

Совместное урегулирование загрязнений окружающей среды методами кооперативных игр

Барсук Полина Игоревна

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор Громова Е. В.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент Тарашнина С. И.

Санкт-Петербургский государственный университет

Выпускная квалификационная работа бакалавра, 2020

Структура дипломной работы

- ❶ Кооперативная дифференциальная игра с предписанной продолжительностью:
 - 1.1 Характеристические функции:
 - 1.1.1 α -характеристическая функция
 - 1.1.2 δ -характеристическая функция
 - 1.1.3 ζ -характеристическая функция
 - 1.1.4 η -характеристическая функция
 - 1.2 Динамическая устойчивость кооперативного решения:
 - 1.2.1 Векторы Шепли и Харшаньи
 - 1.2.2 Процедура распределения дележа
 - 1.3 Сильная динамическая устойчивость кооперативного решения:
 - 1.3.1 Первый метод построения СДУ C -ядра
 - 1.3.2 Второй метод построения СДУ C -ядра
 - 1.4 Модель игры:
 - 1.4.1 Кооперативное решение
 - 1.4.2 Равновесие по Нэшу

② Теоретико–игровая задача управления вредными выбросами в Восточной Сибири:

2.1 Построение сильно динамически устойчивого решения в рассматриваемой игре трех лиц:

2.1.1 Первый метод построения СДУ C -ядра

2.1.2 Второй метод построения СДУ C -ядра

③ Приложение:

3.1 Вычисление оптимального управления

3.2 Построение α -характеристической функции

3.3 Построение δ -характеристической функции

3.4 Построение ζ -характеристической функции

3.5 Построение η -характеристической функции

- Модель дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов: [E. Dockner, S. Jorgensen, N. van Long, G. Sorger, 2000] (с ненулевой абсорбцией, на бесконечном промежутке времени с дисконтированием), [E. Gromova, 2016] (с нулевой абсорбцией)
- Построение α , δ , ζ , η -характеристических функций: [J. von Neumann, O. Morgenstern, 1953], [L. Petrosyan, G. Zaccour, 2003], [Громова Е. В., Петросян Л. А., 2015 b], [E. Gromova, E. Marova, 2018]
- Принцип максимума Понтрягина: [Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., 1983]

- Динамическая устойчивость принципов оптимальности: [Петросян Л. А., 1977]
- Сильная динамическая устойчивость множественных принципов оптимальности: [Петросян Л. А., 1993] (определение), [Громова Е. В., 2016], [Петросян О. Л., Громова Е. В., Погожев С. В., 2016] (алгоритм N1), [Петросян Л. А., 2015] (алгоритм N2 для трех лиц), [Громова Е. В., Петросян Л. А., 2015 а] (алгоритм N1, N2 для двух лиц).

Постановка задачи

Рассмотрим теоретико–игровую модель управления объемами вредных выбросов с $n = 3$ игроками, где:

- объемы производства пропорциональны объему вредных выбросов
- стратегия игрока i — выбор объема вредных выбросов в атмосферу в единицу времени, $u_i \in [0, b_i]$
- общий уровень загрязнения X изменяется в соответствии с дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = u_1 + u_2 + u_3 - \delta x, \quad \delta \neq 0, \quad x(t_0) = 0, \quad (1)$$

где δ –коэффициент абсорбции.

Пусть $t \in [t_0, T]$.

Доход i -го игрока имеет вид [Dockner et al., 2000]:

$$R_i(u_i(t)) = \left(b_i - \frac{1}{2}u_i(t)\right) u_i(t), \quad (2)$$

где $b_i > 0$.

Расходы игрока на устранение загрязнения равны $d_i x(t)$.

Рассмотрим кооперативный вариант игры, когда игроки договариваются об использовании таких допустимых управлений $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$, что

$$\sum_{i=1}^3 K_i(x_0, T - t_0, u(t)) = \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^T \left((b_i - \frac{1}{2}u_i(t))u_i(t) - d_i x\right) dt \rightarrow \max_{u_1, u_2, u_3}, \quad (3)$$

где $K_i(x_0, T - t_0, u(t))$ — выигрыш i -го игрока, а $x(t)$ удовлетворяет (1).

Оптимальное управление в кооперативной игре

Оптимальное управление и соответствующая ему траектория были получены при помощи принципа максимума Понтрягина:

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{D_N}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) \\ b_2 - \frac{D_N}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) \\ b_3 - \frac{D_N}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$x^*(t) = \frac{3D_N}{2\delta^2}e^{\delta(t-T)} + \frac{3D_N - B_N\delta}{\delta^2}e^{\delta(t_0-t)} - \frac{3D_N}{2\delta^2}e^{\delta(2t_0-T-t)} + \\ + \frac{B_N}{\delta} - \frac{3D_N}{\delta^2},$$

где $B_N = b_1 + b_2 + b_3$, $D_N = d_1 + d_2 + d_3$.

Если $\delta \geq \frac{D_N}{b_i}$, $i = \overline{1, 3}$, то $u_i^*(t) \in [0, b_i]$.

Если $\delta < \frac{D_N}{b_i}$ и $\bar{t}_i > t_0$, где $\bar{t}_i = T + \frac{1}{\delta} \ln(-\frac{b_i \delta}{D_N} + 1)$, то оптимальное управление для игрока i примет вид:

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq \bar{t}_i, \\ b_i - \frac{D_N}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}), & \bar{t}_i \leq t \leq T. \end{cases} \quad (5)$$

Было замечено, что если

$$\frac{b_i}{D_N} \geq T - t_0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

то оптимальное управление игрока i в кооперативном случае в любой рассматриваемый момент времени $t \in [t_0, T]$ будет отлично от нуля.

Равновесие по Нэшу

Аналогично было получено равновесие по Нэшу и соответствующая траектория:

$$u^{NE}(t) = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{d_1}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) \\ b_2 - \frac{d_2}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) \\ b_3 - \frac{d_3}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$x^{NE}(t) = \frac{D_N}{2\delta^2} e^{\delta(t-T)} + \frac{D_N - B_N \delta}{\delta^2} e^{\delta(t_0-t)} - \frac{D_N}{2\delta^2} e^{\delta(2t_0-T-t)} + \frac{B_N}{\delta} - \frac{D_N}{\delta^2}.$$

Если $\delta \geq \frac{d_i}{b_i}$, $i = \overline{1, 3}$, то $u_i^{NE}(t) \in [0, b_i]$.

Если $\delta < \frac{d_i}{b_i}$ и $\bar{t}_i > t_0$, где $\bar{t}_i = T + \frac{1}{\delta} \ln(-\frac{b_i \delta}{d_i} + 1)$, то оптимальное управление для игрока i примет вид:

$$u_i^{NE}(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq \bar{t}_i, \\ b_i - \frac{d_i}{\delta}(1 - e^{\delta(t-T)}), & \bar{t}_i \leq t \leq T. \end{cases} \quad (8)$$

Нетрудно заметить, что если

$$\frac{b_i}{d_i} \geq T - t_0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (9)$$

то оптимальное управление игрока i в любой рассматриваемый момент времени $t \in [t_0, T]$ будет отлично от нуля.

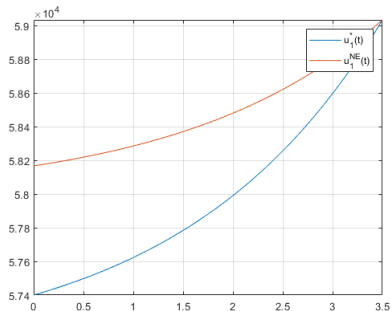


Рис. 1: Компоненты оптимального управления и равновесия по Нэшу для первого игрока

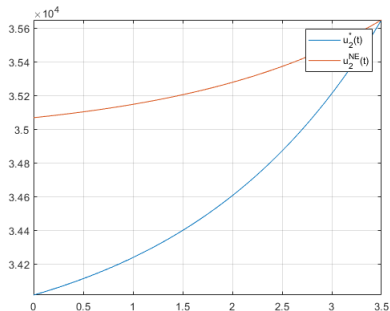


Рис. 2: Компоненты оптимального управления и равновесия по Нэшу для второго игрока

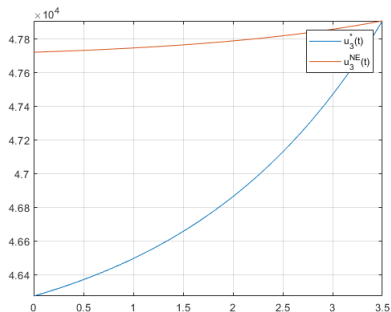


Рис. 3: Компоненты оптимального управления и равновесия по Нэшу для третьего игрока

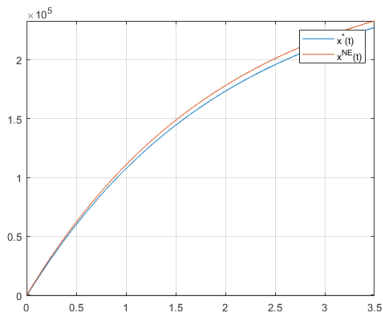


Рис. 4: Общий уровень загрязнения для кооперативной и некооперативной игры

Построение характеристической функции

В работе были построены α , δ , ζ , η -характеристические функции. Между ними были замечены следующие взаимосвязи:

$$\begin{aligned} V^{\zeta}(\cdot) &\leq V^{\alpha}(\cdot) \leq V^{\delta}(\cdot), \\ V^{\zeta}(\cdot) &\leq V^{\eta}(\cdot) \leq V^{\delta}(\cdot), \\ \forall S \subseteq N &= \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Более того, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} V^{\alpha}(\cdot) - V^{\delta}(\cdot) &= V^{\zeta}(\cdot) - V^{\eta}(\cdot), \\ V^{\eta}(\cdot) - V^{\delta}(\cdot) &= V^{\zeta}(\cdot) - V^{\alpha}(\cdot), \\ \forall S \subseteq N &= \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Вектор Шепли

Ввиду упомянутых выше закономерностей между характеристическими функциями (10), (11) получаем следующие равенства между векторами Шепли:

$$Sh_i^{\alpha, \delta}(T - t_0) = \frac{b_i^2}{2}(T - t_0) - d_i B_N \left(\frac{(T - t_0)}{\delta} - \frac{(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta^2} \right) + \\ + \frac{1}{3} \left[3D_N^2 + 4d_i D_N - 2(d_j + d_k)D_N - d_i^2 + \frac{d_j^2}{2} + \frac{d_k^2}{2} \right] \Psi(\delta, t_0), \quad (12)$$

$$Sh_i^{\zeta, \eta}(T - t_0) = \frac{b_i^2}{2}(T - t_0) - d_i B_N \left(\frac{(T - t_0)}{\delta} - \frac{(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta^2} \right) + \\ + \left[D_N^2 + 2d_i D_N - D_N(d_j + d_k) \right] \Psi(\delta, t_0), \quad (13)$$

где $\Psi(\delta, t_0) = \frac{(T - t_0)}{2} - \frac{(1 - e^{\delta(t_0 - T)})}{\delta} + \frac{(1 - e^{2\delta(t_0 - T)})}{4\delta}$, $i \in N$.

Параметры модели b_i , d_i были оценены на основе реальных данных компании «РУСАЛ» за 2016 год.

Таблица 1: Коэффициенты модели

Компания	b_i	d_i
Красноярский алюминиевый завод	59035,12	525,06
Братский алюминиевый завод	35649,15	351,64
Иркутский алюминиевый завод	47906,72	112,71

Рассмотрим некоторые фиксированные числовые параметры, а именно:

$$t_0 = 0; \quad x_0 = 0; \quad T = 3, 5; \quad \delta = 0, 5. \quad (14)$$

Таблица 2 показывает общий выигрыш при кооперации и его отличие от суммы выигрышей при использовании стратегий из равновесия по Нэшу.

Таблица 2: Общий выигрыш при кооперации

$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u^*)$	$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u^*) - \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u^{NE})$
$11824891454,6 - 1635x_0$	$3240687,6$

Таблица 3 содержит значения δ , η -характеристических функций для нашего примера.

Таблица 3: δ , η -характеристические функции

$S \subseteq N$	$V^\delta(S, x_0, T - t_0)$	$V^\eta(S, x_0, T - t_0)$
$\{1\}$	$5824135318,9 - 867,6x_0$	$5823632966 - 867,6x_0$
$\{2\}$	$2040066711,4 - 581,1x_0$	$2039119065,3 - 581,1x_0$
$\{3\}$	$3957448736,6 - 186,3x_0$	$3955658048,1 - 186,3x_0$
$\{1, 2\}$	$7865132408,3 - 1448,7x_0$	$7865073215 - 1448,7x_0$
$\{1, 3\}$	$9782255949,2 - 1053,9x_0$	$9781679787,2 - 1053,9x_0$
$\{2, 3\}$	$5997833125,7 - 767,3x_0$	$5996548531,6 - 767,3x_0$
N	$11824891454,6 - 1635x_0$	$11824891454,6 - 1635x_0$

Таблица 4 содержит значения вектора Харшаньи, построенного по δ , η -характеристическим функциям.

Таблица 4: Вектор Харшаньи

$S \subseteq N$	$d_{V\delta}(S)$	$d_{V\eta}(S)$
$\{1\}$	5824135318, 89	5823632965, 96
$\{2\}$	2040066711, 44	2039119065, 27
$\{3\}$	3957448736, 6	3955658048, 06
$\{1, 2\}$	930378	2321183, 76
$\{1, 3\}$	671893, 7	2388773, 21
$\{2, 3\}$	317677, 65	1771418, 32
N	1320738, 29	0

Значения вектора Шепли, построенного по δ , η -характеристическим функциям соответственно, представлены в Таблице 5.

Таблица 5: Вектор Шепли

Компания	$Sh_i^{\alpha, \delta}(x_0, T - t_0)$	$Sh_i^{\zeta, \eta}(x_0, T - t_0)$
Кр. А.З.	$5825376700,8 - 867,6x_0$	$5825987944,4 - 867,6x_0$
Бр. А.З.	$2041130985,4 - 581,1x_0$	$2041165366,3 - 581,1x_0$
Ир. А.З.	$3958383768,4 - 186,2x_0$	$3957738143,8 - 186,2x_0$

Таблица 6 демонстрирует выгоду, которую получает от кооперации каждая компания в сравнении с некооперативным случаем.

Таблица 6: Разность между вектором Шепли и равновесием по Нэшу

Компания	$Sh_i^{\alpha, \delta} - K_i(x_0, T - t_0, u^{NE})$ $\delta = 0,5$	$Sh_i^{\zeta, \eta} - K_i(x_0, T - t_0, u^{NE})$ $\delta = 0,5$
Кр. А.З.	1241381,9	1852625,5
Бр. А.З.	1064274	1098654,9
Ир. А.З.	935031,8	289407,2

Следовательно, чем больше величина штрафа d_i , тем для компании более выгодно кооперироваться. Так, в нашем случае Красноярский алюминиевый завод является самым мотивированным для совместных действий.

Процедура распределения дележа для вектора Шепли

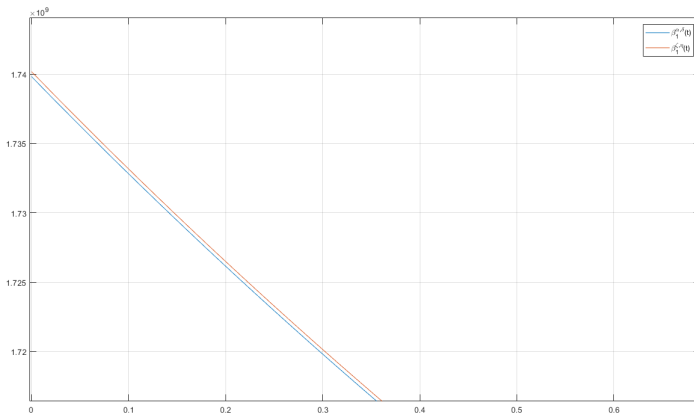


Рис. 5: ПРД первого игрока для α , δ , ζ , η -характеристических функций

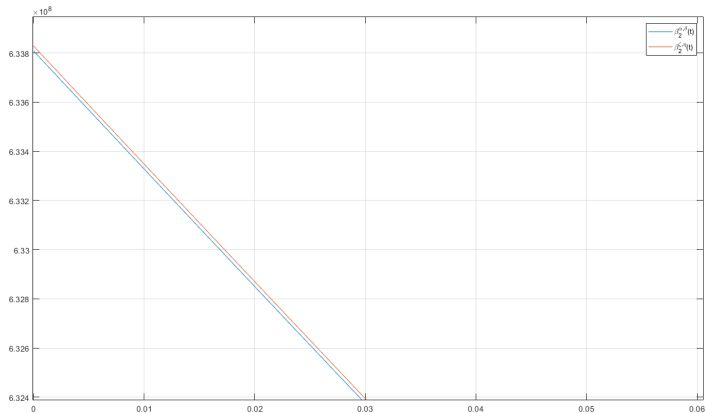


Рис. 6: ПРД второго игрока для α , δ , ζ , η -характеристических функций

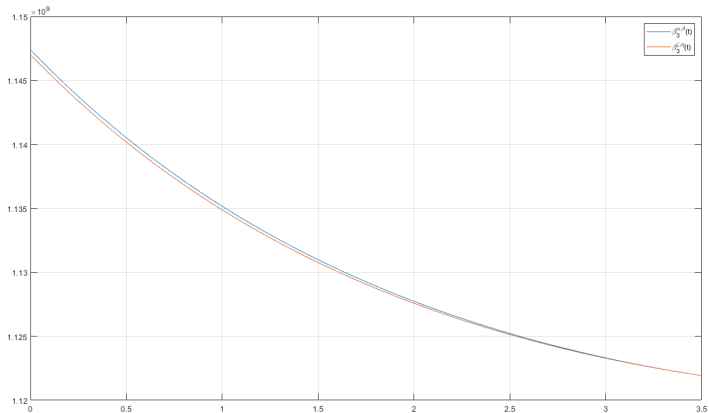


Рис. 7: ПРД третьего игрока для α , δ , ζ , η -характеристических функций

Первый метод [Громова Е. В., 2016], [Петросян О. Л., Громова Е. В., Погожев С. В., 2016]

Определение 1 (Громова Е. В., Петросян Л. А., 2015).

C -ядро $C(x_0, T - t_0)$ является сильно динамически устойчивым кооперативным решением в игре $\Gamma_V(x_0, T - t_0)$, если

- ① $C(x^*(t), T - t) \neq \emptyset, \forall t \in [t_0, T]$;
- ② существует такой дележ $\bar{\alpha} \in C(x_0, T - t_0)$ и такая ПРД

$$\bar{\beta}(\tau) = (\bar{\beta}_1(\tau), \dots, \bar{\beta}_n(\tau)), \tau \in [t_0, T], \text{ что } \bar{\alpha} = \int_{t_0}^T \bar{\beta}(\tau) d\tau \text{ и}$$

$$C(x_0, T - t_0) \supseteq \left\{ \int_{t_0}^t \bar{\beta}(\tau) d\tau \right\} \oplus C(x^*(t), T - t), \forall t \in [t_0, T].$$

Здесь символ \oplus определяется следующим образом: пусть $a \in R^n$, $B \subset R^n$, тогда $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$.

Построение характеристической функции

Рассмотрим подробнее построение δ -характеристической функции:

$$V^\delta(S, \cdot) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, T - t_0, u_S, u_{N \setminus S}^{NE}), & S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0, u_1, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} V^\delta(\{i\}, x(t), \Delta) &= \left[\frac{b_i^2}{2} - \frac{d_i}{\delta^2} \left(B_N \delta - D_N + \frac{d_i}{2} \right) \right] \Delta + \\ &+ \frac{d_i}{\delta} \left[\frac{d_i + B_N \delta - 2D_N}{\delta^2} - x(t) \right] (1 - e^{-\delta \Delta}) + \frac{2D_N d_i - d_i^2}{4\delta^3} (1 - e^{-2\delta \Delta}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
V^\delta(\{i, j\}, x(t), \Delta) = & \left[\frac{b_i^2 + b_j^2}{2} - \frac{d_i + d_j}{\delta^2} (B_N \delta - D_N) \right] \Delta + \\
& + \frac{d_i + d_j}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 2D_N}{\delta^2} - x(t) \right] (1 - e^{-\delta \Delta}) + \frac{d_i + d_j}{2\delta^3} D_N (1 - e^{-2\delta \Delta}),
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
V^\delta(N, x(t), \Delta) = & \left[\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{2} - \frac{D_N}{\delta^2} \left(B_N \delta - \frac{3D_N}{2} \right) \right] \Delta + \\
& + \frac{D_N}{\delta} \left[\frac{B_N \delta - 3D_N}{\delta^2} - x(t) \right] (1 - e^{-\delta \Delta}) + \frac{3}{4} \frac{D_N^2}{\delta^3} (1 - e^{-2\delta \Delta}),
\end{aligned} \tag{18}$$

где $i \neq j$, $i, j \in N = \{1, 2, 3\}$, $\Delta = T - t$.

Для $S = \{i, j\}$, $P = \{i, k\}$, $i \neq j \neq k \in N$, имеем:

$$\begin{aligned} V^\delta(S \cup P) + V^\delta(S \cap P) - V^\delta(S) - V^\delta(P) = \\ = (D_N^2 + d_i^2) \frac{(T-t)}{2\delta^2} + \frac{(D_N^2 - d_i^2)}{\delta^3} e^{\delta(t-T)} (1 - e^{\delta(t-T)}) \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для $S = \{i\}$, $P = \{j\}$ и $S = \{i, j\}$, $P = \{k\}$, $i \neq j \neq k \in N$, неравенство также выполняется:

$$\begin{aligned} V^\delta(\{i\} \cup \{j\}) - V^\delta(\{i\}) - V^\delta(\{j\}) &= \frac{(d_i^2 + d_j^2)}{\delta^2} \Psi(\delta, t) \geq 0, \\ V^\delta(\{i, j\} \cup \{k\}) - V^\delta(\{i, j\}) - V^\delta(\{k\}) &= \frac{(D_N^2 + d_k^2)}{\delta^2} \Psi(\delta, t) \geq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\Psi(\delta, t) = \frac{(T-t)}{2} - \frac{(1-e^{\delta(t-T)})}{\delta} + \frac{(1-e^{2\delta(t-T)})}{4\delta}$.

Таким образом, построенная δ -характеристическая функция является выпуклой. Значит, \mathcal{C} -ядро непусто.

Определение 2 (Громова Е. В., 2016).

Дележ $\bar{\alpha} \in C(x_0, T - t_0)$, гарантирующий сильную динамическую устойчивость C -ядра, будем называть опорным решением.

Определение 3.

Пусть $\hat{C}(x_0, T - t_0) \subseteq C(x_0, T - t_0)$ — множество опорных решений в C -ядре $C(x_0, T - t_0)$.

Ввиду выполнения (21) для $i \neq j \neq k \in N$ без дополнительных ограничений на параметры модели:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [V^\delta(N, x^*(t), T-t) - V^\delta(\{i, j\}, x^*(t), T-t) - V^\delta(\{k\}, x^*(t), T-t)] = \\ = \frac{D_N^2 + d_k^2}{\delta^2} \left(-\frac{1}{2} + e^{\delta(t-T)} \left(1 - \frac{e^{\delta(t-T)}}{2} \right) \right) \leq 0, \quad (21) \end{aligned}$$

делаем вывод, что $\hat{C}(x^*(t), T-t) \neq \emptyset$.

Теорема 1 (Петросян О. Л., Громова Е. В., Погожев С. В., 2016).

Пусть $V(x^*(t), T - t)$ — непрерывно дифференцируемая функция по $t \in [t_0, T]$. Пусть $C(x^*(t), T - t) \neq \emptyset, \forall t \in [t_0, T]$. Если существует дележ $\alpha \in C(x_0, T - t_0)$ и соответствующая ему ПРД $\beta(t) \in B(t), t \in [t_0, T]$, то дележ $\alpha \in C(x_0, T - t_0)$ является опорным решением $\bar{\alpha}$, а C -ядро $C(x_0, T - t_0)$ является сильно динамически устойчивым кооперативным решением в игре $\Gamma_V(x_0, T - t_0)$.

Построим множество $B(t)$, такое что

$$B(t) = \left\{ \beta(t) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) : -\frac{d}{dt} V^\delta(N, x^*(t), T-t) + \right. \\ \left. + \frac{d}{dt} V^\delta(N \setminus S, x^*(t), T-t) \geq \sum_{i \in S} \beta_i(t) \geq -\frac{d}{dt} V^\delta(S, x^*(t), T-t), \forall S \subset N, \right. \\ \left. \sum_{i \in N} \beta_i = -\frac{d}{dt} V^\delta(N, x^*(t), T-t) \right\}. \quad (22)$$

Используя реальные данные работы предприятий «РУСАЛ», ПРД для пропорционального решения примет вид:

$$\begin{aligned}\beta_1^{prop}(t) &= \frac{(144045308e^{-\frac{t}{2}} + 529200e^{\frac{t}{2}} + 46100e^t + 1594361669)}{271435394e^{-\frac{t}{2}} + 922519e^{\frac{t}{2}} + 93360e^t + 3246460296} \times \\ &\times (271435394e^{-\frac{t}{2}} - 44342e^{\frac{t}{2}} + 177367e^t + 3249242245), \\ \beta_2^{prop}(t) &= \frac{(96469150e^{-\frac{t}{2}} + 312025e^{\frac{t}{2}} + 34557e^t + 536293920)}{271435394e^{-\frac{t}{2}} + 922519e^{\frac{t}{2}} + 93360e^t + 3246460296} \times \\ &\times (271435394e^{-\frac{t}{2}} - 44342e^{\frac{t}{2}} + 177367e^t + 3249242245), \\ \beta_3^{prop}(t) &= \frac{(30920936e^{-\frac{t}{2}} + 81294e^{\frac{t}{2}} + 12703e^t + 1115804708)}{271435394e^{-\frac{t}{2}} + 922519e^{\frac{t}{2}} + 93360e^t + 3246460296} \times \\ &\times (271435394e^{-\frac{t}{2}} - 44342e^{\frac{t}{2}} + 177367e^t + 3249242245).\end{aligned}\tag{23}$$

В соответствии с пропорциональным решением игроки разделят суммарный выигрыш $V^\delta(N, x_0, T - t_0) = 11826156420$ следующим образом:

$$\bar{\alpha}^{prop}(x_0, T - t_0) = (5826404564; 2041082218; 3958669638). \quad (24)$$

Графически показано на Рис. 8, что $\beta^{prop}(t) \in B(t)$, а на Рис. 9 изображено, что пропорциональное решение принадлежит C -ядру $C(x^*(t), T - t)$, откуда следует, что по Теореме 1 дележ $\bar{\alpha}^{prop}(x^*(t), T - t)$ является опорным решением, то есть $\bar{\alpha}^{prop}(t) \in \hat{C}(x^*(t), T - t)$, а $C(x^*(t), T - t)$ — сильно динамически устойчивое кооперативное решение для $\forall t \in [t_0, T]$.

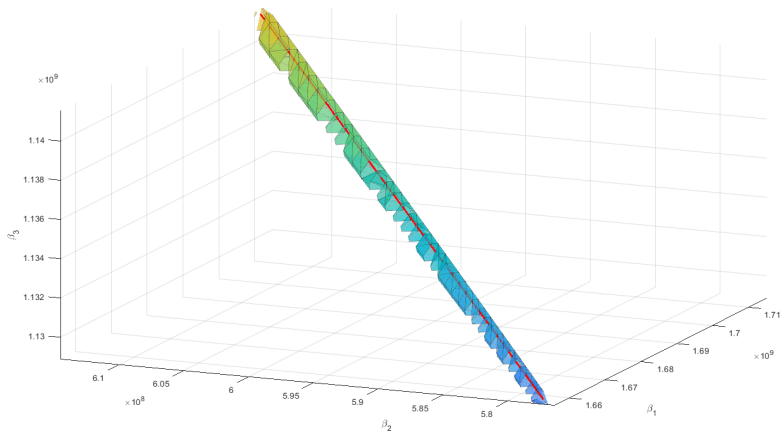


Рис. 8: Изменение множества $B(t)$ во времени

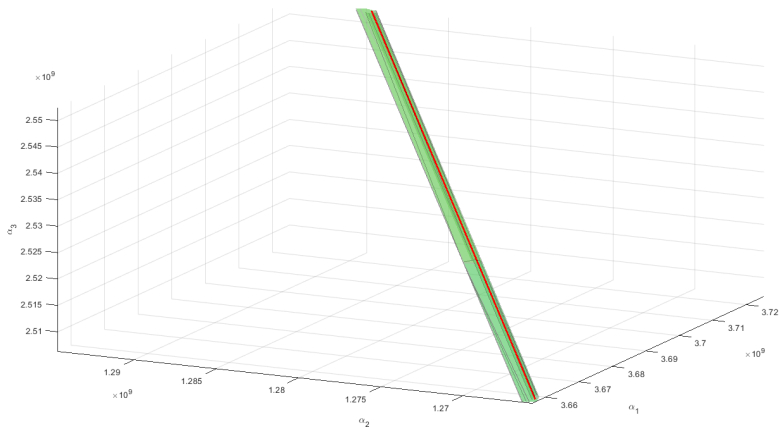


Рис. 9: Изменение множества $C(x^*(t), T-t)$ во времени

Демонстрация сильной динамической устойчивости С-ядра

$$\begin{aligned}
\beta_1^{Sh}(t) &= 144045308e^{-\frac{t}{2}} + 158833e^{\frac{t}{2}} + 78280e^t + 1595427326, \\
\beta_2^{Sh}(t) &= 96469150e^{-\frac{t}{2}} - 5502e^{\frac{t}{2}} + 62146e^t + 537207539, \\
\beta_3^{Sh}(t) &= 30920936e^{-\frac{t}{2}} - 197674e^{\frac{t}{2}} + 36941e^t + 1116607381.
\end{aligned} \tag{25}$$

ПРД для результирующего решения имеет вид:

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta^{prop}(t), & t \in [t_0, \hat{t}], \\ \beta^{Sh}(t), & t \in (\hat{t}, T], \end{cases} \tag{26}$$

где $\hat{t} = \frac{7}{3}$.

В соответствии с результирующим решением игроки разделят суммарный выигрыш во всей игре следующим образом:

$$\bar{\alpha}(x_0, T - t_0) = (5826378060; 2041120830; 3958657530). \tag{27}$$

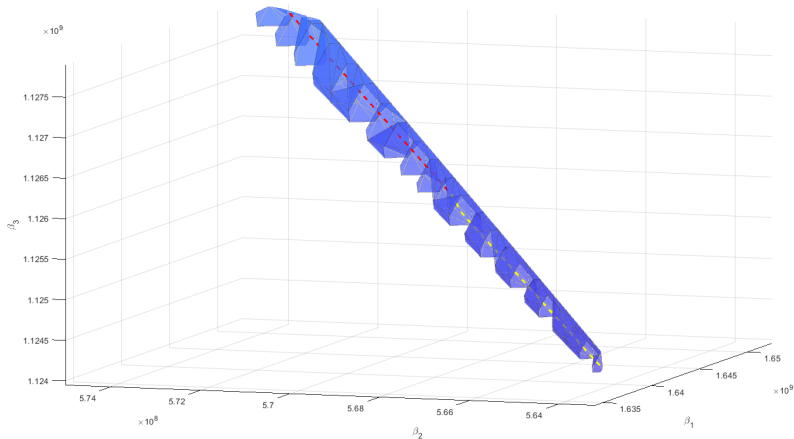


Рис. 10: Изменение множества $B(t)$ во времени

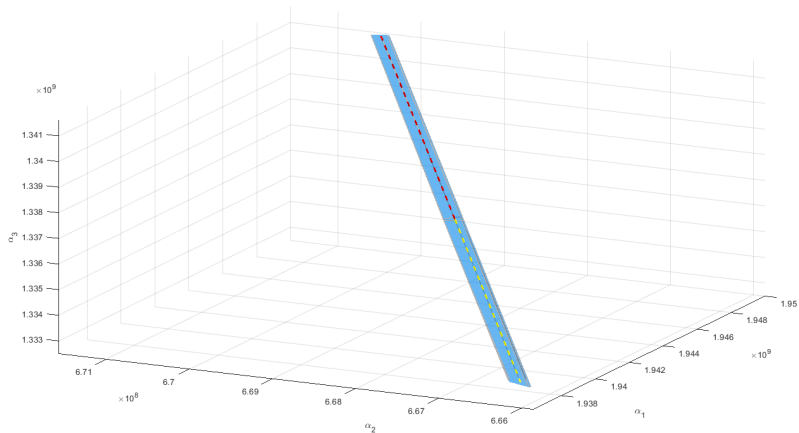
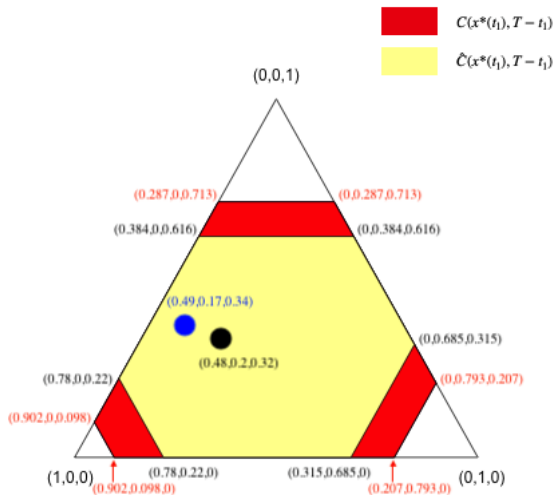
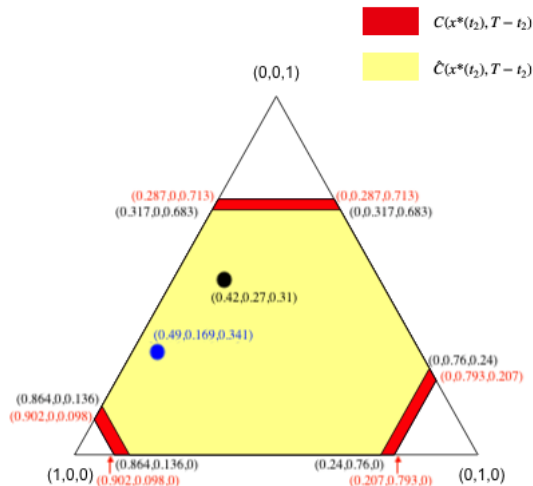
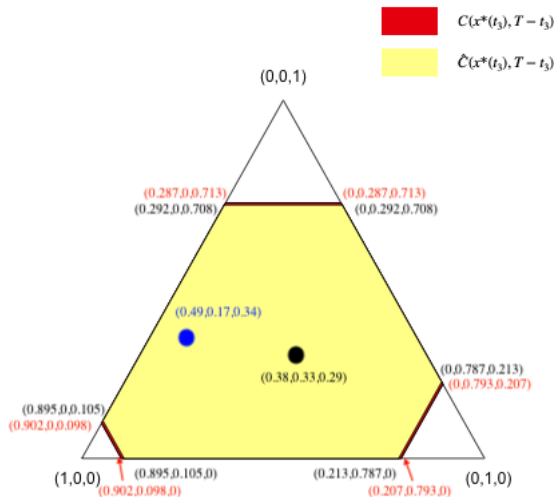


Рис. 11: Изменение множества $C(x^*(t), T-t)$ во времени

Момент времени $t_1 = 0,7$ Рис. 12: C -ядро и множество опорных решений в момент времени $t_1 = 0,7$

Момент времени $t_2 = 2,1$ Рис. 13: C -ядро и множество опорных решений в момент времени $t_2 = 2,1$

Момент времени $t_3 = 2,8$ Рис. 14: C -ядро и множество опорных решений в момент времени $t_3 = 2,8$

Второй метод [Петросян Л.А., 2015]

Составляем систему для рассматриваемой модели:

$$\begin{cases} \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = 7949719025 - 486159432e^{\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} - 3469663e^{t-\frac{7}{2}} - \\ - 2\left(e^{\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} - 1\right)\left(5204494e^{-\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} + 239610053e^{-\frac{t}{2}} - 239836154\right) - \\ - 2131454266t, \\ \alpha_2(t) + \alpha_3(t) = 6042634991 - 257497584e^{\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} - 1837730e^{t-\frac{7}{2}} - \\ - 2\left(e^{\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} - 1\right)\left(2756595e^{-\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} + 126911062e^{-\frac{t}{2}} - 127030818\right) - \\ - 1652371336t, \\ \alpha_1(t) + \alpha_3(t) = 9843789890 - 353664767e^{\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} - 2524064e^{t-\frac{7}{2}} - \\ - 2\left(e^{\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} - 1\right)\left(3786096e^{-\frac{t}{2}-\frac{7}{4}} + 174308319e^{-\frac{t}{2}} - 174472800\right) - \\ - 2710743160t. \end{cases} \quad (28)$$

При выбранных значениях параметров решение (28) примет вид:

$$\alpha_1(t) = 288090616e^{-\frac{t}{2}} - 675141e^{\frac{t}{2}} - 62750e^t - 1594913045t + 5538096183,$$

$$\alpha_2(t) = 192938301e^{-\frac{t}{2}} - 452152e^{\frac{t}{2}} - 42025e^t - 536541221t + 1848360241,$$

$$\alpha_3(t) = 61841872e^{-\frac{t}{2}} - 144927e^{\frac{t}{2}} - 13470e^t - 1115830115t + 3895938958.$$

(29)

Вводятся следующие обозначения:

$$A(t) = \sum_{i=1}^3 A_i(t) = V(N, x^*(t), T - t) - \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t). \quad (30)$$

Пусть

$$\gamma_i(t) = -\frac{d}{dt} A_i(t), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (31)$$

Условие 1.

Пусть $A_i(t)$ можно выбрать таким образом, что $\gamma_i(t) \geq 0$ и $\alpha_i(t) \geq V(\{i\}, x^*(t), T - t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, 3}$.

Тогда $A(t)$ (30):

$$A(t) = -0.00000003e^{-\frac{t}{2}} + 1360903e^{\frac{t}{2}} - 59122e^t - 1957864t + 978932. \quad (32)$$

Построим функции $\gamma_i(t)$ (31), $i = \overline{1, 3}$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= K_1 \frac{d}{dt} (-V^\delta(N, x^*(t), T - t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t)), \\ \gamma_2(t) &= K_2 \frac{d}{dt} (-V^\delta(N, x^*(t), T - t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t)), \\ \gamma_3(t) &= K_3 \frac{d}{dt} (-V^\delta(N, x^*(t), T - t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t)), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\forall K_1, K_2, K_3 \in [0, 1], K_1 + K_2 + K_3 = 1.$$

Пусть

$$K_1 = 0,5; \quad K_2 = 0,3; \quad K_3 = 0,2.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= -0,000000009e^{-\frac{t}{2}} - 340226e^{\frac{t}{2}} + 29561e^t + 978932, \\ \gamma_2(t) &= -0,000000005e^{-\frac{t}{2}} - 204135e^{\frac{t}{2}} + 17737e^t + 587359, \\ \gamma_3(t) &= -0,000000004e^{-\frac{t}{2}} - 136090e^{\frac{t}{2}} + 11824e^t + 391573. \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть

$$\int_{t_0}^T \bar{\beta}_i(\tau) d\tau = \bar{\alpha}_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1(t) &= \gamma_1(t) - \frac{d}{dt}\alpha_1(t), \\ \bar{\beta}_2(t) &= \gamma_2(t) - \frac{d}{dt}\alpha_2(t), \\ \bar{\beta}_3(t) &= \gamma_3(t) - \frac{d}{dt}\alpha_3(t). \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_1(t) &= 144045308e^{-\frac{t}{2}} - 2655e^{\frac{t}{2}} + 92311e^t + 1595891977, \\
\bar{\beta}_2(t) &= 96469150e^{-\frac{t}{2}} + 21940e^{\frac{t}{2}} + 59761e^t + 537128580, \\
\bar{\beta}_3(t) &= 30920936e^{-\frac{t}{2}} - 63627e^{\frac{t}{2}} + 25294e^t + 1116221688.
\end{aligned} \tag{37}$$

Теорема 2 (Петросян Л.А., 2015).

Если выполнено Условие 1, то C -ядро $C(x_0, T - t_0)$ является сильно динамически устойчивым, при этом в качестве дележа

$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$, который фигурирует в определении сильной динамической устойчивости, можно взять дележ $\bar{\alpha}$ (35).

Проинтегрировав (37) по t , получим дележ $\bar{\alpha}(t) \in C(x^*(t), T - t)$, что продемонстрировано на Рис. 15. И при этом $C(x^*(t), T - t)$ обладает свойством сильной динамической устойчивости по Теореме 2 $\forall t \in [t_0, T]$. В соответствии с $\bar{\alpha}(t)$ игроки разделят суммарный выигрыш во всей игре согласно (38):

$$\bar{\alpha}(x_0, T - t_0) = (5826589264; 2041488580; 3958078576). \quad (38)$$

Если $K_1 = 0.2627$, $K_2 = 0.3403$, $K_3 = 0.397$, то мы получим в точности $Sh(x^*(t_0), T - t_0)$.

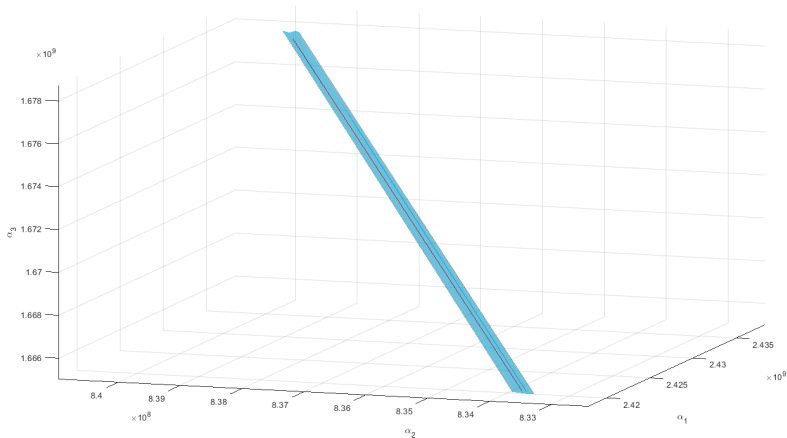


Рис. 15: Изменение множества $C(x^*(t), T-t)$ во времени

Заклучение

В работе было проделано следующее:

- 1 Были найдены выражения для 4 типов характеристической функции, между которыми обнаружена взаимосвязь
- 2 Вычислены значения вектора Шепли, построенного по 4 типам х.ф., и найдены совпадения между ними
- 3 Построены векторы Харшаньи и найдены зависимости между ними
- 4 Найдены аналитические выражения для ПРД, где в качестве принципа оптимальности выбирался вектор Шепли
- 5 Исследовано свойство сильной динамической устойчивости C -ядра. Построено множество опорных решений, которое впоследствии сравнивалось с C -ядром
- 6 Построен дележ, фигурирующий в определении СДУ C -ядра, используя второй метод, который отличается от полученных ранее.

Литература



Громова Е. В., Петросян Л. А. Об одном способе построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх // МТИП, 2015. Т. 7, No 4. С. 19–39
mathnet; E. Gromova, L. Petrosyan On a approach to the construction of characteristic function for cooperative differential games // Autom. Remote Control, 2017. Vol. 78, No 9. P. 1680–1692.



Громова Е. В., Петросян Л. А. Сильно динамически устойчивое кооперативное решение в одной дифференциальной игре управления вредными выбросами // УБС, 55, 2015. С. 140–159.



Петросян Л. А. Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности // Вестник Ленинградского университета, 1993. No 4. С. 35–40.



Петросян Л. А. Сильно динамически устойчивые решения в динамических кооперативных играх // Второй Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби» (CGS 2015). Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 2015. С. 264–271.



Петросян Л. А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестник Ленинградского университета, 1977. No 19. С. 46–52.



Петросян О. Л., Громова Е. В., Погожев С. В. О сильно динамически устойчивом подмножестве S -ядра в кооперативных дифференциальных играх с предписанной продолжительностью // МТИП, 2016. Vol. 8, No 4. С. 79–106.



Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов // Москва: Наука, 1983. С. 393.

-  E. Dockner, S. Jorgensen, N. van Long, G. Sorger Differential Games in Economics and Management Science // Cambridge University Press, 2000.
-  E. Gromova, E. Marova Coalition and Anti-coalition Interaction in Cooperative Differential Games // IFAC–PapersOnLine, 2018. Vol. 51. P. 479–483.
-  E. Gromova The Shapley Value as a Sustainable Cooperative Solution in Differential Games of Three Players // Recent Advances in Game Theory and Applications, Static and Dynamic Game Theory: Foundations and Applications, 2016. P. 67–91.
-  J. von Neumann, O. Morgenstern Theory of Games and Economic Behavior // Princeton University Press, 1953.
-  L. Petrosyan, G. Zaccour Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // Journal of Economic Dynamics and Control, 2003. Vol. 27, No 3. P. 381–398.

Спасибо за внимание!