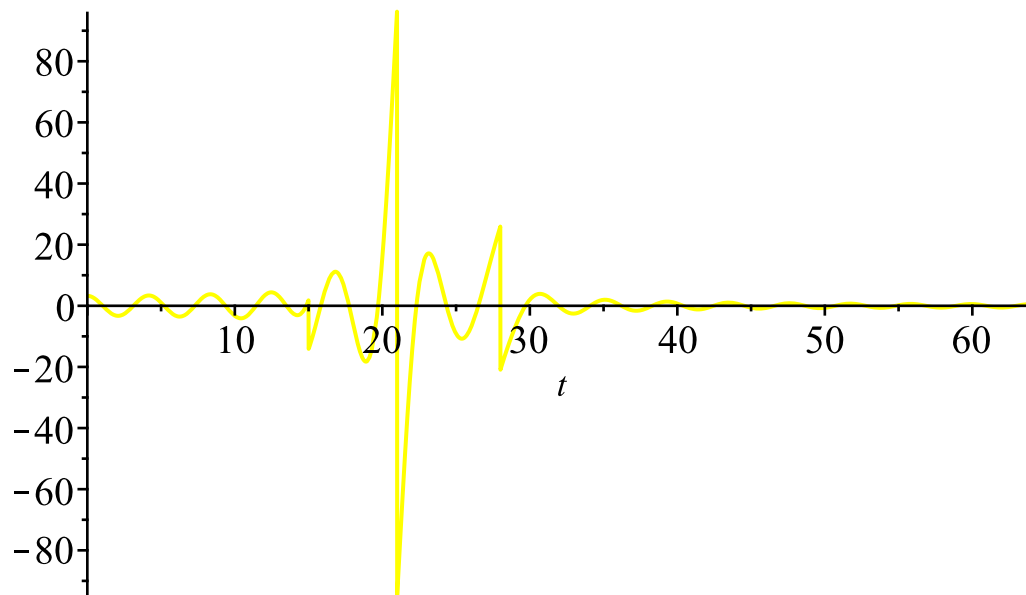

$$0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]])$$

```

$$\Delta := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & -14 & 9 & -21 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & -7 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 11 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -15 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -95 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.3.15)$$

Vi ser her at det er store forskjeller mellom pikselverdier. Dette er det samme fenomenet vi ser i grafen over. Hvis vi grafer forskjellen mellom $f(t)$ og $\psi_I(t)$ får vi en enda bedre visualisering av forskjellene.

$$P_{\Delta} := \text{plot}\left(f(t) - \psi_I(t), t = 0 \dots \frac{T}{2}, \text{color} = \text{"yellow"}\right)$$



Figur **TODO**

Som vi nå også ser fra P_{Δ} så er forskjellen mellom originalbildet og fourierrekken svært liten over et stort område, men det er to høye tagger. Disse kommer når grafen går fra sin høyeste verdi til sin laveste verdi. Til tross for at den høyeste avviket er på 95, så ser bildet svært bra ut. Vi kan nesten ikke se at det er blitt gjort om til en fourierrekke. Det vi kan legge merke til er at i det hvite partiet er det noen mørkere piksler. Disse har bare et avvik på 4, men vi kan se dem svært godt siden de er midt i den hvite delen av bildet. Dette forteller oss at mennesket er svært sensitivt til lyse områder i bilder og til forandringer i luminans.

|
 |
 |
 ▼ *Konklusjon*

▼ **5. Konklusjon**

Vi kan se at det er mulig å gjøre et bilde om til en fourierrekke ved bruk av denne teknikken. Det er også mulig å og at det er mulig å rekonstruere et bilde ut av denne rekken. Som vi kan se på
 e
 END

▼ **6. Resultat**

END

▼ **7. Referanser**

END