Aproksymacja rozwiązań układów równań metodą Jacobiego i Seidla

Bartosz Zasieczny

26 stycznia 2014

Spis treści

1 Treść zadania

Za pomocą metod Jacobiego i Siedla wyznaczyć przybliżone rozwiązanie $\tilde{x}$ układu równań liniowych $Ax = b$ ($A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$), przyjmując że $\tilde{x} = x^{(k)}$, gdzie k jest najmniejszą liczbą naturalną dla której zachodzi nierówność:

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < \epsilon.$$

Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla macierzy Pei i Hillberta i omówić wyniki, podając wartość $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$, gdzie $\tilde{x}$ jest obliczonym rozwiązaniem, jak również przyjmując różne wartości parametrów n i d. Można założyć, że rozwiązaniem dokładnym jest wektor $e := [1, 1, ..., 1]^T$ lub, inaczej mówiąc, że $b := Ae$. Obliczenia wykonać dla $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ i $\epsilon = 5 \cdot 10^{-7}$.

2 Algorytmy

2.1 Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest metodą iteracyjną, gdzie kolejne przybliżenia rozwiązania układu równań $Ax = b$ znajdujemy poprzez rozwiązanie poniższego równania na macierzach:

$$x_{k+1} = Mx_k + Nb$$

gdzie:

$$N = D^{-1}$$

$$M = -N(L + U)$$

$$D_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i = j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

$$L_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i < j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

$$U_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i > j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Natomiast x^0 jest wektorem zerowym.

2.2 Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla różni się od poprzedniej tylko wzorem, za pomocą którego wyznaczamy następne iteracje:

$$x_{k+1} = Nb + -NLx_k - NUx_k$$

3 Przykładowe rozwiązania

3.1 Macierz Pei

Macierz Pei jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$P_{ij} = \begin{cases} d & i = j \\ 1 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

, gdzie d jest podanym parametrem rzeczywistym, a $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

3.1.1 Metoda Jacobiego

3.1.2 Metoda Seidla

3.2 Macierz Hillberta

Macierz Hillberta jest dana następujacym wzorem:

3.2.1 Metoda Jacobiego

3.2.2 Metoda Seidla

4 Kompilacja i obsługa programu

4.1 Wymagania

Aby skompilować program należy spełnić następujące wymagania dotyczące oprogramowania:

- kompilator $G{+}{+}$ w wersji 4.7 lub późniejszej - kompilator musi obsługiwać standard $C^{++}11$,
- obecność narzędzia GNU Make

Powyższe wymagania powinny być automatycznie spełnione w każdej aktualnej dystrybucji GNU/Linux.

4.2 Kompilacja

Należy przejść do katalogu `prog` i wykonać polecenie `make` - kompilacja wykona się automatycznie. W pliku `Makefile` podane są polecenia, które należy wykonać aby skompilować program ręcznie.

4.3 Obsługa programu

Program uruchamiamy za pomocą pliku `program`, po jego nazwie podając ciąg będący kombinacją ponizszych parametrów:

- `-peya <d>` – użycie macierzy Pei z parametrem d
- `-hillbert` – użycie macierzy Hillberta
- `-p <e>` – definicja wielkości ϵ
- `-j` – użycie metody Jacobiego
- `-gs` – użycie metody Gaussa-Seidla
- `-v <n>` $b_0\ b_1 \ldots b_n$ – podanie rozmiaru macierzy kwadratowej/wektora b i podanie wartości wektora b

Przykład: szukamy przybliżonego rozwiązania dla macierzy hillberta, gdzie $n = 4$, $b = [465, 6, 7, -55]^T$, używając metody Gaussa-Seidla i precyzji $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

```
./program -hillbert -p 0.00005 -v 4 465 6 7 -55 -gs
```