Zadanie 108

Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$
Rozwijam poszczególne funkcje za pomocą szeregów Taylora.

$$\begin{gathered}
\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\operatorname{tg} x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\
e^{\operatorname{tg} x} = 1 + (\operatorname{tg} x) + \frac{(\operatorname{tg} x)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{tg} x)^3}{3!} + o\left((\operatorname{tg} x)^3\right) = \\
1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\
e^{\operatorname{tg} x} - e^x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{gathered}$$

Wstawiam rozwinięcia do granicy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = 1$$