Laboratorium 4

Interpolacja

Bartłomiej Szubiak

19.03.2024

Zadania

Zad 1

Aproksymować funkcję f(x) = 1+ x-3 -w przedziale [0,1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla w(x)=1.

Mając:

$$f(x) = 1 + x\,, \qquad w(x) = 1, \qquad \phi_0(x) = x^0 = 1, \qquad \phi_1(x) = x^1 = x$$

Obliczamy całki:

$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 w(x)f(x)\varphi_0(x)\,dx = \int_0^1 (1+x^3)\,dx = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 w(x)f(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 (x+x^4)\,dx = \frac{7}{10}$$

Otrzymujemy wtedy układ równań:

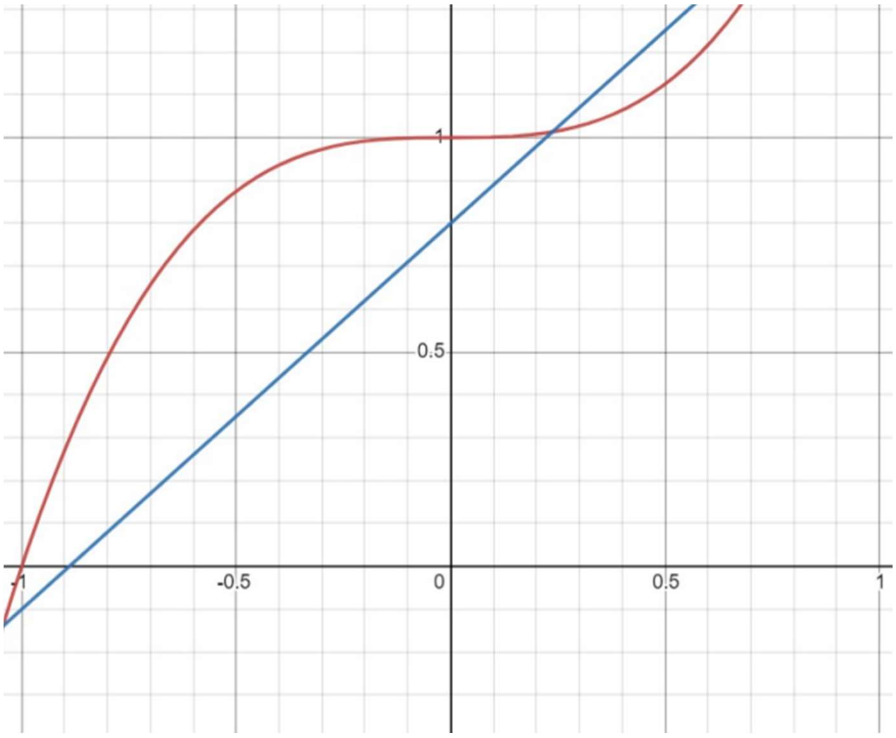
$$\begin{cases} c_0 \cdot (\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)\,dx + \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\,dx) = \frac{5}{4} \\ c_1 \cdot (\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\,dx + \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)\,dx) = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest:

$$c_0 \ = \ 0.8, \quad c_1 = 0.9$$

Otrzymujemy więc wzór na funkcje $q(x)$ aproksymującą funkcje $f(x)$:

$$q(x) = \frac{4}{5} + \frac{9}{10}x$$



Rysunek 1: Funkcja f(x) (na czerwono) aproksymowana za za pomocą funkcji q(x) (na niebiesko) z użyciem metody średniokwadratowej

Wnioski:

Możemy zauważyć że funkcja *f(x)* nie jest zbyt dobrze aproksymowana.

Zad 2

Aproksymować funkcję f(x) = 1+ x-3 -w przedziale [0,1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a.

Mając pierwsze trzy wielomiany Legendre'a:

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = x$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Wielomiany te nie sį ortogonalne na zadanym przedziale, także transformujemy na przedział [-1,1] używając podstawienia:

$$t = 2(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t+1)$$

Wtedy aproksymowana funkcja jest postaci:

$$f(t) = (\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1, \quad t \in [-1, 1]$$

A, wielomian aproksymujący będzie postaci:

$$q(t) = c_0 + c_1 t + \frac{c_2}{2}(3t^2 - 1)$$

Problem można zapisać jako układ równań:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_0(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_0(t)L_2(t)dt \\ \int_{-1}^{1} L_1(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_2(t)dt \\ \int_{-1}^{1} L_2(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt \end{bmatrix}$$

Korzystając z tego, że są one ortogonalne z wagą 1 w sensie metryki L^2na przedziale [-1, 1], układ upraszcza się do:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)dt & 0 & 0 \\ 0 & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)dt & 0 \\ 0 & 0 & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt \end{bmatrix}$$

Rozwiązując otrzymujemy:

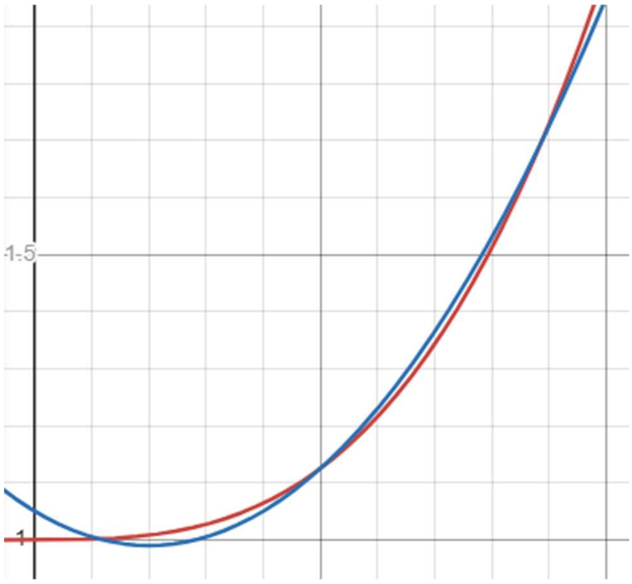
$$c_0 = 1.25, \qquad c_1 = 0.45, \qquad c_2 = 0.25,$$

Więc funkcja aproksymująca ma postać:

$$q(t) = 1.25 + 0.45t + 0.125\,(3t^2 - 1)$$

Wracając do zmiennej ‘x’:

$$q(x) = 1.5x^2 - 0.6x + 1.05$$



Rysunek 2: Funkcja f(x) (na czerwono) aproksymowana za pomocą funkcji q(x) (na niebiesko) z użyciem wielomianów Legendre'a, na przedziale $x \in [0,1]$

Wnioski:

Aproksymacja z użyciem wielomianów Legendre'a, na przedziale $x \in [0,1]$ jest bardzo dobra.

Zadania domowe

Zad 1

Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia.

1. Wczytaj punkty postaci $(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i})$, gdzie $y_i = f(x_i)$
2. Ułóż i rozwiąż poniższy układ równań (znajdując c_0, c_1, c_2):

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i) \end{bmatrix}$$

3. Wstaw znalezione wartości c_0, c_1, c_2 do wzoru:

   $q(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$

Zad 2

Oblicz wartości funkcji f(x)= 1-x2 w dyskretnych punktach xi: xi=-1+ 0.5*i, i=0,1..4, a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego

Interesujące nas punkty to:

$$(-1,0), (-0.5,0.75), (0,1), (0.5, 0.75), (1,0)$$

Dodatkowo: $h = 0.5, \ n = 4$

Wielomiany Grama do stopnia trzeciego mają postać:

$$P_{0,n} = 1,$$

$$P_{1,n} = 1 - 2\frac{t}{n},$$

$$P_{2,n} = 1 - 6\frac{t}{n} + 6\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$$

$$P_{3,n} = 1 - 12\frac{t}{n} + 30\frac{t(t-1)}{n(n-1)} - 20\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

Są one ortogonalne w punktach 0,1,2,3,... Aby zmienić ortogonalność na podane równoodległe punkty stosujemy podstawienie.

$$\mathrm{p} = \frac{x - x_0}{\mathrm{h}}$$

Dla naszego problemu (n =4) otrzymujemy wielomiany:

$$P_{0,4}(x) = 1$$

$$P_{1,4}(x) = -x$$

$$P_{2,4}(x) = 2x^2 - 1$$

$$P_{3,4}(x) = -\frac{20}{3}x^3 + \frac{17}{3}x$$

Dla danego zbioru wielomianów nasza funkcja aproksymująca będzie ich kombinacją liniową:

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x)$$

Problem sprowadza się do znalezienia współczynników ci poprzez rozwiązanie układu równań:

$$A_{m\times m} \cdot C_{m\times 1} = F_{m\times 1}$$

gdzie:

$$A_{i,j} = \sum_{q=0}^{n} \phi_i(x_q)\phi_j(x_q)$$

$$C_i = c_i$$

$$F_i = \sum_{q=0}^{n} \phi_i(x_q) y_q$$

Używając wielomianów Grama ortogonalnych w punktach x_i, macierz staje się diagonalna, obliczając:

$$c_0 = 0.5, \qquad c_1 = 0, \qquad c_2 = -0.5, \qquad c_3 = 0$$

Po podstawieniu daje nam to:

$$q(x) = 0.5 \cdot 1 - 0.5(2x^2 - 1) = -x^2 + 1$$

Wnioski:

Funkcja aproksymacyjna jest **identyczna** jak aproksymowana

Zad 3

Wykonać aproksymację funkcję |sin(x)| funkcjami trygonometrycznymi (Szereg Fouriera) w zakresie [-pi, pi].

Funkcja $f(x) = |sinx|$ spełnia warunki Dirichleta na przedziale $x \in [-\pi, \pi]$

Jest dodatkowo parzysta, więc można ją wyrazić jako szereg cosinusów:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx dx = \frac{-(2(\cos(\pi n) + 1))}{(\pi(n^2 - 1))} = \frac{-(2((-1)^n + 1))}{(\pi(n^2 - 1))}$$

Dla n > 1 , $a_1 = 0$

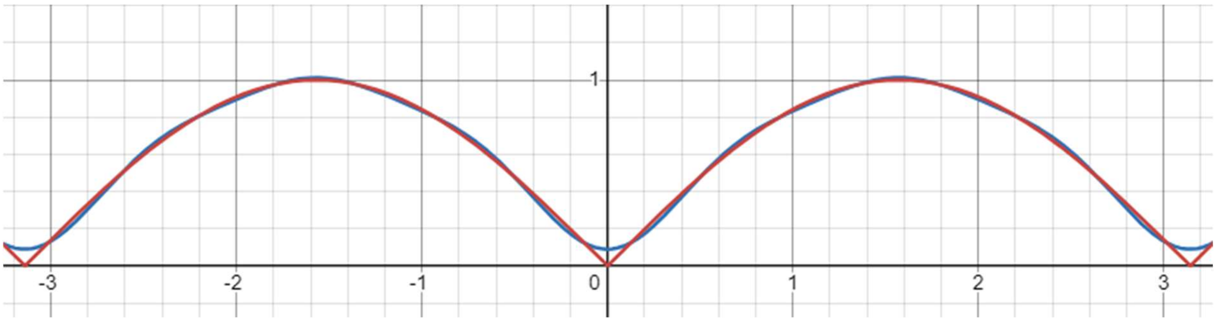
Dodatkowo,:

- dla nieparzystych n, $a_n = 0$
- dla parzystych n, $a_n = -\frac{4}{\pi(n^2-1)}$

Funkcja aproksymacyjna: $S_N(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx)$

Przykładowo dla N=6:

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(2x) - \frac{4}{15\pi} \cdot \cos(4x) - \frac{4}{35\pi} \cdot \cos(6x)$$



Rysunek 3: Funkcja f(x) (na czerwono) aproksymowana za pomocą funkcji q(x) (na niebiesko) z użyciem szeregu Fouriera, na przedziale $x \in [-\pi, \pi]$

Bibliografia:

wykład dr inż. Katarzyna Rycerz
https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab4/wielomianygrama.pdf
https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre%E2%80%99a
https://pl.wikipedia.org/wiki/Szereg_Fouriera