$\Omega = [0, 3]$

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G \varrho(x) \\ \phi(0) = 5 \\ \phi(3) = 7 \end{cases}$$

gdzie: $\varrho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \\ 0, & x \in (2,3] \end{cases}$

$G \in \mathbb{R}$

n - ilość podziałów

$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \rho(x) \quad / \cdot v$

niech $4\pi G \varrho(x) = \rho(x)$

$\phi'' v = \rho(x) \cdot v \quad / \int_0^3$

$\int_0^3 \phi'' v dx = \int_0^3 \rho(x) \cdot v \, dx$

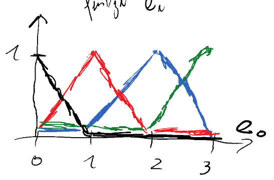
$\left\{ \int f \cdot g \, dx = \begin{Bmatrix} u = f & v' = g \\ u' = f' & v = \bar{g} \end{Bmatrix} = f \cdot \bar{g} - \int f' \cdot \bar{g} \right.$

$[\phi' \cdot v']_0^3 - \int_0^3 \phi' v' dx = \int_0^3 \rho(x) \cdot v \, dx$

$\phi'(3) \cdot v'(3) - \phi'(0) \cdot v'(0) - \int_0^3 \phi' v' dx = \int_0^3 \rho(x) \cdot v \, dx$

$B(\phi, v) = L(v)$ ← brak warunków początkowych narazie!

wys pomocniczy funkcji e_i $n = 3$



niech $\phi = \tilde{\phi} + w$
↑ „shifter"

$\Rightarrow$ $\tilde{\phi}$ to niech będzie funkcja która:

$\tilde{\phi}(0) = 5$

$\tilde{\phi}(3) = 7$

: $\tilde{\phi}(x) = \frac{2}{3} x + 5$

to wtedy $\Rightarrow$ w to jakaś funkcja która:

$w(0) = 0$

$w(3) = 0$

$B(\tilde{\phi} + w, v) = L(v)$

$B(\tilde{\phi}, v) + B(w, v) = L(v)$

$B(w, v) = L(v) - B(\tilde{\phi}, v)$

$B(w, v) = \tilde{L}(v)$

rozwiązujemy dla w, warunki początkowe dla ϕ uwzględnione

$\phi \in \mathrm{dim}\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$

$\downarrow \phi = \tilde{\phi} + w$

$w \in \mathrm{dim}\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$

$\Rightarrow w = w_0 \cdot e_0 + w_1 e_1 + \dots + w_{n-1} e_{n-1} + w_n e_n$

i żeby $w(0) = 0 \wedge w(3) = 0$

$\Rightarrow w_0 = 0 \wedge w_n = 0$

$\Rightarrow w \in \mathrm{dim}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$

gh

$\phi = \tilde{\phi} + w$

$\phi' = \tilde{\phi}' + w'$

$\phi' = \left(\frac{2}{3} x + 5\right)' + w'$

$$\begin{cases} \phi' = \frac{2}{3} + w' \\ \phi = \frac{2}{3} x + 5 + w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\phi} = \frac{2}{3} x + 5 \\ \tilde{\phi}' \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\phi} = \frac{2}{3}x + 5 \\ \tilde{\phi}' = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- $\tilde{L}(v) = L(v) - B(\tilde{\phi}, v) = (*)$

$$B(\tilde{\phi}, v) = \tilde{\phi}'(3) \cdot v'(3) - \tilde{\phi}'(0) v'(0) - \int_0^3 \tilde{\phi}' v' \, dx = \frac{2}{3} v'(3) - \frac{2}{3} v'(0) - \int_0^3 \frac{2}{3} v' \, dx$$

$$= \frac{2}{3}\Big(v'(3) - v'(0) - \underbrace{\int_0^3 v' dx}_{[v]_0^3} \Big) = \frac{2}{3}\big(v'(3) - v'(0) - v(3) + v(0) \big)$$

$$(*) = \int_0^3 \rho(x) v \, dx + \frac{2}{3}\big(v'(0) - v'(3) - v(0) + v(3) \big) \xlongequal{\rho = \begin{cases} 4\pi G & x \in (1,2) \\ 0 & w.p.p. \end{cases}} 4\pi G \int_1^2 v \, dx + \frac{2}{3}\big(v'(0) - v'(3) - v(0) + v(3) \big)$$

- $B(w, v) = w'(3) v'(3) - w'(0) v'(0) - \int_0^3 w' v' \, dx$

jeśli $w = w_1 e_1 + \ldots + w_{n-1} e_{n-1}$:

$$B\Big(\sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i, v \Big) = \tilde{L}(v)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i B(e_i, v) = \tilde{L}(v)$$

$\Big\downarrow \; v = e_j \quad j \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i B(e_i, e_j) = \tilde{L}(e_j)$$

← jest to macierz $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, n-1\}^2$

$\Big\downarrow$ wzywając e_i, e_j

$$B(e_i, e_j) = e_i'(3) \cdot e_j'(3) - e_i'(0) \cdot e_j'(0) - \int_0^3 e_i' \cdot e_j'$$

$$\tilde{L}(e_j) = 4\pi G \int_1^2 e_j \, dx + \frac{2}{3}\big(e_j'(0) - e_j'(3) - e_j(0) + e_j(3) \big)$$

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h} & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ ciągła i składa się z elementarnych więc:

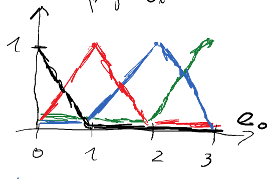
$$e_i' = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\dfrac{1}{h} & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

$e_i(\partial\Omega) = 0, \; e_j(\partial\Omega) = 0$

$e_i'(\partial\Omega) = 0, \; e_j'(\partial\Omega) = 0$ przyjmuje

t.w. z rysunku i wzorów

rys pomocniczy funkcji e_i $n=3$



$$\Rightarrow \quad B(e_i, e_j) = B_{ij} = -\int_0^3 e_i' \cdot e_j' \, dx$$

$$\tilde{L}(e_j) = \tilde{L}_j = 4\pi G \int_1^2 e_j \, dx$$

↑

zauważam że jeśli

- $diff(i,j) \geq 2$ to $B_{ij} = 0$
- $diff(i,j) == 1$ to można rozbić to na 2 całki z 0 i jedną całkę z wartością > 0 na dziedzinie całkowania (x_k, x_{k+1}), $k = \min(i,j)$
- $diff(i,j) == 0$ to $B_{ii} = -\int^3 (e_i')^2$ to można to rozbić na

całke z wartością > 0 na dziedzinie całkowania $(x_k, x_{k+1}$

- $diff(i, j) == 0$

to $B_{ij} = -\int_0^3 (e_i')^2$ to można to rozbić na całki z 0 i jedną całke której wartość > 0 na dziedzinie całkowania (x_{i-1}, x_{i+1})

zauważam że można to rozbić na całki 0, oraz jedną całke której wartość jest > 0 (zawierająca tylko „górkę" e_i w dziedzinie całkowania)

$$[1, 2] \not\supset (x_{j-1}, x_{j+1}) \rightarrow L_j = 0$$

Aby obliczyć wynik potrzeba wyliczyć w_i, za pomocą macierzy

$$\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & B_{n-1\,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \vdots \\ \tilde{L}_{n-1} \end{bmatrix}$$

wtedy $w = w_1 \cdot e_1 + \dots + w_{n-1} e_{n-1}$

wyik $\underline{\phi = \tilde{\phi} + w = \frac{2}{3}x + 5 + w_1 \cdot e_1 + \dots + w_{n-1} e_{n-1}}$