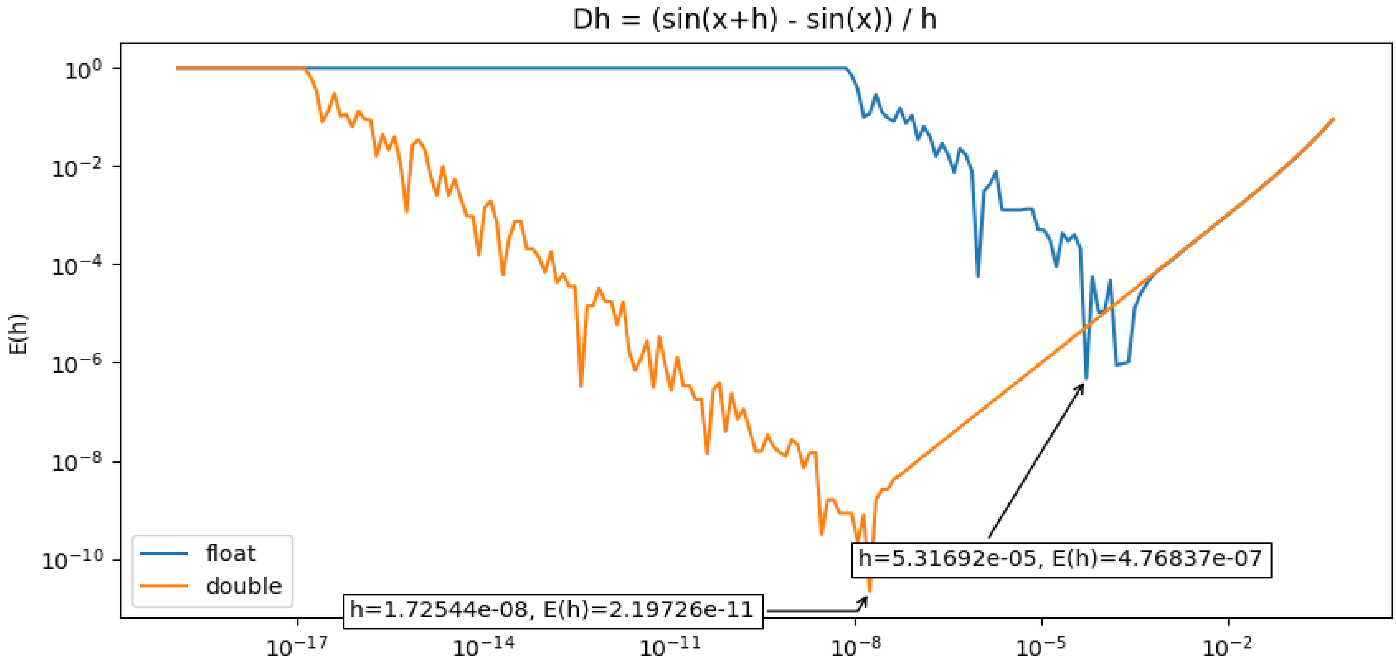
Wprowadzenie

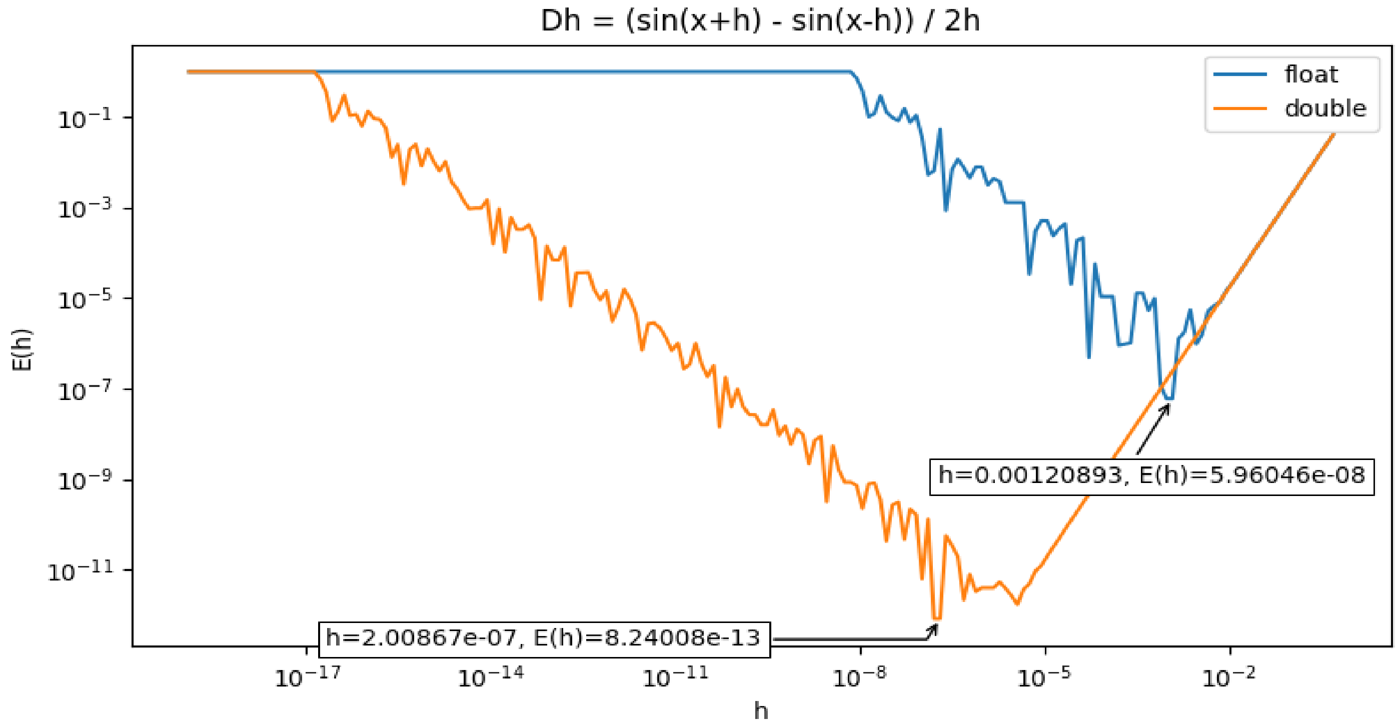
Obliczenie pochodnej funkcji numerycznie wymaga znalezienia optymalnej wartości h aby zminimalizować błąd przybliżenia. Do obliczenia pochodnych użyjemy następujących wzorów:

$$Dh = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad Dh = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Wyniki

Wyniki zostały przeprowadzone dla f = sin(x=0.2). E(h) = |Dh(x) – cos(x)| dla zakresu h równego <0.5, 10e-20).





Analiza wyników

Wydawać, by się mogło ,że tym mniejsze h tym mniejszy błąd przybliżenia otrzymamy. Jednak analizując pierwszy wykres nasza funkcja E(h) dla typów double i float jest stała do wartości h odpowiednio ~10^-17 dla double i ~10^-8 dla float i wynosi ~1. Błąd przybliżenia jest ogromny przez wykonywanie działań na bardzo małych h, które są mniejsze od numerycznego błędu precyzji typów double i float. Odpowiednie h musi być niezbyt małe , by zminimalizować kombinacje błędu przybliżenia i błędu numerycznego typów double lub float. Patrząc dalej na wykres mamy do czynienia z zaburzeniami funkcji E(h), aż od pewnego momentu wykres staje się liniowy. Porównując oba wykresy dochodzimy do wniosku, że drugi wzór zapewnia nam mniejszy błąd przybliżenia. Optymalne h dla double mieści w przedziale <~10^-8, ~10^-7>, a dla typu float w przedziale <~10^-5, ~10^-3>. Porównajmy teraz te wartości z błędem prezycji typów double (~10^-16) i float (~10^-8). Optymalne h będzie więc ich pierwiastkiem kwadratowym.

Rozwijając 1 wzór w szereg Taylora:

$$Dhf(x) \approx f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + \frac{e2f(x+h) - e1f(x)}{h}$$

$$|Dhf(x) - f'(x)| \approx |\frac{h}{2}f''(x) + \frac{e2f(x+h) - e1f(x)}{h}|$$

$$\leq \frac{h}{2}|f''(x)| + \frac{|e2f(x+h) - e1f(x)|}{h}$$

$$E(h) \leq \frac{h}{2}|f''(x)| + \frac{|2e * f(x))|}{h}$$

$$\frac{1}{2}|f''(x)| + \frac{|2e * f(x))|}{h^2} \approx 0$$

$$h = 2\sqrt{e * \frac{|f(x)|)}{|f''(x)|}}$$

Dla naszego przypadku:

$$\frac{|sin(x)}{|-sin(x)|} = 1$$

Ostatecznie mamy:

$$h = 2\sqrt{e}$$