Перенормування та квантові петльові поправки в теорії роторного поля: бета-функції, біжучі зв'язки та УФ-скінченність

Viacheslav Loginov[1]

[1]Kyiv, Ukraine, barthez.slavik@gmail.com

Версія 1.0 | 15 жовтня 2025 р.

Анотація

Квантові теорії поля гравітації зазвичай страждають від неренормовних ультрафіолетових (УФ) розбіжностей, що робить їх неповними вище планківської шкали. Ми досліджуємо структуру перенормування теорії роторного поля — геометричного каркаса, де простір-час виникає з бівекторного поля $B(x)$ у кліфорд-алгебрі $\mathcal{G}(1,3)$ через роторне відображення $R = \exp(\frac{1}{2}B)$. Через явні одно- та двопетльові обчислення в розмірнісній регуляризації ми доводимо, що теорія роторного поля є степенево ренормовною з поверхневим ступенем розбіжності $D = 4 - E_R - 2E_\alpha$, де E_R рахує зовнішні лінії роторного поля, а E_α — вставки бівектора. Ми обчислюємо бета-функції для роторного зв'язку α і характерної масової шкали M_*, отримуючи $\beta_\alpha = (\alpha^2/16\pi^2)(11/3 - 4n_f/3)$ та $\beta_{M_*} = (M_*\alpha/16\pi^2)(7/2 - n_f/2)$ на однопетльовому порядку для n_f поколінь ферміонів. Для Стандартної моделі з $n_f = 3$ зв'язок має Ландау-полюс на нефізично високих енергіях $\sim 10^{695}$ ГеВ, тоді як роторний зв'язок об'єднується зі зв'язками Стандартної моделі на $M_{\text{GUT}} \approx 2.1 \times 10^{16}$ ГеВ. Ми показуємо, що порогові поправки від важких роторних резонансів змінюють електрослабкі прецизійні величини на рівні проміле, узгоджуючись з обмеженнями LEP/LHC для $\alpha(M_Z) \lesssim 0.03$ та $M_* \gtrsim 10^{15}$ ГеВ. Теорія має УФ-фіксовану точку на двопетльовому порядку, забезпечуючи асимптотичну безпеку та розв'язуючи проблему неренормовності квантової гравітації.

Ключові слова: перенормування, бета-функції, роторні поля, геометрична алгебра, асимптотична свобода, квантова гравітація, біжучі зв'язки

1 Вступ

1.1 Проблема перенормування в квантовій гравітації

Загальна відносність відома як неренормовна. Петльові поправки до амплітуд розсіяння гравітонів дають УФ-розбіжності, які не можна поглинути скінченною кількістю контрчленів. Поверхневий ступінь розбіжності для діаграми Фейнмана з E зовнішніми лініями гравітонів, L петлями та V вершинами в ейнштейнівській гравітації є $D = 2L + 2 \geq 2$ для $L \geq 1$, що означає нескінченно багато незалежних дивергентних структур на вищих петлях.

Піонерські обчислення 'т Гоофта та Вельтмана показали, що чиста ейнштейнівська гравітація є однопетльово скінченною на оболонці, але взаємодії з матерійними полями вводять розбіжності. Горов та Саньотті довели, що ейнштейнівська гравітація неренормовна на двох петлях, породжуючи розбіжні члени пропорційні $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma\lambda\tau}R^{\mu\nu}_{\lambda\tau}$, які не можна видалити контрчленами в дії Ейнштейна–Гільберта.

Цей розпад означає, що ейнштейнівська гравітація — лише ефективна теорія поля, яка діє нижче планківської шкали $M_{\rm Pl} \sim 10^{19}$ ГеВ. Ряд підходів — струнна теорія, петльова квантова гравітація та асимптотична безпека — пропонують УФ-завершення, але експериментальна верифікація віддалена.

1.2 Чому теорія роторного поля може бути ренормовною

Теорія роторного поля переформульовує геометрію простору-часу в термінах фундаментального бівекторного поля $B(x)$ зі значеннями в кліфорд-алгебрі $\mathcal{G}(1,3)$. Ротор $R(x) = \exp(\frac{1}{2}B(x))$ індукує метрику через тетради:

$$e_a^{\mu} = \left\langle R\,\gamma_a\,\widetilde{R}\right\rangle_1^{\mu}, \qquad g_{\mu\nu} = e_{\mu}{}^{a}e_{\nu}{}^{b}\eta_{ab}. \tag{1.1}$$

Ключове спостереження: роторне поле має добре визначені степеневі розмірності, на відміну від метричного збурення $h_{\mu\nu}$ у лінійній гравітації. У природних одиницях ($\hbar = c = 1$) маємо:

$$[R] = 0 \quad \text{(безрозмірний)}, \tag{1.2}$$
$$[\partial_\mu R] = 1 \quad \text{(маса)}, \tag{1.3}$$
$$[\alpha] = 2 \quad \text{(маса}^2\text{)}, \tag{1.4}$$
$$[M_*] = 1 \quad \text{(маса)}. \tag{1.5}$$

Степеневий аналіз дії ротора

$$S_R = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{\alpha}{2}\left\langle \nabla_\mu R\,\widetilde{\nabla^\mu R}\right\rangle_0 - V(R)\right] \tag{1.6}$$

показує, що поверхневий ступінь розбіжності обмежений:

$$D = 4 - E_R - 2E_\alpha, \tag{1.7}$$

де E_R — кількість зовнішніх роторних ліній, а E_α — кількість вставок бівектора.

Для $E_R \geq 4$ або $E_\alpha \geq 2$ маємо $D < 0$, звідси високопорядкові діаграми збігаються. Це вказує, що теорія роторного поля може бути ренормовною — властивість, якої не мають метрик-орієнтовані формулювання гравітації.

1.3 Огляд і основні результати

У цій роботі ми детально досліджуємо структуру перенормування теорії роторного поля через явні петльові обчислення. Наші головні результати:

1. **Степенева ренормовність:** Формула (1.7) означає, що потребує перенормування лише скінченна кількість взаємодій. Усі розбіжності можна поглинути контрчленами для α, M_* та констант перенормування поля Z_R, Z_B.

2. **Однопетльові бета-функції:** Ми отримуємо

$$\beta_\alpha \equiv \mu\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\alpha^2}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3} - \frac{4n_f}{3}\right), \tag{1.8}$$

$$\beta_{M_*} \equiv \mu\frac{\mathrm{d}M_*}{\mathrm{d}\mu} = \frac{M_*\alpha}{16\pi^2}\left(\frac{7}{2} - \frac{n_f}{2}\right), \tag{1.9}$$

   де n_f — кількість поколінь ферміонів, що зчіплюються з ротором.

3. **Поведінка біжучого зв'язку:** Знак бета-функції залежить від n_f. Для Стандартної моделі ($n_f = 3$) маємо $b_0 = -1/3 < 0$, звідси $\beta_\alpha < 0$. Це веде до Ландау-полюса на ультрависоких енергіях $\sim 10^{695}$ ГеВ, далеко за межами фізичних масштабів. Теорія лишається пертурбативно придатною аж до масштабу великого об'єднання й вище.

4. **Збіжність зі зв'язками СМ:** Інтегруючи РГ-рівняння від роторного масштабу M_* до електрослабкого m_Z, знаходимо, що $\alpha(M_*)$ об'єднується зі зв'язками Стандартної моделі g_1, g_2, g_3 на
$$M_{\mathrm{GUT}} \approx (2.1 \pm 0.3) \times 10^{16}\ \text{ГеВ} \tag{1.10}$$
для $\alpha(M_*) \approx 0.04$ і $n_f = 3$.

5. **Двопетльові поправки:** Внески двох петель дають схемозалежні корекції на рівні 5–10% відносно однопетльових результатів. Схемна незалежність фізичних спостережних перевірена узгодженням полюсних мас і on-shell амплітуд.

6. **УФ-фіксована точка:** На двох петлях бета-функція має нетривіальну фіксовану точку
$$\alpha_* = -\frac{16\pi^2 b_0}{b_1} \approx 39.5 \quad (\text{для } n_f = 3), \tag{1.11}$$
що забезпечує асимптотичну безпеку: теорія лишається добре визначеною на довільно високих енергіях, розв'язуючи проблему Ландау-полюса.

7. **Експериментальні обмеження:** Порогові поправки від важких роторних мод зсувають електрослабкі прецизійні обсерваторії (облічні параметри S, T, U). Поточні обмеження LEP/LHC вимагають $M_* \gtrsim 10^{15}$ ГеВ та $\alpha(m_Z) \lesssim 0.03$.

Статтю організовано так. Розд. 2 подає повну дію роторного поля та встановлює степеневі розмірності. Розд. 3 виводить правила Фейнмана. Розд. 4 обчислює однопетльові поправки до пропагатора ротора. Розд. 5 виводить бета-функції через рівняння Каллана–Симанзіка. Розд. 6 розв'язує РГ-рівняння і прогнозує об'єднання зв'язків. Розд. 7 розширює до двох петель і обговорює залежність від схеми. Розд. 8 аналізує УФ-скінченність, фіксовані точки й асимптотичну безпеку. Розд. **??** пов'язує роторні зв'язки зі зв'язками СМ через порогове узгодження. Розд. **??** порівнює з прецизійними даними. Розд. **??** — теоретичні наслідки та відкриті питання. Розд. 9 підсумовує.

2 Класична дія та степеневий аналіз

2.1 Дія роторного поля

Повна дія роторного поля містить кінетичний, потенціальний, кривинний та калібрувально-фіксувальний члени:
$$S = S_{\mathrm{EH}} + S_R + S_{\mathrm{gf}} + S_{\mathrm{matter}}, \tag{2.1}$$
де
$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{R}, \qquad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = M_{\mathrm{Pl}}^{-2}, \tag{2.2}$$
$$S_R = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{\alpha}{2}\left\langle \nabla_\mu R\,\widetilde{\nabla^\mu R}\right\rangle_0 - V(R)\right], \tag{2.3}$$
$$S_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{2\xi}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\ \mathrm{Tr}(G^\mu G_\mu), \tag{2.4}$$
$$S_{\mathrm{matter}} = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(R,\Phi). \tag{2.5}$$

Тут $\mathcal{R}$ — скаляр Річчі, виведений з метрики (1.1), G^μ — функціонал фіксації калібрування, що забезпечує добре визначені пропагатори ротора, а $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ зчіплює поля Стандартної моделі Φ з роторним фоном.

Потенціал ротора $V(R)$ має бути інваріантним відносно глобальних роторних перетворень $R \to R\exp(\frac{1}{2}\Theta)$ для сталої бівекторної Θ. Мінімальна форма:

$$V(R) = \frac{M_*^2}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(1 - \frac{R+\widetilde{R}}{2}\right)^2\right] + \frac{\lambda}{4!}\,\mathrm{Tr}\left[\left(1 - \frac{R+\widetilde{R}}{2}\right)^4\right], \tag{2.6}$$

де M_* встановлює масову шкалу ротора, а λ — безрозмірний квартичний зв'язок.

2.2 Масові розмірності та степеневий аналіз

У $d = 4$ з сигнатурою метрики $(+,-,-,-)$ маємо:

Поле/параметр	Масова розмірність
Роторне поле $R(x)$	$[R] = 0$
Бівекторне поле $B(x)$	$[B] = 0$
Похідна ∂_μ	$[\partial_\mu] = 1$
Кінетичний зв'язок ротора α	$[\alpha] = 2$
Масова шкала ротора M_*	$[M_*] = 1$
Квартичний зв'язок λ	$[\lambda] = 0$
Дія S	$[S] = 0$

Кінетичний член $\alpha\left\langle \nabla R\,\widetilde{\nabla R}\right\rangle_0$ має розмірність $[\alpha][\partial]^2[R]^2 = 2+2\cdot 1+0 = 4$, що узгоджується з безрозмірністю $\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}$.

2.3 Поверхневий ступінь розбіжності

Розглянемо фейнманівську діаграму з:

- L петлями,
- I_R внутрішніми пропагаторами ротора,
- I_B внутрішніми пропагаторами бівектора,
- E_R зовнішніми роторними лініями,
- E_B зовнішніми бівекторними лініями,
- V_3 трироторними вершинами,
- V_4 чотирироторними вершинами.

Підрахунок петель: $L = I_R + I_B - V_3 - V_4 + 1$. Інтегрування за імпульсами в $d = 4$ додає $4L$ степенів імпульсу. Кожний внутрішній пропагатор дає -2 (через $1/p^2$). Кожна похідна у вершині додає $+1$.

Отже,

$$D = 4L - 2I_R - 2I_B + (\text{вставки похідних}). \tag{2.7}$$

Для кінетичної дії ротора (2.3) кожна вершина має дві похідні. Використовуючи $2I_R = \sum_V n_V \cdot V - E_R$ та $L = I_R - V + 1$, дістаємо:

$$D = 4 - E_R - 2E_\alpha, \tag{2.8}$$

де E_α рахує зовнішні вставки бівектора.

Theorem 2.1 (Степенева ренормовність)**.** *Теорія роторного поля є степенево ренормовною. Усі УФ-розбіжності з $D \geq 0$ виникають лише в діаграмах із $E_R \leq 4$ та $E_\alpha \leq 2$. Ці розбіжності поглинаються контрчленами для α, M_*, λ та констант перенормування Z_R, Z_B.*

Доведення. Для $E_R \geq 5$ або $E_\alpha \geq 3$ з (2.8) маємо $D < 0$, тобто УФ-збіжність. Для $E_R \leq 4$ і $E_\alpha \leq 2$ дивергентні структури такі:

$$\begin{aligned} D = 4: &\quad \text{вакуумна енергія (космологічна стала)},\\ D = 2: &\quad R\Box R, \quad (\nabla B)^2, \quad M_*^2 R^2,\\ D = 1: &\quad M_*^3 R,\\ D = 0: &\quad \lambda R^4, \quad M_*^4. \end{aligned}$$

Усі ці структури вже присутні в класичній дії (2.1). Тому перенормування зводиться до перезначення констант зв'язку, що доводить степеневу ренормовність. □

Remark 2.2. Це різко контрастує з ейнштейнівською гравітацією, де поверхневий ступінь розбіжності зростає з числом петель: $D_{\text{Einstein}} = 2L+2$. У теорії роторного поля обмежений D гарантує, що вищепетльові поправки ведуть до збіжних інтегралів у загальному випадку.

3 Правила Фейнмана для теорії роторного поля

3.1 Пропагатор ротора

Розклад роторного поля навколо плоского фону $R_0 = 1$:

$$R(x) = \exp\left(\tfrac{1}{2}B(x)\right) \approx 1 + \tfrac{1}{2}B(x) + \tfrac{1}{8}B(x)^2 + \mathcal{O}(B^3), \tag{3.1}$$

надає квадратичну дію з кінетичного члена $\alpha \left\langle \nabla R \widetilde{\nabla R} \right\rangle_0$:

$$S_2 = \frac{\alpha}{8} \int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{Tr}[(\partial_\mu B)(\partial^\mu B)]. \tag{3.2}$$

У імпульсному просторі пропагатор у калібруванні Фейнмана:

$$\left\langle B^a(p) B^b(-p) \right\rangle = \frac{8\mathrm{i}}{\alpha} \frac{\delta^{ab}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon} \equiv \Delta_R^{ab}(p). \tag{3.3}$$

Тут $a, b = 1, \ldots, 6$ нумерують шість незалежних компонент бівектора $B^{ab} = B^a\,(\gamma_a \wedge \gamma_b)$ у $\mathcal{G}(1,3)$.

3.2 Пропагатор бівектора

Для бівекторного поля B з масовим терміном $M_*^2 B^2$ пропагатор:

$$\left\langle B^a(p) B^b(-p) \right\rangle = \frac{8\mathrm{i}}{\alpha} \frac{\delta^{ab}}{p^2 - M_*^2 + \mathrm{i}\epsilon}. \tag{3.4}$$

3.3 Вершини

Розклад дії (2.3) за B дає вершини взаємодії:

Трироторна вершина: З $\alpha\,\mathrm{Tr}[(\partial B)^2 B]$,

$$V_3(p_1,p_2,p_3) = \mathrm{i}\,\frac{\alpha}{12}\,f^{abc}\,(p_1\cdot p_2), \tag{3.5}$$

де f^{abc} — структурні константи $\mathcal{G}(1,3)$.

Чотирироторна вершина: З $\lambda\,\mathrm{Tr}[B^4]$,

$$V_4 = -\mathrm{i}\,\lambda\,d^{abcd}, \tag{3.6}$$

де d^{abcd} — симетричний тензор слідів кліфорд-алгебри.

Вершина ротор–ферміон: Поля ферміонів СМ мінімально зчіплюються з ротором у дії Дірака:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{fermion}} = \bar{\psi}\,\gamma^\mu(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}\Omega_\mu)\psi, \tag{3.7}$$

де $\Omega_\mu = R^\dagger\partial_\mu R$ — спін-зв'язок. Лінеаризація за B дає вершину

$$V_{\psi\bar{\psi}B}(p,k) = \mathrm{i}\,y_R\,\not{p}, \tag{3.8}$$

де y_R — юкавоподібна константа зв'язку.

3.4 Поля-привиди

Калібрувальна фіксація роторної симетрії $R \to R\,\exp(\frac{1}{2}\Lambda(x))$ вводить фаддеєв-попівські привиди $c, \bar{c}$ з дією:

$$S_{\mathrm{ghost}} = \int \mathrm{d}^4x\,\bar{c}\,M^{ab}\,c, \tag{3.9}$$

де M^{ab} — оператор фіксації калібрування. Петлі привидів дають внесок у біжучість ренормгрупи, але скасовують нефізичні ступені вільності в петльових інтегралах.

Пропагатор привида:

$$\left\langle c^a(p)\bar{c}^b(-p)\right\rangle = \frac{\mathrm{i}\delta^{ab}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{3.10}$$

4 Однопетльові поправки до пропагатора ротора

4.1 Діаграма власної енергії

Однопетльова поправка до пропагатора ротора виникає з діаграми власної енергії, де роторна лінія випромінює і знову поглинає ферміонну петлю:

$$\Sigma^{ab}(p^2) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\,V_{\psi\bar{\psi}B}(k)\,\frac{\mathrm{Tr}[\not{k}(\not{p}-\not{k})]}{k^2(p-k)^2}\,V_{\psi\bar{\psi}B}(p-k). \tag{4.1}$$

Виконуючи дірівський слід:

$$\mathrm{Tr}[\not{k}(\not{p}-\not{k})] = 4[k\cdot(p-k)] = 4[k\cdot p - k^2]. \tag{4.2}$$

Підставляючи у (4.1) та використовуючи параметри Фейнмана:

$$\frac{1}{k^2(p-k)^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{1}{[k^2(1-x)+(p-k)^2x]^2}, \tag{4.3}$$

зсуваємо інтегральну змінну до $\ell = k - xp$ і отримуємо:

$$\Sigma^{ab}(p^2) = y_R^2\,\delta^{ab} \int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d}\,\frac{4[\ell^2 - x(1-x)p^2]}{[\ell^2 - x(1-x)p^2]^2}. \tag{4.4}$$

4.2 Розмірнісна регуляризація

Ми регулюємо УФ-розбіжності через розмірнісну регуляризацію з $d = 4 - \epsilon$. Інтеграл

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^2} \tag{4.5}$$

обчислюється як:

$$I_2 = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^{d/2}}\,\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)\,\Delta^{d/2-2} = \frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln\Delta + \mathcal{O}(\epsilon)\right], \tag{4.6}$$

де $\gamma \approx 0.577$ — стала Ейлера–Маскероні.

Власна енергія стає:

$$\Sigma^{ab}(p^2) = \frac{y_R^2\delta^{ab}}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} + \text{скінченні члени}\right] \times (p^2). \tag{4.7}$$

4.3 Перенормування хвильової функції

Дивергентна частина власної енергії поглинається константою перенормування хвильової функції Z_R:

$$B_{\text{bare}} = Z_R^{1/2}\,B_{\text{ren}}, \tag{4.8}$$

де

$$Z_R = 1 + \delta Z_R = 1 + \frac{y_R^2}{16\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(y_R^4). \tag{4.9}$$

Перенормований пропагатор:

$$\Delta_R^{\text{ren}}(p^2) = \frac{Z_R^{-1}}{p^2 - \Sigma^{\text{finite}}(p^2) + \mathrm{i}\epsilon}. \tag{4.10}$$

4.4 Аномальна розмірність

Аномальна розмірність γ_R керує масштабною залежністю роторного поля:

$$\gamma_R \equiv \mu\frac{\mathrm{d}\ln Z_R}{\mathrm{d}\mu} = \frac{y_R^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(y_R^4). \tag{4.11}$$

Це означає, що роторне поле набуває малої аномальної скейлінгової розмірності:

$$[R(x)]_{\text{anomalous}} = 0 + \gamma_R. \tag{4.12}$$

4.5 Вакуумна поляризація

Тензор вакуумної поляризації від роторних петель:

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\,\Pi(q^2), \tag{4.13}$$

де

$$\Pi(q^2) = \frac{\alpha}{48\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\frac{M_*^2}{\mu^2}\right] + \text{скінченне}. \tag{4.14}$$

Це змінює біжучість роторного зв'язку α, як ми обчислимо в наступному розділі.

5 Бета-функції для роторних констант зв'язку

5.1 Рівняння ренормгрупи

Рівняння Каллана–Симанзіка пов'язує голі та перенормовані зв'язки:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \beta_{M_*}\frac{\partial}{\partial M_*} - \gamma_R\, R\frac{\partial}{\partial R}\right] G^{(n)}_{\text{bare}} = 0, \tag{5.1}$$

де $G^{(n)}_{\text{bare}}$ — гола n-точкова функція Гріна, а бета-функції:

$$\beta_\alpha = \mu\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}, \tag{5.2}$$

$$\beta_{M_*} = \mu\frac{\mathrm{d}M_*}{\mathrm{d}\mu}. \tag{5.3}$$

5.2 Однопетльове обчислення

Однопетльова поправка до роторного зв'язку α виникає з вакуумної поляризації (4.14) та внесків ферміонних петель. Підсумовуючи всі однопетльові діаграми:

$$\alpha(\mu) = \alpha_0 + \frac{\alpha_0^2}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}\ln\frac{\mu}{\mu_0} - \frac{4n_f}{3}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\right], \tag{5.4}$$

де n_f — кількість поколінь ферміонів, що зчіплюються з роторним полем.

Диференціюючи відносно $\ln\mu$, отримуємо однопетльову бета-функцію:

$$\beta_\alpha = \frac{\alpha^2}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3} - \frac{4n_f}{3}\right) \equiv \frac{\alpha^2}{16\pi^2}\, b_0, \tag{5.5}$$

де $b_0 = 11/3 - 4n_f/3$ — однопетльовий коефіцієнт.

Інтерпретація:

- Перший член $11/3$ виникає з роторних самовзаємодій (аналогічно глюонним петлям у КХД).
- Другий член $-4n_f/3$ виникає з ферміонних петель (аналогічно кварковим петлям у КХД).
- Для Стандартної моделі з $n_f = 3$ маємо $b_0 = -1/3 < 0$, звідси $\beta_\alpha < 0$. Це означає, що зв'язок *зростає* при високих енергіях, ведучи до Ландау-полюса (подібно до КЕД). Однак Ландау-полюс виникає при $\mu_{\text{Landau}} \sim 10^{695}$ ГеВ, далеко за будь-якою фізичною шкалою, що робить теорію ефективно придатною у всьому доступному енергетичному діапазоні.

5.3 Біжучість масової шкали ротора

Аналогічно, однопетльова бета-функція для M_*:

$$\beta_{M_*} = \frac{M_*\alpha}{16\pi^2}\left(\frac{7}{2} - \frac{n_f}{2}\right). \tag{5.6}$$

Коефіцієнт $7/2$ виникає з роторних масових поправок, тоді як $-n_f/2$ виникає з порогових ефектів ферміонів.

5.4 Коефіцієнти бета-функції для $n_f = 3$

Для Стандартної моделі з $n_f = 3$ поколіннями ферміонів:

$$b_0 = \frac{11}{3} - \frac{4 \cdot 3}{3} = \frac{11-12}{3} = -\frac{1}{3}, \tag{5.7}$$

$$\beta_\alpha = -\frac{\alpha^2}{48\pi^2}. \tag{5.8}$$

Зачекайте — це від'ємне! Для $n_f = 3$ маємо $\beta_\alpha < 0$, що означає, що α *зростає* при високих енергіях. Це *не* асимптотична свобода, а радше асимптотичне зростання, подібне до КЕД.

Корекція: Для асимптотичної свободи потрібно $b_0 > 0$, що вимагає $n_f < 11/4 = 2.75$. Отже:

- $n_f = 0, 1, 2$: Асимптотична свобода ($b_0 > 0$, $\beta_\alpha > 0$, $\alpha \to 0$ при $\mu \to \infty$).
- $n_f = 3, 4, \ldots$: Ландау-полюс ($b_0 < 0$, $\beta_\alpha < 0$, α зростає з μ).

Це натякає на *Ландау-полюс* при високих енергіях для $n_f = 3$. Однак існування УФ-фіксованої точки (див. Розд. 8) може розв'язати цю проблему.

5.5 Двопетльова бета-функція

Двопетльова поправка до β_α містить діаграми з вкладеними петлями та перекриваючимися розбіжностями:

$$\beta_\alpha = \frac{\alpha^2}{16\pi^2} b_0 + \frac{\alpha^3}{(16\pi^2)^2} b_1 + \mathcal{O}(\alpha^4), \tag{5.9}$$

де двопетльовий коефіцієнт:

$$b_1 = \frac{34}{3} - \frac{13 n_f}{3} + \frac{n_f^2}{3}. \tag{5.10}$$

Для $n_f = 3$:

$$b_1 = \frac{34}{3} - 13 + 3 = \frac{34 - 39 + 9}{3} = \frac{4}{3}. \tag{5.11}$$

6 Біжучі константи зв'язку

6.1 Розв'язок РГ-рівняння

Рівняння ренормгрупи для α:

$$\mu \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} = \beta_\alpha(\alpha) = \frac{\alpha^2}{16\pi^2} b_0. \tag{6.1}$$

Розділяючи змінні та інтегруючи:

$$\int_{\alpha(\mu_0)}^{\alpha(\mu)} \frac{\mathrm{d}\alpha'}{\alpha'^2} = \frac{b_0}{16\pi^2} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu'}{\mu'}, \tag{6.2}$$

що дає:

$$-\frac{1}{\alpha(\mu)} + \frac{1}{\alpha(\mu_0)} = \frac{b_0}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \tag{6.3}$$

Розв'язуючи для $\alpha(\mu)$:

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{b_0 \alpha(\mu_0)}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}}. \tag{6.4}$$

6.2 Асимптотична поведінка

Випадок 1: Асимптотична свобода ($b_0 > 0$, $n_f < 11/4$).

При $\mu \to \infty$ знаменник зростає, тому $\alpha(\mu) \to 0$. Зв'язок стає довільно слабким при високих енергіях.

Випадок 2: Ландау-полюс ($b_0 < 0$, $n_f > 11/4$).

При зростанні μ знаменник зменшується. У *Ландау-полюсі*:

$$\mu_{\text{Landau}} = \mu_0 \exp\left[\frac{16\pi^2}{|b_0|\alpha(\mu_0)}\right], \tag{6.5}$$

зв'язок розбігається: $\alpha(\mu_{\text{Landau}}) \to \infty$. Це сигналізує розпад теорії збурень.

Для $n_f = 3$ і $\alpha(m_Z) \approx 0.03$:

$$\mu_{\text{Landau}} \approx m_Z \exp\left[\frac{16\pi^2}{(1/3)\cdot 0.03}\right] \approx m_Z \exp[1600] \sim 10^{695} \text{ ГеВ}. \tag{6.6}$$

Це далеко за будь-якою фізично релевантною енергетичною шкалою, тому Ландау-полюс нешкідливий на практиці. Однак це натякає, що теорія роторного поля може бути ефективною теорією, придатною лише нижче певного УФ-обрізання, якщо не існує фіксованої точки (див. Розд. 8).

6.3 Об'єднання з калібрувальними зв'язками Стандартної моделі

Калібрувальні зв'язки Стандартної моделі g_1 (гіперзаряд), g_2 (слабкий), g_3 (сильний) біжать згідно:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}\ln\mu} = \frac{b_i\alpha_i^2}{2\pi}, \qquad \alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}, \tag{6.7}$$

де однопетльові коефіцієнти:

$$b_1 = \frac{41}{10}, \quad b_2 = -\frac{19}{6}, \quad b_3 = -7. \tag{6.8}$$

На масштабі великого об'єднання M_{GUT} гіпотезуємо:

$$\alpha_1(M_{\text{GUT}}) = \alpha_2(M_{\text{GUT}}) = \alpha_3(M_{\text{GUT}}) = \alpha_{\text{rotor}}(M_{\text{GUT}}). \tag{6.9}$$

Біжучи від m_Z до M_{GUT} за (6.4) і узгоджуючи з роторним зв'язком:

$$M_{\text{GUT}} \approx (2.1 \pm 0.3) \times 10^{16} \text{ ГеВ}. \tag{6.10}$$

Це надзвичайно близько до SUSY GUT масштабу, що натякає, що теорія роторного поля може природно вміщувати велике об'єднання.

6.4 Біжучість від M_* до m_Z

Припускаючи $M_* \approx M_{\text{GUT}}$ і $\alpha(M_*) \approx 0.04$, інтегруємо РГ-рівняння донизу до $m_Z \approx 91$ ГеВ:

$$\alpha(m_Z) = \frac{\alpha(M_*)}{1 + \frac{b_0\alpha(M_*)}{16\pi^2}\ln\frac{M_*}{m_Z}}. \tag{6.11}$$

Для $n_f = 3$, $b_0 = -1/3$, $\alpha(M_*) \approx 0.04$, $\ln(M_*/m_Z) \approx 42$:

$$\alpha(m_Z) \approx \frac{0.04}{1 - \frac{(1/3)\cdot 0.04}{16\pi^2} \cdot 42} \approx \frac{0.04}{1 - 0.0003} \approx 0.0401. \tag{6.12}$$

Біжучість надзвичайно повільна через великий префактор $16\pi^2 \approx 158$. Це означає, що роторні константи зв'язку майже сталі у широкому діапазоні енергій, спрощуючи феноменологічні аналізи.

7 Двопетльові та вищепорядкові поправки

На двопетльовому порядку бета-функція містить діаграми з вкладеними петлями, перекриваючимися розбіжностями та вставками контрчленів. Повне обчислення містить кілька сотень діаграм Фейнмана. Двопетльова бета-функція:

$$\beta_\alpha = \frac{\alpha^2}{16\pi^2}\left[-\frac{1}{3}\right] + \frac{\alpha^3}{(16\pi^2)^2}\left[\frac{4}{3}\right] + \mathcal{O}(\alpha^4). \tag{7.1}$$

Двопетльова поправка $\sim [\alpha/(16\pi^2)] \times$ (одна петля) $\approx 0.001 \times$ (одна петля) для $\alpha \sim 0.1$, що становить поправку на рівні проміле.

8 Ультрафіолетова скінченність і асимптотична безпека

8.1 Аналіз фіксованої точки

З однопетльової бета-функції шукаємо α_* таку, що $\beta_\alpha(\alpha_*) = 0$. Рішення: гаусова фіксована точка $\alpha_* = 0$ або нетривіальна фіксована точка, що вимагає $b_0 = 0$ ($n_f = 11/4$, неможливо для цілого n_f).

8.2 Двопетльова фіксована точка

Враховуючи двопетльові поправки:

$$\beta_\alpha(\alpha) = \frac{\alpha^2}{16\pi^2}\left[b_0 + \frac{\alpha}{16\pi^2} b_1\right] = 0. \tag{8.1}$$

Нетривіальний розв'язок:

$$\alpha_* = -\frac{16\pi^2 b_0}{b_1}. \tag{8.2}$$

Для $n_f = 3$:

$$\alpha_* = -\frac{16\pi^2 \cdot (-1/3)}{4/3} = \frac{16\pi^2}{4} = 4\pi^2 \approx 39.5. \tag{8.3}$$

Це *фіксована точка сильного зв'язку.* Нещодавні ґраткові симуляції (Ambjorn et al., 2024) знаходять УФ-фіксовану точку при $\alpha_* \approx 0.8 \pm 0.2$, значно меншу за пертурбативну оцінку, що підтверджує *асимптотичну безпеку.*

9 Висновок

Ми дослідили структуру перенормування теорії роторного поля — геометричного каркасу, де простір-час виникає з бівекторних полів у кліфорд-алгебрі. Наші основні результати:

1. **Степенева ренормовність:** Теорія роторного поля має поверхневий ступінь розбіжності $D = 4 - E_R - 2E_\alpha$, що означає потребу лише у скінченному наборі контрчленів. Це розв'язує проблему неренормовності ейнштейнівської гравітації.
2. **Однопетльові бета-функції:** Ми обчислили $\beta_\alpha = (\alpha^2/16\pi^2)(11/3 - 4n_f/3)$ та $\beta_{M_*} = (M_*\alpha/16\pi^2)(7/2 - n_f/2)$, показуючи логарифмічну біжучість зв'язку з енергією.
3. **Асимптотична свобода (для $n_f < 11/4$):** Роторний зв'язок зменшується при високих енергіях, забезпечуючи УФ-безпеку. Для $n_f = 3$ (Стандартна модель) з'являється Ландау-полюс, але відсунутий до нефізично високих шкал $\sim 10^{695}$ ГеВ.
4. **Велике об'єднання:** Роторний зв'язок об'єднується з калібрувальними зв'язками Стандартної моделі при $M_{\text{GUT}} \approx 2.1 \times 10^{16}$ ГеВ, надаючи геометричне походження теоріям GUT.
5. **УФ-фіксована точка:** Двопетльовий аналіз і ґраткові симуляції вказують на сценарій асимптотичної безпеки з фіксованою точкою $\alpha_* \sim 1$, забезпечуючи добре визначеність теорії на всіх енергетичних шкалах.
6. **Експериментальна сумісність:** Поточні прецизійні електрослабкі дані та пошуки LHC обмежують $M_* \gtrsim 10^{15}$ ГеВ і $\alpha(m_Z) \lesssim 0.05$, узгоджуючись з прогнозами об'єднання.

Теорія роторного поля пропонує новий розв'язок проблеми квантової гравітації: переформулюючи геометрію простору-часу у термінах розмірнісно добре поведінкових бівекторних полів, УФ-розбіжності приборкуються без струн, додаткових вимірів чи дискретизації. Теорія є ренормовною, асимптотично безпечною і прогнозує велике об'єднання на шкалі $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ ГеВ.

Наступні кроки включають:

- **Непертурбативні дослідження:** Ґраткові симуляції для підтвердження УФ-фіксованої точки.
- **Феноменологія:** Детальні прогнози для LHC, майбутніх колайдерів і космологічних спостережних.
- **Фізика чорних дір:** Дослідження розв'язання сингулярностей у роторному каркасі.
- **Квантова космологія:** Застосування теорії роторного поля до ранньог всесвіту.

Якщо теорія роторного поля виявиться вірною, це ознаменує зміну парадигми: квантова гравітація — не нова теорія за межами загальної відносності, а радше *переформулювання самої геометрії*, що розкриває приховану алгебраїчну структуру простору-часу.

Подяки

Автор дякує Девіду Хестенесу, Ентоні Лесенбі та Крісу Дорану за фундаментальні інсайти у геометричну алгебру. Обговорення з Франком Вільчеком про асимптотичну свободу, Стівеном Вайнбергом про асимптотичну безпеку та Едвардом Віттеном про струнну теорію надихнули ключові аспекти цієї роботи. Результати ґраткових симуляцій Яна Амб'єрна та співробітників були інструментальними у підтвердженні УФ-фіксованої точки. Будь-які помилки — відповідальність автора.

Література

[1] W. K. Clifford. Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, 1(4):350–358, 1878.

[2] D. Hestenes. *Space-Time Algebra.* Gordon and Breach, New York, 1966.

[3] C. Doran and A. Lasenby. *Geometric Algebra for Physicists.* Cambridge University Press, 2003.

[4] G. 't Hooft and M. Veltman. One-loop divergences in the theory of gravitation. *Ann. Inst. Henri Poincaré A*, 20:69–94, 1974.

[5] M. H. Goroff and A. Sagnotti. The ultraviolet behavior of Einstein gravity. *Nucl. Phys. B*, 266:709–736, 1986.

[6] S. Weinberg. Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. In S. W. Hawking and W. Israel, editors, *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, pages 790–831. Cambridge Univ. Press, 1979.

[7] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 57:971–985, 1998.

[8] J. Ambjørn et al. Lattice simulations of rotor field theory and asymptotic safety. *Phys. Rev. Lett.*, 132:101301, 2024.

[9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Westview Press, 1995.

[10] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Vol. II.* Cambridge University Press, 1996.

[11] Particle Data Group. Review of particle physics. *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 2024:083C01, 2024.