Нетерівські (Noether-type) симетрії роторного поля: геометричні струми, дуальності та збережені заряди

В'ячеслав Логінов[1]

[1]Київ, Україна, barthez.slavik@gmail.com

15 жовтня 2025 року

Анотація

ПРЕПРИНТ - НЕ РЕЦЕНЗОВАНО
Ця робота не пройшла формальне наукове рецензування. Всі твердження про спостережувальні дані потребують незалежної перевірки науковою спільнотою. Читачів закликаємо підходити до матеріалу з належним науковим скептицизмом.

Ми виконуємо систематичний аналіз законів збереження для просторово-часового *роторного поля* $R(x) \in \mathrm{Spin}(1,3)$, визначеного в геометричній алгебрі через $R = \exp\left(\frac{1}{2}B\right)$ із бі-векторним генератором $B(x)$. Виходячи з перших принципів сигма-моделі ротора на кривих фонах, ми виводимо неочікуване багатство збережених структур: (i) глобальні та локальні *Spin*-калібрувальні струми, що кодують внутрішній кутовий момент; (ii) струм *бі-векторної фази* ("роторний заряд"), який вимірює когерентність локальних площинних обертань; (iii) *дуальний* струм, що узагальнює електромагнітну гелікальність на повну роторну конфігурацію; (iv) спіновий струм і удосконалений Белінфанте тензор енергії-імпульсу; та (v) топологічні поверхневі заряди, що випливають із форм Мора—Картана. Ці симетрії розширюють стандартну відповідність Нетер і прояснюють, як маса, енергія, спін і когерентність роторної фази постають як різні аспекти єдиного геометричного принципу інваріантності.

Ключові слова: роторне поле; геометрична алгебра; нетерівські струми; калібрувальна симетрія Spin; дуальність; гелікальність; енерго-імпульсний тензор

1 Вступ

1.1 Проблема симетрій у теорії роторного поля

Одне з найглибших відкриттів фізики XX століття — теорема Нетер: кожній неперервній симетрії фізичної системи відповідає закон збереження. Трансляційна інваріантність простору веде до збереження імпульсу; часової інваріантності відповідає збереження енергії. Цей зв'язок між симетрією та збереженням скеровував розвиток сучасної теорії поля — від електродинаміки до Стандартної моделі.

Якщо ж розглянути теорію поля, засновану не на скалярних чи векторних полях, а на *роторних полях* — полях зі значеннями в групі $\mathrm{Spin}(1,3)$, що параметризує локальні лоренцові обертання, — постає питання: які нові симетрії з'являються? Які збережені величини характеризують динаміку такої геометрично насиченої структури?

Роторне поле $R(x)$ принципово відрізняється від звичних полів. Це одиничний парний мультивектор у геометричній алгебрі, що подається як $R = \exp(\frac{1}{2}B)$, де B — бі-вектор, орієнтований елемент площини. Ця експонента з бі-векторної алгебри до роторної групи —

геометричний аналог $e^{\mathrm{i}\theta}$ у комплексній площині, але тепер діє на шестивимірному просторі площин простору-часу.

Роторне поле кодує і *напрям* привілейованої площини (які компоненти бі-вектора активні), і *величину* обертання в цій площині (кут ϕ). Така подвійна структура натякає на багатший ландшафт симетрій, ніж у скалярних чи векторних полях. Чи існують збережені струми, пов'язані з перетвореннями бі-векторної фази? Що відбувається, коли ми обертаємо саму площину через дуальні трансформації? Як внутрішній спін ротора зчіплюється з просторово-часовими трансляціями?

1.2 Ландшафт роторних симетрій

У стандартній калібрувальній теорії група діє множенням на матерні поля, і теорема Нетер дає збережені струми. Для роторів ситуація тонша. Група $\mathrm{Spin}(1,3)$ може діяти на $R(x)$ щонайменше трьома способами:

1. **Ліве множення**: $R(x) \to S\,R(x)$, $S \in \mathrm{Spin}(1,3)$ — сталий ротор. Це генерує глобальні лоренцові перетворення і дає шість струмів, пов'язаних із генераторами обертань і бустів.
2. **Праве множення**: $R(x) \to R(x)\,S$, що зберігає індуковану тетраду $e_a = R\gamma_a\widetilde{R}$, але змінює спінорний вміст. Такі перетворення породжують *внутрішні* симетрії.
3. **Зсуви бі-векторної фази**: якщо $R = \exp(\frac{1}{2}\phi\,\hat{B})$ з одиничним бі-вектором $\hat{B}^2 = -1$, то $\phi \to \phi + \alpha$ зсуває кут обертання за фіксованої площини. Це нагадує $U(1)$-калібрувальні перетворення в ЕМТ, але діє в бі-векторному секторі.

Поза цими діями, геометрична алгебра надає специфічну для бі-векторів симетрію: *дуальність*. Подібно до того, як рівняння Максвелла допускають перетворення, що взаємообмінює електричні й магнітні поля, бі-вектори можна обертати в їх Годжеві двоїсті множенням на псевдоскаляр I. Якщо динаміка поважає цю дуальність, має існувати відповідний збережений струм.

Нарешті, ізометрії простору-часу — трансляції та лоренцові бусти, застосовані до самих координат — дають звичний тензор енергії-імпульсу. Оскільки ротор несе внутрішній спін, канонічний тензор загалом не симетричний, і потрібна процедура Белінфанте для побудови симетричного, калібрувально-інваріантного тензора, придатного для гравітаційного зв'язку.

1.3 Фізичний зміст і обсяг

Навіщо нам ці збережені величини? Відповідь — у фізичній інтерпретації роторних полів. Якщо, як стверджує гіпотеза роторного поля, фундаментальний опис матерії й геометрії містить бі-векторне поле $B(x)$, з якого постають і метричні, і спінорні структури, тоді виведені тут збережені заряди — найпервинніші спостережувані величини теорії.

Роторно-фазовий заряд вимірює *когерентність* обертальних осциляцій — аналог довжини когерентності в надпровідниках чи Бозе–Ейнштейнівських конденсатах. Області з великим роторно-фазовим зарядом відповідають квантово-когерентній матерії. Дуальний заряд узагальнює гелікальність: балансує "електричні" та "магнітні" компоненти бі-вектора. У гравітації це може стосуватися гравітомагнітного поля; у квантових контекстах — хиральності ферміонів.

Спіновий струм описує внутрішню густину кутового моменту, яку несе саме роторне поле. На кривих фонах цей струм робить внесок у загальний кутовий момент і пов'язаний із асиметрією тензора енергії-імпульсу через спін-орбітальне зчеплення.

1.4 Організація роботи

У цій праці ми систематично виводимо та класифікуємо нетерівські закони збереження для роторів. Підхід конструктивний: починаючи з першопринципної дії сигма-моделі, розглядаємо кожну неперервну симетрію, обчислюємо відповідний струм та тлумачимо його фізичний сенс.

Структура. У розділі 2 встановлюємо математичний каркас: ротор у геометричній алгебрі, його коваріантну похідну та струм Мора—Картана. Розділ 3 адаптує загальну машину Нетер до роторних змінних і виводить головну формулу для струмів.

У розділі 4 — серце роботи — каталогізуємо симетрії та струми: калібрувальну Spin-симетрію, роторно-фазову, дуальність, праву дію та внутрішні автоморфізми, ізометрії простору-часу (тензор енергії-імпульсу) і топологічні заряди з кривини Мора—Картана.

Розділ 5 ілюструє прикладами: вільні роторні конфігурації, зв'язок із ферміонами Дірака, випадки порушення дуальності. Розділ 4 також висвітлює поліпшення Белінфанте. Насамкінець, розділ 6 синтезує результати, накреслює зв'язки та відкриті питання. Додатки містять деталі виведень.

2 Математичний каркас: роторне поле та його струми

2.1 Геометрична алгебра та група роторів

Нехай $\mathcal{G}(1,3)$ — кліфордова алгебра, породжена ортонормованим базисом $\{\gamma_a\}$, $a = 0,1,2,3$, із відношенням

$$\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\eta_{ab}, \qquad \eta = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1). \tag{2.1}$$

Геометричний добуток породжує шістнадцятивимірну алгебру зі скалярами, векторами, бі-векторами, три-векторами та псевдоскаляром. Загальний бі-вектор має вигляд

$$B = B^{ab}\,\gamma_a \wedge \gamma_b = \frac{1}{2}B^{ab}\,(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a). \tag{2.2}$$

Ротор — одиничний парний мультивектор $R \in \mathcal{G}^+(1,3)$, що задовольняє

$$R\widetilde{R} = 1, \tag{2.3}$$

де $\widetilde{R}$ — реверсія. Множина таких R утворює групу $\mathrm{Spin}(1,3)$ — подвійне накриття $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

Кожен ротор має експоненціальну параметризацію через бі-вектор:

$$R = \exp\!\big(\tfrac{1}{2}B\big) = \cosh\!\big(\tfrac{1}{2}|B|\big) + \frac{B}{|B|}\sinh\!\big(\tfrac{1}{2}|B|\big), \tag{2.4}$$

де $|B|^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(B^2)$. Це встановлює $\mathfrak{spin}(1,3)$ як лі-алгебру $\mathrm{Spin}(1,3)$.

2.2 Роторне поле та індукована геометрія

Роторне поле $R(x)$ приписує кожній точці x^μ ротор $R(x) \in \mathrm{Spin}(1,3)$ та індукує локальний ортонормований репер (тетраду) через

$$e_a(x) \equiv R(x)\,\gamma_a\,\widetilde{R}(x). \tag{2.5}$$

Тоді

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab}. \tag{2.6}$$

Компоненти e_a^μ визначають метрику

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a \, e_\nu^b \, \eta_{ab}. \tag{2.7}$$

Отже, $R(x)$ кодує геометрію простору-часу: плоскість відповідає сталому R, кривина — просторовим змінам.

2.3 Спіновий зв'язок і коваріантна похідна

Для коваріантної похідної вводимо *спіновий зв'язок* $\Omega_\mu(x)$ — бі-векторну 1-форму:

$$\nabla_\mu R \equiv \partial_\mu R + \frac{1}{2}\Omega_\mu R. \tag{2.8}$$

Безкручення (Леві-Чівіта) вимагає

$$\mathrm{d}e^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b = 0. \tag{2.9}$$

2.4 Струм Мора—Картана

Визначимо праворівноважний струм

$$\mathcal{A}_\mu \equiv 2(\nabla_\mu R)\widetilde{R} \in \mathfrak{spin}(1,3), \tag{2.10}$$

який при правому множенні $R \to RS$ трансформується як

$$\mathcal{A}_\mu \to S^{-1}\mathcal{A}_\mu S. \tag{2.11}$$

Обернене співвідношення:

$$\nabla_\mu R = \frac{1}{2}\mathcal{A}_\mu R. \tag{2.12}$$

Кривина:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \tag{2.13}$$

2.5 Лагранжіан ротора

Розглянемо сигма-модель ротора:

$$\mathcal{L}_R = \frac{\rho}{8}\, g^{\mu\nu}\ \mathrm{Tr}(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu) - V(R), \tag{2.14}$$

де $\rho > 0$ — константа, Tr — вбивча форма на $\mathfrak{spin}(1,3)$, $V(R)$ — потенціал (самодія/зв'язки). Приклади:

- V залежить лише від інваріантів (напр., $\mathrm{Tr}(B^2)$) — поважає глобальні обертання.
- V залежить від фази ϕ у $R = \exp(\frac{1}{2}\phi\,\hat{B})$ — порушує роторно-фазову симетрію.
- V різнить "електричні" та "магнітні" компоненти — порушує дуальність.

2.6 Рівняння руху

Варіювання $S_R = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_R$ за R дає

$$\nabla_\mu \mathcal{A}^\mu = -\frac{4}{\rho}\frac{\partial V}{\partial R}\,\widetilde{R} \in \mathfrak{spin}(1,3). \tag{2.15}$$

Для $V = 0$:

$$\nabla_\mu \mathcal{A}^\mu = 0. \tag{2.16}$$

3 Механіка Нетер для роторних симетрій

3.1 Нагадування про теорему Нетер

Нехай поля ϕ трансформуються як $\delta\phi = \epsilon^A(x)\delta_A\phi$. Якщо дія інваріантна (з точністю до країв), існує струм J^μ_A із

$$\partial_\mu J^\mu_A = 0 \quad \text{(на оболонці)}. \tag{3.1}$$

3.2 Інфінітезимальні перетворення ротора

Нехай генератори — бі-вектори G_A, тоді

$$\delta R = \frac{1}{2}\,\epsilon^A(x)\,G_A\,R. \tag{3.2}$$

Струм Мора—Картана змінюється як

$$\delta\mathcal{A}_\mu = \nabla_\mu\epsilon^A\,G_A + [\,\mathcal{A}_\mu,\ \epsilon^A G_A\,]. \tag{3.3}$$

3.3 Варіація лагранжіана

Кінетичний член:

$$\delta\mathcal{L}_R = \frac{\rho}{4}\,\nabla_\mu\epsilon^A\ \mathrm{Tr}\big(G_A\mathcal{A}^\mu\big) - \delta_A V, \tag{3.4}$$

де

$$\delta_A V \equiv \frac{1}{2}\epsilon^A\,\frac{\partial V}{\partial R}\cdot(G_A R). \tag{3.5}$$

3.4 Головна формула для нетерівських струмів

Інтегруючи частинами, отримуємо **тотожність Варда**:

$$\nabla_\mu J^\mu_A = -\,\delta_A V, \tag{3.6}$$

де **нетерівський струм**

$$J^\mu_A = \frac{\rho}{4}\ \mathrm{Tr}(\mathcal{A}^\mu G_A). \tag{3.7}$$

За глобальної симетрії та $\delta_A V = 0$:

$$\nabla_\mu J^\mu_A = 0. \tag{3.8}$$

Заряд:

$$Q_A = \int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,n_\mu J^\mu_A. \tag{3.9}$$

4 Ландшафт роторних симетрій

4.1 Spin-калібрувальна симетрія: внутрішній кутовий момент

4.1.1 Фізичний зміст

Ліве множення $R \to SR$ (S сталий) змінює репер $e_a = R\gamma_a\widetilde{R}$ як

$$e_a \to Se_a\widetilde{S}. \tag{4.1}$$

Інваріанти на кшталт $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu)$ залишаються сталими.

4.1.2 Струми та збереження

Генератори

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\,\gamma_a \wedge \gamma_b, \quad a < b, \tag{4.2}$$

дають **спін-калібрувальний струм**

$$J^\mu_{ab} = \frac{\rho}{4}\,\mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}^\mu G_{ab}\big). \tag{4.3}$$

За клас-функційного $V(R)$:

$$\nabla_\mu J^\mu_{ab} = 0. \tag{4.4}$$

4.2 Роторно-фазова симетрія: заряд когерентності

4.2.1 Декомпозиція на площину й кут

Для простого ротора:

$$R = \exp\big(\tfrac{1}{2}\phi\,\hat{B}\big), \quad \hat{B}^2 = -1. \tag{4.5}$$

4.2.2 Струм і інтерпретація

Для $\delta R = \frac{1}{2}\alpha\,\hat{B}R$ маємо

$$J^\mu_{\mathrm{rot}} = \frac{\rho}{4}\,\mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}^\mu\hat{B}\big), \tag{4.6}$$

і за $\delta_{\hat{B}}V = 0$, $\nabla_\mu J^\mu_{\mathrm{rot}} = 0$. Відповідний заряд Q_{rot} вимірює *когерентність* обертальних осциляцій у площині $\hat{B}$.

4.3 Дуальність: гелікальність і Годжеве обертання

4.3.1 Геометричний зміст

Для бі-вектора B Годжева двоїстість: $\star B = IB$, I — псевдоскаляр. Інфінітезимально:

$$\delta R = \tfrac{1}{2}\theta\,(I\hat{B})\,R. \tag{4.7}$$

4.3.2 Дуальний струм

$$J^\mu_{\mathrm{dual}} = \frac{\rho}{4}\,\mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}^\mu I\hat{B}\big), \tag{4.8}$$

і за дуальної інваріантності V — збереження. Заряд Q_{dual} узагальнює *гелікальність*.

4.4 Права дія та внутрішні автоморфізми

Праве множення $R \to RS$ загалом не змінює фізичної геометрії, але змінює параметризацію. За бі-інваріантного V існують додаткові збережені праві струми (деталі — у додатку).

4.5 Ізометрії простору-часу та тензор енергії-імпульсу

4.5.1 Трансляції та енерго-імпульс

Канонічний тензор:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\rho}{4}\,\mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}^{\mu}\mathcal{A}_{\nu}\big) - \delta^{\mu}{}_{\nu}\,\mathcal{L}_R, \tag{4.9}$$

а на оболонці $\nabla_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} = 0$.

4.5.2 Проблема асиметрії

Загалом $T^{\mu}{}_{\nu} \neq T^{\nu}{}_{\mu}$ через спін. Потрібне поліпшення Белінфанте для симетризації.

4.6 Поліпшення Белінфанте

4.6.1 Спіновий струм

$$S^{\lambda\mu\nu} = \frac{\rho}{4}\,\mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}^{\lambda} G^{\mu\nu}\big). \tag{4.10}$$

4.6.2 Симетризований тензор

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\nabla_{\lambda}\big(S^{\lambda\mu\nu} + S^{\mu\nu\lambda} + S^{\nu\lambda\mu} - S^{\lambda\nu\mu} - S^{\mu\lambda\nu} - S^{\nu\mu\lambda}\big), \tag{4.11}$$

який симетричний та збережений і збігається (варіаційно) з гільбертівським тензором.

4.7 Топологічні заряди з кривини Мора—Картана

4.7.1 Густина Черна—Понтрягіна

$$\mathcal{P} \equiv \mathrm{Tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\rho\sigma}) = \partial_{\mu} K^{\mu}. \tag{4.12}$$

4.7.2 Топологічний заряд

$$Q_{\mathrm{top}} = \frac{1}{32\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})\,\mathrm{d}^4 x \in \mathbb{Z}. \tag{4.13}$$

Це аналог індексу Понтрягіна (інстантони, скірміони тощо).

5 Приклади та фізичні застосування

5.1 Вільний ротор із бі-інваріантним потенціалом

5.1.1 Вибір потенціалу

Розглянемо найпростіший випадок: роторне поле з потенціалом, що залежить лише від повністю інваріантних величин. Візьмемо

$$V(R) = V_0 + \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu), \tag{5.1}$$

де V_0 — константа (космологічний член), λ — константа самозв'язку. Альтернативно, можна обрати

$$V(R) = m^2\,\mathrm{Tr}(B^2), \tag{5.2}$$

де $B = 2\log R$ — бі-векторний генератор. Обидва вибори залежать лише від інваріантів R за лівого та правого множення, тож усі симетрії точно зберігаються.

5.1.2 Збережені величини

У цьому випадку:

- Спін-калібрувальні струми J^μ_{ab} збережені, кодуючи шість незалежних зарядів кутового моменту та бусту.
- Роторно-фазовий струм J^μ_{rot} (для будь-якого вибору площини $\hat{B}$) збережений.
- Дуальний струм J^μ_{dual} збережений, відображаючи інваріантність за Годжевого обертання.
- Тензор енергії-імпульсу (після поліпшення Белінфанте) симетричний і збережений, що дає збереження чотири-імпульсу.

Розглянемо особливо простий розв'язок: конфігурацію плоскої хвилі з $R(x,t) = \exp\left[\frac{1}{2}(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,\hat{B}\right]$. Тут ротор осцилює рівномірно в площині $\hat{B}$ з кутовою частотою ω та хвильовим вектором $\mathbf{k}$. Для такої конфігурації:

- Густина енергії $\Theta^{00} \propto \omega^2 + k^2$ рівномірна та стала в часі (стояча хвиля в роторній фазі).
- Роторно-фазовий заряд $Q_{\mathrm{rot}} = \int J^0_{\mathrm{rot}}\,\mathrm{d}^3x \propto \omega V$, де V — просторовий об'єм. Плоскі хвилі несуть великий роторно-фазовий заряд, сигналізуючи про ідеальну когерентність.
- Дуальний заряд $Q_{\mathrm{dual}} = 0$, якщо хвиля чисто в площині $\hat{B}$, але стає відмінним від нуля, якщо ми суперпонуємо компоненти $\hat{B}$ та $I\hat{B}$ (хиральна хвиля).

Цей приклад демонструє, що навіть у найпростіших роторних конфігураціях співіснують множинні збережені заряди, кожен з яких захоплює різний аспект структури поля.

5.2 Зв'язок із ферміонами Дірака

У реалістичних теоріях роторні поля не існують ізольовано, а взаємодіють із матерними полями. Розглянемо зв'язок із ферміоном Дірака.

5.2.1 Лагранжіан ферміона

У геометричній алгебрі спінор Дірака представлений парним мультивектором $\psi \in \mathcal{G}^+(1,3)$ (не обов'язково ротором; $\psi\widetilde{\psi}$ може не дорівнювати одиниці). Лагранжіан Дірака має вигляд

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi, \tag{5.3}$$

де $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ — діраківський спряжений, а коваріантна похідна діє на ψ, використовуючи той самий спіновий зв'язок Ω_μ, що керує роторним полем.

Повний лагранжіан:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_\psi. \tag{5.4}$$

5.2.2 Сумарний спіновий струм

За глобального $\mathrm{Spin}(1,3)$ перетворення обидва R і ψ трансформуються: $R \to SR$, $\psi \to S\psi$. Повний спін-калібрувальний струм є сумою внесків від роторного та ферміонного секторів:

$$J^\mu_{ab}(\text{total}) = J^\mu_{ab}(R) + J^\mu_{ab}(\psi), \tag{5.5}$$

де

$$J^\mu_{ab}(\psi) = \bar{\psi}\gamma^\mu \Sigma_{ab}\psi, \tag{5.6}$$

з $\Sigma_{ab} = \frac{1}{2}\gamma_a \wedge \gamma_b$ — генераторами спіну.

Обидва внески окремо збережені, якщо виконуються рівняння руху, але сума представляє повний кутовий момент зв'язаної системи.

5.2.3 Інтерпретація

Цей сценарій зв'язку фізично значущий, якщо, як стверджує гіпотеза роторного поля, ферміони виникають із локалізованих збуджень роторного поля. У напівкласичній границі можна трактувати ферміон як малу збурення на фоновій роторній конфігурації. Спіновий струм ротора $J^\mu_{ab}(R)$ тоді джерелить гравітаційне спін-орбітальне зчеплення через поліпшений Белінфанте тензор енергії-імпульсу, тоді як спіновий струм ферміона $J^\mu_{ab}(\psi)$ описує внутрішній спін частинки.

Цікавий наслідок: якщо роторне поле має чистий роторно-фазовий заряд $Q_{\text{rot}} \neq 0$, ферміон, що рухається через цей фон, відчуває ефективне калібрувальне поле, пропорційне $\mathcal{A}_\mu$. Це може проявитися як геометрична фаза (аналогічна ефекту Ааронова—Бома), накопичена хвильовою функцією ферміона.

5.3 Порушення дуальності в анізотропних середовищах

Не всі фізичні системи поважають дуальну симетрію. Розглянемо сценарій, де ця симетрія явно порушена.

5.3.1 Анізотропний потенціал

Розглянемо середовище (можливо, кристал або привілейоване фоліювання простору-часу в космологічному контексті), що розрізняє електричні та магнітні типи бі-векторних компонент. Можна моделювати це потенціалом

$$V(R) = \frac{m_E^2}{2}\,\mathrm{Tr}(B_E^2) + \frac{m_M^2}{2}\,\mathrm{Tr}(B_M^2), \tag{5.7}$$

де $B = B_E + B_M$ з B_E — електричною частиною і $B_M = IB_E$ — магнітною частиною, та $m_E \neq m_M$.

У термінах електромагнітних аналогій, це схоже на призначення різних "мас" електричним та магнітним польовим осциляціям, порушуючи симетрію за $B \leftrightarrow IB$.

5.3.2 Дуальна аномалія

За інфінітезимального дуального перетворення $\delta R = \frac{1}{2}\theta\,(I\hat{B})\,R$ потенціал змінюється:

$$\delta_{\text{dual}} V = (m_M^2 - m_E^2)\,\theta\ \mathrm{Tr}(B_E \cdot B_M) \neq 0. \tag{5.8}$$

Тотожність Варда (3.6) тоді дає

$$\nabla_\mu J^\mu_{\text{dual}} = -(m_M^2 - m_E^2)\ \mathrm{Tr}(B_E \cdot B_M). \tag{5.9}$$

Дуальний струм більше не збережений. Його дивергенція вимірює швидкість, з якою взаємодії, що порушують дуальність, переносять "заряд" між електричним та магнітним секторами. Це *дуальна аномалія* — не в сенсі квантово-польової теорії як аномалії з регуляризації, але як класичний ефект порушення симетрії.

5.3.3 Фізичні наслідки

Де може виникати таке порушення дуальності?

1. **Гравітомагнетизм поблизу обертових тіл**: Геометрія простору-часу навколо обертової чорної діри (метрика Керра) розрізняє втягування системи відліку (магнітний тип) від припливної (електричний тип) кривини. Роторне поле, що поширюється на цьому фоні, відчуває взаємодії, що порушують дуальність, що веде до незбереження гелікальності. Спостережно це може проявитися як прецесія площини осциляції ротора.

2. **Космологічна анізотропія**: Якщо ранній Всесвіт мав привілейований напрям (можливо, від первісного магнітного поля або анізотропного інфляційного механізму), роторна польова динаміка розрізняла б площини, вирівняні з цим напрямом або ортогональні до нього. Результуюче порушення дуальності могло б посіяти формування структури або залишити відбитки в поляризації реліктового випромінювання.

3. **Системи конденсованої матерії**: У фізиці твердого тіла кристали мають привілейовані осі. Модель роторного поля квантових спінових збуджень (магнонів) у таких матеріалах природно виявляла б порушення дуальності, з різними дисперсійними співвідношеннями для спінових хвиль уздовж різних кристалографічних напрямів.

Ці приклади показують, що збережений (або порушений) дуальний струм — не лише формальна конструкція, але має спостережні фізичні наслідки в різноманітних контекстах.

6 Обговорення: єдність роторних симетрій

6.1 Єдиний ландшафт

Симетрія	Струм	Фізичний заряд
Ліва дія $\mathrm{Spin}(1,3)$	J^{μ}_{ab}	Внутрішній спін і буст
Зсув бі-векторної фази	J^{μ}_{rot}	Когерентність (ротор-фаза)
Дуальність (Годж-обертання)	J^{μ}_{dual}	Узагальнена гелікальність
Трансляції простору-часу	$T^{\mu}_{\ \nu}$, $\Theta^{\mu\nu}$	Енергія та імпульс
Топологічна	$\star\,\mathrm{Tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F})$	$Q_{\mathrm{top}}\in\mathbb{Z}$

Белінфанте явно пов'язує спін і енерго-імпульс; J_{rot} і J_{dual} — прояви перетворень у бі-векторному секторі.

6.2 Зв'язки з іншими підходами

6.2.1 Порівняння з калібрувальною теорією

$\mathcal{A}_{\mu}$ — аналог з'єднання, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ — аналог напруженості, але тут *сам ротор* — фундаментальне поле (сігма-модельна природа).

6.2.2 Гравітація як калібрувальна теорія

У підході Лазенбі—Доран—Галл спіновий зв'язок — калібрувальне поле. Тут струм спіну ротора джерелить симетризований тензор; у варіанті з індукованою метрикою $g_{\mu\nu}$ все визначається самим R.

6.2.3 Відлуння квантової механіки

Роторно-фазова симетрія нагадує $U(1)$ фази хвильової функції; у формулюванні Гестенеса спінор — парний мультивектор, тож J^{μ}_{rot} корелює з квантовим струмом імовірності.

6.3 Відкриті питання та майбутні напрями

Попри досягнутий прогрес в цьому аналізі, залишається кілька важливих відкритих питань.

6.3.1 Квантування та аномалії

Усі наші результати виведені на класичному рівні. Що відбувається, коли роторне поле квантується? Чи переживають закони збереження, чи квантові поправки вносять аномалії?

У калібрувальних теоріях хиральні аномалії можуть спричинити набуття класично збереженими струмами ненульової дивергенції на квантовому рівні через тонкощі регуляризації. Для роторних полів неабелева структура $\mathfrak{spin}(1,3)$ та зв'язок між різними симетричними секторами натякають, що можуть виникнути аномалії.

Особливий інтерес становить доля дуального струму J^{μ}_{dual} за квантування. Якщо дуальна симетрія аномальна, це мало б глибокі наслідки для спектра частинок (роторних збуджень) та їхніх киральних властивостей. Коефіцієнт аномалії може обмежити можливий вміст частинок теорії, аналогічно до того, як скасування аномалій обмежує калібрувальну групу та представлення ферміонів у Стандартній моделі.

6.3.2 Скінчено-енергетичні солітони та топологічні збудження

Топологічний заряд Q_{top} натякає на існування стабільних, локалізованих конфігурацій (солітонів), що несуть збережені топологічні квантові числа. Як виглядають ці розв'язки явно? Чи можна їх побудувати аналітично або чисельно?

В інших солітонних теоріях (скірміони в піонній фізиці, монополі в калібрувальних теоріях) топологічний заряд асоціюється з виткою польових конфігурацій навколо просторової границі на нескінченності. Для роторних полів Q_{top} випливає з кривини $\mathcal{A}_\mu$, що, у свою чергу, кодує, як R обертається при проходженні простору-часу.

Можна припустити, що роторні солітони відповідають зав'язаним або зчепленим конфігураціям бі-векторного поля $B(x)$ — геометричним структурам, де площини обертання сплетені в нетривіальні патерни. Такі "роторні вузли" несли б цілі заряди $(Q_{\text{rot}}, Q_{\text{dual}}, Q_{\text{top}})$, забезпечуючи схему класифікації для частинко-подібних збуджень.

Якщо елементарні ферміони є роторними солітонами, їхні квантові числа (електричний заряд, лептонне число, баріонне число) можуть бути закодовані в цій топологічній структурі. Дослідження цього зв'язку могло б подолати прогалину між гіпотезою роторного поля та спостережуваною фізикою частинок.

6.3.3 Спостережні сигнатури в гравітаційних системах

В астрофізичних контекстах, як ці збережені струми проявляються спостережно?

Розглянемо подвійну систему обертових компактних об'єктів (нейтронних зірок або чорних дір), що випромінюють гравітаційні хвилі. У стандартній загальній теорії відносності хвильова форма залежить від мас, спінів та орбітальних параметрів. У теорії роторного поля виникають додаткові внески від роторно-фазових та дуальних струмів, які несе внутрішня структура об'єктів.

Якщо об'єкти мають великий роторно-фазовий заряд Q_{rot} (висока когерентність), сигнал гравітаційної хвилі може виявляти характерні модуляції або бічні смуги на частотах, пов'язаних із внутрішніми роторними осциляціями. Подібно, ненульовий дуальний заряд Q_{dual} може призвести до змішування поляризації у випромінюваних хвилях — ефект, відсутній у стандартній гравітації.

Детальне моделювання хвильових форм та порівняння з даними LIGO/Virgo могло б перевірити ці передбачення. Сучасні спостереження гравітаційних хвиль добре пояснюються загальною теорією відносності, але вимірювання вищої точності або системи з екстремальними спіновими параметрами можуть виявити відхилення, узгоджені з роторно-польовими поправками.

6.3.4 Роторні поля в космології

На космологічних масштабах роторне поле може служити кандидатом на темну матерію або темну енергію. Якщо Всесвіт заповнений фоновим роторним полем $R(x,t)$, що має великий роторно-фазовий заряд, його густина енергії робила б внесок до космологічного енергетичного бюджету.

Збережений дуальний заряд Q_{dual}, проінтегрований по спостережуваному Всесвіту, може кодувати глобальну космологічну анізотропію. Якщо $Q_{\text{dual}} \neq 0$, Всесвіт мав би привілейовану “гелікальність” — хиральну асиметрію, потенційно спостережувану в поляризації реліктового випромінювання або в розподілі спінів галактик.

Крім того, топологічний заряд Q_{top} міг би маркувати різні топологічні фази історії Всесвіту. Фазові переходи в ранньому Всесвіті (такі як пов’язані з інфляцією або порушенням симетрії) могли б відповідати змінам у Q_{top}, зі спостережними наслідками в первинному спектрі потужності або гравітаційно-хвильовому фоні.

Ці космологічні наслідки заслуговують подальшого дослідження як теоретично (розв’язання рівнянь роторного поля в розширюваних просторо-часах), так і спостережно (аналіз космологічних даних на предмет сигнатур роторно-польових ефектів).

6.4 Філософські роздуми

Поза технічними результатами, аналіз роторно-польової симетрії запрошує до ширших роздумів про природу фізичних законів.

Теорема Нетер виявляє глибоку єдність: симетрії та закони збереження — дві сторони однієї монети. Цей принцип скеровував більшу частину фізики XX століття, від розвитку квантової механіки до Стандартної моделі. Роторне поле розширює цю єдність у царину геометричних структур.

Ротор $R(x) \in \text{Spin}(1,3)$ — це не просто набір чисел, а геометричний об’єкт, що кодує обертання. Його симетрії — це геометричні перетворення: обертання реперів, зсуви фаз, дуалізація площин. Збережені заряди — енергія, спін, гелікальність, когерентність — це геометричні інваріанти, видобуті з конфігурації ротора.

Ця геометрична перспектива натякає, що фундаментальні закони фізики можуть бути найкраще виражені не в термінах абстрактних алгебраїчних структур (гільбертових просторів, операторних алгебр), а мовою геометрії: площин, обертань, кривин. Якщо це бачення правильне, тоді пошук уніфікації — гравітації з квантовою механікою, матерії з простором-часом — стає пошуком правильного геометричного каркаса.

Гіпотеза роторного поля пропонує, що цей каркас — геометрична алгебра, а фундаментальне поле — ротор. Нетерівський аналіз, представлений тут, підтримує цю пропозицію, виявляючи багатий гобелен збережених величин, кожна з яких має ясний геометричний та фізичний зміст, усі випливають із єдиної уніфікованої структури.

Чи виявиться роторне поле зрештою правильним описом природи, чи ні, цей досвід демонструє силу геометричного мислення в теоретичній фізиці.

7 Заключні зауваження

У цій праці ми здійснили систематичне дослідження симетрій та законів збереження, що керують роторним полем $R(x) \in \text{Spin}(1,3)$ у просторо-часовій геометричній алгебрі. Починаючи з перших принципів — лагранжіана сигма-моделі ротора на кривих фонах — ми застосували теорему Нетер для виведення збережених струмів, пов’язаних із кожною неперервною симетрією.

Ландшафт роторних симетрій виявився багатшим, ніж у звичних скалярних, векторних чи навіть спінорних полів. Ми ідентифікували та проаналізували:

1. **Спін-калібрувальні струми** J^{μ}_{ab}, що випливають із глобальних $\text{Spin}(1,3)$ перетворень, кодуючи внутрішній кутовий момент та буст-заряд роторної конфігурації.
2. **Роторно-фазовий струм** J^{μ}_{rot}, пов’язаний зі зсувами бі-векторного фазового кута,

вимірюючи когерентність обертальних осциляцій та узагальнюючи поняття числа частинок або заряду.

3. **Дуальний струм** J^{μ}_{dual}, що виникає з Годжевого обертання бі-векторної площини, узагальнюючи електромагнітну гелікальність на повну роторну структуру та кодуючи киральні властивості.

4. **Тензор енергії-імпульсу** $T^{\mu\nu}$ (та його поліпшений Белінфанте симетричний аналог $\Theta^{\mu\nu}$) з трансляційної інваріантності простору-часу, описуючи збереження енергії та імпульсу і забезпечуючи джерело для гравітаційної динаміки.

5. **Топологічний заряд** Q_{top} з густини Черна—Понтрягіна кривини Мора—Картана, класифікуючи польові конфігурації на топологічно різні сектори та потенційно відповідаючи збереженим квантовим числам частинко-подібних збуджень.

Ці збережені величини не є незалежними, але взаємопов'язані через геометричну структуру роторного поля. Процедура Белінфанте явно зв'язує спін і енергію-імпульс; роторно-фазовий та дуальний струми обидва виникають із перетворень у бі-векторному секторі; і всі струми сягають назад до єдиного фундаментального струму $\mathcal{A}_\mu = 2(\nabla_\mu R)\widetilde{R}$.

Ми проілюстрували ці абстрактні конструкції конкретними прикладами: вільні роторні плоскі хвилі, зв'язок із ферміонами Дірака, і дуальність, порушену в анізотропних середовищах. Кожен приклад виявив, як збережені струми кодують фізично спостережувані властивості — густину енергії, потік кутового моменту, довжину когерентності, транспорт гелікальності — доступні в принципі для вимірювання.

Аналіз з'єднується з ширшими темами в теоретичній фізиці. Каркас роторного поля паралельний калібрувальній теорії, але з матерією та геометрією, уніфікованими в єдиному полі. Він резонує з формулюванням загальної теорії відносності та квантової механіки в геометричній алгебрі, натякаючи на шляхи до уніфікації. І він порушує глибокі питання про квантування, аномалії, солітони та спостережні сигнатури в гравітаційних і космологічних контекстах.

Багато роботи залишається. Явна побудова скінчено-енергетичних солітонів, квантова теорія поля роторів, зв'язок із динамічною гравітацією та детальне моделювання спостережних ефектів в астрофізичних і космологічних системах — усе це відкриті виклики. Проте каркас, представлений тут, забезпечує міцну основу для вирішення цих питань.

У глибшому сенсі ця робота ілюструє методологічний принцип: *симетрія — ключ до розуміння.* Систематично досліджуючи симетрії роторного поля, ми відкрили багату структуру законів збереження, яку було б важко вгадати лише з фізичної інтуїції. Теорема Нетер, застосована до геометричної алгебри простору-часу, виявляє єдність, що лежить в основі на перший погляд різнорідних фізичних явищ.

Якщо гіпотеза роторного поля — що вся фізика постає з динаміки просторо-часового бі-векторного поля — виявиться правильною, тоді збережені заряди, які ми вивели тут, є одними з найфундаментальніших спостережуваних величин у природі. Вони є квантовими числами, що маркують частинки, струмами, що течуть через поля, зарядами, виміряними детекторами. Вони є інваріантами, що залишаються серед потоку просторо-часових подій, величинами, збереженими фізичними законами.

Ця праця накреслила обриси цього ландшафту. Майбутня робота заповнить деталі, перевірить передбачення та дослідить наслідки. Чи ми на шляху до справжньої уніфікації квантової механіки та гравітації, чи просто досліджуємо цікаву математичну структуру, подорож крізь симетрії роторних полів висвітлила глибокі зв'язки між геометрією, симетрією та фізичним законом.

Дослідження симетрій триває, ведене подвійною зорею геометрії та збереження.

Подяки

Автор завдячує Еммі Нетер, чия теорема вела покоління фізиків. Розвиток геометричної алгебри Девідом Гестенесом і її застосування до гравітації Ентоні Лазенбі, Крісом Дораном та Стівеном Галлом стали наріжними каменями. Роботу виконано незалежно, без зовнішнього фінансування. За можливі похибки відповідає автор.

А Детальний вивід Нетер у роторних змінних

(Технічні кроки ідентичні оригіналу; перекладено коротко для компактності.)

Починаючи з (2.14) і трансформації (3.2), отримаємо (3.3). Варіація кінетичного члена зводиться до терміна з $\nabla_\mu \epsilon^A$, комутаторний внесок зануляється циклічністю трас. Інтегрування частинами приводить до тотожності Варда (3.6) з струмом (3.7).

Б Поліпшення Белінфанте: побудова

Канонічний тензор (4.9) загалом асиметричний. Визначимо спіновий струм (4.10) та додамо дивергенцію надлишкового потенціалу (суперпотенціалу), отримуючи симетричний $\Theta^{\mu\nu}$ (4.11), що збігається з гільбертівським тензором і збережений на оболонці.

Література

[1] E. Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachr. d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse*, 1918, 235–257.

[2] D. Hestenes. *Space-Time Algebra.* Gordon and Breach, New York, 1966.

[3] C. Doran and A. Lasenby. *Geometric Algebra for Physicists.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[4] F. J. Belinfante. On the spin angular momentum of mesons. *Physica* 7 (1940) 449–474.

[5] L. Rosenfeld. Sur le tenseur d'impulsion-énergie. *Mém. Acad. Roy. Belg.* 18 (1940) 1–30.

[6] A. Lasenby, C. Doran, and S. Gull. Gravity, gauge theories and geometric algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 356(1737):487–582, 1998.

[7] S. S. Chern and J. Simons. Characteristic forms and geometric invariants. *Annals of Mathematics*, 99(1):48–69, 1974.