

## Rozdział 2

# Klasyczna analiza sygnałów

Pomiar i analiza sygnałów służy zwykle uzyskaniu informacji o generujących je systemach. Elektroencefalogram (dodatek B) pomaga w badaniach i diagnozie mózgu, a zmiany wartości indeksów giełdowych mają odzwierciedlać stan rynku.

Ogólnie system opisać można jako „czarną skrzynkę”, generującą sygnał (wyjście) w odpowiedzi na stan wejścia:

$$\text{wejście} \longrightarrow \boxed{\text{SYSTEM}} \longrightarrow \text{wyjście (mierzony sygnał)}$$

W takim podejściu system będzie równoważny transformacji (przekształceniu) sygnału. Nie tracimy przy tym na ogólności, gdyż rzadko interesują nas sygnały generowane przez systemy całkowicie izolowane, czyli pozbawione wejścia. W skrajnym przypadku możemy założyć, że wejściem systemu jest szum (jak np. w modelu AR).

Droga do matematycznego opisu rzeczywistości prowadzi przez modele oparte na pewnych upraszczających założeniach. Często właśnie wybór właściwych założeń (czyli uproszczeń) decyduje o sukcesie danego podejścia, jak np. w przypadku przestrzeni Banacha w analizie matematycznej. W przypadku teorii systemów szczególną rolę spełniają dwa założenia: liniowości<sup>1</sup> i niezmienniczości w czasie<sup>2</sup>. Na tych dwóch założeniach opiera się cała klasyczna analiza sygnałów, z której wywodzą się pojęcia widma mocy, transmitancji, teoria filtrów i wiele innych fundamentalnych idei.

### 2.1 Systemy liniowe niezmiennicze w czasie (LTI)

Matematycznie system traktować będziemy jako transformację (operator), przekształcającą sygnał wejściowy  $x(t)$  w  $y(t)$ :

$$x \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow T\{x\} = y$$

Będziemy się zajmować klasą systemów liniowych niezmienniczych w czasie (ang. *Linear Time-Invariant*, LTI), działających na sygnałach dyskretnych, czyli:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow T\{x[n]\} = y[n]$$

System  $T$  jest liniowy, gdy:

$$T\{ax_1 + bx_2\} = aT\{x_1\} + bT\{x_2\} = ay_1 + by_2 \quad (2.1)$$

Dla takiego systemu interesujące będzie badanie przekształcenia sekwencji jednostkowej

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Liniowość oznacza, że odpowiedź systemu na sumę dwóch sygnałów będzie sumą odpowiedzi tego systemu na każdy z sygnałów podanych osobno, czyli dodanie do wejścia drugiego sygnału nie zakłóci przetwarzania w tym samym czasie pierwszego z nich. Cecha taka jest pożądana np. w przypadku sprzętu audio, gdy nie chcemy, aby smyczki w kwartecie były odtwarzane inaczej niż w partii solowej.

<sup>2</sup>Niezmienniczość w czasie np. charakterystyk wzmacniacza zagwarantuje, że ta sama partia skrzypiec odtwarzana jutro będzie brzmiała tak samo jak dzisiaj.

Niech  $h_k(n)$  - odpowiedź systemu  $T$  na impuls jednostkowy w punkcie  $k$ :

$$h_k[n] = T\{\delta[n - k]\}$$

Każdy dyskretny sygnał  $x$  możemy przedstawić jako ważoną sumę sekwencji jednostkowych:

$$x[n] = \sum_k x[k]\delta[n - k]$$

Gdzie  $x[k]$ , czyli wartość sygnału  $x$  w punkcie  $k$ , przyjmuje rolę liczby mnożącej funkcję  $\delta[n - k]$ . Jeśli  $T$  jest systemem liniowym, to

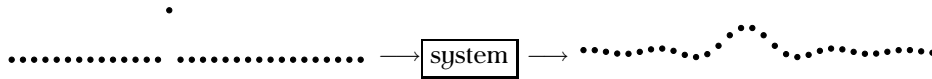
$$y[n] = T\left\{\sum_k x[k]\delta[n - k]\right\} = \sum_k x[k]T\{\delta[n - k]\} = \sum_k x[k]h_k[n]$$

Jeśli system jest niezmienniczy w czasie, to odpowiedź na sekwencję jednostkową  $T\{\delta[n - k]\} = h_k[n]$  będzie niezależna od  $k$ :  $T\{\delta[n - k]\} = h[n]$ . Wtedy

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n - k] = x[n] \star h[n] = h[n] \star x[n] = \sum_k h[k]x[n - k] \quad (2.3)$$

gdzie  $\star$  oznacza splot<sup>3</sup>. Otrzymaliśmy w ten sposób pierwszy ważny wynik:

Znając odpowiedź systemu liniowego niezmienniczego w czasie na sekwencję jednostkową, możemy obliczyć jego odpowiedź na dowolny sygnał. Tak więc funkcja odpowiedzi impulsowej systemu LTI stanowi jego kompletny opis.



Następnym krokiem w badaniu własności matematycznych przekształceń bywa poszukiwanie punktów stałych, czyli niezmienników. Rozważmy przekształcenie LTI wykładniczej funkcji zespolonej<sup>4</sup>  $e^{i\omega n}$ ; z (2.3)

$$T\{e^{i\omega n}\} = \sum_k h[k]e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_k h[k]e^{-i\omega k} \quad (2.4)$$

Przed znak sumy wyciągnęliśmy podlegającą transformacji zespoloną funkcję wykładniczą  $e^{i\omega n}$ . Wartość sumy  $\sum_k h[k]e^{-i\omega k}$  zależy od funkcji odpowiedzi impulsowej systemu  $h[k]$  i częstości  $\omega$ <sup>5</sup>. Tak więc odpowiedź systemu LTI na funkcję  $e^{i\omega n}$  polega na wymnożeniu tej funkcji przez liczbę, czyli inaczej mówiąc funkcje zespolone od argumentu urojonego są wektorami własnymi przekształceń LTI, a odpowiadające im wartości własne to  $\sum_k h[k]e^{-i\omega k}$ .

Gdybyśmy potrafili dowolną funkcję rozłożyć na sumę zespolonych funkcji wykładniczych, np. w postaci

$$s[n] = \sum_k a_k e^{ikn},$$

działanie systemów LTI ograniczałoby się do łatwo obliczalnych modyfikacji współczynników  $a_k$ . Następne rozdziały odpowiadają na pytanie, czy jest to możliwe. Rozważania te będzie łatwiej prowadzić w przestrzeni funkcji ciągłych, stąd na pewien czas dyskretny sygnał  $s[n]$  zastąpimy ciągłym  $s(t)$ . Zaczniemy od prostszego przypadku sygnałów okresowych<sup>6</sup>.

<sup>3</sup>Jak widać z równania 2.3, splot sygnałów  $x[n]$  i  $y[n]$  wyraża się wzorem  $\sum_k x[k]y[n - k]$ . Symetryczność splotu sekwencji nieskończonych względem zamiany  $x$  i  $y$  możemy udowodnić prostym podstawieniem  $\sum_k \rightarrow \sum_j$ , gdzie  $j = n + k$ . Wyobrazić sobie splot najłatwiej na przykładzie „długiego” sygnału  $y$  i „krótkiego”  $x$ : każdy punkt ( $n$ ) sygnału  $y$  zastępujemy ważoną sumą jego sąsiednich punktów. Wagami są odpowiednie wartości  $x$ .

<sup>4</sup>Przypomnijmy wzór Eulera:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{cases}$$

<sup>5</sup>Po lekturze rozdziału 2.2 sumę tę skojarzymy z transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej

<sup>6</sup>Okresowość jest w matematyce silnym i ściśle zdefiniowanym wymogiem:  $\forall t s(t + T) = s(t)$ .

## 2.2 Szereg Fouriera

Sygnał *okresowy* (o okresie  $T$ ) można przedstawić w postaci szeregu Fouriera:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} \quad (2.5)$$

$$\text{gdzie} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{\frac{2\pi i n t}{T}} dt \quad (2.6)$$

*Dowód (wzoru 2.6 na współczynniki rozwinięcia Fouriera).*

Mnożymy obie strony równania 2.5 przez  $e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$  i całkujemy po  $dt$  od 0 do  $T$ :

$$\int_0^T s(t) e^{\frac{2\pi i k t}{T}} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T c_n e^{i\frac{2\pi(k-n)}{T}t} dt \quad (2.7)$$

Całki po prawej stronie znikają dla  $k \neq n$ . Jedyne niezerowy wyraz dla  $k = n$  wynosi  $\int_0^T c_n dt$ , czyli  $c_n T$  (bo  $e^0 = 1$ ).  $\square$

Oznacza to, że każdą funkcję okresową możemy przedstawić w postaci sumy sinusów i kosinusów z odpowiednimi wagami. Wagi  $\{c_n\}$  możemy traktować jako względny „udział” odpowiadających im częstotliwości.

### Twierdzenie 1 (Tożsamość Parsevala dla szeregów Fouriera)

$$\frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2.8)$$

*Dowód.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \overline{s(t)} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{c_m} e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \right) dt = \\ &= \left\| \int_0^T e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} e^{i\frac{2\pi}{T}mt} dt = \delta_{(m-n)T} \right\| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{c_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2 \end{aligned}$$

$\square$

### 2.2.1 Energia, moc, widmo

Jeśli sygnałem będzie np. prąd elektryczny, płynący w obwodzie o jednostkowej oporności w czasie od 0 do  $T$ , to wytracona przez niego energia wyniesie  $\int_0^T s(t)^2 dt$ . W ogólności, biorąc pod uwagę sygnały o wartościach zespolonych, całkowitą energię sygnału definiujemy jako  $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$ . Moc to oczywiście energia wytracana w jednostce czasu, czyli  $\frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt$ . Jak widać z powyższego twierdzenia, dla sygnałów okresowych możemy ją również obliczać jako sumę kwadratów współczynników szeregu Fouriera  $\sum c_n^2$ . Pozwala to interpretować  $c_n^2$  jako moc, niesioną przez odpowiadającą mu częstotliwość. Wykres tej wielkości w zależności od częstotliwości nazywamy widmem mocy sygnału. Dla sygnału okresowego widmo mocy będzie dyskretne (patrz rys. 2.1).

Wszystko to nie dotyczy się tylko sygnałów czysto okresowych; z sygnału *nie-okresowego*  $s(t)$ , określonego na skończonym przedziale  $[0, T]$ , możemy utworzyć sygnał okresowy  $s_T(t)$ :

$$s_T(t) = s(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

$$s_T(t + nT) = s(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

tożsamy z  $s(t)$  w przedziale  $[0, T]$ , który można już przedstawić w postaci sumy (2.5).



**Przykład 2.1** Policzmy postać współczynników Fouriera dla funkcji  $\Theta(t)$  (rys. 2.1), określonej na przedziale  $[0, 1]$  w następujący sposób:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (2.11)$$

Bezpośrednio z wzoru 2.6 dostajemy (dla  $T = 1$ )

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \Theta(t) e^{\frac{i2\pi nt}{T}} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi nt} dt = (\text{dla } n \neq 0) = \left[ \frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi nt} \right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{i2\pi n} (e^{i\pi n} - 1) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = \pm 2, \pm 4, \dots \\ i/\pi n & \text{dla } n = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases} \\ (\text{dla } n = 0) \quad c_0 &= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tak więc z wzoru 2.5

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i2\pi nt} = \frac{1}{2} + \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{i}{\pi n} e^{-i2\pi nt} = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{i}{\pi n} (\cos(2\pi nt) - i \sin(2\pi nt)) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{i}{\pi n} \cos(2\pi nt) + \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi nt) \end{aligned}$$

W sumie kosinusów wyrazy dla  $n > 0$  znoszą odpowiednie wyrazy dla  $-n$ , w sumie sinusów wyrazy dla  $\pm n$  dodają się, dając w efekcie

$$\Theta(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2n-1)t)}{(2n-1)} \quad (2.12)$$

## 2.3 Przekształcenie Fouriera

A jeśli sygnał nie jest *ściśle* okresowy? Jeśli pewne struktury powtarzają się, ale nie na tyle dokładnie by spełnić matematyczny wymóg okresowości  $\forall t \ s(t+T) = s(t)$ ?

Przejdźmy do nieskończoności z okresem sygnału:  $T \rightarrow \infty$ . Wtedy odstęp ( $\frac{2\pi}{T}$ ) między częstotliwościami kolejnych elementów sumy z równania (2.5) dąży do 0 i suma przechodzi w całkę

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{-i2\pi ft} df \quad (2.13)$$

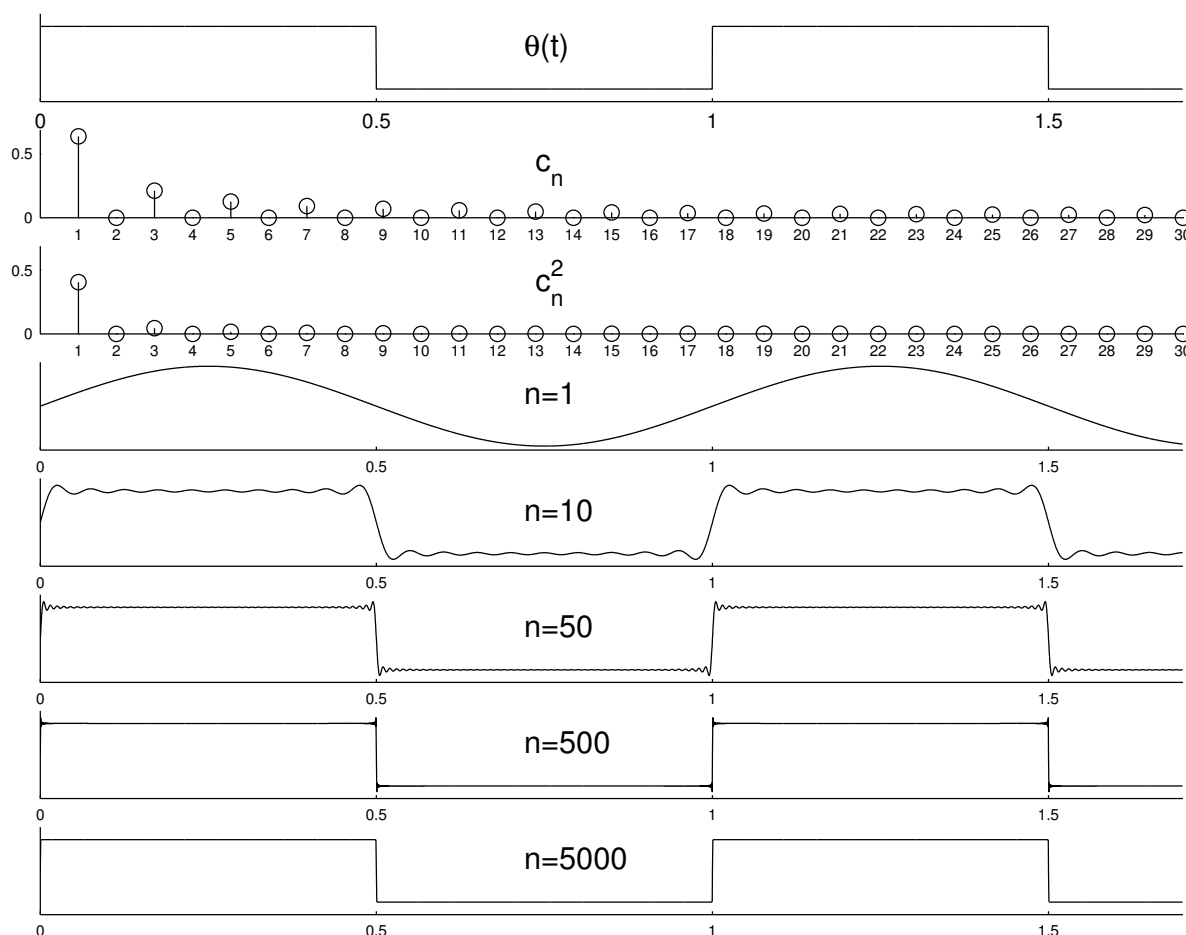
funkcja  $\hat{s}(f)$  to transformata Fouriera sygnału  $s(t)$ , czyli wynik działania przekształcenia (transformacji) Fouriera  $\mathcal{F}$ .

$$\mathcal{F}(s(t)) \equiv \hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{i2\pi ft} dt \quad (2.14)$$

Jak widać, transformata Fouriera jest zespoloną funkcją częstotliwości. Jej moduł dla danej częstotliwości  $f$  opisuje jej „zawartość” w sygnale, a faza odpowiada za „składanie” poszczególnych częstotliwości w sygnał (2.13).

Moduł transformaty Fouriera odpowiada<sup>7</sup> na postawione na początku tego rozdziału pytanie o opis częstotliwości zawartych w sygnale niekoniecznie okresowym, jak miało to miejsce w przypadku szeregów

<sup>7</sup>Jeśli znamy dokładnie wartości sygnału od  $-\infty$  do  $\infty$ ; w praktyce tak się nie zdarza, stąd m. in. rozdział 4.



Rysunek 2.1: Od góry, kolejno: funkcja  $\theta$  (równanie 2.11), „uzupełniona” do funkcji okresowej według wzoru 2.10, pierwszych 30 współczynników szeregu Fouriera, kwadraty współczynników szeregu Fouriera — dyskretne widmo, pierwszy wyraz rozwinięcia Fouriera, sumy pierwszych 10, 50, 500 i 5000 wyrazów rozwinięcia (2.12). Jak widać, najtrudniejsza do wyrażenia z pomocą funkcji trygonometrycznych jest nieciągłość funkcji  $\theta(t)$  w punktach  $\{\pm \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}\}$ ; niejednorodna zbieżność szeregów Fouriera w tych rejonach nosi nazwę *efektu Gibbsa*.

Fouriera (równanie 2.5). Tak naprawdę, to dla sygnału okresowego, opisanego równaniem (2.13), nie da się policzyć transformaty Fouriera, bo całka (2.14) jest nieskończona. Ogólnie dla sygnałów okresowych nie jest spełniony warunek  $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$ . Na szczęście sygnały występujące w przyrodzie, szczególnie po przekształceniu na formę dyskretną, zawsze spełniają warunki istnienia transformaty Fouriera<sup>8</sup>.

## Twierdzenie 2 (Tożsamość Parsevala dla całek Fouriera)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(f)|^2 df \quad (2.15)$$

*Dowód.*

<sup>8</sup>poza rozbieżnością całki modułu, „popsuć” wzory (2.14) i (2.13) może wyjątkowo patologiczne zachowanie funkcji, jak nieskończona liczba ekstremów lub punktów nieciągłości w skończonym przedziale. Podobnie wygląda sytuacja dla szeregów Fouriera.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{s}(f)} e^{i2\pi t f} df \right) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{s}(f)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{i2\pi t f} dt \right) df = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{s}(f)} \hat{s}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(f)|^2 df
\end{aligned}$$

(przy przejściu do drugiej linii zamieniono kolejność całkowania według twierdzenia Fubiniego, str. 46).  
□

**Przykład 2.2** Policzmy transformatę Fouriera „schodka” danego równaniem (2.11). Tym razem nie będziemy „uzupełniać” sygnału do nieskończonej postaci okresowej, gdyż wtedy całka (2.14) byłaby rozbieżna. Ograniczymy się do jednego okresu funkcji. . .

### 2.3.1 Konwencje zapisu przekształcenia Fouriera

Szczególna postać wzorów (2.13) i (2.14) wynika z przyjęcia konwencji wyrażania częstości jako odwrotności czasu:  $f = \frac{1}{T}$  (w hercach). Dowolność pozostaje w umieszczeniu minusa w wykładniku — we wzorze na transformatę odwrotną (2.13) lub we wzorze (2.14). Z kolei przyjęcie częstości kołowej  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  (w radianach) przenosi czynnik  $2\pi$  (konkretnie jego odwrotność) z wykładnika przed całkę. Stąd różnorodność możliwych par wzorów:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{-i2\pi t f} df \quad \hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{i2\pi f t} dt \quad (2.13), (2.14) \text{ str.12}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{i2\pi t f} df \quad \hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (2.16)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.17)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.18)$$

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \hat{s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.19)$$

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \hat{s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.20)$$

Przyjmijmy wywodzącą się z matematyki konwencję dodatniego wykładnika we wzorze na transformację (2.14) i ujemnego we wzorze na transformację odwrotną (2.13); ewentualne stosowanie częstości kołowej można odróżnić po użyciu symbolu  $\omega$  jako argumentu transformaty. W zastosowaniach inżynierskich przeważa konwencja ujemnego wykładnika we wzorze na transformację (2.16).

### 2.3.2 Symetrie i własności Transformaty Fouriera

Powyższe wzory wyprowadzić można bezpośrednio z definicji (2.13) i (2.14).

## 2.4 Częstość

Według *Słownika języka polskiego*[13]

**częstość**<sup>9</sup> (...) 2. fiz. «liczba zdarzeń lub cykli w zjawiska okresowego w jednostce czasu»

Szukamy narzędzia, które wskazałoby występujące w sygnale częstości i ich względny wkład. Konieczny jest do tego wybór „wzorca”, czyli podstawowego kształtu (funkcji), którym będziemy mierzyć

<sup>9</sup>W kręgach inżynierskich po wojnie wprowadzono termin „częstotliwość”, którego rozróżnienie od częstości nie jest powszechnie jednoznaczne; brak takich rozróżnień np. w innych językach europejskich, a w polskim wydaje się on równie potrzebny jak np. „gęstość” (na podstawie informacji prof. A. K. Wróblewskiego).

jeśli sygnał $s(t)$ jest...	to $\mathcal{F}s(t) \equiv \hat{s}(\omega)$ ...
parzysty ( $s(t) = s(-t)$ )	parzysta
nieparzysty ( $s(t) = -s(-t)$ )	nieparzysta
rzeczywisty	$s(-\omega) = \overline{\hat{s}(\omega)}$
urojony	$s(-\omega) = -\overline{\hat{s}(\omega)}$
rzeczywisty i parzysty	rzeczywista i parzysta
rzeczywisty i nieparzysty	urojona i nieparzysta
urojony i parzysty	urojona i parzysta
urojony i nieparzysty	rzeczywista i nieparzysta

Tabela 2.1: Symetrie transformat Fouriera

skalowanie w czasie:	$s(at)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$\frac{1}{ a }\hat{s}\left(\frac{f}{a}\right)$
skalowanie w częstotliwości:	$\frac{1}{ a }s\left(\frac{t}{a}\right)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$\hat{s}(af)$
przesunięcie w czasie:	$s(t - t_0)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$\hat{s}(f) e^{2\pi i f t_0}$
przesunięcie w częstotliwości:	$s(t) e^{-2\pi i f_0 t}$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$\hat{s}(f - f_0)$

Tabela 2.2: Skalowanie i przesunięcie transformat Fouriera

częstość. Standardem jest tu sinus (w parze z kosinusem) lub odpowiadające im oscylacje zespolone  $e^{i\omega t}$ . Dzieje się tak głównie dlatego, że funkcje te są wektorami własnymi systemów liniowych niezmienniczych w czasie (równanie (2.4)) oraz zbiór  $\{e^{ik\omega}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  jest ortonormalną bazą  $L^2([0, 2\pi])$ :

### 2.4.1 Korelacja i spłot

Korelacja jest miarą podobieństwa lub wzajemnej zależności. Jeśli mówimy, że występuje korelacja między wydajnością i ceną komputerów, to mamy na myśli stwierdzenie, że droższe komputery mają zwykle większą moc obliczeniową — im mniej przypadków przeciwnych, tym korelacja silniejsza. Silna korelacja sygnałów  $x$  i  $y$  oznacza, że wzrostowi  $x$  towarzyszy najczęściej wzrost  $y$  ( $x \nearrow \leadsto y \nearrow$ ). Jeśli przeważa sytuacja odwrotna ( $x \nearrow \leadsto y \searrow$ ) mówimy o korelacji ujemnej.

Miarą współzmienności (kowariancji) dwóch sygnałów jest ich iloczyn. Przed obliczeniem tego iloczynu (w ogólnym przypadku mówimy o jego wartości oczekiwanej) od każdego z sygnałów warto odjąć wartość średnią:

$$\sigma_{xy} = \int (x(t) - \bar{x})(y(t) - \bar{y}) dt \quad (2.21)$$

Dzięki temu w przypadku, gdy sygnały są od siebie niezależne,  $\sigma_{xy}$  będzie bliska zeru — uniezależnia to miarę kowariancji od wartości średnich sygnałów. Aby otrzymać wartości z przedziału  $[-1, 1]$  wprowadzamy jako czynnik normalizacyjny wariancję sygnału:

$$\sigma_s^2 = \int (s(t) - \bar{s})^2 dt \quad (2.22)$$

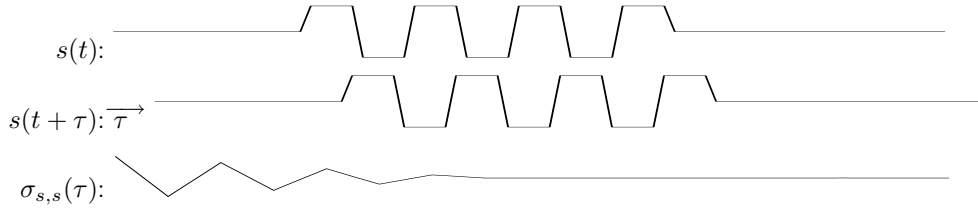
Znormalizowaną w ten sposób kowariancję zwiemy korelacją:

$$\text{korelacja}_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \quad (2.23)$$

Może się zdarzyć, że dwa sygnały są bardzo podobne, tylko przesunięte względem siebie w czasie. W wykryciu takiej sytuacji pomaga funkcja korelacji wzajemnej, czyli korelacja dwóch sygnałów w funkcji ich wzajemnego przesunięcia. Z kolei autokorelacja to miara korelacji sygnału  $s(t)$  z jego kopią przesuniętą o  $\tau$ . Pomijając normalizację i odejmowanie średnich otrzymamy

$$\sigma_{s,s}(\tau) = \int s(t)s(t+\tau)dt \quad (2.24)$$

Funkcja autokorelacji będzie miała oczywiście maksimum w zerze, a istnienie innych maksimów związane jest z występowaniem w sygnale okresowo powtarzających się zjawisk. Twierdzenie Wienera-Chinczyna mówi wręcz, że widmo mocy obliczać możemy jako transformatę Fouriera funkcji autokorelacji.



Rysunek 2.2: Od góry: sygnał  $s(t)$ , ten sam sygnał przesunięty w czasie o  $\tau$ , i jego funkcja autokorelacji.

$$\text{corr}(x(t), y(t)) = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\int (x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y) dt}{\sqrt{\int (x(t) - \mu_x)^2 dt \int (y(t) - \mu_y)^2 dt}} \quad (2.25)$$

lub

$$\frac{\sum_i (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_j (x_j - \mu_x)^2 \sum_k (y_k - \mu_y)^2}}$$

Rozważmy transformatę Fouriera funkcji korelacji sygnałów  $f$  i  $g$ , dla uproszczenia pomijając normalizację:

$$s(\tau) = \int f(t)g(t+\tau)dt \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \hat{s}(\omega) &= \int e^{-i\omega\tau} \left( \int f(t)g(t+\tau)dt \right) d\tau \\ &= \int e^{-i\omega(t+\tau)} g(t+\tau) \int e^{i\omega t} f(t) dt du \\ &= \int e^{-i\omega u} f(u) du \int e^{i\omega(t)} g(t) dt = \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Jak widać, operator korelacji odpowiada w przestrzeni transformat Fouriera iloczynowi transformaty jednego sygnału ze sprzężeniem zespolonym transformaty drugiego.

### Twierdzenie 3 (Twierdzenie o splocie)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du \implies \hat{s}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (2.28)$$

...czyli spłot w przestrzeni czasu odpowiada iloczynowi w przestrzeni transformat Fouriera.

Jest to wynik wygodniejszy od wzoru (2.27), stąd filtrowanie realizowane jest właśnie z pomocą splotu, który jak widać z równania (2.28) jest korelacją z sygnałem o odwróconym kierunku czasu.

*Dowód.*

$$\begin{aligned} \hat{s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(u)g(t-u) du dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-u)} g(t-u) dt \right) du = \\ &\quad \left\| \begin{array}{l} \text{całka w nawiasie przebiega od } -\infty \text{ do } \infty, \\ \text{więc możemy zamienić } (t-u) \text{ na } t \end{array} \right\| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g(t) dt \right) du = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

□

**Twierdzenie 4 (Wienera–Chinczyna)** transformata Fouriera funkcji autokorelacji jest równa kwadratowi modułu transformaty Fouriera.

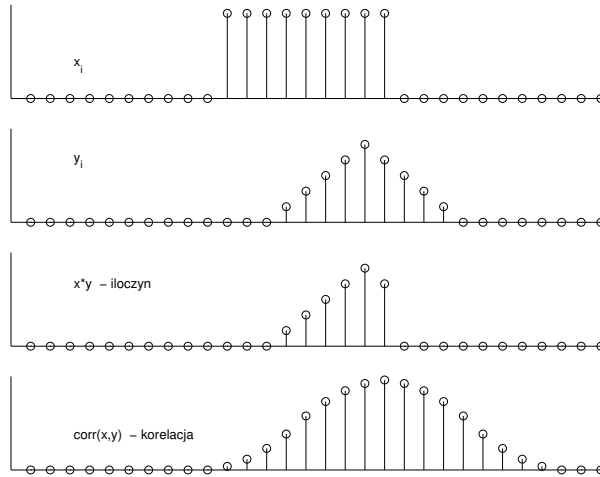


*Dowód.*

Kładąc  $f = g$  we wzorze (2.27), dostajemy

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left( \int f(t)f(t+\tau)dt \right) &= \int e^{-i\omega\tau} \left( \int f(t)f(t+\tau)dt \right) d\tau = \\ &\dots = \hat{f}(\omega)\overline{\hat{f}(\omega)} = |\hat{f}(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

□



Rysunek 2.3: Iloczyn i korelacja dyskretnych sekwencji  $x$  i  $y$ ...

## 2.5 Przekształcenie Fouriera sygnałów dyskretnych, aliasing

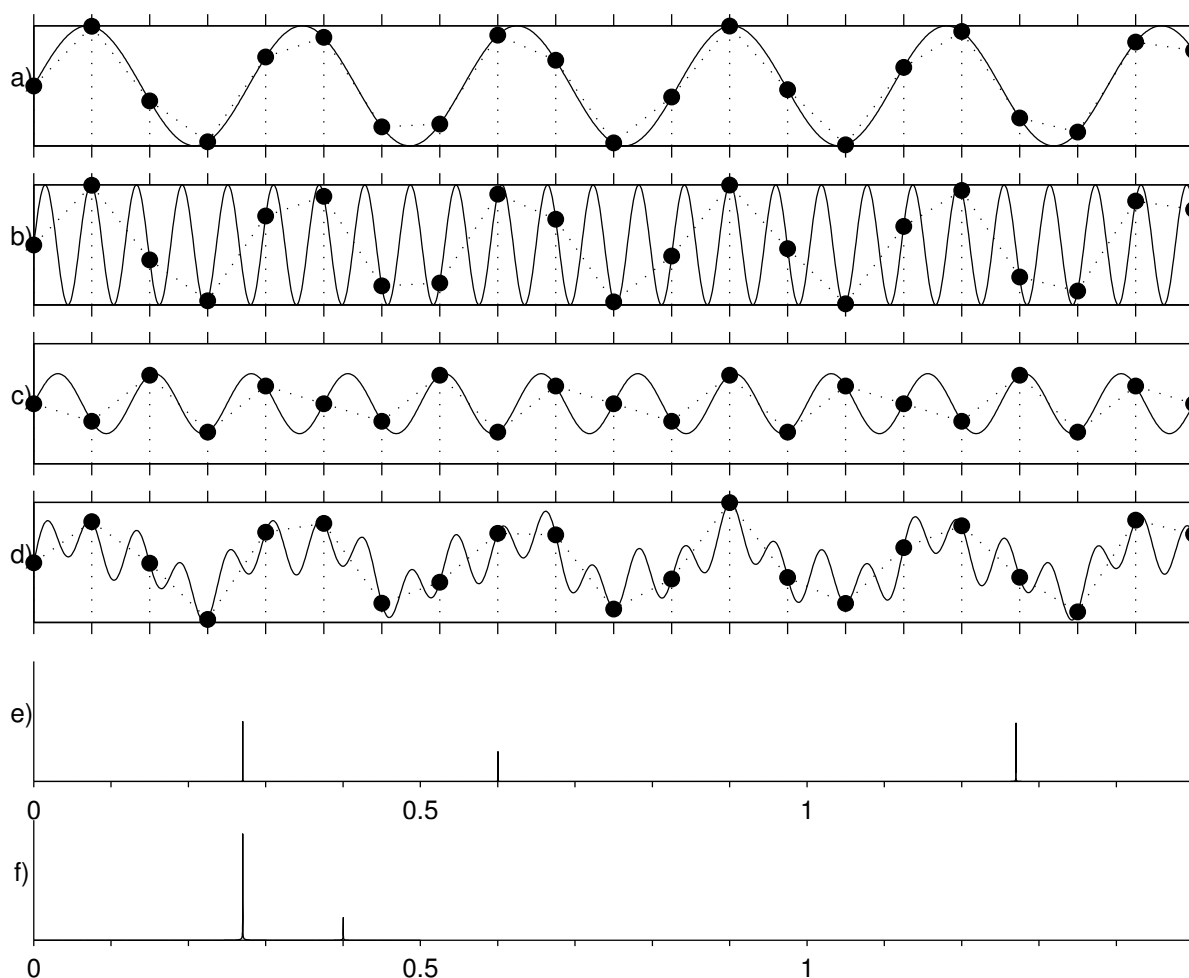
Przypomnijmy wzór (2.13) na odwrotną transformację Fouriera sygnału ciągłego

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f)e^{-i2\pi ft} df$$

Dyskretne wartości tego sygnału, próbkowane w chwilach  $n\Delta t$ , możemy odtworzyć z powyższego równania dla  $t = n\Delta t$

$$\begin{aligned} s(n\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f)e^{-i2\pi n\Delta t f} df = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{(2r-1)}{2\Delta t}}^{\frac{(2r+1)}{2\Delta t}} \hat{s}(f)e^{-i2\pi n\Delta t f} df \quad f \rightarrow f + \frac{r}{\Delta t} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{\frac{1}{2\Delta t}} \hat{s}\left(f + \frac{r}{\Delta t}\right) e^{-i2\pi n\Delta t(f + \frac{r}{\Delta t})} df = \\ &= \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{\frac{1}{2\Delta t}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{s}\left(f + \frac{r}{\Delta t}\right) e^{-i2\pi n\Delta t f} df \end{aligned} \quad (2.30)$$

Szukając wartości sygnału w dyskretnych chwilach czasu, dostaliśmy w miejsce odwrotnej transformaty Fouriera całkę w ograniczonym zakresie z funkcji będącej (nieskończoną) sumą powtórzeń transformaty Fouriera sygnału ciągłego, przesuwanej o wielokrotności odwrotności  $\Delta t$ . Ilustruje to rysunek 2.4.



Rysunek 2.4: Próbkowanie ( $\Delta t = 1$ ) sygnałów o częstościach: (a) 0.27, (b) 0.6 i (c) 1.27. Widzimy, że sygnał (b) o częstości 1.27 daje w chwilach próbkowania wartości dokładnie takie same, jak sygnał (a) o częstości 0.27 (*aliasing*). Sygnał (d) jest sumą (a), (b) i (c). e) - dodatnia część modułu transformaty Fouriera sygnału ciągłego (d). f) - jak e), ale obliczane dla sygnału dyskretnego (wartości tylko w miejscach oznaczonych kropkami). Porównując równanie (2.30) z przejściem od e) do f) widać, że częstość 1.27 zlewa się z częstością 0.27 ( $r = -1$ ) — wysokość odpowiadającego im piku wzrasta dwukrotnie w stosunku do mniejszego piku częstości 0.6, który „zawija się” z kolei na 0.4 (w tym przypadku  $r = 1$  a „zawija się” dokładnie częstość  $-0.6$ )

## 2.6 Twierdzenie o próbkowaniu

Twierdzenie o próbkowaniu odpowiada na kluczowe pytanie, które winniśmy postawić decydując się na pracę z dyskretnymi (próbkowanymi) wersjami sygnałów ciągłych z natury.

**Twierdzenie 5 (Twierdzenie o Próbkowaniu)** *Sygnał ciągły  $s(t)$  możemy odtworzyć z wektora jego wartości w dyskretnych chwilach czasu  $n\Delta t$ , jeśli nie było w nim częstości wyższych niż  $\frac{1}{2\Delta t}$ .*

*Dowód.*

Dla uproszczenia przyjmijmy  $\Delta t = 1$ . Wtedy  $\hat{s}(f)$ , czyli transformata Fouriera sygnału  $s(t)$ , będzie niezerowa co najwyżej pomiędzy  $-\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{2}$ . Oznaczmy  $u(f)$  funkcję o okresie 1, tożsamą z  $\hat{s}(f)$  na przedziale  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Przedstawia ją szereg Fouriera (2.5):

$$u(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i f n}$$

Współczynniki  $c_n$  tego rozwinięcia dane są wzorem (2.6):

$$c_n = \int_0^1 u(f) e^{2\pi i n f} df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{s}(f) e^{2\pi i n f} df = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{2\pi i n f} df = s(-n)$$

Współczynniki  $c_n$ , dane przez wartości sygnału  $s$  w punktach próbkowania, jednoznacznie określają funkcję  $u(f)$ , ta z kolei zawiera w sobie  $\hat{s}(f)$  - transformatę Fouriera *ciągłego* sygnału  $s(t)$ , czyli określa jednoznacznie również sam sygnał.  $\square$

Znajdźmy *explicitie* formułę rekonstrukcji:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{-2\pi i f t} df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{s}(f) e^{-2\pi i f t} df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-2\pi i f n} \right) e^{-2\pi i f t} df \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s(n) e^{2\pi i f n} e^{-2\pi i f t} df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i f (n-t)} df \end{aligned}$$

ponieważ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i f (n-t)} df = \left[ \frac{1}{2\pi i (n-t)} e^{2\pi i f (n-t)} \right]_{f=-\frac{1}{2}}^{f=\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi(n-t))}{\pi(n-t)}$$

dostajemy

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \frac{\sin(\pi(n-t))}{\pi(n-t)} \quad (2.31)$$

Tak więc, jeśli spełnione jest główne założenie o ograniczonym paśmie sygnału ciągłego i odpowiednio dobranej częstotliwości próbkowania, w procesie próbkowania nie tracimy informacji ani też nie wprowadzamy przekłamań, obliczając widmo (rozdział 2.5).

W praktyce przed próbkowaniem sygnał jest zwykle filtrowany dolnoprzepustowym filtrem analogowym o częstotliwości odcięcia poniżej częstotliwości Nyquista.

## 2.7 Funkcja systemu

Systemy liniowe niezmiennicze w czasie dają się opisać z pomocą liniowych równań różnicowych o stałych współczynnikach:

$$\sum_{k=0}^K a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^L b_l x[n-l] \quad (2.32)$$

Zastosujmy do obu stron równania 2.32 przekształcenie  $Z$  (patrz dodatek A.3)

$$\begin{aligned} Z \left\{ \sum_{k=0}^K a_k y[n-k] \right\} &= Z \left\{ \sum_{l=0}^L b_l x[n-l] \right\} \\ \sum_{k=0}^K a_k Z \{y[n-k]\} &= \sum_{l=0}^L b_l Z \{x[n-l]\} \\ \sum_{k=0}^K a_k z^{-k} Y(z) &= \sum_{l=0}^L b_l z^{-l} X(z) \\ Y(z) \sum_{k=0}^K a_k z^{-k} &= X(z) \sum_{l=0}^L b_l z^{-l} \end{aligned}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{\sum_{l=0}^L b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^K a_k z^{-k}} \quad (2.33)$$

lub

$$H(z) = \text{const} \frac{\prod_{l=0}^L (1 - \frac{d_l}{z})}{\prod_{k=0}^K (1 - \frac{c_k}{z})} \quad (2.34)$$

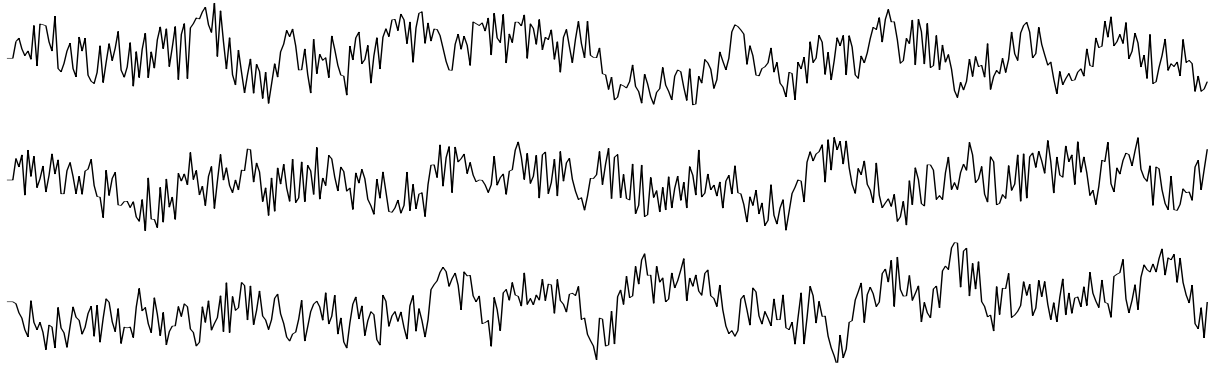
$H(z)$  – funkcja systemu (*system function*).

## 2.8 Model AR

Model autoregresyjny (rzędu  $M$ ) opisuje procesy dyskretne, w których wartość sygnału w danej chwili jest sumą liniowej kombinacji  $M$  wartości poprzednich i nieskorelowanego szumu  $\epsilon$

$$s[n] = \sum_{i=1}^M a_i s[n-i] + \epsilon_n \quad (2.35)$$

W każdej realizacji tego samego procesu (dla tych samych współczynników  $a_i$  i wartości początkowych sygnału),  $\epsilon_t$  są niezależnymi liczbami losowymi, więc o wartości  $s(t)$  w konkretnej chwili  $t$  możemy mówić tylko językiem prawdopodobieństwa.



Rysunek 2.5: Przykładowe realizacje procesu AR 3-go rzędu ( $M = 3$ ) o tych samych współczynnikach i wartościach początkowych

Mimo tego, na podstawie współczynników AR możemy określić wiele ogólnych własności sygnału, np. wartość oczekiwaną  $\bar{s}$  (w praktyce estymowaną przez wartość średnią) i wariancję (jej estymatorem jest kwadratowy odchylenie wartości sygnału od wartości oczekiwanej), a nawet widmo mocy. Można również rozważać szersze klasy modeli tego typu, jak np. model MA (ruchomej średniej – *moving average*), gdzie uśredniamy  $\epsilon_t$  zamiast  $s(t)$ , czy proces mieszany ARMA [4, 10].

Najprostszym przykładem jest proces liniowy Markowa, czyli proces AR pierwszego rzędu (dla  $a = 1$  będzie to błądzenie przypadkowe):

$$s[n] = a s[n-1] + \epsilon_n \quad (2.36)$$

Czyli

$$s[n] = \epsilon_n + a(\epsilon_{n-1} + a\epsilon_{n-2} + \dots) = \dots = \epsilon_n + a\epsilon_{n-1} + a^2\epsilon_{n-2} + \dots$$

Jeśli wartość oczekiwana  $\epsilon_i$  wynosi 0 ( $E(\epsilon_i) = 0$ ) a wariancja  $\sigma^2(\epsilon_i) = \sigma_\epsilon^2$ , to wariancja w punkcie  $n$

$$\begin{aligned} \sigma_{s[n]}^2 &= E((\epsilon_n + a\epsilon_{n-1} + a^2\epsilon_{n-2} + \dots + a^{n-1}\epsilon_1)^2) = \\ &= \sigma_\epsilon^2 (1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n-2}) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \left( \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \right) & |a| \neq 1 \\ n\sigma_\epsilon^2 & |a| = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Autokowariancja  $E(s[n]s[n+\tau])$

$$\begin{aligned} E((\epsilon_n + a\epsilon_{n-1} + a^2\epsilon_{n-2} + \dots + a^{n-1}\epsilon_1)(\epsilon_{n+\tau} + a\epsilon_{n+\tau-1} + \dots + a^{n+\tau-1}\epsilon_1)) = \\ = \sigma_\epsilon^2 \left( a^\tau + a^{\tau+2} + \dots + a^{\tau+2(n-1)} \right) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 a^\tau \left( \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \right) & |a| \neq 1 \\ n\sigma_\epsilon^2 & |a| = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dla  $|a| \neq 1$  przy  $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_{x[n]}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-a^2} \quad ; \quad \sigma_{x[n],x[n+\tau]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_\epsilon^2 a^\tau}{1-a^2}$$

Autokowariancja

$$\rho(\tau) = \frac{\sigma_{x[n],x[n+\tau]}}{\sigma_{x[n]}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^{|\tau|}$$

Proces jest asymptotycznie stacjonarny do rzędu 2, czyli wariancja i średnia nie zależą od czasu.

Na podstawie znajomości samego współczynnika  $a$  modelu AR(1) policzyliśmy np. funkcję autokorelacji modelu, co daje już znajomość widma procesu (z tw. Wienera-Chinczyna, str. 16). Podobnie w procesach wyższych rzędów (równanie 2.35) znajomość współczynników  $\{a_i\}_{i=1..M}$  daje nam dokładną wiedzę o własnościach generowanych przez nie procesów, bez znajomości sygnału  $s[n]$ , którego wartości mogą różnić się w kolejnych realizacjach ze względu na element stochastyczny — szum  $\epsilon$ .

W praktyce analizy sygnału postępujemy odwrotnie — do konkretnej realizacji dopasowujemy model AR. Głównym problemem jest wybór rzędu modelu, estymacja współczynników  $a_i$  najlepiej pasujących do danego sygnału posiada stabilne rozwiązania.

Jeśli dozwolimy, aby sygnał zależał również bezpośrednio od poprzednich wartości szumu  $\epsilon$ , dostajemy pełną postać procesu ARMA(L,M) (*auto-regressive moving average*):

$$\sum_{i=1}^L b_i \epsilon_{n-i} = \sum_{j=1}^M a_j s[n-j] \quad (2.37)$$

## 2.9 Filtry

Filtry to systemy liniowe niezmiennicze w czasie (rozdział 2.1). Jeśli funkcja systemu (równanie 2.33) posiada stały mianownik i zmienny jest tylko licznik, mówimy o filtrach skończonej odpowiedzi impulsowej (*Finite Impulse Response*, FIR). W przeciwnym przypadku mamy filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (*Infinite Impulse Response*, IIR).

Filtrowanie cyfrowe realizowane jest w postaci splotu odpowiedzi impulsowej filtru z sygnałem, stąd np. jego koszt obliczeniowy (szybkość) zależy od długości odpowiedzi impulsowej. Splot sygnału z filtrem FIR powoduje jego „przesunięcie” o połowę długości sekwencji filtru, jednak poza tym zawartość sygnału nie jest zaburzona, dzięki liniowemu przesunięciu fazy. Filtry IIR powodują nieliniowe zaburzenia fazy filtrowanych sygnałów, stąd w analizie offline stosuje się trik polegający na podwójnym filtrowaniu sygnału tym samym filtrem IIR: za drugim razem filtrowany sygnał podawany jest w formie odwróconej osi czasu („od końca”), co kompensuje efekt zaburzenia fazy.

Sztuka konstrukcji efektywnych filtrów polega m.in. na kompromisie między wymaganą charakterystyką częstotściową a długością filtru (czyli jego odpowiedzi impulsowej, używanej w implementacji).