Laboratorium 1

Arytmetyka komputerowa

Bartłomiej Szubiak

05.03.2024

Zad 1

Znaleźć "maszynowe epsilon", czyli najmniejszą liczbę a, taką że a+1>1

W standardzie IEEE 754, podczas dodawania liczb najpierw są one dostosowywane do wspólnego wykładnika, a następnie dodawane są ich mantysy.
Dlatego też, najmniejsza liczba, którą można dodać do jedynki, musi mieć ten sam wykładnik co 1, ale jednocześnie jak najmniejszą mantysę.

Więc:

- Dla liczby 1:
    - Wykładnik: 0
    - Mantysa: 1
- Dla maszynowego epsilon:
    - Wykładnik: taki sam jak dla liczby 1 czyli =0
    - Mantysa: najmniejsza możliwa

Tak więc, maszynowe epsilon jest równe:

$$\boldsymbol{\varepsilon = B^{-(p-1)}}$$

gdzie:
- p jest precyzją
- B jest podstawą systemu liczbowego.

Zad2

Rozważamy problem ewaluacji funkcji sin(x), m.in. propagację błędu danych wejściowych, tj. błąd wartości funkcji ze względu na zakłócenie h w argumencie x:

a) Ocenić błąd bezwzględny przy ewaluacji sin(x)
b) Ocenić błąd względny przy ewaluacji sin(x)
c) Ocenić uwarunkowanie dla tego problemu
d) Dla jakich wartości argumentu x problem jest bardzo czuły ?

a) Błąd bezwzględny:

$$\Delta \sin x = |\sin x(1 + \epsilon) - \sin x|$$

b) b) Błąd względny:

$$\frac{\Delta \sin x}{\sin x} = \frac{|\sin x(1 + \epsilon) - \sin x|}{\sin x}$$

c) Uwarunkowanie:

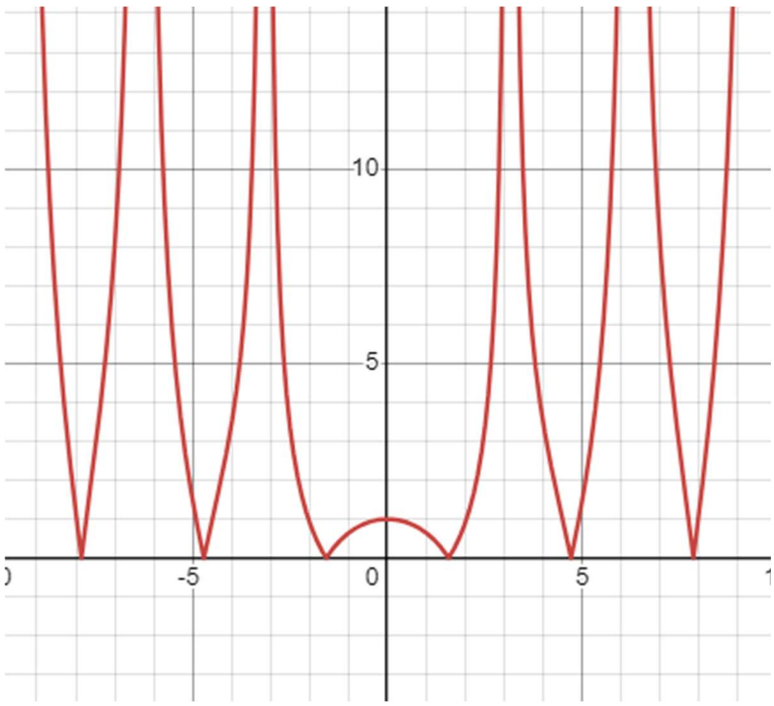
Dla funkcji jednej zmiennej błąd uwarunkowanie wyraża się wzorem:

$$\mathrm{cond}(f(x)) = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|$$

gdzie:
- f(x) to testowana funkcja w tym przypadku =sin(x)
- f'(x) to pochodna testowanej funkcji w tym przypadku =cos(x)

Więc:

$$\mathrm{cond}\big(f(x)\big) = \left|\frac{x\cos x}{\sin x}\right| = |\,x\,ctg\,x\,|$$



Rysunek 1: Wykres funkcji $y = |\,x\,ctg\,x\,|$

Obserwacja:
Funkcja ta ucieka do +∞ w wielokrotnościach π za wyjątkiem x = 0,
oraz jest równa 0 dla 1.5 wielokrotnościach π

d) Problem staje się czuły w miejscach gdzie funkcja ucieka do +∞ , czyli dla miejsc:
$x = k\pi, \quad \text{gdzie } k \in Z\backslash\{0\}$

Najlepiej uwarunkowany będzie problem w miejscach gdzie funkcja = 0 , więc dla miejsc:
$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{gdzie } k \in Z$

Wnioski:
Funkcja sin x jest najgorzej uwarunkowana dla swoich miejsc zerowych z wyjątkiem x=0
($x = k\pi, \text{ gdzie } k \in Z\backslash\{0\}$)
Zaś dla swoich ekstremów lokalnych ($x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in Z$) najlepiej.

Zad3

Funkcja sinus zadana jest nieskończonym ciągiem

sin(x) = x – x^3/3! + x^5/5! – x^7/7! + ...

a) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc tylko pierwszy człon rozwinięcia, tj. sin(x) ≈ x, dla x = 0.1, 0.5 i 1.0 ?

b) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc pierwsze dwa człony rozwinięcia, tj. sin(x) ≈ x - x^3/6, dla x = 0.1, 0.5 i 1.0 ?

Błąd progresywny to moduł różnicy między wartością uzyskaną w wyniku obliczeń a rzeczywistą wartością. W praktyce, błąd ten jest spowodowany niedokładnościami obliczeniowymi oraz ograniczeniami precyzji używanego sprzętu lub oprogramowania.

Natomiast błąd wsteczny to moduł różnicy między wartością podstawioną do funkcji (czyli argumentem) a argumentem, dla którego rzeczywista wartość tej funkcji jest równa wartości uzyskanej przez przybliżenie funkcji. Innymi słowy, jest to różnica między wartością, którą chcemy uzyskać za pomocą funkcji, a wartością argumentu, dla którego funkcja zwraca tę wartość.

Błąd progresywny: $|\hat{y} - y|$

Błąd wsteczny: $|\hat{x} - x|$

Rozpatrywaną funkcja będzie: $f(x) = \sin x$

a) $\hat{y} = \sin x \approx x, \ \hat{x} = \arcsin y$

x	$y = \sin x$	$\hat{y} = x$	$\hat{x} = \arcsin \hat{y}$	Błąd progresywny: $\lvert\hat{y} - y\rvert$	Błąd wsteczny: $\lvert\hat{x} - x\rvert$
0.1	0.09983342	0.1	0.10016742	0.00016658	0.00016742
0.5	0.47942554	0.5	0.52359878	0.02057446	0.02359878
1	0.84147098	1	1.57079633	0.15852902	0.57079633

Tabela 1: Wartość błędów dla przybliżenia: $\sin x = x$

b) $\hat{y} = \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $\hat{x} = \arcsin\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$

x	$y = \sin x$	$\hat{y} = x - \frac{x^3}{6}$	$\hat{x} = \arcsin \hat{y}$	Błąd progresywny: $\lvert\hat{y} - y\rvert$	Błąd wsteczny: $\lvert\hat{x} - x\rvert$
0.1	0.09983342	0.10016667	0.10033493	0.00033325	0.00033493
0.5	0.47942554	0.52083333	0.54782685	0.04140779	0.04782685
1	0.84147098	0.83333333	0.98511078	0.00813765	0.01488922

Tabela 2: Wartości błędów dla przybliżenia: $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$

Wnioski:
Można zauważyć, że przy użyciu większej ilości wyrazów szeregu Taylora (dla funkcji sin x) otrzymujemy dokładniejsze przybliżenia prawdziwego wyniku.

Zad4

Zakładamy że mamy znormalizowany system zmiennoprzecinkowy z β = 10, p = 3, L = -98

a) Jaka jest wartość poziomu UFL (underflow) dla takiego systemu ?
b) Jeśli x = 6.87 x 10^(-97) i y = 6.81 x 10^(-97), jaki jest wynik operacji x – y ?

a) Wartość poziomu UFL to najmniejsza liczba dodatnia którą można zapisać w danym systemie znormalizowanym. Najmniejsza mantysa jaką jesteśmy w stanie uzyskać ma wartość 1, oraz najmniejszy wykładnik osiągalny w tym systemie ma wartość L, więc:

$$\text{UFL} = \beta^L = 10^{-98}$$

b) $x - y = 6.87 \cdot 10^{-97} - 6.81 \cdot 10^{-97} = 0.06 \cdot 10^{-97} = 0.6 \cdot 10^{-98} < UFL$

Więc w tym systemie wynik tej operacji będzie wynosił 0

Wnioski:
Przez to, że UFL jest miarą dokładności systemu zmiennoprzecinkowego to system aby operować na bardzo małych liczbach powinien mieć jak najmniejszy parametr L
(wartość wykładnika wpływa na zakres możliwych do uzyskania liczb a mantysa ich dokładność)

Bibliografia:

https://en.wikipedia.org/wiki/Machine_epsilon
https://pl.wikipedia.org/wiki/IEEE_754
prezentacja podana na zajęciach