Aproksymacja rozwiązań układów równań metodą Jacobiego i Seidla

Bartosz Zasieczny

21 stycznia 2014

Spis treści

1 Treść zadania

Za pomocą metod Jacobiego i Siedla wyznaczyć przybliżone rozwiązanie $\tilde{x}$ układu równań liniowych $Ax = b$ ($A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$), przyjmując że $\tilde{x} = x^{(k)}$, gdzie k jest najmniejszą liczbą naturalną dla której zachodzi nierówność:

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < \epsilon.$$

Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla macierzy Pei i Hillberta i omówić wyniki, podając wartość $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$, gdzie $\tilde{x}$ jest obliczonym rozwiązaniem, jak również przyjmując różne wartości parametrów n i d. Można założyć, że rozwiązaniem dokładnym jest wektor $e := [1, 1, ..., 1]^T$ lub, inaczej mówiąc, że $b := Ae$.

2 Algorytmy

2.1 Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest metodą iteracyjną, gdzie kolejne przybliżenia rozwiązania układu równań $Ax = b$ znajdujemy poprzez rozwiązanie poniższego równania na macierzach:

$$x^{k+1} = Mx^k + Nb$$

gdzie:

$$N = D^{-1}$$

$$M = -N(L + U)$$

$$D[i, j] = \begin{cases} A[i, j] & i = j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

$$L[i, j] = \begin{cases} A[i, j] & i < j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

$$U[i, j] = \begin{cases} A[i, j] & i > j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Natomiast x^0 jest wektorem zerowym.

2.2 Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla różni się od poprzedniej tylko wzorem, za pomocą którego wyznaczamy następne iteracje:

$$x^{k+1} = Nb + -NLx^k - NUx^k$$

3 Przykładowe rozwiązania

3.1 Macierz Pei

3.1.1 Metoda Jacobiego

3.1.2 Metoda Seidla

3.2 Macierz Hillberta

3.2.1 Metoda Jacobiego

3.2.2 Metoda Seidla