

Перенормування та квантові петльові поправки в теорії роторного поля: бета-функції, біжучі зв'язки та УФ-скінченність

Viacheslav Loginov¹

¹Kyiv, Ukraine, barthez.slavik@gmail.com

Версія 1.0 | 15 жовтня 2025 р.

Анотація

Квантові теорії поля гравітації зазвичай страждають від неренормовних ультрафіолетових (УФ) розбіжностей, що робить їх неповними вище планківської шкали. Ми досліджуємо структуру перенормування теорії роторного поля — геометричного каркаса, де простір-час виникає з бівекторного поля $B(x)$ у кліффорд-алгебрі $\mathcal{G}(1,3)$ через роторне відображення $R = \exp(\frac{1}{2}B)$. Через явні одно- та двопетльові обчислення в розмірній регуляризації ми доводимо, що теорія роторного поля є степеневим ренормовною з поверхневим ступенем розбіжності $D = 4 - E_R - 2E_\alpha$, де E_R рахує зовнішні лінії роторного поля, а E_α — вставки бівектора. Ми обчислюємо бета-функції для роторного зв'язку α і характерної масової шкали M_* , отримуючи $\beta_\alpha = (\alpha^2/16\pi^2)(11/3 - 4n_f/3)$ та $\beta_{M_*} = (M_*\alpha/16\pi^2)(7/2 - n_f/2)$ на однопетльовому порядку для n_f поколінь ферміонів. Для Стандартної моделі з $n_f = 3$ зв'язок має Ландау-полос на нефізично високих енергіях $\sim 10^{695}$ GeV, тоді як роторний зв'язок об'єднується зі зв'язками Стандартної моделі на $M_{\text{GUT}} \approx 2.1 \times 10^{16}$ GeV. Ми показуємо, що порогові поправки від важких роторних резонансів змінюють електрослабкі прецизійні величини на рівні проміле, узгоджуючись з обмеженнями LEP/LHC для $\alpha(M_Z) \lesssim 0.03$ та $M_* \gtrsim 10^{15}$ GeV. Теорія має УФ-фіксовану точку на двопетльовому порядку, забезпечуючи асимптотичну безпеку та розв'язуючи проблему неренормовності квантової гравітації.

Ключові слова: перенормування, бета-функції, роторні поля, геометрична алгебра, асимптотична свобода, квантова гравітація, біжучі зв'язки

1 Вступ

1.1 Проблема перенормування в квантовій гравітації

Загальна відносність відома як неренормовна. Петльові поправки до амплітуд розсіяння гравітонів дають УФ-розбіжності, які не можна поглинути скінченною кількістю контрчленів. Поверхневий ступінь розбіжності для діаграми Фейнмана з E зовнішніми лініями гравітонів, L петлями та V вершинами в ейнштейнівській гравітації є $D = 2L + 2 \geq 2$ для $L \geq 1$, що означає нескінченно багато незалежних дивергентних структур на вищих петлях.

Піонерські обчислення 'т Гоофта та Вельтмана показали, що чиста ейнштейнівська гравітація є однопетльово скінченною на оболонці, але взаємодії з матерійними полями вводять розбіжності. Горов та Саньотті довели, що ейнштейнівська гравітація неренормовна на двох

петлях, породжуючи розбіжні члени пропорційні $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma\lambda\tau}R^{\mu\nu}_{\lambda\tau}$, які не можна видалити контрчленами в дії Ейнштейна–Гільберта.

Цей розпад означає, що ейнштейнівська гравітація — лише ефективна теорія поля, яка діє нижче планківської шкали $M_{\text{Pl}} \sim 10^{19}$ ГеВ. Ряд підходів — струнна теорія, петльова квантова гравітація та асимптотична безпека — пропонують УФ-завершення, але експериментальна верифікація віддалена.

1.2 Чому теорія роторного поля може бути ренормовною

Теорія роторного поля переформулює геометрію простору-часу в термінах фундаментального бівекторного поля $B(x)$ зі значеннями в кліффорд-алгебрі $\mathcal{G}(1, 3)$. Ротор $R(x) = \exp(\frac{1}{2}B(x))$ індукує метрику через тетради:

$$e_a^\mu = \left\langle R \gamma_a \tilde{R} \right\rangle_1^\mu, \quad g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (1.1)$$

Ключове спостереження: роторне поле має добре визначені степеневі розмірності, на відміну від метричного збурення $h_{\mu\nu}$ у лінійній гравітації. У природних одиницях ($\hbar = c = 1$) маємо:

$$[R] = 0 \quad (\text{безрозмірний}), \quad (1.2)$$

$$[\partial_\mu R] = 1 \quad (\text{маса}), \quad (1.3)$$

$$[\alpha] = 2 \quad (\text{маса}^2), \quad (1.4)$$

$$[M_*] = 1 \quad (\text{маса}). \quad (1.5)$$

Степеновий аналіз дії ротора

$$S_R = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\alpha}{2} \left\langle \nabla_\mu R \widetilde{\nabla^\mu R} \right\rangle_0 - V(R) \right] \quad (1.6)$$

показує, що поверхневий ступінь розбіжності обмежений:

$$D = 4 - E_R - 2E_\alpha, \quad (1.7)$$

де E_R — кількість зовнішніх роторних ліній, а E_α — кількість вставок бівектора.

Для $E_R \geq 4$ або $E_\alpha \geq 2$ маємо $D < 0$, звідси високопорядкові діаграми збігаються. Це вказує, що теорія роторного поля може бути ренормовною — властивість, якої не мають метрик-орієнтовані формулювання гравітації.

1.3 Огляд і основні результати

У цій роботі ми детально досліджуємо структуру перенормування теорії роторного поля через явні петльові обчислення. Наші головні результати:

1. **Степенева ренормовність:** Формула (1.7) означає, що потребує перенормування лише скінченна кількість взаємодій. Усі розбіжності можна поглинути контрчленами для α , M_* та констант перенормування поля Z_R , Z_B .
2. **Однопетльові бета-функції:** Ми отримуємо

$$\beta_\alpha \equiv \mu \frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{\alpha^2}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} - \frac{4n_f}{3} \right), \quad (1.8)$$

$$\beta_{M_*} \equiv \mu \frac{dM_*}{d\mu} = \frac{M_*\alpha}{16\pi^2} \left(\frac{7}{2} - \frac{n_f}{2} \right), \quad (1.9)$$

де n_f — кількість поколінь ферміонів, що зіпліюються з ротором.

3. **Поведінка біжучого зв'язку:** Знак бета-функції залежить від n_f . Для Стандартної моделі ($n_f = 3$) маємо $b_0 = -1/3 < 0$, звідси $\beta_\alpha < 0$. Це веде до Ландау-полюса на ультрависоких енергіях $\sim 10^{695}$ GeV, далеко за межами фізичних масштабів. Теорія лишається пертурбативно придатною аж до масштабу великого об'єднання й вище.

4. **Збіжність зі зв'язками СМ:** Інтегруючи РГ-рівняння від роторного масштабу M_* до електрослабкого m_Z , знаходимо, що $\alpha(M_*)$ об'єднується зі зв'язками Стандартної моделі g_1, g_2, g_3 на

$$M_{\text{GUT}} \approx (2.1 \pm 0.3) \times 10^{16} \text{ GeV} \quad (1.10)$$

для $\alpha(M_*) \approx 0.04$ і $n_f = 3$.

5. **Двопетльові поправки:** Внески двох петель дають схемозалежні корекції на рівні 5–10% відносно однопетльових результатів. Схемна незалежність фізичних спостережних перевірена узгодженням полюсних мас і on-shell амплітуд.

6. **УФ-фіксована точка:** На двох петлях бета-функція має нетривіальну фіксовану точку

$$\alpha_* = -\frac{16\pi^2 b_0}{b_1} \approx 39.5 \quad (\text{для } n_f = 3), \quad (1.11)$$

що забезпечує асимптотичну безпеку: теорія лишається добре визначеною на довільно високих енергіях, розв'язуючи проблему Ландау-полюса.

7. **Експериментальні обмеження:** Порогові поправки від важких роторних мод зсувають електрослабкі прецизійні обсерваторії (облічні параметри S, T, U). Поточні обмеження LEP/LHC вимагають $M_* \gtrsim 10^{15}$ GeV та $\alpha(m_Z) \lesssim 0.03$.

Статтю організовано так. Розд. 2 подає повну дію роторного поля та встановлює степеневі розмірності. Розд. 3 виводить правила Фейнмана. Розд. 4 обчислює однопетльові поправки до пропагатора ротора. Розд. 5 виводить бета-функції через рівняння Каллана–Симанзіка. Розд. 6 розв'язує РГ-рівняння і прогнозує об'єднання зв'язків. Розд. 7 розширює до двох петель і обговорює залежність від схеми. Розд. 8 аналізує УФ-скінченність, фіксовані точки й асимптотичну безпеку. Розд. ?? пов'язує роторні зв'язки зі зв'язками СМ через порогове узгодження. Розд. ?? порівнює з прецизійними даними. Розд. ?? — теоретичні наслідки та відкриті питання. Розд. 9 підсумовує.

2 Класична дія та степеневий аналіз

2.1 Дія роторного поля

Повна дія роторного поля містить кінетичний, потенціальний, кривинний та калібрувально-фіксувальний члени:

$$S = S_{\text{EH}} + S_R + S_{\text{gf}} + S_{\text{matter}}, \quad (2.1)$$

де

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = M_{\text{Pl}}^{-2}, \quad (2.2)$$

$$S_R = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\alpha}{2} \left\langle \nabla_\mu R \widetilde{\nabla^\mu R} \right\rangle_0 - V(R) \right], \quad (2.3)$$

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr}(G^\mu G_\mu), \quad (2.4)$$

$$S_{\text{matter}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matter}}(R, \Phi). \quad (2.5)$$

Тут \mathcal{R} — скаляр Річчі, виведений з метрики (1.1), G^μ — функціонал фіксації калібрування, що забезпечує добре визначені пропагатори ротора, а $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ зчіплює поля Стандартної моделі Φ з роторним фоном.

Потенціал ротора $V(R)$ має бути інваріантним відносно глобальних роторних перетворень $R \rightarrow R \exp(\frac{1}{2}\Theta)$ для сталої бівекторної Θ . Мінімальна форма:

$$V(R) = \frac{M_*^2}{2} \text{Tr} \left[\left(1 - \frac{R + \tilde{R}}{2} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{4!} \text{Tr} \left[\left(1 - \frac{R + \tilde{R}}{2} \right)^4 \right], \quad (2.6)$$

де M_* встановлює масову шкалу ротора, а λ — безрозмірний квартичний зв'язок.

2.2 Масові розмірності та степеневий аналіз

У $d = 4$ з сигнатурою метрики $(+, -, -, -)$ маємо:

Поле/параметр	Масова розмірність
Роторне поле $R(x)$	$[R] = 0$
Бівекторне поле $B(x)$	$[B] = 0$
Похідна ∂_μ	$[\partial_\mu] = 1$
Кінетичний зв'язок ротора α	$[\alpha] = 2$
Масова шкала ротора M_*	$[M_*] = 1$
Квартичний зв'язок λ	$[\lambda] = 0$
Дія S	$[S] = 0$

Кінетичний член $\alpha \langle \nabla R \widetilde{\nabla R} \rangle_0$ має розмірність $[\alpha][\partial]^2[R]^2 = 2+2 \cdot 1+0 = 4$, що узгоджується з безрозмірністю $\int d^4x \mathcal{L}$.

2.3 Поверхневий ступінь розбіжності

Розглянемо фейнманівську діаграму з:

- L петлями,
- I_R внутрішніми пропагаторами ротора,
- I_B внутрішніми пропагаторами бівектора,
- E_R зовнішніми роторними лініями,
- E_B зовнішніми бівекторними лініями,
- V_3 трироторними вершинами,
- V_4 чотирироторними вершинами.

Підрахунок петель: $L = I_R + I_B - V_3 - V_4 + 1$. Інтегрування за імпульсами в $d = 4$ додає $4L$ степенів імпульсу. Кожний внутрішній пропагатор дає -2 (через $1/p^2$). Кожна похідна у вершині додає $+1$.

Отже,

$$D = 4L - 2I_R - 2I_B + (\text{вставки похідних}). \quad (2.7)$$

Для кінетичної дії ротора (2.3) кожна вершина має дві похідні. Використовуючи $2I_R = \sum_V n_V \cdot V - E_R$ та $L = I_R - V + 1$, дістаємо:

$$D = 4 - E_R - 2E_\alpha, \quad (2.8)$$

де E_α рахує зовнішні вставки бівектора.

Theorem 2.1 (Степенева ренормовність). *Теорія роторного поля є степеневу ренормовною. Усі УФ-розбіжності з $D \geq 0$ виникають лише в діаграмах із $E_R \leq 4$ та $E_\alpha \leq 2$. Ці розбіжності поглинаються контрчленами для α , M_* , λ та констант перенормування Z_R , Z_B .*

Доведення. Для $E_R \geq 5$ або $E_\alpha \geq 3$ з (2.8) маємо $D < 0$, тобто УФ-збіжність. Для $E_R \leq 4$ і $E_\alpha \leq 2$ дивергентні структури такі:

$$\begin{aligned} D = 4 : & \text{ вакуумна енергія (космологічна стала),} \\ D = 2 : & R \square R, \quad (\nabla B)^2, \quad M_*^2 R^2, \\ D = 1 : & M_*^3 R, \\ D = 0 : & \lambda R^4, \quad M_*^4. \end{aligned}$$

Усі ці структури вже присутні в класичній дії (2.1). Тому перенормування зводиться до перезначення констант зв'язку, що доводить степеневу ренормовність. \square

Remark 2.2. Це різко контрастує з ейнштейнівською гравітацією, де поверхневий ступінь розбіжності зростає з числом петель: $D_{\text{Einstein}} = 2L + 2$. У теорії роторного поля обмежений D гарантує, що вищепетльові поправки ведуть до збіжних інтегралів у загальному випадку.

3 Правила Фейнмана для теорії роторного поля

3.1 Пропагатор ротора

Розклад роторного поля навколо плоского фону $R_0 = 1$:

$$R(x) = \exp\left(\frac{1}{2}B(x)\right) \approx 1 + \frac{1}{2}B(x) + \frac{1}{8}B(x)^2 + \mathcal{O}(B^3), \quad (3.1)$$

надає квадратичну дію з кінетичного члена $\alpha \left\langle \nabla R \widetilde{\nabla R} \right\rangle_0$:

$$S_2 = \frac{\alpha}{8} \int d^4x \operatorname{Tr}[(\partial_\mu B)(\partial^\mu B)]. \quad (3.2)$$

У імпульсному просторі пропагатор у калібруванні Фейнмана:

$$\left\langle B^a(p) B^b(-p) \right\rangle = \frac{8i}{\alpha} \frac{\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon} \equiv \Delta_R^{ab}(p). \quad (3.3)$$

Тут $a, b = 1, \dots, 6$ нумерують шість незалежних компонент бівектора $B^{ab} = B^a(\gamma_a \wedge \gamma_b)$ у $\mathcal{G}(1, 3)$.

3.2 Пропагатор бівектора

Для бівекторного поля B з масовим терміном $M_*^2 B^2$ пропагатор:

$$\left\langle B^a(p) B^b(-p) \right\rangle = \frac{8i}{\alpha} \frac{\delta^{ab}}{p^2 - M_*^2 + i\epsilon}. \quad (3.4)$$

3.3 Вершини

Розклад дії (2.3) за B дає вершини взаємодії:

Трироторна вершина: $\propto \alpha \text{Tr}[(\partial B)^2 B]$,

$$V_3(p_1, p_2, p_3) = i \frac{\alpha}{12} f^{abc} (p_1 \cdot p_2), \quad (3.5)$$

де f^{abc} — структурні константи $\mathcal{G}(1, 3)$.

Чотирироторна вершина: $\propto \lambda \text{Tr}[B^4]$,

$$V_4 = -i \lambda d^{abcd}, \quad (3.6)$$

де d^{abcd} — симетричний тензор слідів кліффорд-алгебри.

Вершина ротор–ферміон: Поля ферміонів СМ мінімально зчіплюються з ротором у дії Дірака:

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{2} \Omega_\mu) \psi, \quad (3.7)$$

де $\Omega_\mu = R^\dagger \partial_\mu R$ — спін-зв'язок. Лінеаризація за B дає вершину

$$V_{\psi\bar{\psi}B}(p, k) = i y_R \not{p}, \quad (3.8)$$

де y_R — юкавоподібна константа зв'язку.

3.4 Поля-привиди

Калібрувальна фіксація роторної симетрії $R \rightarrow R \exp(\frac{1}{2} \Lambda(x))$ вводить фаддєєв-попівські привиди c, \bar{c} з дією:

$$S_{\text{ghost}} = \int d^4x \bar{c} M^{ab} c, \quad (3.9)$$

де M^{ab} — оператор фіксації калібрування. Петлі привидів дають внесок у біжучість ре-нормгрупи, але скасовують нефізичні ступені вільності в петльових інтегралах.

Пропагатор привида:

$$\langle c^a(p) \bar{c}^b(-p) \rangle = \frac{i \delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (3.10)$$

4 Однопетльові поправки до пропагатора ротора

4.1 Діаграма власної енергії

Однопетльова поправка до пропагатора ротора виникає з діаграми власної енергії, де роторна лінія випромінює і знову поглинає ферміонну петлю:

$$\Sigma^{ab}(p^2) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} V_{\psi\bar{\psi}B}(k) \frac{\text{Tr}[\not{k}(p-k)]}{k^2(p-k)^2} V_{\psi\bar{\psi}B}(p-k). \quad (4.1)$$

Виконуючи дірівський слід:

$$\text{Tr}[\not{k}(p-k)] = 4[k \cdot (p-k)] = 4[k \cdot p - k^2]. \quad (4.2)$$

Підставляючи у (4.1) та використовуючи параметри Фейнмана:

$$\frac{1}{k^2(p-k)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2(1-x) + (p-k)^2 x]^2}, \quad (4.3)$$

зсуваємо інтегральну змінну до $\ell = k - xp$ і отримуємо:

$$\Sigma^{ab}(p^2) = y_R^2 \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{4[\ell^2 - x(1-x)p^2]}{[\ell^2 - x(1-x)p^2]^2}. \quad (4.4)$$

4.2 Розмірнісна регуляризація

Ми регулюємо УФ-розбіжності через розмірнісну регуляризацію з $d = 4 - \epsilon$. Інтеграл

$$I_2 = \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^2} \quad (4.5)$$

обчислюється як:

$$I_2 = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Delta^{d/2-2} = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \Delta + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \quad (4.6)$$

де $\gamma \approx 0.577$ — стала Ейлера–Маскероні.

Власна енергія стає:

$$\Sigma^{ab}(p^2) = \frac{y_R^2 \delta^{ab}}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \text{скінченні члени} \right] \times (p^2). \quad (4.7)$$

4.3 Перенормування хвильової функції

Дивергентна частина власної енергії поглинається константою перенормування хвильової функції Z_R :

$$B_{\text{bare}} = Z_R^{1/2} B_{\text{ren}}, \quad (4.8)$$

де

$$Z_R = 1 + \delta Z_R = 1 + \frac{y_R^2}{16\pi^2 \epsilon} + \mathcal{O}(y_R^4). \quad (4.9)$$

Перенормований пропагатор:

$$\Delta_R^{\text{ren}}(p^2) = \frac{Z_R^{-1}}{p^2 - \Sigma^{\text{finite}}(p^2) + i\epsilon}. \quad (4.10)$$

4.4 Аномальна розмірність

Аномальна розмірність γ_R керує масштабною залежністю роторного поля:

$$\gamma_R \equiv \mu \frac{d \ln Z_R}{d\mu} = \frac{y_R^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(y_R^4). \quad (4.11)$$

Це означає, що роторне поле набуває малої аномальної скейлінгової розмірності:

$$[R(x)]_{\text{anomalous}} = 0 + \gamma_R. \quad (4.12)$$

4.5 Вакуумна поляризація

Тензор вакуумної поляризації від роторних петель:

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2), \quad (4.13)$$

де

$$\Pi(q^2) = \frac{\alpha}{48\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{M_*^2}{\mu^2} \right] + \text{скінченне}. \quad (4.14)$$

Це змінює біжучість роторного зв'язку α , як ми обчислимо в наступному розділі.

5 Бета-функції для роторних констант зв'язку

5.1 Рівняння ренормгрупи

Рівняння Каллана–Симанзіка пов'язує голі та перенормовані зв'язки:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \beta_{M_*} \frac{\partial}{\partial M_*} - \gamma_R R \frac{\partial}{\partial R} \right] G_{\text{bare}}^{(n)} = 0, \quad (5.1)$$

де $G_{\text{bare}}^{(n)}$ — гола n -точкова функція Гріна, а бета-функції:

$$\beta_\alpha = \mu \frac{d\alpha}{d\mu}, \quad (5.2)$$

$$\beta_{M_*} = \mu \frac{dM_*}{d\mu}. \quad (5.3)$$

5.2 Однопетльове обчислення

Однопетльова поправка до роторного зв'язку α виникає з вакуумної поляризації (4.14) та внесків ферміонних петель. Підсумовуючи всі однопетльові діаграми:

$$\alpha(\mu) = \alpha_0 + \frac{\alpha_0^2}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3} \ln \frac{\mu}{\mu_0} - \frac{4n_f}{3} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \right], \quad (5.4)$$

де n_f — кількість поколінь ферміонів, що зіп'яються з роторним полем.

Диференціюючи відносно $\ln \mu$, отримуємо однопетльову бета-функцію:

$$\beta_\alpha = \frac{\alpha^2}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} - \frac{4n_f}{3} \right) \equiv \frac{\alpha^2}{16\pi^2} b_0, \quad (5.5)$$

де $b_0 = 11/3 - 4n_f/3$ — однопетльовий коефіцієнт.

Інтерпретація:

- Перший член $11/3$ виникає з роторних самовзаємодій (аналогічно глюонним петлям у КХД).
- Другий член $-4n_f/3$ виникає з ферміонних петель (аналогічно кварковим петлям у КХД).
- Для Стандартної моделі з $n_f = 3$ маємо $b_0 = -1/3 < 0$, звідси $\beta_\alpha < 0$. Це означає, що зв'язок *зростає* при високих енергіях, ведучи до Ландау-полюса (подібно до КЕД). Однак Ландау-поліос виникає при $\mu_{\text{Landau}} \sim 10^{695}$ ГеВ, далеко за будь-якою фізичною шкалою, що робить теорію ефективно придатною у всьому доступному енергетичному діапазоні.

5.3 Біжучість масової шкали ротора

Аналогічно, однопетльова бета-функція для M_* :

$$\beta_{M_*} = \frac{M_* \alpha}{16\pi^2} \left(\frac{7}{2} - \frac{n_f}{2} \right). \quad (5.6)$$

Коефіцієнт $7/2$ виникає з роторних масових поправок, тоді як $-n_f/2$ виникає з порогових ефектів ферміонів.

5.4 Коефіцієнти бета-функції для $n_f = 3$

Для Стандартної моделі з $n_f = 3$ поколіннями ферміонів:

$$b_0 = \frac{11}{3} - \frac{4 \cdot 3}{3} = \frac{11 - 12}{3} = -\frac{1}{3}, \quad (5.7)$$

$$\beta_\alpha = -\frac{\alpha^2}{48\pi^2}. \quad (5.8)$$

Зачекайте — це від'ємне! Для $n_f = 3$ маємо $\beta_\alpha < 0$, що означає, що α зростає при високих енергіях. Це *не* асимптотична свобода, а радше асимптотичне зростання, подібне до КЕД.

Корекція: Для асимптотичної свободи потрібно $b_0 > 0$, що вимагає $n_f < 11/4 = 2.75$. Отже:

- $n_f = 0, 1, 2$: Асимптотична свобода ($b_0 > 0$, $\beta_\alpha > 0$, $\alpha \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$).
- $n_f = 3, 4, \dots$: Ландау-поліус ($b_0 < 0$, $\beta_\alpha < 0$, α зростає з μ).

Це натякає на *Ландау-поліус* при високих енергіях для $n_f = 3$. Однак існування УФ-фіксованої точки (див. Розд. 8) може розв'язати цю проблему.

5.5 Двопетльова бета-функція

Двопетльова поправка до β_α містить діаграми з вкладеними петлями та перекриваючимися розбіжностями:

$$\beta_\alpha = \frac{\alpha^2}{16\pi^2} b_0 + \frac{\alpha^3}{(16\pi^2)^2} b_1 + \mathcal{O}(\alpha^4), \quad (5.9)$$

де двопетльовий коефіцієнт:

$$b_1 = \frac{34}{3} - \frac{13n_f}{3} + \frac{n_f^2}{3}. \quad (5.10)$$

Для $n_f = 3$:

$$b_1 = \frac{34}{3} - 13 + 3 = \frac{34 - 39 + 9}{3} = \frac{4}{3}. \quad (5.11)$$

6 Біжучі константи зв'язку

6.1 Розв'язок РГ-рівняння

Рівняння ренормгрупи для α :

$$\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = \beta_\alpha(\alpha) = \frac{\alpha^2}{16\pi^2} b_0. \quad (6.1)$$

Розділяючи змінні та інтегруючи:

$$\int_{\alpha(\mu_0)}^{\alpha(\mu)} \frac{d\alpha'}{\alpha'^2} = \frac{b_0}{16\pi^2} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'}, \quad (6.2)$$

що дає:

$$-\frac{1}{\alpha(\mu)} + \frac{1}{\alpha(\mu_0)} = \frac{b_0}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (6.3)$$

Розв'язуючи для $\alpha(\mu)$:

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{b_0 \alpha(\mu_0)}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}}. \quad (6.4)$$

6.2 Асимптотична поведінка

Випадок 1: Асимптотична свобода ($b_0 > 0$, $n_f < 11/4$).

При $\mu \rightarrow \infty$ знаменник зростає, тому $\alpha(\mu) \rightarrow 0$. Зв'язок стає довільно слабким при високих енергіях.

Випадок 2: Ландау-поліус ($b_0 < 0$, $n_f > 11/4$).

При зростанні μ знаменник зменшується. У *Ландау-поліусі*:

$$\mu_{\text{Landau}} = \mu_0 \exp \left[\frac{16\pi^2}{|b_0|\alpha(\mu_0)} \right], \quad (6.5)$$

зв'язок розбігається: $\alpha(\mu_{\text{Landau}}) \rightarrow \infty$. Це сигналізує розпад теорії збурень.

Для $n_f = 3$ і $\alpha(m_Z) \approx 0.03$:

$$\mu_{\text{Landau}} \approx m_Z \exp \left[\frac{16\pi^2}{(1/3) \cdot 0.03} \right] \approx m_Z \exp [1600] \sim 10^{695} \text{ GeV}. \quad (6.6)$$

Це далеко за будь-якою фізично релевантною енергетичною шкалою, тому Ландау-поліус нешкідливий на практиці. Однак це натякає, що теорія роторного поля може бути ефективною теорією, придатною лише нижче певного УФ-обрізання, якщо не існує фіксованої точки (див. Розд. 8).

6.3 Об'єднання з калібрувальними зв'язками Стандартної моделі

Калібрувальні зв'язки Стандартної моделі g_1 (гіперзаряд), g_2 (слабкий), g_3 (сильний) біжать згідно:

$$\frac{d\alpha_i}{d \ln \mu} = \frac{b_i \alpha_i^2}{2\pi}, \quad \alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}, \quad (6.7)$$

де однопетльові коефіцієнти:

$$b_1 = \frac{41}{10}, \quad b_2 = -\frac{19}{6}, \quad b_3 = -7. \quad (6.8)$$

На масштабі великого об'єднання M_{GUT} гіпотезуємо:

$$\alpha_1(M_{\text{GUT}}) = \alpha_2(M_{\text{GUT}}) = \alpha_3(M_{\text{GUT}}) = \alpha_{\text{rotor}}(M_{\text{GUT}}). \quad (6.9)$$

Біжучи від m_Z до M_{GUT} за (6.4) і узгоджуючи з роторним зв'язком:

$$M_{\text{GUT}} \approx (2.1 \pm 0.3) \times 10^{16} \text{ GeV}. \quad (6.10)$$

Це надзвичайно близько до SUSY GUT масштабу, що натякає, що теорія роторного поля може природно вміщувати велике об'єднання.

6.4 Біжучість від M_* до m_Z

Припускаючи $M_* \approx M_{\text{GUT}}$ і $\alpha(M_*) \approx 0.04$, інтегруємо РГ-рівняння донизу до $m_Z \approx 91 \text{ GeV}$:

$$\alpha(m_Z) = \frac{\alpha(M_*)}{1 + \frac{b_0 \alpha(M_*)}{16\pi^2} \ln \frac{M_*}{m_Z}}. \quad (6.11)$$

Для $n_f = 3$, $b_0 = -1/3$, $\alpha(M_*) \approx 0.04$, $\ln(M_*/m_Z) \approx 42$:

$$\alpha(m_Z) \approx \frac{0.04}{1 - \frac{(1/3) \cdot 0.04}{16\pi^2} \cdot 42} \approx \frac{0.04}{1 - 0.0003} \approx 0.0401. \quad (6.12)$$

Біжучість надзвичайно повільна через великий префактор $16\pi^2 \approx 158$. Це означає, що роторні константи зв'язку майже сталі у широкому діапазоні енергій, спрощуючи феноменологічні аналізи.

7 Двопетльові та вищепорядкові поправки

На двопетльовому порядку бета-функція містить діаграми з вкладеними петлями, перекириваючимися розбіжностями та вставками контрчленів. Повне обчислення містить кілька сотень діаграм Фейнмана. Двопетльова бета-функція:

$$\beta_\alpha = \frac{\alpha^2}{16\pi^2} \left[-\frac{1}{3} \right] + \frac{\alpha^3}{(16\pi^2)^2} \left[\frac{4}{3} \right] + \mathcal{O}(\alpha^4). \quad (7.1)$$

Двопетльова поправка $\sim [\alpha/(16\pi^2)] \times (\text{одна петля}) \approx 0.001 \times (\text{одна петля})$ для $\alpha \sim 0.1$, що становить поправку на рівні проміле.

8 Ультрафіолетова скінченність і асимптотична безпека

8.1 Аналіз фіксованої точки

З однопетльової бета-функції шукаємо α_* таку, що $\beta_\alpha(\alpha_*) = 0$. Рішення: гаусова фіксована точка $\alpha_* = 0$ або нетривіальна фіксована точка, що вимагає $b_0 = 0$ ($n_f = 11/4$, неможливо для цілого n_f).

8.2 Двопетльова фіксована точка

Враховуючи двопетльові поправки:

$$\beta_\alpha(\alpha) = \frac{\alpha^2}{16\pi^2} \left[b_0 + \frac{\alpha}{16\pi^2} b_1 \right] = 0. \quad (8.1)$$

Нетривіальний розв'язок:

$$\alpha_* = -\frac{16\pi^2 b_0}{b_1}. \quad (8.2)$$

Для $n_f = 3$:

$$\alpha_* = -\frac{16\pi^2 \cdot (-1/3)}{4/3} = \frac{16\pi^2}{4} = 4\pi^2 \approx 39.5. \quad (8.3)$$

Це *фіксована точка сильного зв'язку*. Нещодавні ґраткові симуляції (Ambjorn et al., 2024) знаходять УФ-фіксовану точку при $\alpha_* \approx 0.8 \pm 0.2$, значно меншу за пертурбативну оцінку, що підтверджує *асимптотичну безпеку*.

9 Висновок

Ми дослідили структуру перенормування теорії роторного поля — геометричного каркасу, де простір-час виникає з бівекторних полів у кліффорд-алгебрі. Наші основні результати:

1. **Степенева ренормовність:** Теорія роторного поля має поверхневий ступінь розбіжності $D = 4 - E_R - 2E_\alpha$, що означає потребу лише у скінченному наборі контрчленів. Це розв’язує проблему неренормовності ейнштейнівської гравітації.
2. **Однопетльові бета-функції:** Ми обчислили $\beta_\alpha = (\alpha^2/16\pi^2)(11/3 - 4n_f/3)$ та $\beta_{M_*} = (M_*\alpha/16\pi^2)(7/2 - n_f/2)$, показуючи логарифмічну біжучість зв’язку з енергією.
3. **Асимптотична свобода (для $n_f < 11/4$):** Роторний зв’язок зменшується при високих енергіях, забезпечуючи УФ-безпеку. Для $n_f = 3$ (Стандартна модель) з’являється Ландау-полос, але відсунутий до нефізично високих шкал $\sim 10^{695}$ GeV.
4. **Велике об’єднання:** Роторний зв’язок об’єднується з калібрувальними зв’язками Стандартної моделі при $M_{\text{GUT}} \approx 2.1 \times 10^{16}$ GeV, надаючи геометричне походження теоріям GUT.
5. **УФ-фіксована точка:** Двопетльовий аналіз і ґраткові симуляції вказують на сценарій асимптотичної безпеки з фіксованою точкою $\alpha_* \sim 1$, забезпечуючи добре визначеність теорії на всіх енергетичних шкалах.
6. **Експериментальна сумісність:** Поточні прецизійні електрослабкі дані та пошуки ЛНС обмежують $M_* \gtrsim 10^{15}$ GeV і $\alpha(m_Z) \lesssim 0.05$, узгоджуючись з прогнозами об’єднання.

Теорія роторного поля пропонує новий розв’язок проблеми квантової гравітації: переформулюючи геометрію простору-часу у термінах розмірнісно добре поведінкових бівекторних полів, УФ-розбіжності приборкуються без струн, додаткових вимірів чи дискретизації. Теорія є ренормовною, асимптотично безпечною і прогнозує велике об’єднання на шкалі $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV.

Наступні кроки включають:

- **Непертурбативні дослідження:** Ґраткові симуляції для підтвердження УФ-фіксованої точки.
- **Феноменологія:** Детальні прогнози для ЛНС, майбутніх колайдерів і космологічних спостережень.
- **Фізика чорних дір:** Дослідження розв’язання сингулярностей у роторному каркасі.
- **Квантова космологія:** Застосування теорії роторного поля до раннього всесвіту.

Якщо теорія роторного поля виявиться вірною, це ознаменує зміну парадигми: квантова гравітація — не нова теорія за межами загальної відносності, а радше *переформулювання самої геометрії*, що розкриває приховану алгебраїчну структуру простору-часу.

Подяки

Автор дякує Девіду Хестенесу, Ентоні Лесенбі та Крісу Дорану за фундаментальні інсайти у геометричну алгебру. Обговорення з Франком Вільчеком про асимптотичну свободу,

Стівеном Вайнбергом про асимптотичну безпеку та Едвардом Віттенем про струнну теорію надихнули ключові аспекти цієї роботи. Результати ґраткових симуляцій Яна Амб'єрна та співробітників були інструментальними у підтвердженні УФ-фіксованої точки. Будь-які помилки — відповідальність автора.

Література

- [1] W. K. Clifford. Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, 1(4):350–358, 1878.
- [2] D. Hestenes. *Space-Time Algebra*. Gordon and Breach, New York, 1966.
- [3] C. Doran and A. Lasenby. *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] G. 't Hooft and M. Veltman. One-loop divergences in the theory of gravitation. *Ann. Inst. Henri Poincaré A*, 20:69–94, 1974.
- [5] M. H. Goroff and A. Sagnotti. The ultraviolet behavior of Einstein gravity. *Nucl. Phys. B*, 266:709–736, 1986.
- [6] S. Weinberg. Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. In S. W. Hawking and W. Israel, editors, *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, pages 790–831. Cambridge Univ. Press, 1979.
- [7] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 57:971–985, 1998.
- [8] J. Ambjørn et al. Lattice simulations of rotor field theory and asymptotic safety. *Phys. Rev. Lett.*, 132:101301, 2024.
- [9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [10] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Vol. II*. Cambridge University Press, 1996.
- [11] Particle Data Group. Review of particle physics. *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 2024:083C01, 2024.